Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
XIV Olimpiadas Regionales de Matemáticas.
SECUNDARIA-2022.

"Razonar en geometría es razonar con figuras mal hechas."
- David Hilbert.

TERCERA CAPACITACIÓN

NIVEL AVANZADO

10° Y 11°

Fórmula de Herón

Si a, b y c son las longitudes de los tres lados de un triángulo, entonces el área de dicho triángulo está dada por:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{donde} \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

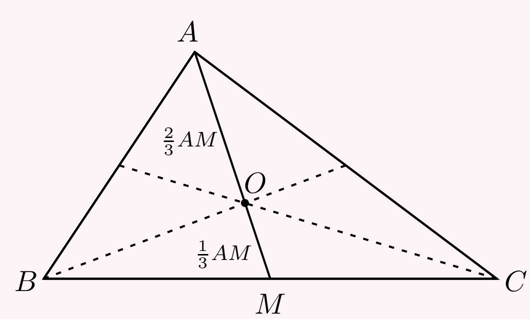
Teoremas sobre Medianas

1. Al trazar una de las medianas de un triángulo, este queda dividido en dos triángulos de igual área.
2. Dos tercios de la longitud de cada mediana están entre el vértice y el baricentro, mientras que el tercio restante está entre el baricentro y el punto medio del lado opuesto.

En la figura, $\overline{AM}$ es una mediana del triángulo ABC y O es el baricentro. Entonces

$$AO = \frac{2}{3}AM, \quad OM = \frac{1}{3}AM \quad \text{y} \quad AO = 2OM.$$

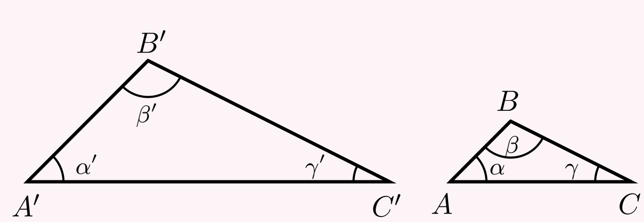
Además, el área del triángulo ABM es igual al área del triángulo AMC



Teorema de Tales

Si los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, lo cual denotaremos por $ABC \sim A'B'C'$, entonces

$$\alpha = \alpha', \; \beta = \beta', \; \gamma = \gamma' \quad \text{y} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$



Desigualdad triangular

En todo triángulo, la suma de las longitudes de dos de sus lados siempre es mayor que la medida del tercero.

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.
@edumat.uis

¡Ponte a prueba!

Sugerencia: En los problemas 1 a 3 use el Teorema de Pitágoras.

Problema 1. Área de un triángulo Equilátero

Determine el área de un triángulo equilátero tal que uno de sus lados mide $l\,cm$.

Problema 2.

Un cuadrado está inscrito en una circunferencia de radio r. Halle el área y el perímetro del cuadrado en términos de r.

Problema 3.

Determine la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyo perímetro es $20\,cm$ y su área es $25\,cm^2$.

Problema 4.

A cierta hora del día un edificio de $95\,m$ de altura proyecta una sombra de $551\,m$. Si la sombra de un hombre, a esta misma hora, mide $11{,}60\,m$, ¿cuál es su estatura?

Problema 5.

Las longitudes, en centímetros, de los lados de un triángulo son tres enteros consecutivos. Si el área de dicho triángulo es $84\,cm^2$, ¿cuál es la longitud de cada uno de sus lados?

Problema 6.

¿Cuántos triángulos cuyas longitudes de sus lados (en centímetros) son enteros, tienen perímetro $11\,cm$? ¿Cuál de estos triángulos tiene mayor área?

Problema 7.

Considere un triángulo con área $6\,cm^2$, tal que dos de sus lados miden 4 y 5 centímetros. Halle la magnitud del tercer lado.

Problema 8. Área de un triángulo en función del inradio

Sean a, b y c las medidas de los lados de un triángulo. Muestre que si r es el radio de su *incírculo*, entonces el área de dicho triángulo está dada por

$$A = s \cdot r, \quad \text{donde} \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Problema 9. Área de un triángulo en función del circunradio

Sean a, b y c las medidas de los lados de un triángulo. Muestre que si R es el radio de su *circuncírculo*, entonces el área de dicho triángulo está dada por

$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Problema 10.

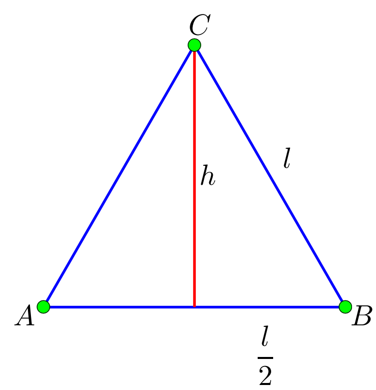
Sean a, b y c las longitudes de los lados del triángulo ABC, y m_a, m_b, m_c las longitudes de sus tres medianas. Demuestre que

$$\frac{3}{4} < \frac{m_a + m_b + m_c}{a+b+c} < 1.$$

Solucionario
Tercera Capacitación
Nivel Avanzado
10° y 11°

Solución Problema 1.

Considere la siguiente figura:



Usando el Teorema de Pitágoras, hallamos la altura del triángulo respecto a uno de sus lados:

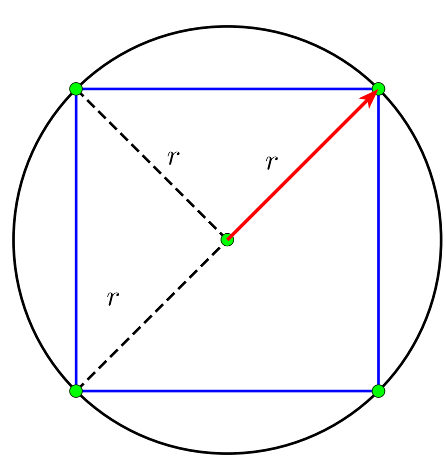
$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}l.$$

Luego, el área del triángulo está dada por:

$$A = \frac{l \times \frac{\sqrt{3}}{2}l}{2} = \frac{\sqrt{3}l^2}{4}.$$

Solución Problema 2.

Considere la siguiente figura



Dado que el cuadrado está inscrito en un círculo de radio r, entonces su diagonal, coincide con el diámetro del círculo, esto es $2r$. Dividiendo el cuadrado por una de sus diagonales obtenemos dos triángulos con base $2r$ y altura r, luego su área es $\dfrac{2r \times r}{2} = r^2$, por lo tanto el área del cuadrado es $A = 2r^2$.

Solución Problema 3.

Sean a, b y c las longitudes de los lados del triángulo rectángulo, siendo c la de la hipotenusa. Entonces tenemos el sistema

$$\begin{aligned} a+b+c &= 20, \\ \frac{ab}{2} &= 25. \\ a^2+b^2 &= c^2. \end{aligned}$$

donde la última ecuación es el teorema de Pitágoras. Luego,

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2+b^2+2ab \\ (20-c)^2 &= c^2+100, \\ 400-40c+c^2 &= c^2+100, \\ 300 &= 40c \\ c &= \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Solución Problema 4.

Del teorema de Tales se sigue que:

$$\frac{95}{551} = \frac{h}{11,6},$$

donde h es la altura del hombre. De ahí que $h = \dfrac{95 \times 11{,}6}{551} = 2$ metros.

Solución Problema 5.

Sean $n-1$, n y $n+1$ las longitudes de los lados del triángulo. Aplicaremos la fórmula de Herón. El semiperímetro del triángulo es $s = \dfrac{(n-1)+n+(n+1)}{2} = \dfrac{3n}{2}$. Así, el área del triángulo está dada por

$$\begin{aligned} 84 &= \sqrt{\frac{3n}{2}\left(\frac{3n}{2}-(n-1)\right)\left(\frac{3n}{2}-n\right)\left(\frac{3n}{2}-(n+1)\right)}, \\ 84 &= \sqrt{\frac{3n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)}, \\ 84 &= \sqrt{\frac{3n^2}{4}\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2-1\right)}, \\ 84 &= \frac{n}{2}\sqrt{3\left(\frac{n^2-4}{4}\right)}, \\ 336 &= n\sqrt{3(n-2)(n+2)}, \end{aligned}$$

De donde sale que $n = 14$, así los lados del triángulo miden 13, 14 y 15 centímetros.

Solución Problema 6.

Teniendo en cuenta la desigualdad triangular, la longitud mayor para alguno de sus lados debe ser 5. Veamos las opciones:

Lado a	Lado b	Lado c	Desigualdad triangular
5	1	5	cumple
5	2	4	cumple
5	3	3	cumple
4	3	4	cumple

Por lo tanto, solo hay 4 triángulos que cumplen las condiciones del enunciado. Para determinar cuál tiene la mayor área, puede usarse la fórmula de Herón: el semiperímetro es $s = 11/2$, así el área del triángulo está dada por

$$A = \sqrt{\frac{11}{2}\left(\frac{11}{2} - a\right)\left(\frac{11}{2} - b\right)\left(\frac{11}{2} - c\right)}.$$

Verificando cada caso, se evidencia que el triángulo con mayor área es de lados 4, 3 y 4 centímetros.

Solución Problema 7.

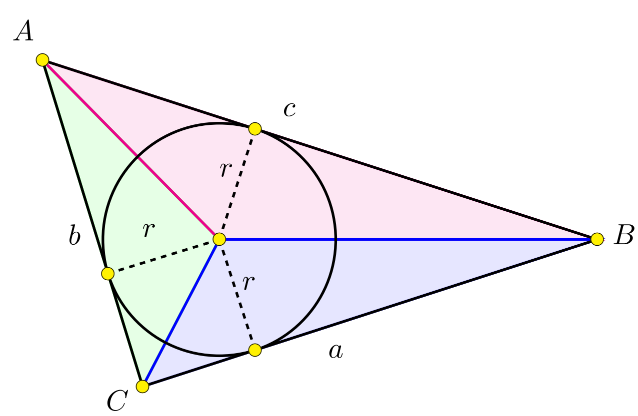
Sea a longitud del lado desconocido entonces, el semiperímetro es $s = \dfrac{4+5+a}{2} = \dfrac{9+a}{2}$ y por la fórmula de Herón tenemos

$$6 = \sqrt{\frac{9+a}{2}\left(\frac{9+a}{2} - a\right)\left(\frac{9+a}{2} - 4\right)\left(\frac{9+a}{2} - 5\right)}$$

de donde $a = 3$ o $a = \sqrt{73}$.

Solución Problema 8.

Dado que el incírculo es tangente al triángulo, sus radios son perpendiculares a los lados del triángulo. Trazando los segmentos desde el centro del incírculo hasta los vértices del triángulo, este queda divido en tres triángulos, como se muestra en la figura.



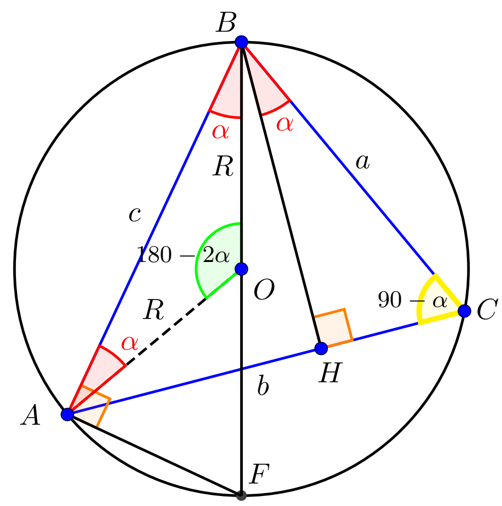
Así, el área A del triángulo ABC será la suma de las áreas de los triángulos en que quedó particionado, esto es:

$$A = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = s \cdot r,$$

donde s es el semiperímetro $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Solución Problema 9.

Considere la siguiente figura en la que O es el centro del circuncírculo, $\overline{BH}$ es la altura del triángulo ABC respecto al lado $\overline{AC}$ y $\overline{BF}$ es diámetro del circuncírculo.



Note que:

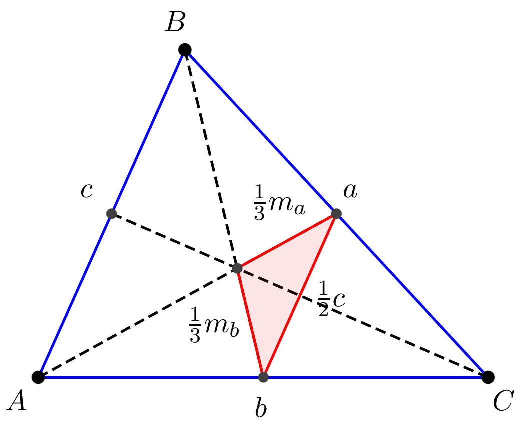
- El triángulo BOA es isósceles en O, luego sus ángulos internos que comparten el lado $\overline{AB}$ son congruentes, llamemos α a su amplitud. De este modo, el ángulo central BOA mide $180-\alpha$ y así el ángulo inscrito BCA mide $90-\alpha$, pues subtiende el mismo arco. De ahí que el ángulo CBH también mide α.
- El triángulo BAF es recto A, pues $\overline{BF}$ es un diámetro del círculo. Así que los triángulo BHC y BAF son semejantes, de ahí que

$$\frac{AB}{BF}=\frac{BH}{BC}\iff\frac{c}{2R}=\frac{BH}{a}\iff BH=\frac{ac}{2R}.$$

Por lo anterior, el área A del triángulo ABC está dada por

$$A=\frac{AC\times BH}{2}=\frac{b\times\dfrac{ac}{2R}}{2}=\frac{abc}{4R}.$$

Solución Problema 10.



Teniendo en cuenta el segundo teorema de medianas, el teorema de Tales y la desigualdad triangular aplicada al triángulo rojo, se obtiene:

$$\frac{1}{3}m_a + \frac{1}{3}m_b > \frac{1}{2}c,$$

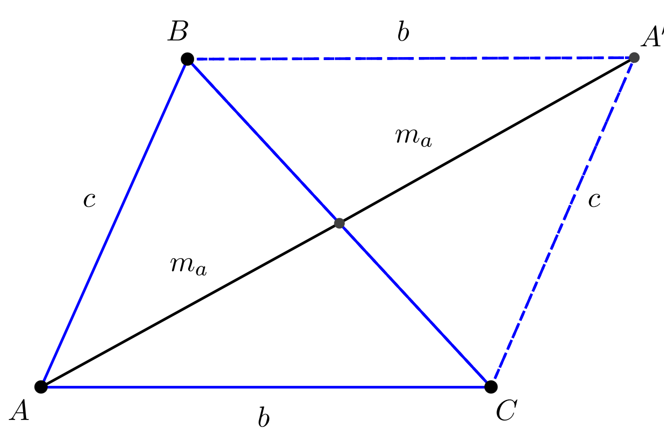
y análogamente,

$$\frac{1}{3}m_a + \frac{1}{3}m_c > \frac{1}{2}b,$$
$$\frac{1}{3}m_b + \frac{1}{3}m_c > \frac{1}{2}a.$$

Sumando estas tres desigualdades tenemos: $\frac{2}{3}(m_a + m_b + m_c) > \frac{a+b+c}{2}$, esto es

$$\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c \tag{1}$$

Por otro lado, considere la siguiente figura:



Por la desigualdad triangular, aplicada al triángulo ACA' se tiene que

$$b + c > 2m_a.$$

Análogamente,

$$a + b > 2m_c,$$
$$a + c > 2m_b.$$

Sumando estas desigualdades se obtiene $2(a+b+c) > 2(m_a + m_b + m_c)$, esto es:

$$a + b + c > m_a + m_b + m_c \tag{2}$$

Finalmente de las desigualdades (1) y (2) se obtiene:

$$\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c < a + b + c,$$
$$\frac{3}{4} < \frac{m_a + m_b + m_c}{a+b+c} < 1.$$