Seminario de Álgebra - Grupo ALCOM

Escuela de Matemáticas
Facultad de Ciencias

Propiedades de Lie de elementos simétricos en álgebras de grupo

Alexander Holguín-Villa[a] [b]

28/10/2016 - SALA LEZAMA, LL 301; 2:00 p.m

[a]Áreas de interés: **A**nillos de **G**rupo & **T**ópicos **R**elacionados

[b]E-m@il address: aholguinvilla@matematicas.uis.edu.co; aholguin@uis.edu.co

Resumen:

Si R es una $\mathbb{F}$-álgebra ($\mathbb{F}$ anillo conmutativo) con involución $*$, una pregunta de interés general es conocer cuándo las propiedades de Lie de los *elementos simétricos* (anti-simétricos) pueden ser "levantadas" a toda la álgebra R. Uno de los resultados más famosos en ese sentido debido a Amitsur [3, Teorema 6.5.2], establece que si R^+ o R^- satisface una *identidade polinomial*, R^+ es IP o R^- es IP, entonces R también es IP (no necesariamente la misma).

Sean $\mathbb{F}G$ la álgebra de grupo del grupo G sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ de $char(\mathbb{F}) \neq 2$, [4] y, $\circledast$ la involución sobre $\mathbb{F}G$ definida por $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g \mapsto \alpha^{\circledast} = \sum_{g \in G} \alpha_g \sigma(g) g^*$, donde $\sigma : G \to \{\pm 1\}$ es un homomorfismo (*orientación*) y $*$ es una involución del grupo G.

Denotemos por $\mathbb{F}G^+ = \{\alpha \in \mathbb{F}G : \alpha^{\circledast} = \alpha\}$ al conjunto de ***elementos simétricos*** de $\mathbb{F}G$ respecto a $\circledast$. Álgebras de grupo $\mathbb{F}G$ poseen una *involución natural*, la así llamada *involución clásica* la cual es obtenida al extender $\mathbb{F}$-linearmente la involución del grupo G dada por $g \mapsto g^{-1}$ a $\mathbb{F}G$.

Sea R un anillo asociativo. Dados $x_1, x_2 \in R$, se define el corchete de Lie por $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ y recursivamente, $[x_1, ..., x_n, x_{n+1}] = [[x_1, ..., x_n], x_{n+1}]$.
Un subconjunto S de R es llamado *Lie nilpotente*, si existe $n \geq 2$ tal que $[a_1, a_2, ..., a_n] = 0$ para todos $a_i \in S$. El menor tal n es llamado el índice de nilpotencia. Para un entero positivo n, diremos que S es Lie n-Engel si $[a, \underbrace{b, ..., b}_{n \text{ times}}] = 0$, para todos $a, b \in S$. Obviamente si S es Lie nilpotente, entonces S es Lie n-Engel para algún n.

Estudiaremos propiedades de Lie del conjunto $\mathbb{F}G^+$ y en particular, cuando los elementos de $\mathbb{F}G^+$ conmutan, i.e., cuando $\mathbb{F}G^+ \preceq \mathbb{F}G$, [1, 2].

Bibliografía

[1] Broche Cristo O., *Commutativity of symmetric elements in group rings.* J. Group Theory **9** (2006):673-683.

[2] Castillo J. H and Holguín-Villa A., *Oriented group involutions in group algebras: a survey.* São Paulo J. Math. Sci. (2016):1-20.

[3] Herstein I. N., *Rings with involution.*, U. Chicago Press - Chicago Lectures in Mathematics, Chicago (1976).

[4] Polcino-Milies C. & Sehgal S. K., *An Introduction to Group Rings.* Kluwer, Dordrecht (2002).