Seminario de Álgebra - Grupo ALCOM

Escuela de Matemáticas
Facultad de Ciencias

¿Cuándo $\mathcal{U}^{+}(RG) \preceq \mathcal{U}(RG)$?

Alexander Holguín-Villa[a] [b]

25/11/2016 - SALA LEZAMA, LL 301; 2:00 p.m

---

[a] Áreas de interés: **A**nillos de **G**rupo & **T**ópicos **R**elacionados

[b] `E-m@il address: aholguinvilla@matematicas.uis.edu.co; aholguin@uis.edu.co`

Resumen:

Sea R un $\mathbb{F}$-álgebra (R y $\mathbb{F}$ conmutativos) con involución $*$. Motivados por uno de los resultados más destacados en *Teoría de Anillos con Involución* y debido a Amitsur, [3, Teorema 6.5.2], que establece: Si R^{+} o R^{-} satisface una *identidade polinomial*, R^{+} es IP o R^{-} es IP, entonces R también es IP (no necesariamente la misma), puede uno preguntarse cuándo propiedades en el **conjunto de las unidades simétricas**, $\mathcal{U}^{+}(R)$, o el subgrupo que ellas generan, determinan propiedades en el grupo completo de unidades $\mathcal{U}(R)$ o en el álgebra R.

Sean RG el álgebra de grupo del grupo G sobre el anillo R de $char(R \neq 2$, [3]. Álgebras de grupo RG poseen una *involución natural*, la así llamada *involución clásica* $*$, la cual es obtenida al extender R-linearmente la involución del grupo G dada por $g \mapsto g^{-1}$ a $\mathbb{F}G$.

Denotemos por $RG^{+} = \{\alpha \in RG : \alpha^{*} = \alpha\}$ al conjunto de ***elementos simétricos*** de RG respecto a $*$. Escribiendo $\mathcal{U}(RG)$ para el grupo de unidades de RG, denotamos por $\mathcal{U}^{+}(RG)$ al conjunto de unidades simétricas, i.e., $\mathcal{U}^{+}(RG) = \mathcal{U}(RG) \cap RG^{+}$.

Si $L \subset G$ de un grupo G, diremos que L satisface una *identidad de grupo*, $L \in IG$, si existe una palabra no-trival reducida $\omega(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \langle x_1, x_2, \cdots \rangle$ tal que $\omega(g_1, g_2, \cdots g_n) = 1$ para todos $g_i \in L$. Para elementos $y_1, y_2, \cdots, y_n$ del grupo G, definimos $(y_1, y_2) = y_1^{-1} y_2^{-1} y_1 y_2$, como el conmutator de y_1 e y_2, e inductivamente, $(y_1, y_2, \cdots y_n) = ((y_1, y_2, \cdots y_{n-1}), y_n)$. Grupos G *abelianos o nilpotentes* son ejemplos de grupos satisfaciendo la IG (x_1, x_2) (respectivamente, $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, $\exists m \in \mathbb{N}$).

Claramente si los elementos simétricos RG^{+} conmutan, entonces $\mathcal{U}^{+}(RG)$ es conmutativo. ¿Cuándo vale la RECÍPROCA? En este seminario estudiaremos las condiciones, necesarias y suficientes, bajo las cuales $\mathcal{U}^{+}(RG)$ es conmutativo y veremos la conexión con el hecho ya probado de cuándo $RG^{+} \preceq RG$, [1, 2].

Bibliografía

[1] Broche Cristo O., *Commutativity of symmetric elements in group rings.* J. Group Theory **9** (2006):673-683.

[2] Castillo J. H and Holguín-Villa A., *Oriented group involutions in group algebras: a survey.* São Paulo J. Math. Sci. (2016):1-20.

[3] Herstein I. N., *Rings with involution.*, U. Chicago Press - Chicago Lectures in Mathematics, Chicago (1976).

[3] Polcino-Milies C. & Sehgal S. K., *An Introduction to Group Rings.* Kluwer, Dordrecht (2002).