

XVII OMU

Olimpiadas Matemáticas UIS

Secundaria 2025

Benoit Mandelbrot

Matemático polaco, francés y estadounidense, ampliamente conocido como el "padre de la geometría fractal". La investigación pionera de Mandelbrot fue fundamental para presentar al mundo el poderoso concepto de fractales: formas matemáticas irregulares pero infinitamente repetidas que se encuentran en toda la naturaleza



INFORMES

 olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
 Tel.: (607) 6344000, ext.: 2316, 1229
 Olimpiadas Matemáticas UIS



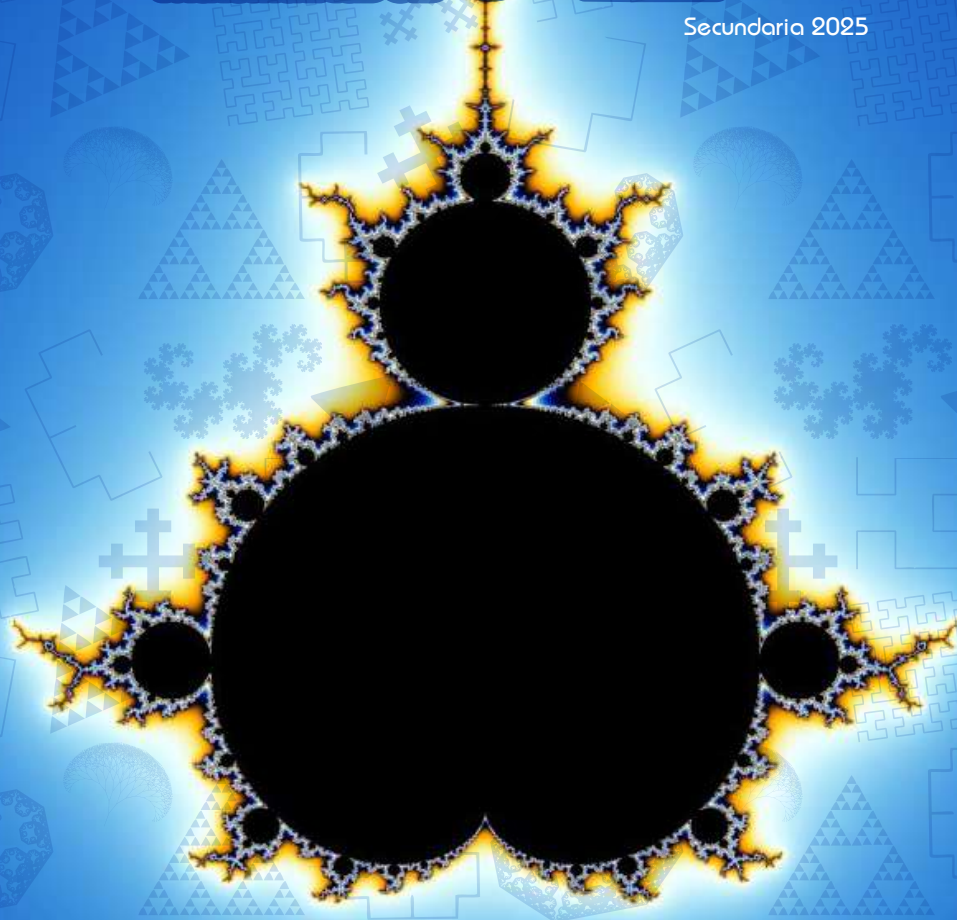
Vicerrectoría Académica
Vicerrectoría Administrativa



VIGILADA MINEDUCACIÓN



Secundaria 2025



Apoyan:

Rectoría, Vicerrectoría Académica, Vicerrectoría Administrativa,
Dirección de Admisiones y Registro Académico, Facultad de Ciencias,
Escuela de Matemáticas, Grupo de Investigación EDUMAT,
Sistema de Excelencia Académica SEA-UIS.



Vicerrectoría Académica
Vicerrectoría Administrativa



Decimoséptimas Olimpiadas Matemáticas UIS para secundaria



*Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga*

2025



Elaboración y edición

Grupo Olimpiadas Matemáticas UIS - 2025.

Director

Gilberto Arenas Díaz

Coordinador

Jorge Eliécer Gómez Ríos

Monitores

Ana Gabriela Blanco Cordero

Angel Steven Barcenás Mantilla

Brayan Isaac Vásquez Portocarrero

Cesar Derian Duvan García Padilla

Daniel Eduardo Naranjo Garzón

Daniel Santiago Jaimes Portilla

David Santiago Guzmán Díaz

Edwin José Ávila Landazabal

Javier Mauricio Sierra Villabona

Jefferson Sneyder Moreno Toloza

Johan Andrey Santamaría Ariza

Julián Enrique Neira Díaz

Mateo Rincón Pinzón

Sara Michell Estévez

Introducción

“Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y las cortezas de los árboles no son lisas, ni los relámpagos viajan en una línea recta.”

- Benoit Mandelbrot, *Introduction to The Fractal Geometry of Nature*.

La Universidad Industrial de Santander, como institución de educación superior del ámbito regional, forma ciudadanos como profesionales integrales, éticos, con sentido político e innovadores; apropia, utiliza, crea, transfiere y divulga el conocimiento por medio de la investigación, la innovación científica, tecnológica y social, la creación artística y la promoción de la cultura, buscando de este modo el fortalecimiento de una sociedad democrática, participativa, deliberativa y pluralista, con justicia y equidad social, comprometida con la preservación del medio ambiente y el buen vivir.

En el marco de esta misión institucional, la Escuela de Matemáticas ofrece a la sociedad santandereana y de la región de influencia de la Universidad, un escenario de alta calidad para el cultivo de las matemáticas, promoviendo entre los integrantes de la comunidad académica una actitud creativa y rigurosa, y construyendo un ambiente académico basado en la solidaridad, la empatía y el reconocimiento de los otros en su dignidad humana. Es por esta razón que, desde sus inicios, la Escuela de Matemáticas se ha comprometido con la educación matemática, no solo por la calidad reconocida a nivel nacional e internacional de los egresados de sus programas académicos de pregrado y posgrado, sino también por su participación activa y crucial en la formación de los estudiantes de otros programas de la Universidad.

Como parte de su responsabilidad académica y su proyección social frente a los diversos retos en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las habilidades matemáticas en el nororiente colombiano, la Escuela de Matemáticas ha diseñado y ejecutado desde 2009 el proyecto *Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS (ORM-UIS)*, para secundaria y primaria, a través del fortalecimiento de las competencias ma-

temáticas de los estudiantes y la capacitación simultánea de los profesores que orientan dichos procesos.

A partir de este año, 2025, el proyecto pasa a denominarse **Olimpiadas Matemáticas UIS - OMU**, porque es ahora una competencia de alcance nacional, que resignifica el rol de la universidad pública en su función de democratizar la ciencia y la pasión por los números, a lo largo y ancho de la geografía nacional, acompañando el interés institucional de abrir programas académicos en otras regiones de Colombia, especialmente, en aquellas en donde el acceso a la educación superior es más retador.

Las OMU abordan los ejes temáticos tradicionales de las olimpiadas matemáticas: teoría de números, geometría, álgebra, combinatoria, lógica o juegos y estrategias, y se estructuran en tres (3) niveles, definidos según el grado de escolaridad de los participantes:

- **Nivel Básico:** grados sexto y séptimo.
- **Nivel Medio:** grados octavo y noveno.
- **Nivel Avanzado:** grados décimo y undécimo.

Este documento reúne los retos matemáticos diseñados por el equipo de trabajo de las OMU para las diversas fases de su **Decimoséptima versión**, celebrada durante el año 2025 y dirigida a estudiantes de educación secundaria. En esta edición, el certamen alcanzó una participación destacada de **15.855 estudiantes** provenientes de **270 instituciones educativas** en **85 municipios** de Colombia, quienes asumieron con entusiasmo el reto de poner a prueba su talento matemático.

Esta versión de las OMU destacó al matemático **Benoît Mandelbrot** (1924-2010), reconocido mundialmente por la geometría de fractales y la hermosa idea disruptiva de que, en la naturaleza, en las grietas, en los valles, en las costas de los mares, en los árboles, en el interior de los organismos vivos hay geometría y, por lo tanto, hay matemáticas. Su libro de 1982 *The Fractal Geometry of Nature* está incluido en el listado de los cien libros de ciencia más relevantes del siglo XX y su teoría ha potenciado descubrimientos en la economía, la medicina, la computación, la biología, la astronomía, entre otros campos, como el arte y las ciencias sociales.

Mandelbrot trabajó para *IBM research* por 35 años, teniendo acceso a los primeros ordenadores de la historia, así como a un ambiente de creatividad permanente

y trabajo interdisciplinario. De esta manera, la tecnología aportó a su interés por representar su teoría de los fractales, lo que en 1967 había solamente elucubrado en un artículo publicado en *Science*, a partir de la pregunta ingenua ¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña? Su historia es una evidencia perenne de que las matemáticas son un campo diverso, “rugoso”, en donde habrá siempre espacio para el caos de la creatividad, así como para la plasticidad del color y las formas. Para la muestra, un fractal.

Este documento consta de tres (3) capítulos, cada uno correspondiente a un nivel de la competencia: nivel básico, nivel medio y nivel avanzado. En cada uno de ellos el lector encontrará los problemas y una solución, de las distintas soluciones que puede tener cada uno. Por esa razón, el equipo de trabajo de las OMU recomienda e incentiva a quien desee enfrentar nuevamente estos problemas, a descubrir y proponer métodos alternativos de solución que se destaquen por su sencillez, ingenio y belleza matemática.

La Escuela de Matemáticas, a través del Grupo de Investigación en Educación Matemática de la UIS (EDUMAT), reconoce la labor esencial del maestro en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las competencias matemáticas de los estudiantes, y por ello elabora esta cartilla para su utilización en el aula de clase, que incluye, también, la preparación y discusión creativa entre pares en los espacios de formación docente. Esperamos que los participantes de la educación básica secundaria y media vocacional, los profesores, y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, disfrute tanto como nosotros lo hicimos, el hermoso y milenario ejercicio del pensamiento matemático.

Las OMU no son una mera competencia, implican una puesta en escena colectiva para que los niños, niñas y adolescentes desplieguen sus capacidades, fortalezcan sus habilidades y se reconozcan como sujetos capaces de enfrentar problemas y solucionarlos. Esto fomenta la autopercepción como sujetos con comprensión de su entorno, y esa es la exigencia que hace hoy la humanidad. Creemos firmemente que allí debemos dirigir todos nuestros esfuerzos, al fortalecimiento de ciudadanías que, gracias al pensamiento crítico que se desarrolla desde el ejercicio matemático, puedan enfrentarse a la diversidad de problemáticas que enfrenta la sociedad actual y que requieren de una mirada no solo crítica, sino, además, creativa para ser solucionadas.

El proyecto OMU agradece y destaca al grupo de estudiantes de Santander y de muchas partes de Colombia que participaron de esta versión, y que han demostrado ser capaces de asumir el reto de pensar y sentir problemas sencillos y bellos de matemáticas, con pasión y con rigor.

Índice general

1. Nivel Básico	1
1.1. Prueba Clasificatoria	1
1.2. Prueba Selectiva	8
1.3. Prueba Final	14
2. Nivel Medio	19
2.1. Prueba Clasificatoria	19
2.2. Prueba Selectiva	27
2.3. Prueba Final	35
3. Nivel Avanzado	41
3.1. Prueba Clasificatoria	41
3.2. Prueba Selectiva	48
3.3. Prueba Final	56
A. Cuadro de Honor	61

Capítulo 1

Nivel Básico

1.1. Prueba Clasificatoria

PROBLEMA 1.

En un antiguo bosque encantado, Merlín ha encontrado un cofre mágico lleno de gemas de tres colores diferentes: esmeraldas (verdes), rubíes (rojos) y zafiros (azules). Para activar un hechizo antiguo, Merlín debe tener en su bolsillo al menos 5 gemas del mismo color. Merlín sabe que solo puede meter la mano una vez en el cofre para sacar todas las gemas que necesite, pues después de eso el cofre se cerrará para siempre. Además, el brillo de las gemas no permite ver sus colores antes de ser extraídas del cofre. ¿Cuál es el número mínimo de gemas que debe sacar Merlín para estar seguro de poder activar el hechizo?

(a) 12

(b) 13

(c) 15

(d) 16

Solución: Para asegurar que Merlín tenga al menos 5 gemas del mismo color sin poder verlas, debemos imaginar el **peor escenario posible**. Este ocurre si Merlín extrae 4 esmeraldas, 4 rubíes y 4 zafiros. En este punto, habrá extraído $4+4+4 = 12$ gemas sin haber cumplido aún el objetivo. Sin embargo, la siguiente gema que extraiga ($12 + 1 = 13$) será inevitablemente la quinta gema de alguno de los tres colores. Por lo tanto, el número mínimo de gemas que debe sacar para estar totalmente seguro es 13.

PROBLEMA 2.

En una granja, hay dos caballos de carreras. El entrenador nota que uno de ellos tiene el triple de edad que el otro. Si la suma de sus edades es de 36 años, ¿cuántos años de más tiene el caballo mayor en comparación con el menor?

(a) 18

(b) 27

(c) 9

(d) 12

Solución: Visualizamos las edades mediante partes iguales: si la edad del caballo menor representa **una parte**, el mayor representa **tres partes**, sumando un total de **cuatro partes** iguales que equivalen a 36 años. Al dividir $36 \div 4$, determinamos que cada parte corresponde a 9 años; por lo tanto, el caballo menor tiene 9 años y el mayor tiene $3 \times 9 = 27$ años. Finalmente, para encontrar cuántos años de más tiene el mayor, restamos sus edades $27 - 9 = 18$, concluyendo que el mayor tiene **18 años más** que el menor.

PROBLEMA 3.

Un equipo de biólogos ha estado monitoreando la población de ardillas en una isla. Aseguran que, debido a la abundancia de recursos y la ausencia de depredadores, la población de ardillas aumenta 0,8 millones cada década. De ser cierto lo que han asegurado los biólogos, en 50 años se tendrán 10 millones de ardillas en la isla. ¿Cuántas ardillas hay actualmente en la isla?

(a) 8 millones

(b) 2 millones

(c) 4 millones

(d) 6 millones

Solución: Primero, calculamos cuántas décadas hay en 50 años dividiendo $50 \div 10 = 5$. Si la población aumenta 0,8 millones por década, en total ha crecido $5 \times 0,8 = 4$ millones de ardillas. Como la población final es de 10 millones, restamos el crecimiento acumulado para conocer la cantidad inicial: $10 - 4 = 6$. Por lo tanto, actualmente hay 6 millones de ardillas en la isla.

PROBLEMA 4.

Los lados de un cuadrado son paralelos a los ejes del plano cartesiano. Si los puntos (3, 5), (7, 2) y (10, 8) se encuentran ubicados sobre tres de los lados del cuadrado, ¿cuál es el perímetro del cuadrado?

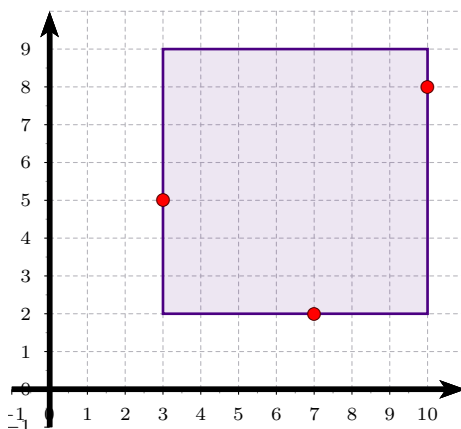
(a) 24 unidades

(b) 28 unidades

(c) 32 unidades

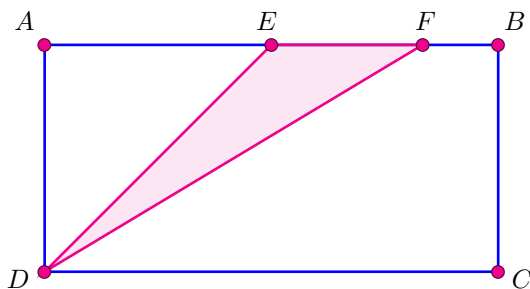
(d) 40 unidades

Solución: Para que los lados del cuadrado sean paralelos a los ejes, su ancho y su altura deben contener los valores extremos de los puntos dados. En el eje horizontal (x), la distancia entre el punto más a la izquierda y el más a la derecha es $10 - 3 = 7$. En el eje vertical (y), la distancia entre el punto más bajo y el más alto es $8 - 2 = 6$. Como un cuadrado debe tener todos sus lados iguales y contener estos tres puntos, la longitud del lado debe ser la mayor de estas diferencias, es decir, 7. Finalmente, calculamos el perímetro multiplicando la medida del lado por cuatro: $7 \times 4 = 28$. El perímetro del cuadrado es 28 unidades.



PROBLEMA 5.

En la figura, $\frac{AB}{EF} = 3$. Si el área del triángulo DEF es 6 cm^2 , ¿cuál es el área del rectángulo $ABCD$?



(a) 18 cm^2

(b) 54 cm^2

(c) 36 cm^2

(d) 24 cm^2

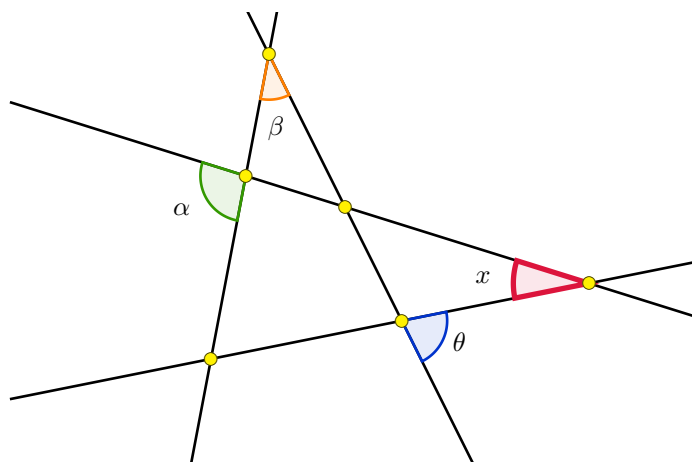
Solución: De la relación $\frac{AB}{EF} = 3$, tenemos que $AB = 3 \times EF$. Note que, $\overline{AD}$ es la altura del triángulo DEF , respecto a su base $\overline{EF}$, entonces su área está dada por $\frac{EF \times AD}{2} = 6$, de ahí $EF \times AD = 12 \text{ cm}^2$.

Por lo anterior, el área del rectángulo $ABCD$ es:

$$AB \times AD = 3 \times (EF \times AD) = 3 \times 12 = 36 \text{ cm}^2.$$

PROBLEMA 6.

Una anciana matemática cree poder hacer una predicción basada en la posición de seis estrellas. En sus apuntes ha trazado un diagrama y, con ciertos aparatos, ha determinado las medidas de algunos ángulos: $\alpha = 92^\circ$, $\beta = 34^\circ$ y $\theta = 76^\circ$. Sin embargo, para completar su predicción, necesita conocer la medida del ángulo x . ¿Cuál es la medida del ángulo x ?



(a) 15°

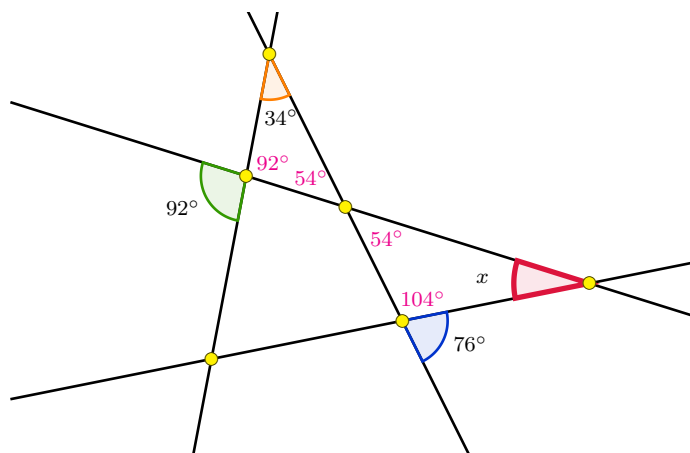
(b) 22°

(c) 30°

(d) 42°

Solución: Considere la siguiente figura auxiliar en la que se han determinado medidas adicionales utilizando los siguientes principios geométricos:

- **Ángulos opuestos por el vértice:** Tienen la misma medida.
- **Suma de ángulos internos:** En cualquier triángulo, la suma de sus tres ángulos siempre es 180° .
- **Ángulos suplementarios:** Aquellos que están sobre una misma línea recta y cuya suma es 180° .



Siguiendo estos resultados, con los datos dados en el enunciado, podemos encontrar el valor del ángulo faltante x :

$$x = 180^\circ - 104^\circ - 54^\circ = 22^\circ.$$

PROBLEMA 7.

Un supermercado recibe suministros con diferentes frecuencias: los huevos llegan cada 3 días, las gaseosas cada 6 días y los granos cada 9 días. Si el miércoles 2 de abril el supermercado recibió los tres pedidos simultáneamente, ¿en cuál de las siguientes fechas volverá a recibir los tres productos el mismo día?

- (a) jueves, 8 de mayo
- (b) sábado, 20 de abril
- (c) martes, 27 de mayo
- (d) viernes, 18 de abril

Solución: Sabemos que los tres suministros coinciden cada 18 días, pues este es el mínimo común múltiplo de 3, 6 y 9. Para encontrar la fecha correcta, sumamos múltiplos de 18 al 2 de abril: la primera coincidencia ocurre el 20 de abril ($2 + 18$), pero esta fecha es domingo. Al sumar otros 18 días obtenemos el 8 de mayo ($20 + 18 = 38$, y restamos los 30 días que tiene abril). Para verificar el día de la semana, observamos que han pasado 36 días en total; como 36 dividido entre 7 deja un residuo de 1, el día de la semana se desplaza un lugar desde el miércoles original, resultando en el **jueves, 8 de mayo**. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (a).

PROBLEMA 8.

Un número deja residuo 3 al dividirse entre 5. ¿Cuál es el residuo que deja el triple de ese número al dividirse entre 5?

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Solución 1: Podemos representar el número n según los elementos de la división:

$$\begin{array}{rcl} \text{Dividendo:} & n & \left| \begin{array}{c} 5 \\ q \end{array} \right. \begin{array}{c} \text{Divisor} \\ \text{Cociente} \end{array} \\ \text{Residuo:} & 3 & \end{array}$$

Si al dividirse n entre 5 deja residuo 3, tenemos que $n = 5 \times q + 3$, donde q es el cociente. Al calcular el triple de este número ($3n$), multiplicando la última ecuación por 3 tenemos:

$$3n = 5(3q) + 9 = 5(3q) + 5 + 4 = 5(3q + 1) + 4,$$

es decir que el triple del número original ($3n$) deja residuo 4 al dividirse entre 5.

Solución 2: Otra forma de resolver este problema, es elegir un número que cumpla la condición: un número que al dividirlo entre 5 deje residuo 3 es el 8 (ya que $8 = 5 \times 1 + 3$). Si calculamos el triple de este número, obtenemos $8 \times 3 = 24$. Al dividir 24 entre 5, observamos que $24 = 5 \times 4 + 4$, por lo que el residuo es 4. De forma general, si el residuo original es 3, el residuo del triple será el residuo de $3 \times 3 = 9$ al dividirse entre 5, lo cual confirma que el resultado es 4.

PROBLEMA 9.

En una evaluación bimestral de matemáticas hay 10 preguntas numeradas del 1 al 10. Cada estudiante debe responder únicamente 7 preguntas, pero es obligatorio responder todas las preguntas impares. ¿De cuántas formas diferentes puede un estudiante seleccionar las 7 preguntas que debe responder?

- (a) 10 (b) 15 (c) 20 (d) 30

Solución: Primero, identificamos que entre las 10 preguntas hay 5 impares: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ y 5 pares: $\{2, 4, 6, 8, 10\}$. Como es obligatorio responder todas las impares, el estudiante ya tiene seleccionadas 5 preguntas fijas. Para completar las 7 requeridas, debe elegir 2 preguntas adicionales de entre las 5 pares restantes. Dado que el orden de elección no importa, listamos las combinaciones posibles como conjuntos de dos elementos: $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{2, 8\}$, $\{2, 10\}$, $\{4, 6\}$, $\{4, 8\}$, $\{4, 10\}$, $\{6, 8\}$, $\{6, 10\}$ y

$\{8, 10\}$. Al contar estas opciones, encontramos que hay 10 **formas diferentes** de seleccionar las preguntas.¹

¹El número de formas de elegir 2 elementos de un total de 5 sin que importe el orden también se puede determinar mediante el número combinatorio $\binom{5}{2}$, el cual se calcula de la siguiente manera:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot (3)!} = \frac{5 \times 4 \times \color{red}{3} \times \color{red}{2} \times \color{red}{1}}{(2 \times 1) (\color{red}{3} \times \color{red}{2} \times \color{red}{1})} = \frac{20}{2} = 10.$$

1.2. Prueba Selectiva

PROBLEMA 1.

Laura y su hermano Miguel coleccionan figuras de acción. Laura tiene el doble de figuras que Miguel. Durante un intercambio, Laura le da 6 figuras a su hermano. Después del intercambio, ambos terminan teniendo la misma cantidad de figuras. ¿Cuántas figuras de acción tenía Laura originalmente?

(a) 24

(b) 30

(c) 12

(d) 18

Solución: Definamos como m el número de figuras iniciales de Miguel. Según el problema, Laura tiene el doble, es decir, $2m$. Tras el intercambio, Laura pierde 6 figuras ($2m - 6$) y Miguel las gana ($m + 6$), quedando ambos con la misma cantidad. Planteamos la ecuación:

$$2m - 6 = m + 6.$$

Al resolver para m , restamos m y sumamos 6 en ambos lados:

$$2m - m = 6 + 6 \implies m = 12.$$

Como buscamos la cantidad original de Laura ($2m$), multiplicamos $12 \times 2 = 24$. Por lo tanto, Laura tenía originalmente 24 figuras.

PROBLEMA 2.

Sean a , b y c enteros positivos tales que

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = 20,25.$$

¿Cuál de los siguientes números no está en el conjunto $\{a, b, c\}$?

(a) 1

(b) 3

(c) 4

(d) 20

Solución: Para resolver la igualdad, convertimos el número decimal 20,25 a su forma de fracción continua. Primero, separamos la parte entera:

$$20,25 = 20 + 0,25 = 20 + \frac{1}{4}$$

Para que la expresión coincida con la forma $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}$, debemos descomponer el denominador 4 de manera que aparezca una nueva fracción. Como a, b y c son

enteros positivos, la única forma de representar el 4 como $b + \frac{1}{c}$ es:

$$4 = 3 + 1 = 3 + \frac{1}{1}$$

De este modo, obtenemos:

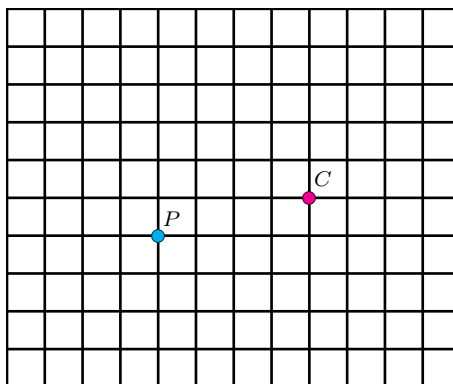
$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = 20 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}$$

Comparando los valores, tenemos que $a = 20$, $b = 3$ y $c = 1$. Por lo tanto, el número que no pertenece al conjunto $\{a, b, c\}$ es el 4.

PROBLEMA 3.

Las calles de una ciudad forman una cuadrícula, como se muestra en la figura. Lucía y Jerónimo viven en casas ubicadas en esquinas diferentes. Para llegar al colegio, situado en el punto C , cada uno debe caminar exactamente 4 cuadras desde su casa. Para llegar al parque, situado en el punto P , cada uno debe caminar exactamente 3 cuadras. ¿Cuántas cuadras debe recorrer Jerónimo para ir desde su casa hasta la de Lucía?

Nota: Tanto Jerónimo como Lucía siempre eligen la ruta más corta posible para ir de un lugar a otro.



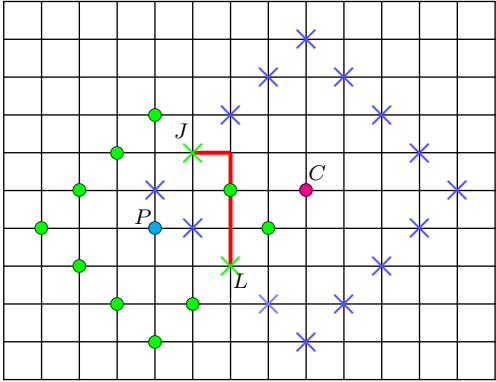
(a) 3

(b) 4

(c) 5

(d) 6

Solución: Considere la siguiente ilustración en la que se han marcado con color verde todas las esquinas que están a 3 cuadras de P y con una $\times$ todas las esquinas que están a 4 cuadras de C :



Solo dos puntos cumplen ambas condiciones simultáneamente. Dado que Jerónimo y Lucía viven en esquinas diferentes, dichos puntos corresponden a sus casas. Vemos que la distancia mínima entre las casas es de 4 cuadras (sobre la cuadrícula). Por lo tanto, Jerónimo debe recorrer 4 cuadras para ir desde su casa hasta la de Lucía.

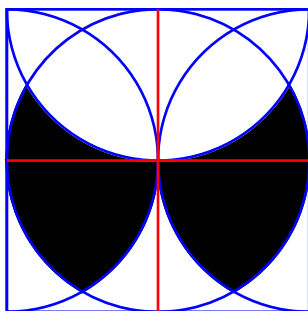
PROBLEMA 4.

Una nueva librería ha diseñado el siguiente logo para su marca: Parten de un cuadrado de lado 12 cm , dentro del cual se inscribe una circunferencia. Además, sobre tres de los lados del cuadrado se dibujan semicircunferencias internas, cada una con diámetro igual al lado del cuadrado, como se muestra en la figura:

¿Cuál es el área de la región sombreada en el logo de la librería?

(a) $36\pi\text{ cm}^2$ (b) $9\pi\text{ cm}^2$ (c) $18\pi\text{ cm}^2$ (d) $72\pi\text{ cm}^2$

Solución: Considere la siguiente figura auxiliar, en la que se han trazado los segmentos perpendiculares que unen los puntos medios de los lados paralelos del cuadrado:



Mediante un proceso de **traslación de áreas** (reacomodando las piezas curvas), se puede visualizar que las regiones sombreadas completan exactamente la mitad inferior del círculo inscrito.

Dado que el lado del cuadrado mide 12 cm el radio del círculo inscrito es 6 cm . Por lo tanto, el área sombreada es:

$$\frac{\pi \cdot (6)^2}{2} = \frac{36\pi}{2} = 18\pi\text{ cm}^2.$$

PROBLEMA 5.

En un colegio, el grado sexto tiene 127 estudiantes. Sabemos que el número de hombres es un múltiplo de 7 y que el número de mujeres es un múltiplo de 13. ¿Cuál es la diferencia positiva entre el número de mujeres y el de hombres?

(a) 3

(b) 29

(c) 55

(d) 78

Solución: Para encontrar el número de estudiantes, buscamos un múltiplo de 13 (mujeres) y un múltiplo de 7 (hombres) que sumen 127. Probamos con los múltiplos de 13:

- Si las mujeres son $13 \times 6 = 78$, entonces los hombres serían $127 - 78 = 49$.
- Verificamos si 49 es múltiplo de 7: Efectivamente, $7 \times 7 = 49$.

Con esto confirmamos que hay 78 mujeres y 49 hombres en el grado sexto. La diferencia positiva entre ambos grupos es: $78 - 49 = 29$.

PROBLEMA 6.

Si a y b son dos números enteros tales que $3a + 2b = 7$, ¿Cuál es el valor de $8^a \cdot 4^b$?

Solución: Note que $8 = 2^3$ y $4 = 2^2$. Sustituimos estas equivalencias en la expresión dada y, aplicando las propiedades de los exponentes, tenemos:

$$8^a \cdot 4^b = (2^3)^a \cdot (2^2)^b = 2^{3a} \cdot 2^{2b} = 2^{3a+2b}.$$

Finalmente, como el enunciado establece que $3a + 2b = 7$, sustituimos el valor del exponente:

$$2^{3a+2b} = 2^7 = 128.$$

PROBLEMA 7.

Nicolás está organizando las monedas de su alcancía. Si las agrupa en montones de 15, nota que le hacen falta 6 monedas para completar el último grupo. Entonces, si decide agruparlas en montones de 5, ¿cuántas monedas le sobran?

(a) 0

(b) 1

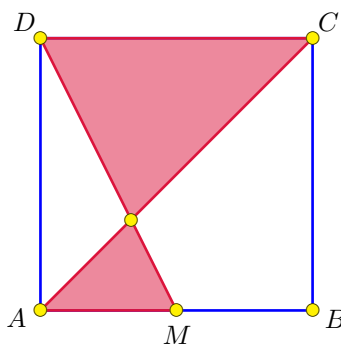
(c) 3

(d) 4

Solución: Si al agrupar las monedas en montones de 15 le faltan 6 para completar el último grupo, significa que en ese último grupo hay realmente 9 monedas ($15 - 6 = 9$). Para saber cuántas sobran al agruparlas de a 5, analizamos lo siguiente: cada montón de 15 monedas se puede subdividir exactamente en tres grupos de 5, por lo que de esos grupos no sobra nada. El sobrante total dependerá únicamente de las 9 monedas que quedaron al final; con ellas podemos formar un grupo de 5 y nos quedarán 4 monedas sueltas. Así, a Nicolás le sobran 4 monedas.

PROBLEMA 8.

En la siguiente figura $ABCD$ es un cuadrado y M es el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Si $AB = 6$, ¿cuál es el área de la región sombreada?



Solución: Observe que los dos triángulos sombreados son semejantes, ya que sus ángulos internos son congruentes: un par por ser opuestos por el vértice y los otros por ser alternos internos entre rectas paralelas. Además,

- La base del triángulo superior es $DC = 6$.
- La base del triángulo inferior es $AM = 3$ (punto medio).

Entonces, la razón de semejanza es $2 : 1$, por lo que la altura del triángulo superior (H) es el doble de la del inferior (h). Como la suma de sus alturas es el lado del cuadrado (6), tenemos:

$$H + h = 6 \implies 2h + h = 6 \implies h = 2, \quad H = 4$$

Calculamos las áreas individuales:

$$\text{Área superior} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12, \quad \text{Área inferior} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

El área total sombreada es: $12 + 3 = 15$.

PROBLEMA 9.

En un laboratorio de criptografía, los analistas están intentando descifrar un mensaje oculto. En cierta parte del proceso, tuvieron que probar un algoritmo utilizando todos los números enteros positivos de exactamente cuatro cifras que son divisibles por 4. ¿Cuántas veces tuvieron que probar el algoritmo los analistas?

Solución: Para determinar la cantidad de números de cuatro cifras divisibles por 4, analizamos sus componentes:

- **Primera cifra:** Tiene 9 posibilidades (1 al 9), pues no puede ser cero.
- **Segunda cifra:** Tiene 10 posibilidades (0 al 9), ya que no tiene restricciones.
- **Últimas dos cifras:** Por el criterio de divisibilidad del 4, el bloque formado por las dos últimas cifras debe ser divisible por 4. En el rango de 00 a 99, hay exactamente 25 números que cumplen esta condición (00, 04, 08, ..., 96).

Luego, por el principio multiplicativo, el número total de ensayos es:

$$9 \times 10 \times 25 = 2250$$

Por lo tanto, los analistas tuvieron que probar el algoritmo 2250 veces.

1.3. Prueba Final

PROBLEMA 1.

En el juego *Fijas y Picas*, el jugador *A* piensa un número secreto de cuatro cifras distintas, y el jugador *B* debe adivinarlo. En cada intento, *B* propone un número y *A* le indica cuántas **fijas** y cuántas **picas** tiene:

- Una **fija** es un dígito correcto en la posición correcta.
- Una **pica** es un dígito correcto en una posición incorrecta.

Por ejemplo, si el número secreto es 5381 y el intento es 5438, hay: 1 fija (el 5) y 2 picas (el 3 y el 8).

A continuación, se muestran los intentos de un jugador:

Intento	Fijas	Picas
4681	0	2
0792	0	2
6925	2	0
7083	0	0

¿Cuál es el número secreto?

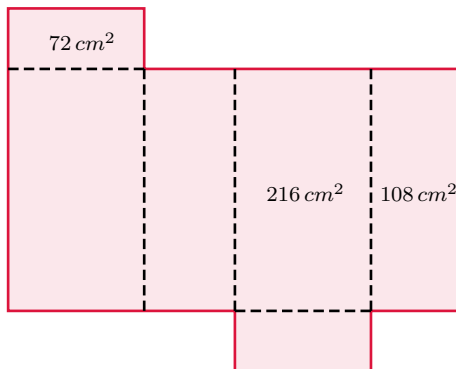
Solución: Denotemos el número secreto como $abcd$, donde a, b, c, d son dígitos distintos.

- Por el intento 7083 con 0 fijas y 0 picas, se descartan los dígitos $\{7, 0, 8, 3\}$ del número secreto.
- En el intento 0792 con 0 fijas y 2 picas, dado que 0 y 7 ya fueron descartados, se confirma que 2 y 9 son dígitos del número secreto, pero están en posiciones incorrectas.
- El intento 6925 tiene 2 fijas y 0 picas. Como 2 y 9 son parte del número y aquí ocupan lugares fijos, concluimos que $b = 9$ y $c = 2$. Asimismo, al no haber picas, los dígitos 6 y 5 quedan descartados.
- Del intento 4681 con 0 fijas y 2 picas, como 6 y 8 ya se descartaron, confirmamos que 4 y 1 pertenecen al número. Dado que no son fijas, deben ocupar las posiciones restantes de forma invertida: $a = 1$ y $d = 4$.

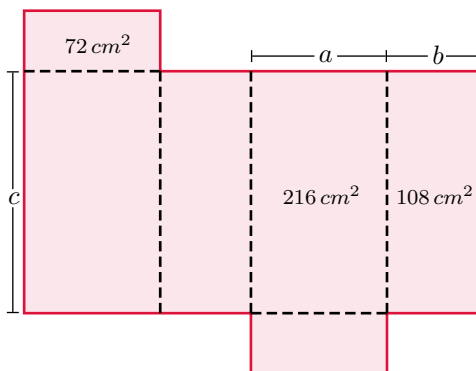
Con base en lo anterior, el número secreto es 1924².

PROBLEMA 2.

En la siguiente figura, se muestra el desarrollo plano de una caja cuyas caras son rectangulares. En algunas de sus caras se ha indicado el área correspondiente. Con base en esta información, ¿cuál es el volumen de la caja?



Solución: Sean a , b y c las dimensiones de la caja, entonces:



Note que:

$$ab = 72, \quad ac = 216, \quad bc = 108.$$

²¿Sabías que...? En 1924 nació *Benoît Mandelbrot*, el matemático que descubrió que la naturaleza tiene formas secretas llamadas *fractales*. Él enseñó al mundo que las nubes, las montañas y las plantas no son figuras perfectas (como círculos o cuadrados), sino formas mágicas que se repiten una y otra vez dentro de sí mismas. ¡Gracias a sus ideas, hoy podemos entender mejor la increíble geometría de nuestro planeta!

Explora: ¡Busca un brócoli o una hoja de helecho! Verás que una ramita pequeña es idéntica a la planta completa en miniatura. ¡Eso es un fractal en tus manos!

Entonces,

$$\begin{aligned}(ab)(ac)(bc) &= 72 \times 216 \times 108 \\ (abc)^2 &= (2^3 \cdot 3^2) \cdot (2^3 \cdot 3^3) \cdot (2^2 \cdot 3^3) \\ abc &= \sqrt{2^8 \cdot 3^8} \\ abc &= 2^4 \cdot 3^4 = 1296.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen de la caja es 1296 cm^3 .

PROBLEMA 3.

Un examen de opción múltiple consta de cuatro preguntas, cada una con cinco posibles respuestas, de las cuales solo una es correcta. Un estudiante responde el examen al azar, eligiendo una respuesta para cada pregunta. ¿En cuántas de las posibles formas de responder el examen el estudiante acierta al menos una pregunta?

Solución: Apliquemos la estrategia del **conteo por el complemento**. En lugar de contar directamente las posibilidades que buscamos, calcularemos el total de formas posibles de responder y restaremos aquellas que no cumplen con la condición del enunciado:

- **Total de formas de responder:** Como hay 5 opciones para cada una de las 4 preguntas, el número total de combinaciones es:

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625.$$

- **Casos en los que no acierta ninguna:** Para fallar en una pregunta, el estudiante debe elegir una de las 4 opciones incorrectas. El número de formas de responder mal a todo el examen es:

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4 = 256.$$

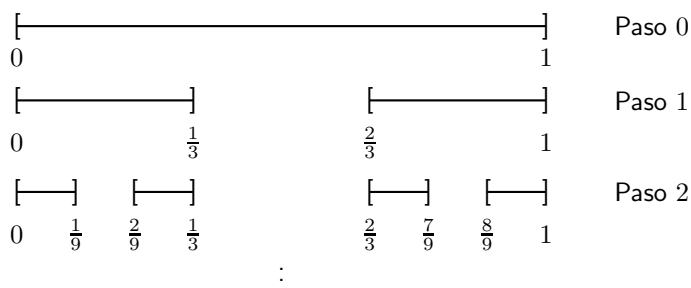
- **Cálculo de “al menos una correcta”:** Restamos los casos donde todas son incorrectas del total de maneras posibles:

$$625 - 256 = 369.$$

Existen 369 formas en las que el estudiante puede acertar al menos una pregunta.

PROBLEMA 4.

El conjunto de Cantor se construye así: iniciamos con el intervalo $[0, 1]$. En cada paso, dividimos cada intervalo en tres partes iguales y eliminamos el tercio central. Repetimos este proceso indefinidamente, como se ilustra a continuación:



Un juego consiste en lanzar un dado de 6 caras, de las cuales tres muestran un 0 y las otras tres un 1. Todos los jugadores comienzan ubicados sobre el intervalo inicial, denominado “Paso 0”. Luego, lanzan el dado por turnos. Si el concursante obtiene un 0, debe avanzar al subintervalo izquierdo del siguiente paso, resultante del intervalo en el que se encuentra; y si obtiene un 1, al subintervalo derecho.

- (a) ¿Cuántos subintervalos hay en el paso 5?
- (b) ¿Cuál es la suma de las longitudes de los subintervalos que quedan en el paso 5?
- (c) Un jugador ha obtenido los siguientes resultados en sus cinco primeros lanzamientos: 0, 1, 1, 0, 1. ¿En qué subintervalo se encuentra después de esos cinco lanzamientos?
- (d) El premio del juego está en el intervalo $\left[\frac{74}{81}, \frac{667}{729}\right]$. ¿En cuántos lanzamientos puede un concursante llegar al premio y qué secuencia de resultados debe obtener?

Solución:

- (a) En cada iteración, cada intervalo “sobreviviente” se divide en dos (pues se eliminan los tercios centrales). Por lo tanto, el número de subintervalos después de 5 iteraciones es

$$2^5 = 32.$$

- (b) En cada iteración, la longitud de cada intervalo se reduce a un tercio de la longitud original del intervalo en el paso anterior.

Así, la longitud de cada subintervalo en el paso 5 es:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} (1) \right) \right) \right) \right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 = \left(\frac{1}{3} \right)^5 = \frac{1}{243}.$$

Como hay 2^5 intervalos en el paso 5 entonces la suma de las longitudes de los subintervalos en este paso es:

$$2^5 \times \left(\frac{1}{3} \right)^5 = \left(\frac{2}{3} \right)^5.$$

- (c) Cada lanzamiento indica si el jugador se mueve al subintervalo izquierdo (si sale 0) o derecho (si sale 1) en la siguiente iteración.

- Lanzamiento 1 (0): El tercio izquierdo del intervalo $[0, 1]$ es $[0, \frac{1}{3}]$.
- Lanzamiento 2 (1): El tercio derecho del intervalo $[0, \frac{1}{3}]$ es $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$.
- Lanzamiento 3 (1): El tercio derecho del intervalo $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$ es $[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}]$.
- Lanzamiento 4 (0): El tercio izquierdo del intervalo $[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}]$ es $[\frac{8}{27}, \frac{25}{81}]$.
- Lanzamiento 5 (1): El tercio derecho del intervalo $[\frac{8}{27}, \frac{25}{81}]$ es $[\frac{74}{243}, \frac{75}{243}]$.

Por lo tanto, el jugador se encuentra en el subintervalo

$$\left[\frac{74}{243}, \frac{75}{243} \right].$$

- (d) Con 6 lanzamientos y la secuencia

1, 1, 0, 1, 0, 0,

el jugador llegará al intervalo del premio en el intervalo $[\frac{74}{81}, \frac{667}{729}]$. Veamos:

- Lanzamiento 1 (1): El tercio derecho del intervalo $[0, 1]$ es $[\frac{2}{3}, 1]$.
- Lanzamiento 2 (1): El tercio derecho del intervalo $[\frac{2}{3}, 1]$ es $[\frac{8}{9}, 1]$.
- Lanzamiento 3 (0): El tercio izquierdo del intervalo $[\frac{8}{9}, 1]$ es $[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}]$.
- Lanzamiento 4 (1): El tercio derecho del intervalo $[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}]$ es $[\frac{74}{81}, \frac{25}{27}]$.
- Lanzamiento 5 (0): El tercio izquierdo del intervalo $[\frac{74}{81}, \frac{25}{27}]$ es $[\frac{74}{81}, \frac{223}{243}]$.
- Lanzamiento 6 (0): El tercio izquierdo del intervalo $[\frac{74}{81}, \frac{223}{243}]$ es $[\frac{74}{81}, \frac{667}{729}]$.

Capítulo 2

Nivel Medio

2.1. Prueba Clasificatoria

PROBLEMA 1.

En una competencia de atletismo con 1875 corredores, solo pueden competir máximo 10 atletas por carrera. En cada carrera, únicamente el ganador avanza a la siguiente fase y los demás quedan eliminados. ¿Cuál es el número mínimo de carreras necesarias para encontrar al campeón?

- (a) 206 (b) 188 (c) 210 (d) 207

Solución: Para encontrar el número mínimo de carreras se deben organizar a los atletas en grupos con la mayor cantidad posible en cada fase, veamos:

- **Fase 1:** Dividimos los 1875 atletas en 187 grupos de 10 y uno de 5. Se realizan 188 carreras, de las cuales salen 188 ganadores.
- **Fase 2:** Con los 188 ganadores, formamos 18 grupos de diez y uno de 8. Se realizan 19 carreras, de las cuales pasan 19 atletas.
- **Fase 3:** Con los 19 clasificados, formamos 1 grupo de 10 y otro de 9. Tras estas 2 carreras, pasan 2 atletas a la final.
- **Fase 4:** Finalmente, se realiza 1 carrera con los dos finalistas para definir al campeón.

Por lo tanto, el número mínimo de carreras necesarias es $188 + 19 + 2 + 1 = 210$.

PROBLEMA 2.

Los elementos del conjunto $U = \{a, b, c\}$ son números enteros. Al formar todos los posibles subconjuntos de dos elementos de U y sumar los elementos de cada uno, se obtienen los siguientes resultados: 32, 19 y 21. ¿Cuál de los siguientes NO puede ser uno de los elementos de U ?

(a) 4

(b) 13

(c) 15

(d) 17

Solución: A partir de las sumas por parejas, planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} a + b = 32 \\ b + c = 19 \\ a + c = 21 \end{cases}$$

Sumando las tres ecuaciones, obtenemos:

$$2a + 2b + 2c = 72 \implies a + b + c = 36$$

Restando cada pareja de la suma total (36), hallamos los elementos individuales:

- $c = (a + b + c) - (a + b) = 36 - 32 = 4$
- $a = (a + b + c) - (b + c) = 36 - 19 = 17$
- $b = (a + b + c) - (a + c) = 36 - 21 = 15$

Por lo tanto, $U = \{4, 15, 17\}$. Comparando con las opciones dadas, el número que **NO** pertenece al conjunto es el 13.

PROBLEMA 3.

Cada término de la sucesión 7, 13, 19, 25, ... es 6 unidades mayor que el anterior. ¿Cuál es el primer término de la sucesión que supera a 2025?

(a) 2029

(b) 2031

(c) 2026

(d) 2027

Solución 1: Observe que todos los términos de la sucesión son aquellos que exceden en 1 a los múltiplos de 6. Por lo tanto, debemos encontrar el primer número mayor que 2025 que cumpla esta condición.

Dividimos 2025 entre 6 para localizar los múltiplos cercanos:

$$2025 \div 6 = 337,5.$$

Entonces los múltiplos de 6 más cercanos a 2025 son: $337 \times 6 = 2022$ y $338 \times 6 = 2028$. Luego, en la sucesión están los términos consecutivos 2023 y 2029.

Puesto que el término 2023 no supera a 2025, el primer término de la sucesión que cumple la condición de la pregunta es 2029.

Solución 2: La sucesión es aritmética con primer término $a_1 = 7$ y diferencia común $d = 6$. La fórmula para el término general es:

$$a_n = 7 + (n - 1)6 = 6n + 1.$$

Buscamos el primer valor de n tal que $a_n > 2025$:

$$6n + 1 > 2025$$

$$6n > 2024$$

$$n > 337,33 \dots$$

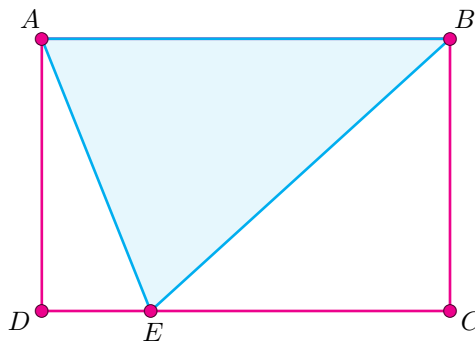
El primer entero que cumple la condición es $n = 338$. Calculamos el valor de dicho término:

$$a_{338} = 6(338) + 1 = 2029.$$

Por lo tanto, el primer término de la sucesión que supera a 2025 es 2029.

PROBLEMA 4.

En la siguiente figura, $DE = 5 \text{ cm}$ y $EC = 9 \text{ cm}$. Si el área del triángulo ABE es 84 cm^2 , ¿cuál es el perímetro del rectángulo $ABCD$?



(a) 52 cm

(b) 168 cm

(c) 54 cm

(d) 58 cm

Solución: Para calcular el perímetro del rectángulo $ABCD$, primero debemos determinar las medidas de sus lados:

El lado $\overline{DC}$ está compuesto por los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{EC}$. Según los datos proporcionados:

$$DC = DE + EC = 5 \text{ cm} + 9 \text{ cm} = 14 \text{ cm}$$

Dado que $ABCD$ es un rectángulo, el lado $\overline{AB}$ también mide 14 cm .

Por otra parte, el área del triángulo ABE está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{AB \times AD}{2} &= \frac{14 \times AD}{2} = 84, \\ 7 \times AD &= 84, \\ AD &= \frac{84}{7} = 12 \text{ cm}. \end{aligned}$$

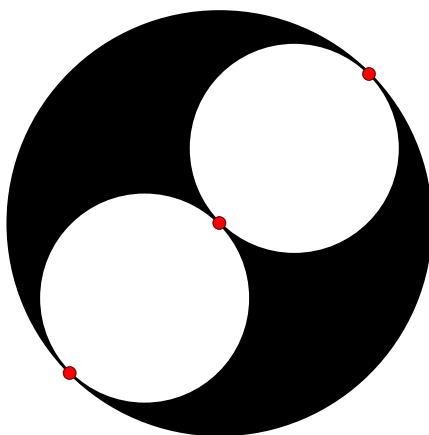
Entonces Por lo tanto, el perímetro del rectángulo $ABCD$ es:

$$AB + DC + AD + BC = 14 + 14 + 12 + 12 = 52 \text{ cm}.$$

PROBLEMA 5.

Un tarro de pintura blanca cuesta \$7000 y uno de pintura negra cuesta \$11000. Para pintar el mural que se muestra en la figura, se gastaron \$19600 en pintura blanca. ¿Cuánto costó pintar la parte negra?

Nota: En el mural, las circunferencias internas son tangentes a la circunferencia externa, y entre sí, en el centro de la circunferencia exterior. Además, con un tarro de pintura blanca se pinta la misma área que con un tarro de pintura negra.



(a) \$39200

(b) \$46200

(c) \$19600

(d) \$30800

Solución: Suponga que el radio de la circunferencia mayor mide R . Entonces los radios de las circunferencias menores (blancas) miden $R/2$. De esta manera, el área total blanca se calcula como:

$$\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Por su parte, el área de la región negra es la diferencia entre el área del círculo mayor y el área blanca:

$$\pi R^2 - \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Se observa que el área negra es igual al área blanca. Si el costo total de la pintura blanca fue de \$19 600 y cada tarro cuesta \$7 000, se utilizaron:

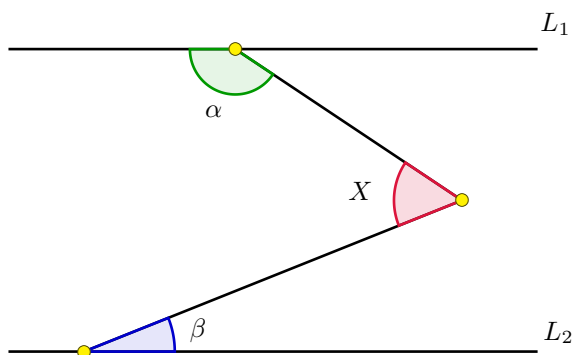
$$\frac{19\,600}{7\,000} = \frac{14}{5} \text{ tarros de pintura blanca.}$$

Dado que las áreas blanca y negra son idénticas, se requiere la misma cantidad de pintura para ambas secciones ($\frac{14}{5}$ tarros). Como cada tarro de pintura negra tiene un valor de \$11 000, el costo de pintar dicha sección fue:

$$\frac{14}{5} \times 11\,000 = \$30\,800.$$

PROBLEMA 6.

En la siguiente figura, las rectas L_1 y L_2 son paralelas. Si $\alpha = 143^\circ$ y $\beta = 21^\circ$, ¿cuál es la medida del ángulo X ?



(a) 37°

(b) 58°

(c) 79°

(d) 55°

Solución: Para hallar el valor de X , utilizaremos las propiedades de ángulos entre rectas paralelas ($L_1 \parallel L_2$):

1. **Ángulo suplementario de α :** Observemos que el ángulo interno superior formado por la transversal y L_1 es el suplemento de α :

$$\text{Ángulo interno} = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 143^\circ = 37^\circ.$$

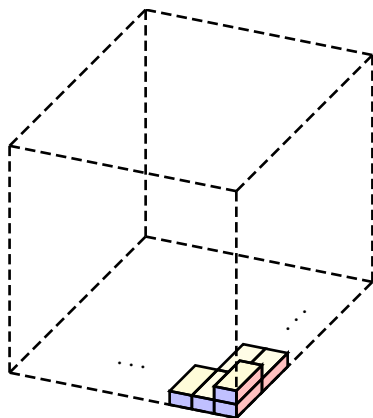
2. **Propiedad de ángulos alternos internos:** Trazando otra paralela a L_1 , que pase por el vértice del ángulo X , notamos que X es igual a la suma de los dos ángulos alternos internos situados entre las paralelas. Uno de estos ángulos es el suplemento calculado (37°) y el otro es $\beta = 21^\circ$.

Por lo tanto: $X = 37^\circ + \beta = 37^\circ + 21^\circ = 58^\circ$.

PROBLEMA 7.

Un artista debe hacer una escultura en forma de cubo macizo utilizando ladrillos que miden 6 cm de ancho, 9 cm de largo y 1 cm de alto. ¿Cuál es el menor número de ladrillos que necesita el artista para completar la escultura?

Nota: los ladrillos no se pueden partir y deben apilarse en una misma dirección como se muestra en la figura:



(a) 108

(b) 54

(c) 324

(d) 18

Solución: Para encontrar el número menor de ladrillos necesarios para formar un cubo, debemos determinar la arista mínima que debe tener dicho cubo, asegurando que las dimensiones de los ladrillos encajen perfectamente.

Las dimensiones de los ladrillos son 6 cm de ancho, 9 cm de largo y 1 cm de alto. Dado que los ladrillos no se pueden partir y deben orientarse en una misma dirección, la medida de la arista del cubo debe ser el **mínimo común múltiplo (m.c.m.)** de las tres dimensiones:

$$\text{m.c.m.}(6, 9, 1) = 18\text{ cm}.$$

Para determinar cuántos ladrillos se necesitan, calculamos cuántos caben en cada dimensión del cubo de 18 cm :

- A lo ancho: $18 \div 6 = 3$ ladrillos.
- A lo largo: $18 \div 9 = 2$ ladrillos.
- A lo alto: $18 \div 1 = 18$ ladrillos.

Finalmente, el número total de ladrillos es: $3 \times 2 \times 18 = 108$.

PROBLEMA 8.

¿Cuántas parejas ordenadas de enteros positivos (a, b) cumplen la siguiente expresión?

$$\frac{a}{36} = \frac{7}{b}$$

(a) 16

(b) 18

(c) 32

(d) 36

Solución: De la ecuación original, “multiplicando en cruz”, tenemos:

$$a \times b = 36 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 7^1.$$

Dado que el enunciado especifica que a y b deben ser enteros positivos, el problema consiste en encontrar todos los pares de factores cuyo producto sea 252. Cada divisor de 252 que se asigne a la variable a generará automáticamente un valor único para b . Por lo tanto, el número de parejas (a, b) es exactamente igual al **número total de divisores** de 252.

a	1	2	3	4	6	7	9	12	14
b	252	126	84	63	42	36	28	21	18

a	18	21	28	36	42	63	84	126	252
b	14	12	9	7	6	4	3	2	1

Existen 18 parejas ordenadas (a, b) que satisfacen la expresión.

PROBLEMA 9.

En una evaluación bimestral de matemáticas hay 12 preguntas numeradas del 1 al 12. Cada estudiante debe responder únicamente 8 preguntas, pero es obligatorio responder todas las preguntas impares. ¿De cuántas formas diferentes puede un estudiante seleccionar las 8 preguntas que debe responder?

(a) 10

(b) 15

(c) 20

(d) 30

Solución: Entre las 12 preguntas tenemos 6 impares: $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ y 6 pares: $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. Como es obligatorio responder todas las impares, el estudiante ya tiene seleccionadas 6 preguntas fijas. Para completar las 8 requeridas, debe elegir 2 preguntas adicionales de entre las 6 pares restantes. Dado que el orden de elección no importa, listamos las combinaciones posibles como conjuntos de dos elementos: $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{2, 8\}$, $\{2, 10\}$, $\{2, 12\}$, $\{4, 6\}$, $\{4, 8\}$, $\{4, 10\}$, $\{4, 12\}$, $\{6, 8\}$, $\{6, 10\}$, $\{6, 12\}$, $\{8, 10\}$, $\{8, 12\}$ y $\{10, 12\}$. Al contar estas opciones, encontramos que hay 15 formas diferentes de seleccionar las preguntas.

Tip Pro: El número combinatorio.

Para determinar la cantidad de formas de elegir k elementos de un conjunto con n elementos, **sin repeticiones y sin que importe el orden**, se utiliza el número combinatorio $\binom{n}{k}$, cuya fórmula general es:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Por ejemplo, para elegir 2 elementos de un total de 6, el cálculo se desarrolla de la siguiente manera:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot (6 - 2)!} = \frac{6!}{2! \cdot (4)!} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{(2 \times 1)(\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1})} = \frac{30}{2} = 15.$$

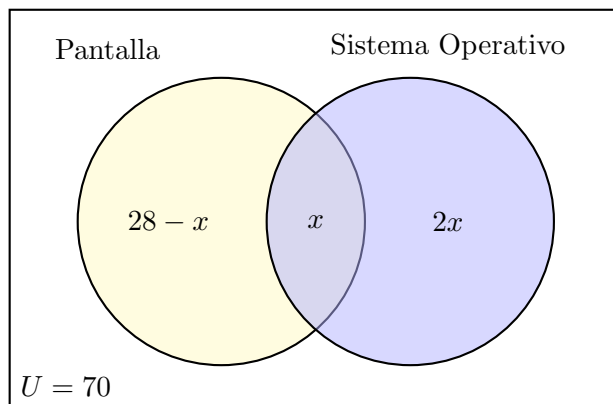
2.2. Prueba Selectiva

PROBLEMA 1.

Una empresa de tecnología está analizando 70 equipos celulares defectuosos con dos tipos de fallos: falla en la pantalla y falla en el sistema operativo. Se encontró que 28 equipos presentaron falla en la pantalla. Además, se sabe que el número de celulares que presentaron ambos fallos es un tercio del número total de celulares que tuvieron falla en el sistema operativo. ¿Cuántos celulares presentaron los dos tipos de fallo?

- (a) 14 (b) 10 (c) 21 (d) 18

Solución: Sea x el número de celulares con ambos fallos. A partir de la información suministrada, construimos el siguiente diagrama de Venn:



- Total de equipos con falla en la pantalla: 28.
- Total de equipos con falla solamente en la pantalla: $28 - x$.
- Total de equipos con falla en el sistema operativo: $3x$ (dado que x es un tercio de este total).
- Total de equipos con falla solamente en el sistema operativo: $3x - x = 2x$.

Dado que el total es 70 equipos, tenemos:

$$(28 - x) + x + 2x = 70$$

$$2x = 42 \implies x = 21.$$

Por lo tanto, 21 celulares presentaron ambos tipos de fallo.

PROBLEMA 2.

Los números enteros positivos se escriben en orden ascendente por renglones según la siguiente regla: En el primer renglón se escribe únicamente el 1 y en cada renglón, a partir del segundo, se escribe el doble de la cantidad de números escrita en el renglón anterior. De esta manera, los primeros cuatro renglones quedan así:

1,

2, 3,

4, 5, 6, 7,

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,

¿Cuál es la posición que ocupa (de izquierda a derecha) el número 2025 en el renglón donde queda escrito?

(a) 1001

(b) 1002

(c) 1003

(d) 1000

Solución: Primero analicemos en qué renglón queda escrito el 2025.

Cada renglón termina en una potencia de 2 menos 1. El renglón n termina en el número $2^n - 1$.

■ El renglón 10 termina en: $2^{10} - 1 = 1023$.

■ El renglón 11 termina en: $2^{11} - 1 = 2047$.

Dado que $1023 < 2025 \leq 2047$, el número 2025 **se encuentra en el renglón 11**.

Ahora, note que la posición de un número en su renglón se obtiene restándole el último número del renglón inmediatamente anterior. En nuestro caso:

$$2025 - 1023 = 1002.$$

Por lo tanto, el número 2025 ocupa la posición 1002 (de izquierda a derecha) en el renglón 11.

PROBLEMA 3.

La suma de 17 números enteros consecutivos es igual a 255. ¿Cuál es el valor del mayor de estos números?

Solución: Sean $n - 8, n - 7, n - 6, \dots, n - 1, n, n + 1, n + 2, n + 3, \dots, n + 8$, los 17 números enteros consecutivos (n es el término central, el noveno número).

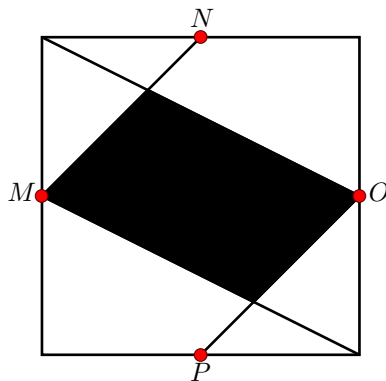
Observe que la suma de estos 17 números está dada por:

$$17n = 255,$$

de donde $n = 15$. Por lo tanto el mayor de los números es $n + 8 = 15 + 8 = 23$.

PROBLEMA 4.

En la siguiente figura se muestra el diseño de una tableta cuadrada de lado 6 cm . Los puntos M , N , O y P son los puntos medios de los correspondientes lados. ¿Cuál es el área de la tableta que lleva color negro?



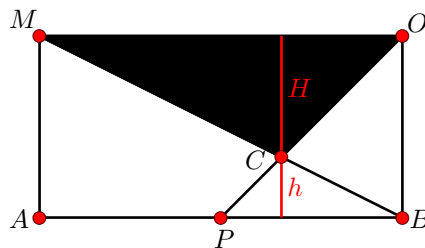
(a) 18 cm^2

(b) 8 cm^2

(c) 9 cm^2

(d) 12 cm^2

Solución: Considere la siguiente figura, que corresponde a la mitad inferior de la tableta cuadrada:



Note que los triángulos MCO y BCP son semejantes (sus ángulos internos correspondientes son iguales por ser opuestos por el vértice o alternos internos entre paralelas), con razón de semejanza $2 : 1$, pues $MO = 6\text{ cm}$ y $PB = 3\text{ cm}$. Entonces sus alturas correspondientes guardan esa proporción: $H = 2h$. Además, $H + h = OB = 3\text{ cm}$, entonces $H = 2\text{ cm}$ y $h = 1\text{ cm}$. Así, el área del triángulo

MOC es:

$$\frac{MO \times H}{2} = \frac{6 \times 2}{2} = 6 \text{ cm}^2.$$

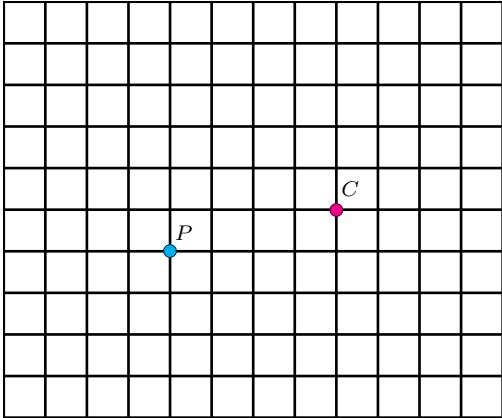
Por simetría, el área total de la región negra en la tableta es el doble del área del triángulo MOC , entonces el área de la tableta que lleva color negro es:

$$2 \times 6 = 12 \text{ cm}^2.$$

PROBLEMA 5.

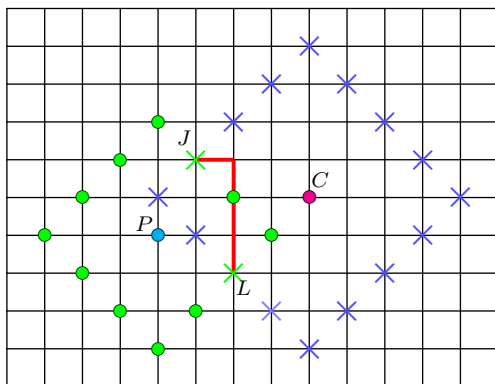
Las calles de una ciudad forman una cuadrícula, como se muestra en la figura. Lucía y Jerónimo viven en casas ubicadas en esquinas diferentes. Para llegar al colegio, situado en el punto C , cada uno debe caminar exactamente 4 cuadras desde su casa. Para llegar al parque, situado en el punto P , cada uno debe caminar exactamente 3 cuadras. ¿Cuántas cuadras debe recorrer Jerónimo para ir desde su casa hasta la de Lucía?

Nota: Tanto Jerónimo como Lucía siempre eligen la ruta más corta posible para ir de un lugar a otro.



- (a) 4
- (b) 6
- (c) 5
- (d) 3

Solución: Considere la siguiente ilustración en la que se han marcado con color verde todas las esquinas que están a 3 cuadras de P y con una $\times$ todas las esquinas que están a 4 cuadras de C :

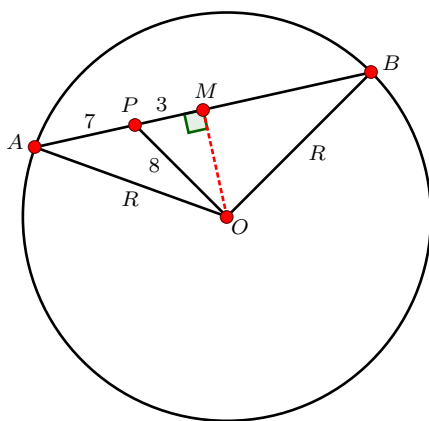


Solo dos puntos cumplen ambas condiciones simultáneamente. Dado que Jerónimo y Lucía viven en esquinas diferentes, dichos puntos corresponden a sus casas. Vemos que la distancia mínima entre las casas es de 4 cuadras (sobre la cuadrícula). Por lo tanto, Jerónimo debe recorrer 4 cuadras para ir desde su casa hasta la de Lucía.

PROBLEMA 6.

En un círculo con centro en O se traza una cuerda AB . Sea P un punto sobre la cuerda tal que $OP = 8$, $AP = 7$ y $PB = 13$. Si R es el radio del círculo, ¿cuál es el valor de R^2 ?

Solución: Considere la siguiente construcción en la que se ha trazado el segmento $\overline{OM}$ perpendicular a la cuerda $\overline{AB}$:



Dado que el triángulo $\triangle AOB$ es isósceles (sus lados $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son radios), la altura $\overline{OM}$ corta a la cuerda en su punto medio M . Además, como $AB = AP + PB = 7 + 13 = 20$, entonces $PM = AM - AP = 10 - 7 = 3$. Ahora, aplicando el

Teorema de Pitágoras en el triángulo PMO tenemos:

$$MO^2 + PM^2 = PO^2$$

$$MO^2 = 8^2 - 3^2 = 55.$$

Y, aplicando de nuevo el Teorema de Pitágoras en el triángulo BMO tenemos:

$$MO^2 + MB^2 = R^2$$

$$55 + 10^2 = R^2.$$

Por lo tanto, $R^2 = 55 + 100 = 155$.

PROBLEMA 7.

Si a , b y c son números enteros tales que, el mínimo común múltiplo entre a y b es 12, y el mínimo común múltiplo entre b y c es 15, ¿cuál es el mínimo valor posible que puede tener el mínimo común múltiplo de a y c ?

(a) 10

(b) 20

(c) 30

(d) 60

Solución: Para encontrar el mínimo valor de $m.c.m.(a, c)$, analicemos la descomposición en factores primos de los datos proporcionados:

■ $m.c.m.(a, b) = 12 = 2^2 \times 3^1$.

■ $m.c.m.(b, c) = 15 = 3^1 \times 5^1$.

Análisis de los factores de b : Observamos que el factor 2^2 aparece en el primer m.c.m. pero no en el segundo; por lo tanto, b no puede tener el factor 2. De igual forma, el factor 5 aparece en el segundo m.c.m. pero no en el primero, lo que indica que b tampoco puede tener el factor 5. El único factor común que b puede tener es el 3.

Determinación de a y c :

■ Como b no aporta el factor 2^2 , necesariamente a debe contener $2^2 = 4$.

■ Como b no aporta el factor 5, necesariamente c debe contener 5.

Para minimizar el $m.c.m.(a, c)$, tomamos los valores mínimos posibles que satisfagan las condiciones: $a = 4$ y $c = 5$. El factor 3 puede ser asignado a b ($b = 3$) para cumplir con las condiciones iniciales sin aumentar el valor de a o c . Por lo tanto, el mínimo valor posible para el $m.c.m.(a, c)$ es $m.c.m.(4, 5) = 20$.

PROBLEMA 8.

Daniel y Omar están jugando un videojuego educativo en el que acumulan puntos. Al terminar el juego, se descubre que la diferencia entre tres veces los puntos acumulados por Daniel, y los puntos acumulados por Omar es múltiplo de 4. Con esta información, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- (a) El número de puntos acumulados por cada uno es múltiplo de 2.
- (b) Daniel acumuló más puntos que Omar.
- (c) La diferencia entre los puntos acumulados por Daniel y los puntos acumulados por Omar también es múltiplo de 4.
- (d) La suma de los puntos acumulados por Daniel y Omar es par.

Solución: Sean D los puntos de Daniel y O los puntos de Omar. El enunciado establece que la diferencia entre tres veces los puntos de Daniel y los de Omar es un múltiplo de 4:

$$3D - O = 4k \quad (\text{donde } k \text{ es un entero}).$$

Para analizar la suma de los puntos, reescribimos $3D$ como $4D - D$:

$$(4D - D) - O = 4k$$

$$4D - (D + O) = 4k$$

$$4D - 4k = D + O$$

$$4(D - k) = D + O$$

El resultado $D + O = 4(D - k)$ demuestra que la suma de los puntos es un múltiplo de 4. Dado que todo múltiplo de 4 es divisible por 2, la suma de los puntos acumulados por Daniel y Omar es necesariamente un número par. La opción correcta es la (d).

Para demostrar por qué las demás opciones no son necesariamente verdaderas, utilizaremos contraejemplos:

- **Opción (a):** Es falsa, si $D = 3$ y $O = 1$ se cumple la condición inicial: $3(3) - 1 = 8$, el cual es múltiplo de 4, pero tanto 3 como 1 son números impares.

- **Opción (b):** Es falsa, pues si tomamos $D = 1$ y $O = 3$, se obtiene $3(1) - 3 = 0$ (múltiplo de 4), y en este caso Daniel tiene menos puntos que Omar.
- **Opción (c):** Es falsa, ya que si $D = 3$ y $O = 1$, la diferencia $D - O = 3 - 1 = 2$, y 2 no es múltiplo de 4.

PROBLEMA 9.

¿Para cuántos números enteros positivos k se cumple que $\frac{k^2 + 2025}{k}$ es también un número entero?

Solución: Observe que:

$$\frac{k^2 + 2025}{k} = \frac{k^2}{k} + \frac{2025}{k} = k + \frac{2025}{k}.$$

Dado que k es un entero positivo, la expresión será un número entero si k divide exactamente a 2025. Entonces, el problema se reduce a encontrar el número de divisores positivos de $2025 = 3^4 \times 5^2$.

El número 2025 tiene $(4 + 1)(2 + 1) = 15$ divisores positivos, estos son:

$$D_{2025} = \{1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 135, 225, 405, 675, 2025\}.$$

Por lo tanto, la expresión $\frac{k^2 + 2025}{k}$ es un número entero para 15 números enteros positivos k .

Tip Pro: Cálculo del número de divisores positivos

Para determinar la cantidad total de divisores positivos de un entero N , se realiza su descomposición en factores primos: $N = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$.

La cantidad de divisores está dada por el producto de los exponentes de sus factores primos **distintos**, incrementados en una unidad:

$$\text{Cantidad de divisores de } N = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_n + 1).$$

2.3. Prueba Final

PROBLEMA 1.

Miguel compró una bolsa con 2025 caramelos de cinco colores: 405 blancos, 403 amarillos, 411 rojos, 371 verdes y 435 cafés. Luego decidió comérselos de la siguiente manera: sin mirar, sacaba tres caramelos al azar. Si los tres eran del mismo color, se los comía; de lo contrario, los devolvía a la bolsa. Repitió este procedimiento hasta que solo quedaron tres caramelos en la bolsa. ¿De qué colores son los caramelos que quedaron en la bolsa?

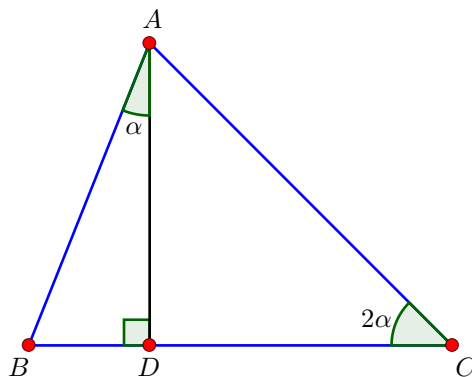
Solución: Para determinar cuáles son los caramelos que quedaron, observamos el residuo de cada cantidad al dividirla por 3, pues los caramelos solo se retiran en grupos de tres del mismo color:

- Caramelos blancos: $405 \div 3 = 135$, con residuo 0.
- Caramelos amarillos: $403 \div 3 = 134$ con un residuo de 1.
- Caramelos rojos: $411 \div 3 = 137$ con residuo 0.
- Caramelos verdes: $371 \div 3 = 123$ con un residuo de 2.
- Caramelos cafés: $435 \div 3 = 145$ con residuo 0.

Por lo anterior, los caramelos que quedan en la bolsa son: 1 amarillo y 2 verdes.

PROBLEMA 2.

En la siguiente figura, $\angle ACD = 2\angle BAD$. Si $BD = 8\text{ cm}$ y $DC = 12\text{ cm}$, ¿cuál es el área del triángulo ABC ?



Solución: Por suma de ángulos internos del triángulo ADC , se tiene que

$$\angle DAC = 180^\circ - 90^\circ - 2\alpha = 90^\circ - 2\alpha.$$

Así, $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = \alpha + (90^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha$.

Por suma de ángulos internos del triángulo ABD , tenemos que

$$\angle DBA = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha.$$

Por lo anterior, tenemos que $\angle CBA = \angle DBA = 90^\circ - \alpha = \angle BAC$, de donde deducimos que el triángulo ABC es isósceles, con $AC = BC$ (pues $\angle CBA = \angle BAC$).

Pero $BC = BD + DC = 8 + 12 = 20$, entonces $AC = 20 = BC$.

Usando el teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulo CDA , tenemos que $DC^2 + DA^2 = AC^2$, pero ya vimos que $AC = 20$ y tenemos del enunciado que $DC = 12$. De ahí que

$$DA = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16.$$

Observe que DA es una altura del triángulo ABC , pues es perpendicular a la base BC . Por ende, el área del triángulo ABC está dada por

$$\frac{BC \times DA}{2} = \frac{20 \times 16}{2} = 160 \text{ cm}^2.$$

PROBLEMA 3.

¿Cuántos números enteros positivos de cinco cifras, cumplen que el producto de sus dígitos es 2025?

Solución: Consideremos la descomposición prima de 2025:

$$2025 = 3^4 \times 5^2$$

Veamos las opciones para los dígitos de los números de cinco cifras que cumplen la condición. Dado que el factor 5 es primo, los factores 5^2 solo pueden obtenerse mediante dos dígitos 5. Los factores 3^4 deben distribuirse en las tres posiciones restantes usando dígitos del 1 al 9. Las únicas combinaciones posibles son:

♣ **Grupo A:** $\{5, 5, 9, 9, 1\}$

♣ **Grupo B:** $\{5, 5, 9, 3, 3\}$

Contemos los posibles números con los dígitos del Grupo A:

- El número **1** puede ocupar cualquiera de las 5 posiciones del número de cinco cifras.
- Una vez que el **1** está ubicado, quedan 4 espacios vacíos. Debemos elegir 2 de esos espacios para colocar los dígitos **5**. Las formas posibles de elegir 2 lugares de 4 son 6:
 - (Lugar 1 y 2), (Lugar 1 y 3), (Lugar 1 y 4)
 - (Lugar 2 y 3), (Lugar 2 y 4)
 - (Lugar 3 y 4)
- Los dos dígitos **9** se colocan automáticamente en los 2 lugares que sobran.

Así, por cada una de las 5 posiciones del dígito **1**, tenemos 6 formas de ubicar los dígitos **5**; por lo tanto, hay $5 \times 6 = 30$ posibles números con los dígitos del **Grupo A**.

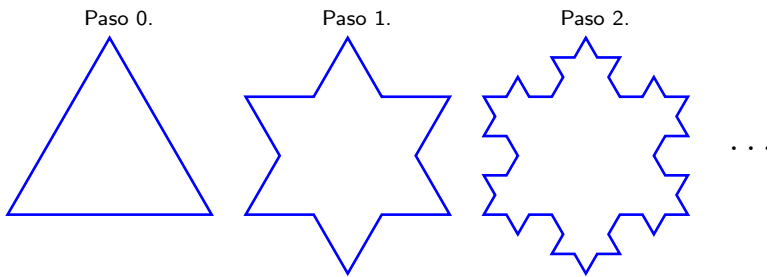
De manera análoga, se cuentan las 30 posibilidades con los dígitos del **Grupo B**. Por lo anterior, hay $30 + 30 = 60$ números enteros positivos de cinco cifras cuyo producto de dígitos es 2025.

PROBLEMA 4.

Koch construye copos de nieve en alambre para decorar su casa en Navidad, partiendo de un triángulo equilátero con 1 m de lado. El procedimiento de construcción es el siguiente:

- 1. Divide cada lado del triángulo en tres partes iguales y reemplaza el tercio central por dos segmentos de igual longitud que forman un triángulo equilátero saliente.
- 2. En los pasos siguientes, repite el mismo procedimiento en cada uno de los segmentos añadidos en el paso anterior, hasta lograr la figura deseada.

A continuación, se muestran los primeros pasos en la construcción de un copo de nieve:



- (a) ¿Cuántos lados tiene el copo de nieve en el paso 5?
- (b) ¿Cuál es la suma de los ángulos internos del copo de nieve en el paso 5?
- (c) ¿Cuál es el perímetro del copo de nieve en el paso 5?
- (d) ¿Cuál es el perímetro del copo de nieve en el paso n ?

Solución:

- (a) El copo de nieve inicia con 3 lados y en cada paso, cada lado se reemplaza por 4 segmentos (el lado se *fractura* en 4 segmentos).

Paso	Número de lados
0 (Inicio)	3
1	$3 \times 4 = 12$
2	$(3 \times 4) \cdot 4 = 48$
3	$(3 \times 4^2) \cdot 4 = 192$
...	...
n	$(3 \times 4^{n-1}) \cdot 4 = 3 \cdot 4^n$

Por lo tanto, el número total de lados en el paso n es $3 \cdot 4^n$. Para $n = 5$, tenemos:

$$3 \times 4^5 = 3 \times 1024 = 3072.$$

- (b) Recordemos que la suma de ángulos internos en un polígono de t lados es $180^\circ \times (t - 2)$. Para nuestro copo en el paso 5, con $t = 3072$ lados, la suma de ángulos internos es:

$$180^\circ \times (3072 - 2) = 180^\circ \times 3070 = 552600^\circ.$$

- (c) En el paso 0, el perímetro es simplemente

$$P_0 = 3 \times 1 = 3.$$

En cada paso, el número de lados se multiplica por 4, pero la longitud de cada lado se divide por 3 (porque cada lado se reemplaza por 4 segmentos de longitud un tercio).

Entonces, el perímetro en el paso n es:

$$P_n = (\text{número de lados}) \times (\text{longitud de cada lado})$$

$$P_n = 3 \times 4^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Para $n = 5$,

$$P_5 = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{4^5}{3^4} m.$$

- (d) Como se explicó antes, la fórmula general para el perímetro en el paso n es:

$$P_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n = \frac{4^n}{3^{n-1}} m.$$

Capítulo 3

Nivel Avanzado

3.1. Prueba Clasificatoria

PROBLEMA 1.

Cada término de la sucesión $5, 11, 17, 23, \dots$ es 6 unidades mayor que el anterior. ¿Cuál es el primer término de la sucesión que supera a 2025?

(a) 2026

(b) 2027

(c) 2029

(d) 2031

Solución 1: Observe que a todos los términos de la sucesión les falta 1 para ser un múltiplo de 6. Por lo tanto, debemos encontrar el primer número mayor que 2025 que cumpla esta condición.

Dividimos 2025 entre 6 para localizar los múltiplos cercanos:

$$2025 \div 6 = 337,5$$

Entonces los múltiplos de 6 más cercanos a 2025 son: $337 \times 6 = 2022$ y $338 \times 6 = 2028$. Luego, en la sucesión están los términos consecutivos 2021 y 2027.

Puesto que 2021 no supera a 2025, el primer término de la sucesión que cumple la condición de la pregunta es 2027.

Solución 2: La sucesión es aritmética con primer término $a_1 = 5$ y diferencia común $d = 6$. La fórmula para el término general es:

$$a_n = 5 + (n - 1)6 = 6n - 1$$

Buscamos el primer valor de n tal que $a_n > 2025$:

$$6n - 1 > 2025$$

$$6n > 2026$$

$$n > 337,66 \dots$$

El primer entero que cumple la condición es $n = 338$. Calculamos el valor de dicho término:

$$a_{338} = 6(338) - 1 = 2027.$$

Por lo tanto, el primer término de la sucesión que supera a 2025 es 2027.

PROBLEMA 2.

Si la factorización del polinomio $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ es:

$$(x - a)(x - b)(x - c),$$

¿cuál es el valor de $a \times b \times c$?

(a) 3

(b) -4

(c) 17

(d) -12

Solución 1: Note que al multiplicar los factores $(x - a)(x - b)(x - c)$, el término independiente o constante se obtiene al multiplicar $(-a) \cdot (-b) \cdot (-c)$, lo que resulta en $-(a \cdot b \cdot c)$.

Como el término independiente del polinomio original es 12, podemos igualar ambas expresiones:

$$-(a \times b \times c) = 12$$

$$a \times b \times c = -12$$

Solución 2: Para hallar el valor de $a \times b \times c$, factorizaremos el polinomio agrupando sus términos en dos pares:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x^3 - 3x^2) + (-4x + 12)$$

Agrupamos

$$= x^2(x - 3) - 4(x - 3)$$

Extraemos los factores comunes x^2 y -4 .

$$= (x^2 - 4)(x - 3)$$

Factor común $(x - 3)$

$$= (x - 2)(x + 2)(x - 3)$$

Diferencia de cuadrados

Comparando con la forma $(x - a)(x - b)(x - c)$, identificamos que los valores de a , b y c son, en algún orden, 2, -2 y 3. Por tanto, su producto es:

$$a \times b \times c = (2) \times (-2) \times (3) = -12.$$

PROBLEMA 3.

Los elementos del conjunto $U = \{a, b, c, d, e\}$ son números enteros. Al formar todos los posibles subconjuntos con dos elementos de U y sumar los elementos de cada uno, se obtienen los siguientes resultados:

$$-8, -1, 1, 4, 6, 10, 12, 13, 19, 24.$$

¿Cuál es la suma de los elementos de U ?

(a) 80

(b) 20

(c) 40

(d) 16

Solución: El conjunto $U = \{a, b, c, d, e\}$ tiene 5 elementos. Al formar todos los subconjuntos posibles de dos elementos (que son $\binom{5}{2} = 10$ combinaciones), cada número del conjunto aparece exactamente en 4 parejas. Por ejemplo, el elemento a se suma con b, c, d y e .

Si denotamos como S a la suma de todos los elementos de U ($S = a + b + c + d + e$), la suma de los 10 resultados obtenidos debe ser igual a 4 veces S :

$$4(a + b + c + d + e) = -8 - 1 + 1 + 4 + 6 + 10 + 12 + 13 + 19 + 24$$
$$4S = 80.$$

Por lo tanto, la suma de los elementos del conjunto U es $S = \frac{80}{4} = 20$.

PROBLEMA 4.

En un triángulo isósceles, uno de sus lados mide el triple de otro. Si las longitudes de todos sus lados son números enteros (en centímetros), ¿cuál de las siguientes opciones podría ser el perímetro del triángulo?

(a) 56 cm

(b) 45 cm

(c) 81 cm

(d) 32 cm

Solución: Sean x y $3x$ las dos medidas mencionadas. En un triángulo isósceles, dos lados deben ser iguales, lo que nos deja dos configuraciones posibles para las medidas de los tres lados:

Caso 1. $(x, x, 3x)$ Según la *desigualdad triangular*, la suma de dos lados siempre debe ser mayor que el tercero. Aquí $x + x = 2x$, que es menor que $3x$. Por lo tanto, este triángulo **no puede existir**.

Caso 2. $(3x, 3x, x)$ En este caso, $3x + x > 3x$ y $3x + 3x > x$. Las condiciones se cumplen, por lo que esta es la **única configuración válida**.

Entonces el perímetro P del triángulo está dado por:

$$P = 3x + 3x + x = 7x.$$

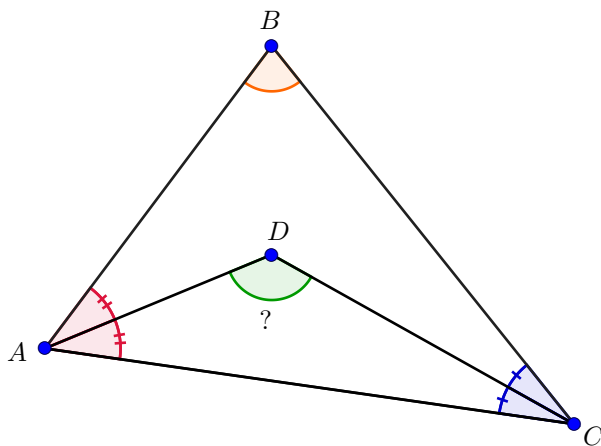
Dado que las longitudes son números enteros, x debe ser un entero, lo que implica que el perímetro debe ser un **múltiplo de 7**. Revisando las opciones:

- (a) $56 = 7 \times 8$ ✓
- (b) 45 (No es divisible por 7)
- (c) 81 (No es divisible por 7)
- (d) 32 (No es divisible por 7)

Por lo tanto, la opción correcta es (a) 56 cm.

PROBLEMA 5.

En la figura, se cumple que $\angle DAB = \angle CAD$ y $\angle BCD = \angle DCA$. Si $\angle ABC = 76^\circ$, ¿cuál es el valor de $\angle ADC$?



(a) 152°

(b) 104°

(c) 128°

(d) 142°

Solución: Sean $\angle DAB = \angle CAD = \alpha$ y $\angle BCD = \angle DCA = \beta$. Sabemos que la suma de los ángulos internos de un triángulo 180° , aplicando esto al triángulo $\triangle ABC$:

$$2\alpha + 2\beta + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$2(\alpha + \beta) + 76^\circ = 180^\circ,$$

$$2(\alpha + \beta) = 104^\circ,$$

$$\alpha + \beta = 52^\circ.$$

Finalmente, para el triángulo $\triangle ADC$, tenemos:

$$\alpha + \beta + \angle ADC = 180^\circ$$

$$52^\circ + \angle ADC = 180^\circ$$

$$\angle ADC = 128^\circ.$$

PROBLEMA 6.

Gabriela y Andrés dibujaron cada uno un triángulo equilátero. El perímetro del triángulo de Gabriela es el doble del perímetro del triángulo de Andrés. Si el área del triángulo de Andrés es 7 cm^2 , ¿cuál es el área del triángulo de Gabriela?

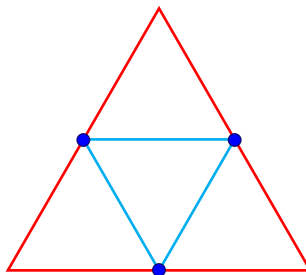
(a) 21 cm^2

(b) 14 cm^2

(c) 35 cm^2

(d) 28 cm^2

Solución: Considere la siguiente figura en la que el triángulo grande de Gabriela se dividió en 4 triángulos idénticos al de Andrés, usando los puntos medios de sus lados.



Por lo tanto, área del triángulo de Gabriela es $4 \times 7 = 28 \text{ cm}^2$.

PROBLEMA 7.

Si N es el mayor entero, menor que 2025, tal que al dividir N entre 11, el residuo es 2, ¿cuál es la suma de las cifras de N ?

- (a) 8 (b) 24 (c) 17 (d) 6

Solución: Dado que N deja residuo 2 al dividirse entre 11, entonces $N = 11k + 2$, donde k es un entero (el cociente de la división). Para que N sea el mayor entero menor que 2025, debe cumplirse:

$$11k + 2 < 2025$$

$$11k < 2023$$

$$k < \frac{2023}{11} \approx 183,9$$

Como buscamos el valor máximo de N , elegimos el mayor entero posible para k , que es $k = 183$. Calculamos entonces el valor de N :

$$N = 11(183) + 2 = 2015.$$

Por tanto, la suma de las cifras de N es: $2 + 0 + 1 + 5 = 8$.

PROBLEMA 8.

Lucía construye una sucesión numérica siguiendo esta regla: el primer término es 2, el segundo es 9 y, a partir del tercero, cada término es igual al producto de los dos términos inmediatamente anteriores. ¿Cuántos divisores positivos tiene el séptimo número de la sucesión?

- (a) 21 (b) 80 (c) 102 (d) 208

Solución: Siguiendo la regla de Lucía, calculamos los términos expresándolos siempre en sus factores primos (2 y 3) para facilitar el conteo final:

$$\blacksquare a_1 = 2^1$$

$$\blacksquare a_5 = 2^2 \times 3^6$$

$$\blacksquare a_2 = 3^2$$

$$\blacksquare a_6 = 2^3 \times 3^{10}$$

$$\blacksquare a_3 = 2^1 \times 3^2$$

$$\blacksquare a_7 = 2^5 \times 3^{16}$$

$$\blacksquare a_4 = 2^1 \times 3^4$$

Para hallar el número de divisores de a_7 , utilizamos la fórmula basada en los expo-

nentes de su descomposición prima. Si un número es de la forma $p^a \cdot q^b$, el total de sus divisores positivos es $(a + 1)(b + 1)$:

$$\text{Divisores de } a_7 = (5 + 1) \times (16 + 1) = 6 \times 17 = 102.$$

Tip Pro: Cálculo del número de divisores positivos

Para determinar la cantidad total de divisores positivos de un entero N , se realiza su descomposición en factores primos: $N = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$.

La cantidad de divisores está dada por el producto de los exponentes de sus factores primos **distintos**, incrementados en una unidad:

$$\text{Cantidad de divisores de } N = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_n + 1).$$

PROBLEMA 9.

En un sistema de control para ingresar a un laboratorio, las claves deben ser números capicúa, impares y de cuatro cifras. ¿Cuántas claves diferentes se pueden generar con estas condiciones?

Nota: Un número se llama capicúa si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo, 1221 y 7337 son números capicúa.

(a) 45

(b) 50

(c) 1120

(d) 2500

Solución: Un número capicúa de cuatro cifras tiene la forma $ABBA$. Para determinar cuántas claves existen, analizamos las restricciones de cada cifra:

Cifra A Para que el número sea de cuatro cifras, $A \neq 0$. Además, para que el número sea **impar**, la última cifra debe ser impar (1, 3, 5, 7, 9). Al ser capicúa, la primera y última cifra coinciden, por lo que existen 5 opciones para A .

Cifra B Las cifras centrales no tienen restricciones adicionales, por lo que pueden tomar cualquier valor del 0 al 9. Esto nos da 10 opciones para B .

Por lo tanto, dado que por cada elección de A tenemos 10 opciones para B , el total de claves es:

$$5 \times 10 = 50.$$

3.2. Prueba Selectiva

PROBLEMA 1.

¿Cuál es la suma de todos los números reales x que satisfacen la siguiente ecuación?

$$3^{x^2-11x+26} = \frac{1}{9}$$

(a) 26

(b) 28

(c) 11

(d) 7

Solución: Igualamos las bases de ambos miembros de la igualdad para trabajar con los exponentes:

$$3^{x^2-11x+26} = \frac{1}{9}$$

$$3^{x^2-11x+26} = 3^{-2}$$

Ya que $\frac{1}{9} = 3^{-2}$

$$x^2 - 11x + 26 = -2$$

Igualamos los exponentes

$$x^2 - 11x + 28 = 0$$

Ecuación cuadrática resultante

$$(x-7)(x-4) = 0$$

Factorizando el trinomio

De la factorización obtenemos las soluciones: $x_1 = 7$ y $x_2 = 4$. Por tanto, la suma solicitada es: $7 + 4 = 11$.

Truco Pro (Relaciones de Vieta): En una ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

la suma de las raíces (soluciones) es siempre $-b/a$. En este caso, la ecuación es $x^2 - 11x + 28 = 0$, entonces la suma de sus soluciones es: $-(-11)/1 = 11$.

PROBLEMA 2.

Si a y b son números reales tales que $|a-4| = |a-10|$ y $|b-a| = |b-5|$, ¿cuál es el valor de $a+b$?

(a) 9

(b) 13

(c) 15

(d) 6

Solución: Recordemos que la expresión $|x-y|$ representa la distancia entre los puntos x y y en la recta numérica.

La $|a-4| = |a-10|$ indica que a es un punto que equidista de 4 y 10. Por lo tanto,

a es el punto medio entre 4 y 10, esto es:

$$a = \frac{4 + 10}{2} = 7.$$

Sustituimos $a = 7$ en la segunda ecuación: $|b - 7| = |b - 5|$. Esto significa que b equidista de 7 y 5, luego,

$$b = \frac{7 + 5}{2} = 6.$$

Por lo anterior, el valor de $a + b$ es $7 + 6 = 13$.

PROBLEMA 3.

Victoria suma todos los números enteros del 1 al n y obtiene 210. Si sumara los cubos de dichos números, es decir,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3,$$

¿qué valor obtendría?

Solución: Exploremos la relación entre la suma de los números enteros de 1 al n con la suma de sus cubos:

n	Suma simple	Suma de cubos	Relación
1	1	$1^3 = 1$	$1^2 = 1$
2	$1 + 2 = 3$	$1^3 + 2^3 = 9$	$3^2 = 9$
3	$1 + 2 + 3 = 6$	$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$	$6^2 = 36$
4	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$	$10^2 = 100$
5	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225$	$15^2 = 225$

Se observa claramente que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.$$

Aplicando esto al problema:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (210)^2 = 44100.$$

Truco Pro (Suma de cubos): El cuadrado de la suma de los primeros n números enteros positivos es exactamente igual a la suma de sus

cubos:

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

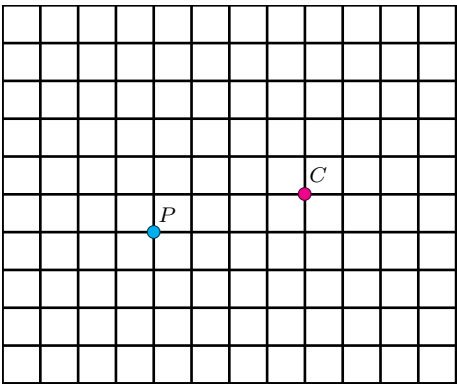
Dado que la suma simple es $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$, la fórmula compacta para la suma de los primeros n cubos es:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n + 1)}{2} \right]^2.$$

PROBLEMA 4.

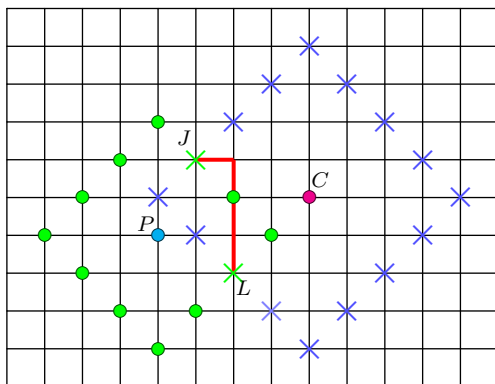
Las calles de una ciudad forman una cuadrícula, como se muestra en la figura. Lucía y Jerónimo viven en casas ubicadas en esquinas diferentes. Para llegar al colegio, situado en el punto C , cada uno debe caminar exactamente 4 cuadras desde su casa. Para llegar al parque, situado en el punto P , cada uno debe caminar exactamente 3 cuadras. ¿Cuántas cuadras debe recorrer Jerónimo para ir desde su casa hasta la de Lucía?

Nota: Tanto Jerónimo como Lucía siempre eligen la ruta más corta posible para ir de un lugar a otro.



- (a) 4
- (b) 3
- (c) 6
- (d) 5

Solución: Considere la siguiente ilustración en la que se han marcado con color verde todas las esquinas que están a 3 cuadras de P y con una $\times$ todas las esquinas que están a 4 cuadras de C :



Solo dos puntos cumplen ambas condiciones simultáneamente. Dado que Jerónimo y Lucía viven en esquinas diferentes, dichos puntos corresponden a sus casas. Vemos que la distancia mínima entre las casas es de 4 cuadras (sobre la cuadrícula). Por lo tanto, Jerónimo debe recorrer 4 cuadras para ir desde su casa hasta la de Lucía.

PROBLEMA 5.

En un triángulo ABC , los puntos E y F están sobre sus lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente; de tal manera que $AE = 6\text{ cm}$, $EB = 3\text{ cm}$, $AF = 4\text{ cm}$ y $FC = 8\text{ cm}$. Si el área de $EBCF$ es 35 cm^2 , ¿cuál es el área del triángulo ABC ?

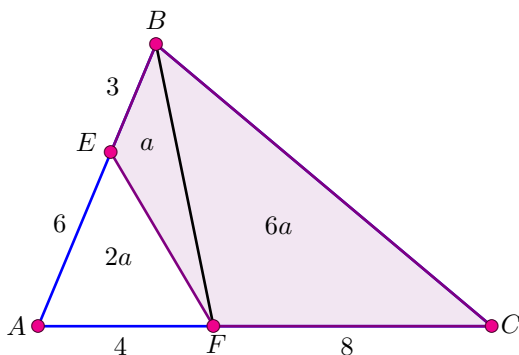
(a) 40 cm^2

(b) 52 cm^2

(c) 45 cm^2

(d) 70 cm^2

Solución: Considere la siguiente construcción con la información del problema, en la que se ha trazado adicionalmente el segmento $\overline{BF}$ para dividir el área total en triángulos más simples.



Sea a el área del triángulo $\triangle BEF$. Dado que el triángulo $\triangle EAF$ tiene la misma

altura respecto a F pero su base ($AE = 6\text{ cm}$) es el doble que la del triángulo $\triangle BEF$ ($EB = 3\text{ cm}$), su área es $2a$. Así, el área del triángulo $\triangle BAF$ es $3a$.

El triángulo $\triangle BFC$ y el triángulo $\triangle BAF$ comparten la altura desde B . Como la base $FC = 8\text{ cm}$ es el doble de $AF = 4\text{ cm}$, entonces el área del triángulo $\triangle BFC$ es el doble del área del triángulo $\triangle BAF$, es decir $2 \times 3a = 6a$.

El área del cuadrilátero $EBCF$ es la suma de las áreas de los triángulos $\triangle BEF$ y $\triangle BFC$:

$$a + 6a = 7a = 35\text{ cm}^2 \implies a = 5\text{ cm}^2.$$

Por lo tanto, el área total del triángulo $\triangle ABC$ es:

$$2a + a + 6a = 9a = 9(5) = 45\text{ cm}^2.$$

Propiedad clave: Si dos triángulos comparten la misma altura, la razón de sus áreas es equivalente a la razón de sus bases.

PROBLEMA 6.

Los tres lados de un triángulo rectángulo miden: a , $a + b$ y $a + 2b$ unidades, con a y b números reales. Si la hipotenusa del triángulo mide 35 unidades, ¿cuál es el perímetro del triángulo?

Solución: En un triángulo rectángulo, la hipotenusa es el lado mayor. Por tanto, establecemos que $a + 2b = 35$. Aplicamos el Teorema de Pitágoras para relacionar los lados:

$$\begin{aligned}(a + 2b)^2 &= a^2 + (a + b)^2 \\ a^2 + 4ab + 4b^2 &= a^2 + a^2 + 2ab + b^2 \\ a^2 - 2ab - 3b^2 &= 0 \\ (a - 3b)(a + b) &= 0\end{aligned}$$

De la última ecuación $a = 3b$ o $a = -b$. Pero, como los lados son positivos, la única relación válida es $a = 3b$. Sustituimos $a = 3b$ en la medida de la hipotenusa:

$$a + 2b = 3b + 2b = 5b = 35.$$

De ahí que $b = 7$ y $a = 3(7) = 21$.

Finalmente, el perímetro del triángulo es la suma de sus lados:

$$a + (a + b) + (a + 2b) = 21 + 28 + 35 = 84.$$

Truco Pro (Triángulo 3-4-5): Siempre que los lados de un triángulo rectángulo estén en progresión aritmética (como $a, a + b, a + 2b$), el triángulo es semejante al triángulo Pitagórico de lados 3, 4 y 5. Como la hipotenusa es $35 = 5 \times 7$, los otros lados son $3 \times 7 = 21$ y $4 \times 7 = 28$. ¡El perímetro se halla al instante!

PROBLEMA 7.

Sea P el producto de los primeros 2025 enteros positivos impares, esto es

$$P = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times 2025.$$

¿Cuál es la cifra de las unidades del número $(P + 2)^{134}$?

(a) 3

(b) 7

(c) 9

(d) 5

Solución: Note que P es múltiplo de 5 pero no es par. Por lo tanto, su dígito de las unidades es 5 y, en consecuencia, $P + 2$ termina en 7. Para hallar el dígito de las unidades de $(P + 2)^{134}$, observamos el patrón cíclico de las unidades de las potencias de 7:

Potencias de 7 El último dígito de 7^n se repite cada cuatro potencias, de acuerdo con el siguiente ciclo:

- $7^1 \rightarrow 7$
- $7^2 \rightarrow 9$
- $7^3 \rightarrow 3$
- $7^4 \rightarrow 1$

Dividimos el exponente 134 entre 4:

$$134 = 4 \times 33 + 2.$$

El residuo es 2, lo que corresponde a la segunda posición del ciclo. Por lo tanto, la cifra de las unidades de $(P + 2)^{134}$ es 9.

Truco Pro: Potencias y Cifras Terminales: Para descubrir la última cifra de la potencia de un número entero N , basta con analizar la

potencia de la cifra de las unidades de N . Esto es:

$$\text{Unidades } N^k = \text{Unidades } u^k,$$

donde u es el dígito de las unidades de N y k entero positivo.

Ejemplo: Para calcular las unidades de 2025^{2026} , solo nos fijamos en las potencias de 5. Como cualquier potencia de 5 termina en 5, sabemos que el número completo terminará en 5.

PROBLEMA 8.

Si n es el menor entero positivo tal que $n!$ es divisible por 2025, ¿cuál es la suma de las cifras de $\frac{n!}{2025}$?

Recuerde que $n!$ representa el producto de todos los enteros desde 1 hasta n , es decir:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

(a) 10

(b) 126

(c) 27

(d) 19

Solución: La descomposición de 2025 en sus factores primos es:

$$2025 = 3^4 \times 5^2.$$

Buscamos el menor $n!$ que contenga al menos cuatro factores 3 y dos factores 5:

- Para obtener 5^2 , n debe ser al menos 10 (factores 5 y 10).
- En $10!$, los factores 3 provienen de 3, 6 y 9, aportando 1, 1 y 2 factores respectivamente, sumando 4.

Así, el menor entero es $n = 10$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{10!}{2025} &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3^4 \times 5^2} \\ &= \frac{(5 \cdot 2) \cdot (3^2) \cdot 8 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3^4 \cdot 5^2} \\ &= 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 1792. \end{aligned}$$

Finalmente, la suma de las cifras es $1 + 7 + 9 + 2 = 19$.

PROBLEMA 9.

Edwin organizó una gran fiesta para celebrar su cumpleaños. Para sus invitados, ofreció jugos de tres sabores distintos: naranja, fresa y mora. En un momento de la fiesta llegaron sus 5 compañeros del colegio. ¿De cuántas maneras distintas puede Edwin servir 5 vasos de jugo, sin importar el orden y sin mezclar sabores en un mismo vaso?

Solución: Para visualizar las formas de servir los 5 vasos de 3 sabores distintos, utilizamos el método de *Barras y Estrellas*:

- Representamos los 5 vasos con estrellas (★).
- Usamos barras (|) para separar los sabores. Como hay 3 sabores, necesitamos $3 - 1 = 2$ barras.

Cualquier combinación posible es una ordenación de 7 símbolos (5 estrellas y 2 barras). Por ejemplo:

★★ ★ ★★	(2 Naranja, 1 Fresa, 2 Mora)
★★ ★ ★★	(0 Naranja, 3 Fresa, 2 Mora)
★★ ★★ ★	(2 Naranja, 0 Fresa, 3 Mora)

Con lo anterior, el número total de maneras es el número de formas de elegir las posiciones de las 2 barras entre los 7 lugares (objetos) disponibles:

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} = 21.$$

Por lo tanto, existen 21 maneras distintas de servir los jugos.

Truco Pro: En general, para repartir k objetos idénticos en n categorías, se puede usar la fórmula:

$$\binom{k+n-1}{k}.$$

En nuestro caso, con $k = 5$ (número de vasos a servir) y $n = 3$ (sabores o categorías disponibles):

$$\binom{5+3-1}{5} = \binom{7}{5} = 21.$$

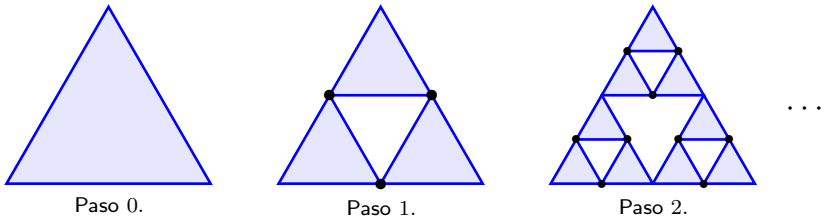
3.3. Prueba Final

PROBLEMA 1.

Sierpinski construye un tablero para un juego de mesa partiendo de una lámina de madera en forma de triángulo equilátero con 1 m de lado. El procedimiento de construcción es el siguiente:

1. Une los puntos medios de los lados del triángulo y elimina el triángulo central que se forma.
2. Repite el mismo procedimiento en cada uno de los tres triángulos restantes.
3. Continúa este proceso, con los triángulos que van quedando, hasta alcanzar el nivel de detalle deseado.

A continuación se muestran los primeros pasos en la construcción del tablero:



- (a) ¿Cuántas casillas tiene el tablero en el paso 5?
- (b) ¿Cuál es el área de cada casilla del tablero en el paso 5?
- (c) ¿Cuál es el área total del tablero (suma de las áreas de sus casillas) en el paso n ?

Solución:

- (a) En cada paso del proceso de construcción del tablero, cada casilla (triángulo) se subdivide en 3 casillas nuevas al eliminar el triángulo central y quedar los 3 triángulos restantes.

Por lo tanto, el número de casillas en el paso n es 3^n .

En particular, en el paso $n = 5$, tenemos $3^5 = 243$ casillas.

- (b) El área inicial del triángulo equilátero de lado 1 m es

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

En cada paso, el triángulo se divide en 4 partes iguales (los 3 triángulos que quedan y el que se elimina), cada uno con área igual a $\frac{1}{4}$ del área del triángulo anterior.

Por lo tanto, el área de cada casilla en el paso n es:

$$A_n = \frac{A_0}{4^n} = \frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}},$$

En particular, para $n = 5$, tenemos que el área de cada casilla es:

$$A_5 = \frac{\sqrt{3}}{4^6} = \frac{\sqrt{3}}{4096} m^2.$$

- (c) La suma de las áreas de todas las casillas es el número de casillas por el área de cada casilla:

$$S_n = 3^n \times \frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{\sqrt{3}}{4} m^2.$$

PROBLEMA 2.

Determinar todos los enteros n para los cuales la expresión

$$\frac{n+11}{\sqrt{n-1}}$$

es un entero.

Solución: Sea $k = \sqrt{n-1}$. Como n es entero, para que la expresión sea al menos racional, k debe ser un entero positivo. Entonces, podemos escribir:

$$n-1 = k^2 \implies n = k^2 + 1, \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

La expresión se transforma en:

$$\frac{n+11}{\sqrt{n-1}} = \frac{k^2+1+11}{k} = \frac{k^2+12}{k} = k + \frac{12}{k}.$$

Para que lo anterior sea un entero, $\frac{12}{k}$ debe ser un entero, es decir, k debe dividir a 12.

Los divisores positivos de 12 son:

$$k \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

Finalmente, para cada valor de k , calculamos $n = k^2 + 1$. Por lo tanto, los valores enteros n que satisfacen la condición son:

$$2, \quad 5, \quad 10, \quad 17, \quad 37, \quad 145.$$

PROBLEMA 3.

En un videojuego, un equipo gana 24 gemas durante un torneo. Estas gemas deben ser repartidas entre los 5 jugadores del equipo, cumpliendo las siguientes condiciones:

1. Cada jugador debe recibir al menos 2 gemas.
2. Ningún jugador puede recibir más de 10 gemas.

¿De cuántas formas diferentes puede realizarse esta distribución?

Solución: Si cada jugador recibe al menos 2 gemas, ya hemos repartido 10. Restan $24 - 10 = 14$ gemas por distribuir entre los 5 jugadores. Usemos 14 estrellas (★) para representar las gemas y 4 barras (|) para separar a los 5 jugadores. De esta manera podemos representar los repartos de las gemas adicionales entre los cinco jugadores, así:

$$\underbrace{\star\star\star}_{P_1} \mid \underbrace{\star\star}_{P_2} \mid \underbrace{\star\star\star\star\star\star}_{P_3} \mid \underbrace{\star\star\star}_{P_5}.$$

En este ejemplo:

- El jugador P_1 recibe 3 adicionales (Total: 5)
- El jugador P_2 recibe 2 adicionales (Total: 4)
- El jugador P_3 recibe 6 adicionales (Total: 8)
- El jugador P_4 recibe 0 adicionales (Total: 2)
- El jugador P_5 recibe 3 adicionales (Total: 5)

Note que, el número de formas de repartir las 14 gemas a los 5 jugadores corresponde a la forma de organizar las 4 barras entre las 18 posiciones (objetos) lo cuál podemos calcular así:

$$\binom{18}{4} = 3060.$$

Como ningún jugador puede recibir más de 10 gemas, debemos descontar los repartos que exceden este límite. Por ejemplo, en nuestro conteo inicial de 3060 formas, incluimos casos como:

$$\| \underbrace{\star\star\star\star\star\star\star\star\star}_{P_3} \mid \underbrace{\star\star\star\star}_{P_4} \mid \underbrace{\star}_{P_5} \cdot$$

Aquí, el jugador P_3 recibe 9 gemas adicionales que sumadas a las 2 que recibió al inicio, tendría un total de 11 gemas. Como esto supera el máximo permitido de 10, este reparto debe ser restado del total.

Contemos los casos inválidos: Si fijamos 9 gemas a un jugador, quedan "5 estrellas y 4 barras", así los casos inválidos por jugador están dados por:

$$\binom{5+4}{4} = \binom{9}{4} = 126.$$

Multiplicamos por los 5 jugadores posibles: $126 \times 5 = 630$.

Nota: No consideramos los casos donde dos jugadores exceden el límite simultáneamente porque necesitaríamos al menos $9+9 = 18$ gemas adicionales, y solo tenemos 14.

Por lo anterior, el número total de formas de repartir las gemas es:

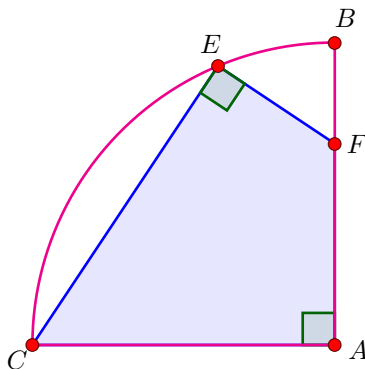
$$3060 - 630 = 2430.$$

PROBLEMA 4.

En la siguiente figura, el cuadrilátero $EFAC$ está inscrito en un cuarto de circunferencia con centro en el punto A y extremos en los puntos B y C .

Se sabe que:

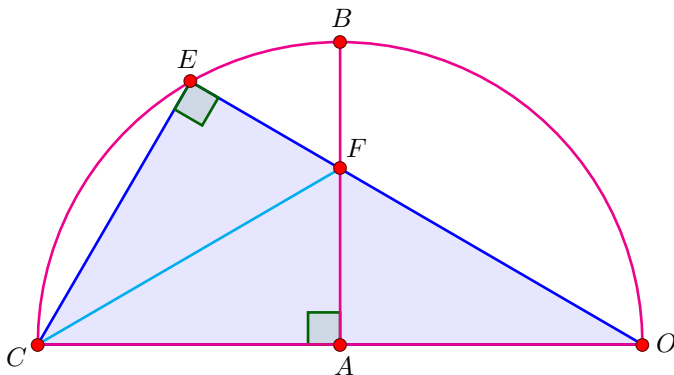
- $\angle CEF = 90^\circ$,
- $EF = 5 \text{ cm}$,
- $CE = 12 \text{ cm}$.



¿Cuál es el perímetro del cuadrilátero $EFAC$?

Solución: El perímetro del cuadrilátero $EFAC$ está dado por $EC + CA + AF + EF$.

Ya conocemos el valor de EF y de EC . Encontremos el valor de CA y de AF .
 Como $\angle CEF = 90^\circ$, entonces podemos extender el segmento $\overline{EF}$ hasta el punto O de manera que $\overline{CO}$ es diámetro de la semicircunferencia con centro en A y radio CA , como se muestra en la figura.



Usando el Teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulo CEF , tenemos que:

$$CE^2 + EF^2 = CF^2$$

$$CF = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm.}$$

Pero, note que F es un punto sobre la mediatriz del segmento $\overline{CO}$, entonces $CF = FO = 13 \text{ cm}$, y por lo tanto $EO = EF + FO = 5 + 13 = 18 \text{ cm}$.

Usando de nuevo el Teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulo CEO , se tiene que:

$$CE^2 + OE^2 = CO^2$$

$$CO = \sqrt{12^2 + 18^2} = 6\sqrt{13} \text{ cm.}$$

Además, A es el punto medio de $\overline{CO}$, entonces $CA = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{13} = 3\sqrt{13} \text{ cm}$.

Ahora, usando de nuevo el Teorema de Pitágoras, en el triángulo ACF tenemos:

$$CA^2 + AF^2 = CF^2$$

$$AF = \sqrt{(13)^2 - (3\sqrt{13})^2} = 2\sqrt{13} \text{ cm.}$$

Finalmente, el perímetro del cuadrilátero $EFAC$ es:

$$EC + CA + AF + EF = 12 + 3\sqrt{13} + 2\sqrt{13} + 5 = (17 + 5\sqrt{13}) \text{ cm.}$$

Apéndice A

Cuadro de Honor

El Comité Organizador de las Olimpiadas Matemáticas UIS felicita a todos los competidores, docentes, familias e instituciones educativas que hicieron posible la realización de la *Decimoséptima versión de las Olimpiadas Matemáticas UIS - Secundaria*.

En esta edición, 15,855 estudiantes de 270 instituciones en 85 municipios de Colombia, asumieron el reto de poner a prueba sus habilidades matemáticas. Tras un arduo proceso de competencia, algunos lograron destacar por su excepcional desempeño en la prueba final, alcanzando un lugar en el **Cuadro de Honor** de esta versión del certamen.

Extendemos nuestro reconocimiento a estos talentosos jóvenes, quienes con su esfuerzo, disciplina y pasión por las matemáticas, se han posicionado entre los mejores. A continuación, presentamos a los ganadores:

NIVEL BÁSICO		
PUESTO	MEDALLA	PARTICIPANTE
1.º		<i>Juan Esteban Triana Ramírez</i> <i>Instituto Caldas, Bucaramanga</i>
2.º		<i>Jhosué González Maldonado</i> <i>Institución Educativa Jorge Ardila Duarte, Bucaramanga</i>
3.º		<i>Sofía Isabella Bautista Herrera</i> <i>Institución Educativa Bicentenario, Bucaramanga</i>
4.º		<i>Gabriel Omar Montoya Ortiz</i> <i>Colegio de La Presentación, Bucaramanga</i>
5.º		<i>Samuel Rangel Santos</i> <i>Escuela Normal Superior, Oiba</i>

NIVEL MEDIO		
PUESTO	MEDALLA	PARTICIPANTE
1.º		<i>Camilo Angarita Zambrano</i> <i>Colegio San Pedro Claver, Bucaramanga</i>
2.º		<i>Juan Andrés Pizano Cabeza</i> <i>Colegio Reggio Amelia, Bucaramanga</i>
3.º		<i>Jonathan Alejandro Morales Duarte</i> <i>Colegio Cajasan Lagos, Floridablanca</i>
4.º		<i>Eliel Luciano Sánchez Rojas</i> <i>Colegio Niño Jesús de Praga, Girón</i>
5.º		<i>Simón Quintero Prada</i> <i>Fundación Colegio UIS, Floridablanca</i>

NIVEL AVANZADO		
PUESTO	MEDALLA	PARTICIPANTE
1.º		<i>Sofía González Nossa</i> <i>Colegio Reggio Amelia, Bucaramanga</i>
2.º		<i>Jofran Junior Rodríguez Quauro</i> <i>Colegio Técnico Vicente Azuero, Floridablanca</i>
3.º		<i>Valentina Gutiérrez Pérez</i> <i>Colegio Teresiano Reina del Carmelo, Aguachica</i>
4.º		<i>Nicolás Yussepp Fajardo Plazas</i> <i>Colegio Luz de la Esperanza, Tona</i>
5.º		<i>Nicolás Camilo Ramos Pino</i> <i>Colegio Teresiano Reina del Carmelo, Aguachica</i>

Bibliografía

- [1] BOLAÑOS W. *Problemas y Soluciones Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas Universitaria 1998-2019*. Universidad Antonio Nariño y Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.
- [2] BROCHERO F. Y RESTREPO J. *Un recorrido por la Teoría de Números*. Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.
- [3] BURTON, D. *Elementary Number Theory*, segunda edición. Brown Publishers, 1989.
- [4] CALDERÓN, S., MORALES, M. *Análisis Combinatorio*, Editorial Tecnológica de Costa Rica, 1992.
- [5] CASTRO, J. *Lecciones de matemáticas para biociencias*. Departamento de Matemáticas-Universidad del Valle.
- [6] COMELLAS., SÁNCHEZ, ANNA., FRANCESC FÁBREGA, JOSEP., SERRA, ORIOL. *Matemática Discreta*, Edicions UPC, 2001.
- [7] GARCÍA, F. *Un pequeño manual para resolución de problemas*, Priego de cordoba, 2002.
- [8] GÓMEZ J., VALDEZ R. Y VÁZQUEZ R. *Principio de las Casillas*. Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2011.
- [9] HEMMERLING E. *Geometría Elemental*. Bakersfield College. Limusa, México, 2009.
- [10] HOYOS, D., PERDOMO, O. *Geometría Fundamental*. Departamento de Matemáticas-Universidad del Valle, 2006.

- [11] JIMÉNEZ L., GORDILLO J. Y RUBIANO G. *Teoría de números para principiantes*. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2004.
- [12] MADROÑERO J Y CONTRERAS I. *Un recorrido por el Álgebra*. Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.
- [13] MINISTERIO DE EDUCACIÓN. *Matemáticas Lineamientos Curriculares: Áreas obligatorias y fundamentales*. Libros & libros S.A., 1998.
- [14] ROSEN, K. *Elementary Number Theory*, quinta edición. McGraw-Hill.
- [15] ROSEN, K. *Matemática Discreta y sus aplicaciones*, quinta edición. McGraw-Hill, 2004.
- [16] SERGE, L., GENE, M. *Geometry*, second edition. 1988.
- [17] SOBERÓN P. *Combinatoria para olimpiadas* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2010.
- [18] RESTREPO P. *Un recorrido por la Combinatoria I*. Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2010.

Enlaces de interés

1. Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

Pruebas anteriores:

<http://matematicas.uis.edu.co/?q=olimpiadas-secundaria>

Cartillas de los años anteriores:

<http://matematicas.uis.edu.co/?q=descargas>

Página de facebook:

<https://web.facebook.com/OlimpiadasRegionalesDeMatematicasUis>

2. Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

<https://www.acmven.org/pruebas/>

3. CanadaMath, canal de youtube

<https://www.youtube.com/channel/UCPjak7r62HVJ6rvgsu2xoFA>

4. International Mathematical Olympiad (IMO)

<http://www.imo-official.org/problems.aspx>

5. Olimpíada Brasileira de matemática das escolas públicas

<http://www.obmep.org.br/banco.htm>

6. Olimpiada Matemática Argentina,

Problemas Semanales: <https://www.oma.org.ar/problemas/index.php>

Archivo de enunciados: <https://www.oma.org.ar/enunciados/index.htm#omn>

Simulacros en línea: <https://www.oma.org.ar/canguro/problemas.html>

7. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

<https://www.ommenlinea.org/material-de-entrenamiento/introductorio/>

8. Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Baja California

<http://ommbc.org/sitio/#/entrenate>

9. Olimpiada Panameña de Matemáticas

<https://opm.org.pa/recursos/>

10. Olimpiadas de Matemáticas, página de preparación y problemas
<https://web.ujaen.es/eventos/omatematica/preparacion/>
11. Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico
<http://om.pr/>
12. Olimpíadas Portuguesas de Matemática
<http://olimpiadas.spm.pt/index.php?id=69&tipo=1>
13. Olimpíada Brasileira de Matemática
<https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/>
14. Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño
https://orm.udenar.edu.co/?page_id=1612
15. Toomates Coolección
<http://www.toomates.net/>