Seminario de Álgebra - Grupo ALCOM
Escuela de Matemáticas
Facultad de Ciencias

Algunas observaciones en anillos de grupos clean (I)

Alexander Holguín-Villa[a b]

21/08/2018 - SALA LEZAMA, CT 313; 2:00 p.m

[a]Áreas de interés: '**A**lgebras de **G**rupos & **T**ópicos **R**elacionados
[b]`E-m@il address: alexholguinvilla@gmail.com`

Resumen:

Probablemente el concepto de anillo clean aparece por primera vez en el trabajo de W.K. Nicholson *Lifting Idempotents and Exchange Rings* [6]. Este estudio no finalizó ahí, sino que motivó a diversos autores a estudiar estos anillos desde diferentes perspectivas: **W. Wm. McGovern** *[5]*, **D.D Anderson & V.P. Camillo** *[1], donde por ejemplo es mostrado que para A anillo conmutativo,* $A[x]$ *(anillo de polinomios sobre A) nunca es un anillo clean, mientras que el anillo de series formales* $A[[x]]$ *es clean si y sólo si A es anillo clean.*

Sin más preámbulos presentamos la definición dada por Nicholson:

Definición 1. *Un elemento de un anillo es llamado clean si es la suma de una unidad y un idempotente y, el anillo es llamado clean si cada uno de sus elementos es clean.*

Como es usual denotaremos por $\mathcal{J}(R)$ *y* $\mathcal{U}(R)$ *al radical de Jacobson y al conjunto de unidades de* R *y, por* C_n *y* D_n *a los grupos cíclico y diedral de orden* n *y* $2n$*, respectivamente. Además, denotaremos el conjunto de elementos idempotentes de* R *por* $\mathcal{I}d(R)$*. Recordemos que un grupo* G *es llamado localmente finito si todo subgrupo finitamente generado* H *de* G *es finito; además dado* p *primo,* G *es llamado un* p*-grupo si el orden de cada uno de sus elementos es una potencia de* p *y,* G *es llamado* p*-grupo abeliano elemental si todo elemento distinto de la identidad tiene orden* p*.*

Dado un grupo G *y un anillo* R*, consideramos el* R*-módulo* RG *dado por:*

$$RG = \left\{ \sum_{\substack{g\in T \\ T\subset G \\ |T|<\infty}} \alpha_g g : \alpha_g \in R \right\} = \left\{ \sum_{g\in G} \alpha_g g : \alpha_g \in R \text{ y } \alpha_g = 0 \text{ a.e. } \right\}.$$

¿Cuándo es el anillo de grupo RG *clean? Es una pregunta que se han hecho muchos autores como por ejemplo Han, Immormimo, McGovern, Nicholson, Zhou [2], [3], [4], [7], entre otros. En su artículo, Extensions of clean rings, Han y Nicholson demostraron los siguientes resultados: (1) Si* R *es un anillo semiperfecto, entonces* RC_2 *es clean; (2) Si* R *es un anillo Booleano y* G *es un grupo localmente finito, entonces* RG *es clean; (3)* $\mathbb{Z}_{(7)}C_3$*, donde* $\mathbb{Z}_{(7)}$ *denota la localización de* $\mathbb{Z}$ *en 7, que es clean, no es clean. Este último ejemplo nos muestra la dificultad que se presenta en el estudio de los anillos de grupos clean:*

No basta con que el anillo base R sea clean para que RG sea clean.

Para un anillo de grupo RG, el homomorfismo de anillos

$$\sum_{g\in G}\alpha_g g \overset{\epsilon}{\mapsto} \sum_{g\in G}\alpha_g,$$

de RG en R y su kernel denotado $\Delta(RG)$, son llamados aplicación e ideal de aumento, respectivamente, de RG. Es conocido que una R-base para $\Delta(RG)$ es $\{g-1 : g\in G, g\neq 1\}$ y así,

$$\Delta(RG) = \left\{\sum_{g\in G}\alpha_g(g-1) : g\neq 1, \alpha_g\in R\right\}.$$

Ahora bien, dado que la imagen homomorfa de un anillo clean es un anillo clean [3, Proposición 1.1], se sigue que una condición necesaria para que RG sea clean es que el anillo base R sea clean.

Presentaremos en esta primera charla algunos resultados conocidos en la literatura de manera más simple y además mostraremos la propiedad clean para RG, en el caso de G ser un grupo de orden $2p$, p primo impar y cuando G es un 2-grupo Hamiltoniano.

Bibliografía

[1] Anderson, *D. D. ;* Camillo, *V. P.: Commutative rings whose elements are a sum of a unit and idempotent. (2002)*

[2] Han, *J. ;* Nicholson, *W. : Extensions of clean rings. In:* Communications in Algebra *29 (2001), Nr. 6, S. 2589–2595*

[3] Immormino, *N. A.:* Clean Rings\ & Clean Group Rings, *Bowling Green State University, Diss., 2013*

[4] Immormino, *N. A. ;* McGovern, *W. W.: Examples of clean commutative group rings. In:* Journal of Algebra *405 (2014), S. 168–178*

[5] McGovern, *W. W.: Neat rings. In:* Journal of Pure and Applied Algebra *205 (2006), Nr. 2, S. 243–265*

[6] Nicholson, *W. K.: Lifting idempotents and exchange rings. In:* Transactions of the American Mathematical Society *229 (1977), S. 269–278*

[7] Nicholson, *W. ;* Zhou, *Y. : Clean general rings. In:* Journal of Algebra *291 (2005), Nr. 1, S. 297–311*