13.as Olimpiadas Regionales de Matemáticas

Primaria 2024

Dorothy, Katherine y Mary, hicieron posible la conquista humana del espacio. Como ellas, tú también puedes alcanzar las estrellas con la magia de las matemáticas.

INFORMES

olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Tel.: 6344000, ext.: 2316

Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

Olimpiadas Regionales de Matemáticas

Grupo Educación Matemática UIS — EDUMAT

SEA — Sistema de apoyo a la excelencia académica

IPRED — Instituto de Proyección Regional y Educación a Distancia — Educación interactiva y abierta al liderazgo

Vicerrectoría Académica

Vicerrectoría Administrativa

Universidad Industrial de Santander

VIGILADA MINEDUCACIÓN

13.as Olimpiadas Regionales de Matemáticas

Primaria 2024

Apoyan:

Rectoría, Vicerrectoría Académica, Dirección de Admisiones y Registro Académico, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Grupo de Investigación EDUMAT, Sistema de Excelencia Académica SEA-UIS, Instituto de Proyección Social y Educación a Distancia IPRED

Vicerrectoría Académica

Universidad Industrial de Santander

"VIGILADA MINEDUCACIÓN"

Decimoterceras Olimpiadas Matemáticas UIS para Primaria

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga

2024

Edición

Grupo Olimpiadas Regionales de Matemáticas - 2024.

Director

Gilberto Arenas Díaz

Coordinador

Jorge Eliécer Gómez Ríos

Monitores

Cesar Derian Duvan García Padilla

Daniel Eduardo Naranjo Garzón

Daniel Santiago Jaimes Portilla

David Santiago Guzmán Díaz

Javier Mauricio Sierra Villabona

Jefferson Sneyder Moreno Toloza

Juan Esteban Bahamón Rueda

Luis Fernando Muñoz Gutiérrez

Mateo Rincón Pinzón

Sergio Andrés Caicedo Araque

Thomas Javier Carrillo Basto

Introducción

"Todo era tan nuevo: la idea de ir al espacio era nueva y audaz. No había libros de texto, así que tuvimos que escribirlos".
"Déjame hacerlo. Dime cuándo y dónde quieres que aterrice la nave, y yo lo haré al revés y te diré cuándo despegar".

Katherine Johnson.

La Universidad Industrial de Santander, como institución de educación superior del ámbito regional, forma ciudadanos como profesionales integrales, éticos, con sentido político e innovadores; apropia, utiliza, crea, transfiere y divulga el conocimiento por medio de la investigación, la innovación científica, tecnológica y social, la creación artística y la promoción de la cultura, buscando de este modo el fortalecimiento de una sociedad democrática, participativa, deliberativa y pluralista, con justicia y equidad social, comprometida con la preservación del medio ambiente y el buen vivir.

En el marco de esta misión institucional, la Escuela de Matemáticas ofrece a la sociedad santandereana y de la región de influencia de la Universidad, un escenario de alta calidad para el cultivo de las matemáticas, promoviendo entre los integrantes de la comunidad académica una actitud creativa y rigurosa, y construyendo un ambiente académico basado en la solidaridad, la honestidad, la empatía y el reconocimiento de los otros en su dignidad humana. Es por esta razón que, desde sus inicios, la Escuela de Matemáticas se ha comprometido con la educación matemática, no solo por la calidad reconocida a nivel nacional e internacional de los egresados de sus programas académicos de pregrado y posgrado, sino también por su participación en la formación de los estudiantes de otros programas de la Universidad.

Como parte de su responsabilidad académica y su proyección social frente a los diversos retos en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las habilidades matemáticas en el nororiente colombiano, la Escuela de Matemáticas ha diseñado y ejecutado desde el 2009, el proyecto Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (ORM-UIS), para secundaria y primaria, a través del fortalecimiento de las competencias matemáticas de los estudiantes y la capacitación simultánea de los profesores que orientan dichos procesos.

Las ORM-UIS abordan cinco 5 áreas, a saber: i) teoría de números; ii) combinatoria; iii) álgebra, iv) lógica, y v) geometría. Por otra parte, las ORM-UIS se desarrollan en tres 3 niveles, según el grado de escolaridad de los participantes, de la formación en básica primaria, así:

- **Nivel Básico:** grado tercero,
- **Nivel Medio:** grado cuarto,
- **Nivel Avanzado:** grado quinto.

La cartilla que tiene en sus manos compendia los problemas matemáticos propuestos por el equipo de trabajo de las ORM-UIS en las distintas fases de la duodécima versión del certamen, desarrollada durante el segundo semestre de 2024, dirigido a estudiantes de educación básica primaria. En esta oportunidad se contó con la participación de 216 colegios, para un total de 8805 estudiantes en competencia, provenientes de 75 municipios de Colombia.

En esta versión las ORM-UIS, como siempre lo hace, destacó a las matemáticas Dorothy Vaughan, Katherine Johnson y Mary Jackson, quienes con su talento científico contribuyeron a trazar en 1962, las órbitas de los cohetes que permitieron que el ser humano llegara al espacio ultraterrestre. Con su trabajo marcaron el inicio de la carrera espacial de la NASA y se convirtieron en las primeras mujeres en hacer parte de un equipo de investigadores junto con hombres. Dorothy, Katherine y Mary trabajaron como profesoras de matemáticas en colegios públicos, en la época de la segregación racial en los EE.UU., una práctica legal y cultural en dicho país, en donde se separaba por el color de la piel a las personas. Las tres eran afrodescendientes, pero, su talento fue más poderoso que los prejuicios. Cuando inició la investigación espacial estadounidense, había equipos de personas negras y equipos de personas blancas, trabajando por separado. Dorothy, Katherine y Mary, sin embargo, lograron romper esas barreras y demostraron que el ingenio matemático no tiene color de piel, ni estrato social, y que no existen diferencias raciales, ni de género, entre los seres humanos en lo que refiere a la pasión por los números.

Su historia inspiradora se hizo pública en el mundo a través de la película *Talentos Ocultos* de 2016. En ella podemos captar sus vidas, el contexto en el que les correspondió vivir y el aporte significativo que hicieron a la ciencia, como mujeres y como ciudadanas. Esta película nos motiva a seguir promoviendo el estudio creativo y riguroso de las matemáticas, sin discriminación de ningún tipo, para que todo aquel que ame el mundo infinito de los números, se dedique a este en igualdad de condiciones. A lo largo de todos estos años promoviendo las olimpiadas de matemáticas, hemos descubierto "talentos ocultos", en muchos lugares del departamento y de Colombia, niñas, niños y adolescentes con la imaginación para hacernos ver soluciones que antes no habíamos visto. Estas tres grandes mujeres de la historia, nos inspiran a todos a crear las condiciones para una sociedad más justa, que a partir de los matices del pluralismo, nos permita, como lo hacemos con los números, aprovechar nuestra diversidad para aprender unos de otros.

Este documento consta de tres (3) capítulos, cada uno correspondiente a un nivel de la competencia: nivel básico, nivel medio y nivel avanzado. En cada uno de ellos el lector encontrará los problemas y la correspondiente solución, de las distintas soluciones que puede tener cada uno. Por esa razón, el equipo de trabajo de las ORM-UIS recomienda e incentiva a quien desee enfrentar nuevamente estos problemas, a descubrir y proponer, métodos alternativos de solución que se destaquen por su sencillez, ingenio y belleza matemática.

La Escuela de Matemáticas, a través del Grupo de Investigación en Educación Matemática de la UIS (EDUMAT), reconoce la labor esencial del maestro en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las competencias matemáticas de los estudiantes, y por ello elabora esta cartilla para su utilización en el aula de clase, que incluye, también, la preparación y discusión creativa entre pares en los espacios de formación docente. Esperamos que los participantes de la educación básica primaria, los profesores, y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, disfrute tanto como nosotros lo hicimos, el hermoso y milenario ejercicio del pensamiento matemático.

Las ORM-UIS no son una mera competencia, implican una puesta en escena colectiva para que los niños, niñas y adolescentes desplieguen sus capacidades, fortalezcan sus habilidades y se reconozcan como sujetos capaces de enfrentar problemas y solucionarlos. Esto psicológicamente fomenta la autopercepción como sujetos con comprensión de su entorno, y esa es la exigencia que hace hoy la humanidad. Creemos firmemente que allí debemos dirigir todos nuestros esfuerzos, al fortalecimiento de ciudadanías que, gracias al pensamiento crítico que se desarrolla desde el ejercicio matemático, puedan enfrentarse a la diversidad de problemáticas que enfrenta la sociedad actual y que requieren de una mirada no solo crítica, sino, además, creativa para ser solucionadas.

El proyecto ORM- UIS agradece y destaca al grupo de estudiantes de Santander y Norte de Santander, que participaron de esta versión, y que han demostrado ser capaces de asumir el reto de pensar y sentir problemas sencillos y bellos de matemáticas, con pasión y con rigor.

Índice general

1. Nivel Básico **1**

1.1. Prueba Clasificatoria 1

1.2. Prueba Selectiva 5

1.3. Prueba Final 9

2. Nivel Medio **13**

2.1. Prueba Clasificatoria 13

2.2. Prueba Selectiva 18

2.3. Prueba Final 22

3. Nivel Avanzado **27**

3.1. Prueba Clasificatoria 27

3.2. Prueba Selectiva 31

3.3. Prueba Final 36

A. Cuadro de Honor **41**

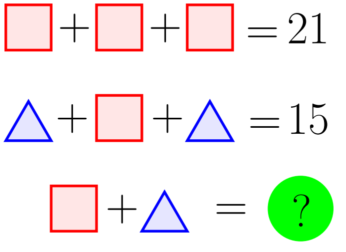
Capítulo 1

Nivel Básico

1.1. Prueba Clasificatoria

PROBLEMA 1.

Karen ya había terminado su tarea de matemáticas, pero su hermanito cubrió algunos números con sus fichas geométricas. Si las fichas idénticas taparon números idénticos, ¿cuál es el número que está debajo del círculo?



(a) 7 (b) 8 (c) 11 (d) 15

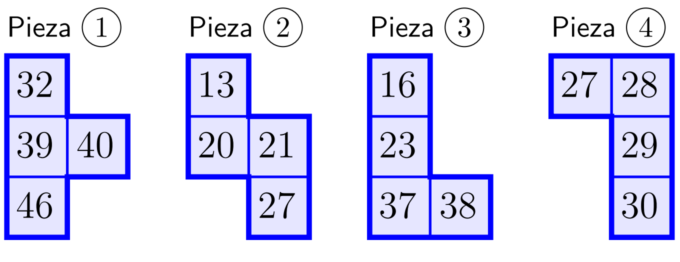
Solución: En la primera suma, podemos deducir que cada ficha cuadrada está cubriendo un 7. Al observar la segunda suma, y recordando que el número debajo del cuadrado es 7, notamos que la suma de los dos números debajo de los triángulos debe ser 8, ya que la suma total es 15, lo que implica que cada triángulo está cubriendo un 4. Finalmente, la tercera suma es $7+4=11$. Así, el número oculto bajo el círculo es 11.

PROBLEMA 2.

Daniel escribió los números naturales desde el 1 hasta el 49 en una cuadrícula de 7×7. Comenzó con el número 1 y fue escribiendo los números en orden ascendente, de izquierda a derecha en cada renglón, y de arriba hacia abajo. Luego de que Daniel escribiera el número 13, la cuadrícula iba de la siguiente manera:

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	

Después de completar la cuadrícula, Daniel decidió recortarla en varias piezas para crear un rompecabezas. ¿Cuál de las siguientes piezas puede ser una ficha del rompecabezas de Daniel?



(a) Pieza 1 $\quad$ (b) Pieza 2 $\quad$ (c) Pieza 3 $\quad$ (d) Pieza 4

Solución: Al observar la cuadrícula de 7×7, se puede notar que:

- De izquierda a derecha, los números crecen de 1 en 1.
- De arriba hacia abajo, los números crecen de 7 en 7.

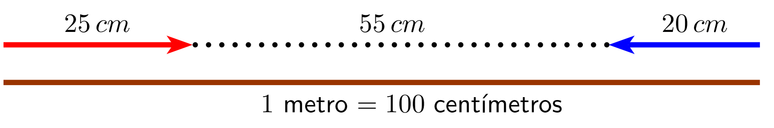
Esta última condición nos permite descartar la pieza (2) porque la diferencia entre 21 y 27 no es 7; la pieza (3) porque la diferencia entre 23 y 37 tampoco es 7; y la pieza (4) porque 28, 29 y 30 son consecutivos pero van de arriba hacia abajo. Por lo tanto, la pieza que sí puede ser del rompecabezas de Daniel es la (1). Compruebe que la pieza (1) cumple las condiciones o complete la cuadrícula para localizarla.

Problema 3.

Dos hormiguitas caminan sobre una cuerda recta horizontal que mide 1 metro. Una de las hormiguitas ha recorrido $\frac{1}{4}$ de la cuerda desde el extremo izquierdo hacia el derecho, y la otra ha recorrido $\frac{1}{5}$ de la cuerda desde el extremo derecho hacia el izquierdo. ¿Cuál es la distancia que separa a las dos hormiguitas?

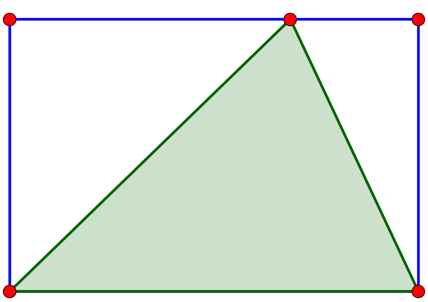
(a) $25\,cm$ (b) $55\,cm$ (c) $45\,cm$ (d) $35\,cm$

Solución: Recuerde que 1 metro equivale a 100 centímetros. Por lo tanto, $\frac{1}{4}$ de metro corresponde a $25\,cm$ y $\frac{1}{5}$ de metro a $20\,cm$. Así, la distancia que separa a las hormiguitas es $100 - 25 - 20 = 55\,cm$.



Problema 4.

Si el área del rectángulo que se muestra en la siguiente figura es $12\,cm^2$, ¿cuál es el área del triángulo coloreado?



(a) $8\,cm^2$ (b) $7\,cm^2$ (c) $6\,cm^2$ (d) $4\,cm^2$

Solución: En la figura, se observa que tanto el triángulo sombreado como el rectángulo tienen la misma $base$ y la misma $altura$. Además, el área del rectángulo es $base \times altura = 12\, cm^2$, entonces el área del triángulo sombreado es:

$$\frac{base \times altura}{2} = \frac{12}{2} = 6\, cm^2.$$

Problema 5.

Se quieren agrupar 60 personas de manera que cada grupo tenga la misma cantidad de personas y que el número de personas en cada grupo sea impar. ¿Cuál es la menor cantidad de grupos que se pueden formar?

(a) 4 (b) 15 (c) 3 (d) 12

Solución: Los divisores impares de 60 son: $1, 3, 5$ y 15. La menor cantidad de grupos se obtiene cuando la cantidad de personas es el mayor divisor impar de 60, que es 15. Por lo tanto, la menor cantidad de grupos que se pueden formar es $\frac{60}{15} = 4$.

Problema 6.

David ha aprendido a hacer manillas de colores para vender a sus amigos. Cada manilla utiliza cuerdas de dos colores diferentes. Su mamá le compró cuerdas de 5 colores distintos. ¿Cuántas manillas diferentes puede hacer David combinando los colores de dos en dos?

(a) 5 (b) 25 (c) 10 (d) 20

Solución: Supongamos que los colores de las cuerdas son: rojo, azul, verde, amarillo y naranja. Teniendo en cuenta que las manillas se hacen usando dos colores diferentes, y que el orden no importa –es decir, una manilla roja y azul es igual a una azul y roja–, entonces todas las combinaciones posibles son 10 en total:

1. rojo y azul
2. rojo y verde
3. rojo y amarillo
4. rojo y naranja
5. azul y verde
6. azul y amarillo
7. azul y naranja
8. verde y amarillo
9. verde y naranja
10. amarillo y naranja.

1.2. Prueba Selectiva

PROBLEMA 1.

En un huerto hay 13 canastas de naranjas. La primera canasta contiene 1 naranja, la segunda contiene 2 naranjas, la tercera contiene 3 naranjas, y así sucesivamente hasta la canasta número 13 que contiene 13 naranjas. ¿Cuál es el número mínimo de naranjas que deben trasladarse entre las canastas para que cada una de ellas tenga la misma cantidad de naranjas?

(a) 7 (b) 21 (c) 28 (d) 13

Solución: Para que todas las canastas tengan la misma cantidad de naranjas, necesitamos que cada una tenga exactamente $\dfrac{91}{13} = 7$ naranjas.

Empecemos a repartir las naranjas: de la canasta con 13 naranjas, pasamos 6 a la canasta con 1 naranja para que ambas queden con 7; de la canasta con 12 naranjas, pasamos 5 a la que tiene 2; de la canasta con 11, pasamos 4 a la que tiene 3; y así sucesivamente.

Si continuamos este proceso, tenemos que el número mínimo de naranjas que deben trasladarse es $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$.

PROBLEMA 2.

Cuatro hermanos deben llevar 3 baldes de agua, desde un pozo hasta su casa, que se encuentra a 120 metros del pozo. Si deciden turnarse para que cada uno cargue un balde la misma cantidad de metros, ¿cuántos metros debe recorrer cada uno cargando un balde?

(a) 90 metros (b) 30 metros (c) 40 metros (d) 120 metros

Solución: Sabemos que los 3 baldes deben recorrer 120 metros cada uno para llegar a la casa. Entonces, la distancia total que deben recorrer los baldes es: $3 \times 120 = 360$ metros. Como los cuatro hermanos deben cargar un balde la misma cantidad de metros, esta distancia total de 360 metros debe dividirse en partes iguales entre ellos. Así, cada uno deberá recorrer:

$$\frac{360}{4} = 90 \text{ metros.}$$

PROBLEMA 3.

En la granja de Hermes, la cantidad de conejitos está entre 70 y 80. Sabemos que $\dfrac{1}{3}$ de los conejitos son negros, $\dfrac{1}{4}$ son blancos y el resto son grises. ¿Cuántos conejitos son grises?

(a) 50 (b) 42 (c) 30 (d) 72

Solución: Primero determinemos la cantidad de conejitos. Como $\frac{1}{3}$ de los conejitos son negros y $\frac{1}{4}$ son blancos, el número total de conejitos debe ser múltiplo de 3 y de 4, para que podamos calcular esas fracciones sin obtener decimales.

El mínimo común múltiplo de 3 y 4 es 12, así que buscamos múltiplos de 12 que estén entre 70 y 80. El único que cumple esta condición es 72, entonces en total hay 72 conejitos.

Ahora calculamos cuántos son negros y cuántos son blancos:

- Negros: $\frac{1}{3} \times 72 = 24$
- Blancos: $\frac{1}{4} \times 72 = 18$

Por lo tanto, los conejitos grises son: $72 - 24 - 18 = 30$.

PROBLEMA 4.

Esteban y Sara ahorran en sus alcancías únicamente monedas de 500 pesos. Al destapar sus alcancías, Sara nota que ahorró el doble de monedas que Esteban. Si al juntar sus ahorros tienen un total de $42{,}000$ pesos, ¿cuántas monedas ahorró Esteban?

Solución: Sabemos que Esteban y Sara ahorran únicamente monedas de 500 pesos, y juntos tienen un total de $42{,}000$ pesos. Esto significa que el total de monedas entre ambos es:

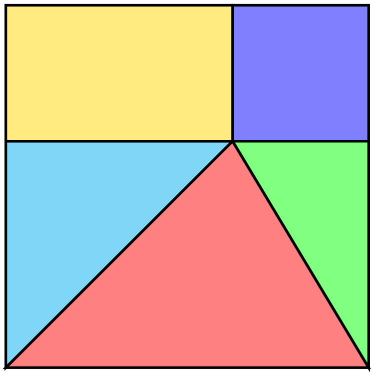
$$\frac{42{,}000}{500} = 84.$$

Como Sara ahorró el doble de monedas que Esteban, podemos dividir las 84 monedas en tres partes iguales: una parte corresponde a las monedas de Esteban y las otras dos partes a las monedas de Sara. Entonces, Esteban el número de monedas que ahorró Esteban fue:

$$\frac{84}{3} = 28.$$

Problema 5.

Sergio cortó un tablero cuadrado en cinco piezas para formar un rompecabezas de colores. Las piezas del rompecabezas son: 1 cuadrado, 1 rectángulo y 3 triángulos, como se muestra a continuación. El área del tablero original era de $64\,cm^2$ y el área de la pieza cuadrada del rompecabezas es de $9\,cm^2$. ¿Cuál es el área de la pieza triangular más grande?



Solución: Como el tablero es cuadrado y tiene un área de $64\,cm^2$, entonces su lado mide $8\,cm$. De forma similar, como la pieza cuadrada del rompecabezas tiene un área de $9\,cm^2$, su lado mide $3\,cm$.

A partir del dibujo, se puede deducir que la pieza triangular en cuestión tiene una base de $8\,cm$ y una altura de $5\,cm$. Por lo tanto, el área de la pieza triangular más grande es:

$$\frac{8\,cm \times 5\,cm}{2} = 20\,cm^2.$$

Problema 6.

Valentina está buscando un número natural que sea múltiplo de 3 y que, al restarle 3, el resultado sea múltiplo de 5. ¿Cuántos números menores que 100 cumplen con los requisitos que Valentina ha establecido?

Nota: El cero 0 es múltiplo de todos los números naturales.

Solución: Los números que buscamos tienen que ser múltiplos de 3 y, si le restamos

3, el resultado tiene que ser múltiplo de 5.

- Listamos con los múltiplos de 3 menores que 100:

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots, 99.$$

- A cada uno le restamos 3:

$$0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots, 96.$$

- Ahora buscamos cuáles de esos resultados son múltiplos de 5:

$$0, 15, 30, 45, 60, 75, 90.$$

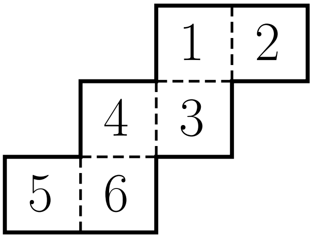
Entonces, los números que cumplen con ambas condiciones son: $3, 18, 33, 48, 63, 78, 93$.

Por lo tanto, hay 7 números menores que 100 que cumplen lo que Valentina busca.

1.3. Prueba Final

PROBLEMA 1.

Doblando, por las líneas punteadas, la pieza de cartón que se muestra en la figura, se puede formar un cubo. Si se multiplican los números que están en caras opuestas opuestas del cubo, ¿cuál es el mayor de estos productos?



Solución: Al construir el cubo como se indica, las parejas de números que quedan en caras opuestas son: $(2, 4)$, $(3, 5)$ y $(1, 6)$. De ahí que el mayor de estos productos sea $3 \times 5 = 15$.

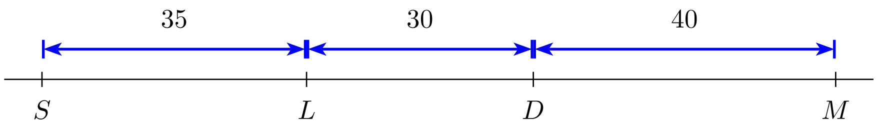
PROBLEMA 2.

Las estaciones espaciales de Santiago, Lauren, Daniel y Mariana están ubicadas en una línea recta en ese mismo orden. Se sabe lo siguiente:

- Cuando Lauren visita la estación de Daniel, recorre 40 metros menos que cuando visita la estación de Mariana.
- Cuando Santiago visita la estación de Daniel, recorre 30 metros más que cuando visita la estación de Lauren.
- La distancia de ida y vuelta que recorre Santiago al visitar la estación de Lauren es igual a la distancia que recorre Lauren al visitar la estación de Mariana.

¿Cuál es la distancia que recorre Santiago al visitar la estación de Mariana?

Solución: Por el primer inciso, sabemos que la distancia entre la estación de Daniel y la estación de Mariana es de 40 metros. Del segundo inciso, se deduce que la estación de Lauren está a 30 metros de la estación de Daniel. Entonces, la distancia entre la estación de Lauren y la estación de Mariana es de $30 + 40 = 70$ metros. Como esa es la distancia total (ida y vuelta) que recorre Santiago para visitar la estación de Lauren, significa que la estación de Santiago está a 35 metros de la de Lauren. Por lo tanto, si Santiago visita la estación de Mariana, recorrerá $35 + 30 + 40 = 105$ metros.



Problema 3.

Dorothy participó en una misión espacial que duró 1500 horas. Si la misión comenzó un martes a las $9:00$ de la mañana, ¿en qué día de la semana y a qué hora terminó?

Solución 1: 1500 horas equivalen a 62 días y 12 horas, ya que $1500 \div 24 = 62$ con un residuo de 12. Además, 62 días corresponden a 8 semanas y 6 días, pues $62 \div 7 = 8$ con un residuo de 6. Por lo tanto, la misión terminó 6 días después de un martes, es decir, un **lunes**. Sumando 12 horas a las $9:00$ de la mañana, obtenemos que la misión finalizó a las $9:00$ **de la noche.**

Solución 2: Recordemos que una semana tiene $24 \times 7 = 168$ horas. Por lo tanto, cada vez que transcurren 168 horas, volvemos al mismo día y hora. Es decir, también será martes a las $9:00$ a.m. después de 168, 336, 504, 672, etc.

Como $1500 = 168 \times 8 + 156$, significa que han pasado 8 semanas completas (lo que nos lleva a otro martes a las $9:00$ a.m.) y aún faltan 156 horas más.

Ahora, descomponemos esas 156 horas: $156 = 24 \times 6 + 12$, es decir, 6 días y 12 horas.

Entonces, desde un martes a las $9:00$ a.m., si sumamos 6 días (llegamos al lunes siguiente) y luego 12 horas más, obtenemos: **Lunes a las 9:00 de la noche.**

PROBLEMA 4.

Valentina tiene seis tarjetas, cada una marcada con un número como se muestra a continuación:

$$\boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{7}\ \boxed{8}$$

Con sus seis tarjetas, Valentina forma tres números de dos cifras y luego los suma. Por ejemplo: con sus tarjetas Valentina puede formar los números 13, 47 y 85, y al sumarlos obtiene 145.
¿Cuál es la menor suma que puede obtener Valentina?

Solución: Como Valentina forma tres números de dos cifras, y quiere que la suma sea la menor posible, conviene colocar los números más pequeños en las decenas, ya que estas tienen más peso en el valor del número. Los menores números disponibles son 1, 3 y 4, que asignamos a las posiciones de decenas. Luego, los números restantes (5, 7 y 8) se colocan en las unidades. Como el orden en que se suman no cambia el total. Entonces, la menor suma posible será: $10 + 30 + 40 + 5 + 7 + 8 = 100$.

Capítulo 2

Nivel Medio

2.1. Prueba Clasificatoria

Problema 1.

Ana, Brandon, Camila y Danna recogieron una cierta cantidad de juguetes cada uno en una piñata. Para que todos tuvieran la misma cantidad de juguetes, Ana le tuvo que dar un juguete a Brandon, y Camila le tuvo que dar dos juguetes a Danna. ¿Quién había recogido más juguetes en la piñata inicialmente?

(a) Ana (b) Brandon (c) Camila (d) Danna

Solución: Como Ana le tuvo que dar un juguete a Brandon para que ambos quedaran con la misma cantidad de juguetes, eso significa que, al comienzo, Ana tenía un juguete de más y Brandon uno de menos con respecto a lo que deberían tener si todos tuvieran la misma cantidad.

De manera similar, como Camila le dio dos juguetes a Danna para igualar cantidades, eso indica que Camila tenía dos juguetes de más y Danna dos de menos.

Por lo tanto, quien más juguetes recogió al principio fue Camila.

Problema 2.

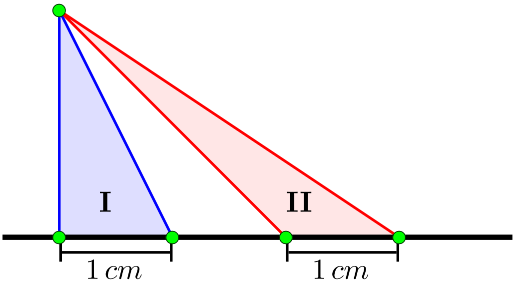
Laura y Tomás le regalaron a su mamá dos ramos de flores, cada uno con la misma cantidad de flores. Entre los dos ramos, hay 8 flores rojas y 10 flores amarillas. El ramo de Laura tenía el doble de flores amarillas que de flores rojas. ¿Cuántas flores amarillas había en el ramo de Tomás?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

Solución: Como los ramos de Laura y Tomás tienen la misma cantidad de flores, y entre los dos hay $8 + 10 = 18$ flores en total, entonces cada ramo tiene 9 flores. Además, el ramo de Laura tiene el doble de flores amarillas que de flores rojas. La única forma de dividir 9 flores en partes que cumplan esta condición es con 6 flores amarillas y 3 flores rojas. Como en total hay 10 flores amarillas y Laura tiene 6, entonces en el ramo de Tomás había $10 - 6 = 4$ flores amarillas.

Problema 3.

De los triángulos mostrados en la siguiente figura, se puede asegurar que



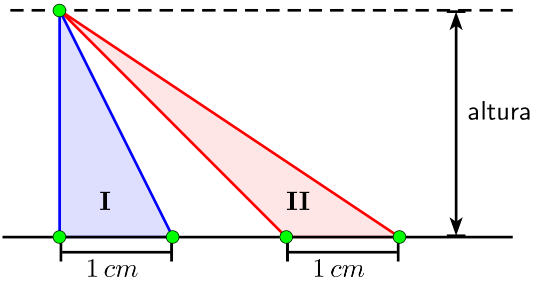
(a) El triángulo **II** tiene mayor área.

(b) El triángulo **I** tiene mayor perímetro.

(c) Los dos triángulos tienen igual perímetro.

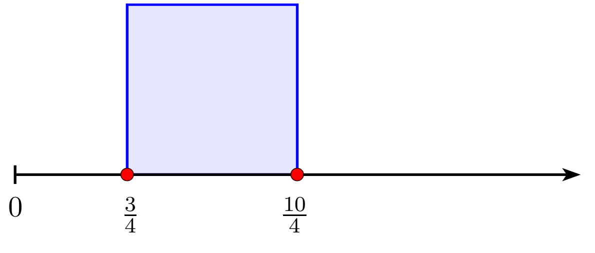
(d) Los dos triángulos tienen la misma área.

Solución: Note que, salvo el lado que mide $1\,cm$ los otros dos lados del triángulo **II** son más largos que los del triángulo **I**. Por lo tanto, el triángulo **II** tiene mayor perímetro que el triángulo **I**.
Sin embargo, los triángulos sí comparten la misma área ya que tienen la misma base ($1\,cm$) y la misma altura (ver figura).



Problema 4.

Gabriel pintó un cuadrado, de manera que uno de sus lados quedó sobre la recta numérica, con uno de sus vértices en $\dfrac{3}{4}$ y el otro en $\dfrac{10}{4}$, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?



(a) 7 $\quad$ (b) 28 $\quad$ (c) $\dfrac{7}{4}$ $\quad$ (d) $\dfrac{49}{16}$

Solución: La distancia entre los dos vértices que se encuentran en la recta numérica es la longitud del lado del cuadrado. Como la distancia entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{10}{4}$ es

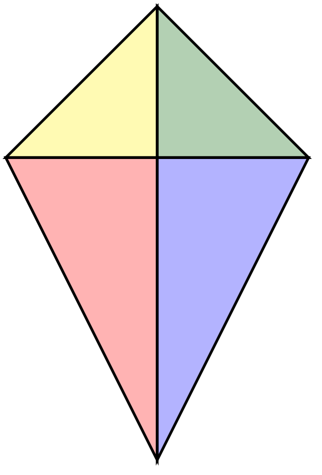
$$\frac{10}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4},$$

entonces la longitud de un lado del cuadrado es $\frac{7}{4}$. El perímetro del cuadrado se obtiene sumando sus cuatro lados, que son todos iguales. Entonces el perímetro del cuadrado es

$$4 \times \frac{7}{4} = 7.$$

PROBLEMA 5.

En la clase de Artística, los estudiantes de cuarto grado elaboraron cometas para elevarlas en la tarde con sus padres. Todas las cometas tenían la misma estructura, dividida en cuatro secciones, cada una de un color diferente, como la que muestra en el siguiente modelo:



Si los colores de papel disponible eran: amarillo, azul, rojo y verde, ¿cuántas cometas diferentes se podían elaborar?

(a) 10 (b) 16 (c) 24 (d) 64

Solución: Suponga que va a armar una cometa. Recuerde que cada parte debe tener un color diferente.

- Al elegir el color para la primera sección, hay 4 colores disponibles.
- Luego, para la segunda sección, ya usó un color, así que solo le quedan 3 opciones.
- Después, para la tercera sección, ya usó dos colores, así que solo quedan 2.
- Y finalmente, para la cuarta sección, solo queda un color disponible, porque ya usó los otros tres.

Según el principio multiplicativo, hay $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ formas diferentes de diseñar la cometa.

Problema 6.

Al abrir el libro de matemáticas, la profesora se sorprende al notar que la suma de los números de las dos páginas que quedan descubiertas, coincide exactamente con su edad. Intrigados, los estudiantes quieren descubrir cuántos años tiene la maestra. Ella les da una pista “Mi edad es uno de los siguientes números: 32, 37, 44 o 46” ¿Cuál es la edad de la profesora?

(a) 37 (b) 44 (c) 46 (d) 32

Solución: Al abrir un libro, siempre quedan visibles dos páginas: una tiene un número impar y la otra un número par (son dos números consecutivos). Además, la suma de un número impar con un número par siempre da como resultado un número impar. Como la única opción impar entre las 4 edades que dijo la profesora es 37, entonces esa debe ser su edad.

2.2. Prueba Selectiva

Problema 1.

Una fábrica de calcetines produce un calcetín cada dos minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en producir trescientos pares de calcetines?

(a) 20 horas (b) 12 horas (c) 10 horas (d) 60 horas

Solución: La fábrica tarda 2 minutos en fabricar un solo calcetín. Como se necesitan dos calcetines para formar un par, hacer un par toma $2+2=4$ minutos.
Si se desean producir 300 pares, el tiempo total será: $300 \times 4 = 1200$ minutos.
Para saber cuántas horas son, dividimos entre 60

$$\frac{1200}{60} = 20 \text{ horas.}$$

Por lo tanto, la fábrica tarda 20 horas en producir 300 pares de calcetines.

Problema 2.

En una colección del museo de historia natural hay un total de 12 insectos, que son arácnidos o hexápodos. Sabemos que, en conjunto, los insectos de la colección tienen 82 patas. ¿Cuántos arácnidos hay en la colección?

Nota: *Cada arácnido tiene 8 patas, mientras que cada hexápodo tiene 6 patas.*

(a) 4 (b) 5 (c) 7 (d) 8

Solución: Sabemos que hay 12 insectos en total y que estos pueden ser arácnidos o hexápodos. Vamos a probar con diferentes cantidades de arácnidos y ver cuántas patas suman.
Si hay 4 arácnidos, entonces hay $12-4=8$ hexápodos.

$$4 \text{ arácnidos} \times 8 \text{ patas} = 32 \text{ patas}$$

$$8 \text{ hexápodos} \times 6 \text{ patas} = 48 \text{ patas}$$

En total, esto da $32+48=80$ patas, que es menos de 82. Así que 4 arácnidos no es la respuesta.

Probemos con 5 arácnidos. Entonces hay $12 - 5 = 7$ hexápodos.

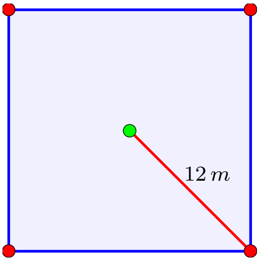
$$5 \text{ arácnidos} \times 8 \text{ patas} = 40 \text{ patas}$$

$$7 \text{ hexápodos} \times 6 \text{ patas} = 42 \text{ patas}$$

En total, esto da $40 + 42 = 82$ patas, que es exactamente lo que dice el problema. Por lo tanto, hay 5 arácnidos en la colección.

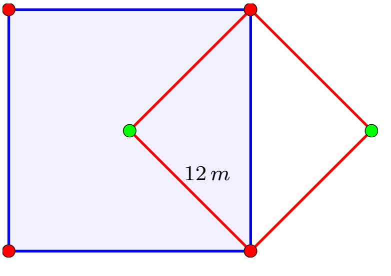
Problema 3.

Elizabeth quiere saber cuál es el área del parque de su municipio. Ella sabe que el parque tiene forma de cuadrado y que en el centro del parque se encuentra la palmera más alta. Con una cuerda y la ayuda de su amiga, Elizabeth logró determinar que la distancia desde la base de la palmera hasta una de las esquinas del parque es de 12 metros. ¿Cuál es el área del parque?



(a) $144\,m^2$ (b) $576\,m^2$ (c) $288\,m^2$ (d) $48\,m^2$

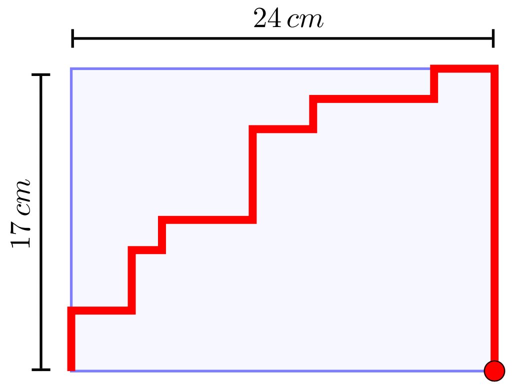
Solución: Considere la siguiente figura:



El área del cuadrado rojo trazado en la figura es $12 \times 12 = 144\,m^2$ y corresponde a la mitad del área del parque. Entonces, el área del parque es $2 \times 144 = 288\,m^2$.

Problema 4.

Allan está jugando al juego de la culebrita, en el que la serpiente debe ir comiendo los puntos que aparecen en la pantalla de su tableta sin cruzarse a sí misma. La culebrita solo puede girar en ángulos de $90°$. A continuación se muestra una captura de la pantalla en un instante del juego.



Si la pantalla de la tableta de Allan mide $24\,cm$ de ancho por $17\,cm$ de alto, ¿cuántos centímetros medía la culebrita en ese momento?

Solución: Del dibujo, es fácil ver que la culebrita tiene segmentos verticales cuyas longitudes suman dos veces la altura de la pantalla, y segmentos horizontales, que suman una vez el ancho de la pantalla. Como la altura de la pantalla es de $17\,cm$ y el ancho es de $24\,cm$ la longitud total de la culebrita en ese momento es:

$$2 \times 17 + 24 = 34 + 24 = 58\,cm.$$

Problema 5.

Una ranita salta en línea recta desde su casa a la charca avanzando 3 metros cada minuto. Cuando llega a la charca, decide regresarse por el mismo camino, avanzando 4 metros cada minuto. Si su recorrido ida y vuelta duró 14 minutos. ¿Cuántos metros hay desde la casa de la ranita hasta la charca?

Solución: Como de ida la ranita avanza 3 metros por minuto y de regreso 4 metros por minuto, necesitamos buscar una distancia que funcione bien con ambos números, un múltiplo común de 3 y de 4. Probemos con 24 metros:

- Para ir a la charca, la ranita avanza 3 metros por minuto. Si la distancia es de 24 metros, tardará $24 \div 3 = 8$ minutos en llegar.
- Para regresar, la ranita avanza 4 metros por minuto. Entonces, para recorrer los 24 metros de vuelta, tardará $24 \div 4 = 6$ minutos.

El tiempo total es $8 + 6 = 14$ minutos, que es justo lo que dice el problema. Por lo tanto, la distancia desde la casa de la ranita hasta la charca es de 24 metros.

Problema 6.

En una bolsa había 10 balotas numeradas del 0 al 9. Eduardo sacó dos balotas de la bolsa y luego afirmó: "La suma de los números de las balotas que saqué es la mitad de la suma de los números de las balotas que quedaron en la bolsa". Si lo que afirmó Eduardo es cierto, ¿cuál es el mayor valor que puede tener el producto de los números de las dos balotas que sacó?

Solución: Primero, encontramos la suma de todos los números del 0 al 9:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Si Eduardo saca dos balotas, la suma de los números que quedan en la bolsa será 45 menos la suma de las dos balotas que sacó. Él dice que la suma de los números que sacó es la mitad de la suma de los que quedaron. Eso solo es posible si la suma de los números que sacó es 15, ya que 15 es la mitad de 30, y $15 + 30 = 45$.
Ahora buscamos qué pares de dígitos diferentes suman 15. Las opciones son:

- 6 y 9 (producto $6 \times 9 = 54$)
- 7 y 8 (producto $7 \times 8 = 56$)

El mayor producto es $7 \times 8 = 56$.

2.3. Prueba Final

Problema 1.

Las trillizas Rosa, Blanca y Celeste están jugando en el patio. Una de ellas lleva puesta una blusa rosada, otra una blusa blanca y la otra, una blusa celeste. La niña con la blusa blanca exclama:

- "¿Ya lo notaron? Aunque nuestras blusas tienen los colores de nuestros nombres, ninguna lleva puesta la blusa que coincide con su propio nombre".
- "¡Es verdad!", exclamó Celeste.

¿De qué color era la blusa de cada niña?

Solución: Sabemos que ninguna niña lleva la blusa que coincide con su propio nombre, por lo tanto, Celeste no puede llevar la blusa celeste y tampoco puede llevar la blusa blanca, porque esa la lleva la niña que habló primero, entonces Celeste debe tener la blusa rosada. Ahora, Blanca no puede llevar la blusa blanca y tampoco la rosada (porque ya sabemos que la lleva Celeste) entonces Blanca lleva la blusa celeste y por lo tanto, Rosa lleva la blusa blanca. En conclusión:

- Celeste lleva la blusa rosada.
- Blanca lleva la blusa celeste.
- Rosa lleva la blusa blanca.

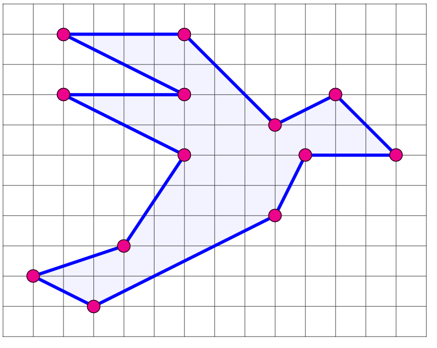
Problema 2.

Este año (2024), durante una misión espacial, la astronauta Katherine sueña que un extraterrestre le da una pista de cuándo invadirán la Tierra. El extraterrestre le dice que tardarán en llegar un número de años que, al dividirse entre 2, 3 o 5, siempre deja un residuo de 1. Si lo que soñó Katherine es cierto, ¿cuál es el año más próximo en que estos seres podrían invadir la Tierra?

Solución: El mínimo común múltiplo de 2, 3 y 5 es 30, entonces el menor número que al dividirse entre 2, 3, o 5, siempre deja residuo de 1 será $30 + 1 = 31$. Por lo tanto, el año más próximo en que estos seres podrían invadir la Tierra es el $2024 + 31 = 2055$.

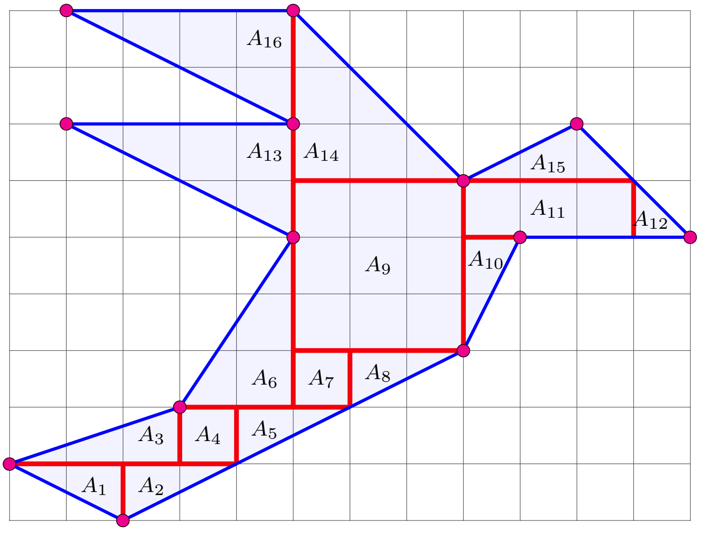
PROBLEMA 3.

Mary ha descubierto una nueva constelación y ha hecho un bosquejo de ella en un tablero cuadriculado, como se muestra a continuación:



Si el lado de cada cuadradito del tablero mide $1\,cm$, ¿cuál es el área total del tablero encerrada por el bosquejo de la constelación?

Solución 1: Subdividiendo la figura en triángulos o rectángulos con áreas conocidas, se tiene que el área que encierra la constelación es $38\,cm^2$. Por ejemplo:



$$
\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9 + A_{10} + A_{11} + A_{12} \\
&= 1 + 1 + \frac{3}{2} + 1 + 1 + 3 + 1 + 1 + 9 + 1 + 3 + \frac{1}{2} + 4 + \frac{9}{2} + \frac{3}{2} + 4 = 38\,cm^2.
\end{aligned}
$$

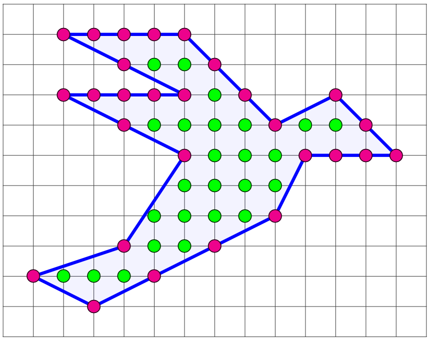
Solución 2: El **Teorema de Pick** *establece que: si dibujas un polígono (una figura con lados rectos) sobre una cuadrícula y sus esquinas están en las intersecciones de las líneas de la cuadrícula, puedes calcular su área así:*

1. *Cuenta cuántas intersecciones de las líneas de la cuadrícula hay* **dentro** *de la figura.*
2. *Cuenta cuántas intersecciones de las líneas de la cuadrícula hay* **exactamente en el borde** *de la figura.*
3. *Aplica esta regla:*

$$(\textit{Intersecciones interiores}) + \left(\frac{\textit{intersecciones del borde}}{2}\right) - 1$$

El resultado que obtienes es el número de cuadraditos de la cuadrícula que caben dentro de la figura.

Aplicando lo anterior a nuestro problema, tenemos:



- Intersecciones de la cuadrícula que están completamente dentro de la figura: 25.
- Intersecciones de la cuadrícula que están sobre el borde de la figura: 28.

Entonces, dentro de la figura caben:

$$25 + \frac{28}{2} - 1 = 38 \text{ cuadraditos de la cuadrícula.}$$

Como cada cuadradito tiene $1\,cm^2$ de área, el área que encierra la constelación es $38\,cm^2$.

Problema 4.

¿Cuántos números de cuatro cifras distintas hay en los que el dígito de las decenas es la mitad del dígito de las centenas y la tercera parte del dígito de las unidades de mil?

Solución: Llamemos al número $abcd$, donde a es el dígito de las unidades de mil, b el de las centenas, c el de las decenas, y d el de las unidades. Según el enunciado, b debe ser el doble de c y a debe ser el triple de c. Entonces $b = 2c$, $a = 3c$, y d puede ser cualquier dígito. Por lo anterior, c solo puede tomar los valores 1, 2 o 3. Veamos cada caso:

Si $c = 1$, entonces quedan definidos $b = 2$ y $a = 3$. Además, como los dígitos de la clave son diferentes, entonces d puede tomar cualquiera de los valores 0, 4, 5, 6, 7, 8 o 9. Así, en este caso, tendríamos 7 números: 3210, 3214, 3215, 3216, 3217, 3218, y 3219.

Si $c = 2$ análogo al caso anterior tendíamos 7 números más.

Si $c = 3$ análogo al primer caso tendíamos 7 números más.

Por lo tanto, tenemos 21 números que cumplen las condiciones del enunciado.

Capítulo 3

Nivel Avanzado

3.1. Prueba Clasificatoria

PROBLEMA 1.

En un bosque hay 120 árboles, y en cada árbol hay 3 nidos. Si cada nido contiene 2 huevos, ¿cuántos huevos hay en total en el bosque?

(a) 125 (b) 600 (c) 720 (d) 240

Solución: En el bosque hay 120 árboles y en cada árbol hay 3 nidos, entonces en total hay $120 \times 3 = 360$ nidos en el bosque. Además, como cada nido contiene 2 huevos, el total de huevos en el bosque es $2 \times 360 = 720$.

PROBLEMA 2.

El día de su cumpleaños, Camila recibió una cierta cantidad de caramelos, pero sabe que no puede comerlos todos porque podría enfermarse. Así que decide dividirlos en partes iguales entre sus 3 primos y ella. Luego, de los caramelos que le corresponden a Camila, decide regalar 2 a su abuelita y 3 a su abuelito, quedándose únicamente con 10 caramelos. ¿Cuántos caramelos había recibido Camila el día de su cumpleaños?

(a) 60 (b) 20 (c) 45 (d) 15

Solución: Primero, notemos que Camila repartió todos los caramelos entre sus 3 primos y ella, es decir, entre 4 personas. A cada uno le tocó la misma cantidad.
Luego, Camila regaló 2 caramelos a su abuelita y 3 a su abuelito, y se quedó con 10. Eso significa que tenía: $10 + 2 + 3 = 15$ caramelos antes de hacer los regalos a sus abuelitos.

Como esa cantidad (15) era la parte que le correspondía a ella al dividir todos los caramelos entre 4, entonces Camila había recibido: $15 \times 4 = 60$ caramelos en su cumpleaños.

PROBLEMA 3.

La mamá de Carlos mide 1 metro y 70 centímetros. Carlos mide 1 metro y 19 centímetros. ¿Qué fracción de la estatura de su mamá representa la estatura de Carlos?

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{7}{10}$ (c) $\frac{170}{153}$ (d) $\frac{11}{15}$

Solución: Carlos mide 1 metro y 19 centímetros, lo cual equivale a 119 centímetros.
Su mamá mide 1 metro y 70 centímetros, es decir, 170 centímetros.
Por lo tanto, la fracción que representa la estatura de Carlos con respecto a la de su mamá es:

$$\frac{119}{170} = \frac{7}{10}.$$

PROBLEMA 4.

Salomé dibujó dos cuadrados cuyas longitudes de los lados son números naturales. La diferencia entre las áreas de estos dos cuadrados es de $9\,cm^2$. ¿Cuál es la suma de los perímetros de ambos cuadrados?

(a) $18\,cm$ (b) $81\,cm$ (c) $41\,cm$ (d) $36\,cm$

Solución: Las longitudes de los lados de los cuadrados son números naturales, y el área de un cuadrado se calcula con la fórmula:

$$\text{área} = \text{lado} \times \text{lado} = \text{lado}^2.$$

Entonces, las posibles áreas de los cuadrados que dibujó Salomé son los cuadrados de los números naturales: $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ \ldots$
Los primeros (y únicos) cuadrados consecutivos cuya diferencia es 9 son 16 y 25,

que corresponden a 4^2 y 5^2, respectivamente.
Por lo tanto, las longitudes de los lados de los cuadrados son $4\,cm$ y $5\,cm$, y los perímetros son: $4 \times 4 = 16\,cm$ y $4 \times 5 = 20\,cm$.

Finalmente, la suma de sus perímetros es: $16\,cm + 20\,cm = 36\,cm$.

Problema 5.

Alberto, Paulina y Federico son tres granjeros. El doble de la cantidad de ovejas que tiene Alberto es igual al triple de las ovejas que tiene Paulina, y también es igual al quíntuple de las ovejas que tiene Federico. ¿Cuál es la menor cantidad de ovejas que pueden tener en total entre los tres granjeros?

(a) 31 (b) 10 (c) 30 (d) 90

Solución 1: El problema sugiere encontrar un número que sea divisible por 2, 3 y 5, y además que sea el menor posible que cumpla esta condición.
Para ello, es conveniente usar el mínimo común múltiplo (m.c.m.), ya que nos dará el número más pequeño que es múltiplo de los tres. En este caso:

$$\text{m.c.m.}(2,\ 3,\ 5) = 30.$$

Este número representa:

- El doble de la cantidad de ovejas que tiene Alberto.
- El triple de las ovejas que tiene Paulina.
- El quíntuple de las ovejas que tiene Federico.

Así, el número de ovejas de cada uno será:

- Alberto: $\frac{30}{2} = 15$ ovejas.
- Paulina: $\frac{30}{3} = 10$ ovejas.
- Federico: $\frac{30}{5} = 6$ ovejas.

Por lo tanto, la menor cantidad total de ovejas entre los tres es: $15 + 10 + 6 = 31$.
Solución 2: Si a es la cantidad de ovejas que tiene Alberto, p las que tiene Paulina y f las que tiene Federico, entonces se cumple la relación:

$$2a = 3p = 5f.$$

Para que esta igualdad se cumpla y, además, a, p y f sean los valores mínimos posibles (enteros positivos), entonces

$$a = 3 \times 5 = 15, \quad p = 2 \times 5 = 10, \quad f = 2 \times 3 = 6.$$

Por lo tanto, la menor cantidad total de ovejas entre los tres es: $15 + 10 + 6 = 31$.

Problema 6.

La clave del celular del papá de Lucía es un número de cuatro cifras. Lucía ya ha visto que los números 1, 3, y 7 son parte de la clave. Además, su padre le mencionó que la clave es un múltiplo de 6. Con esta información, ¿cuántos números pueden ser la clave del celular?

(a) 12 (b) 1 (c) 6 (d) 4

Solución: Como la clave debe ser un múltiplo de 6, entonces debe ser múltiplo de 2 y de 3 al mismo tiempo.

- Para que un número sea múltiplo de 2, su último dígito debe ser par: es decir, debe ser uno de $0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$.
- Para que sea múltiplo de 3, la suma de sus dígitos debe ser múltiplo de 3.

Los dígitos seguros son $1,\ 3,\ 7$, así que el dígito que falta debe ser uno par. Probamos cada opción:

$$\begin{aligned}
1+3+7+0 &= 11 \qquad \text{(no divisible por 3)}\\
1+3+7+2 &= 13 \qquad \text{(no divisible por 3)}\\
1+3+7+4 &= 15 \qquad \text{(sí divisible por 3)}\\
1+3+7+6 &= 17 \qquad \text{(no divisible por 3)}\\
1+3+7+8 &= 19 \qquad \text{(no divisible por 3)}
\end{aligned}$$

El único dígito válido es el 4, ya que hace que la suma sea múltiplo de 3. Además, como el número debe terminar en un dígito par para ser múltiplo de 2, debe terminar en 4.

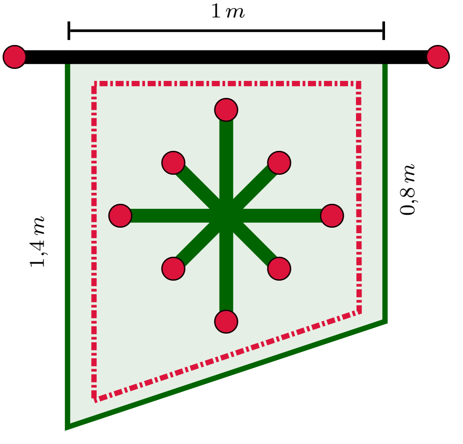
Quedan los dígitos $1,\ 3,\ 7$ para las tres primeras posiciones. Entonces, las posibles claves del celular son 6:

$$1374,\ 1734,\ 3174,\ 3714,\ 7134,\ 7314.$$

3.2. Prueba Selectiva

PROBLEMA 1.

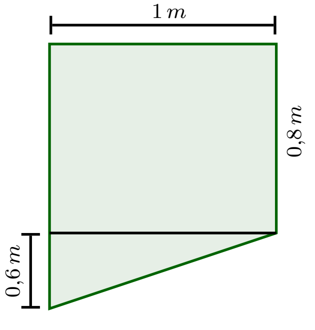
Gabriel se está preparando para la temporada navideña elaborando pendones a partir de trozos de tela rectangulares. Para darles forma, recorta una esquina en forma de triángulo y luego los decora con motivos navideños, como se muestra en la imagen.



Teniendo en cuenta las medidas que aparecen en la imagen, ¿cuál es el área de cada pendón?

(a) $1{,}1\,m^2$ (b) $1{,}2\,m^2$ (c) $1{,}3\,m^2$ (d) $1{,}4\,m^2$

Solución: Podemos seccionar el pendón en dos figuras: un rectángulo superior y un triángulo inferior:



- El rectángulo tiene base $1\,m$ y altura $0{,}8\,m$, por lo tanto su área es:

$$1 \times 0{,}8 = 0{,}8\,m^2.$$

- El triángulo tiene base $1\,m$ y altura $0{,}6\,m$, así que su área es:

$$\frac{1 \times 0{,}6}{2} = 0{,}3\,m^2.$$

Sumando ambas áreas, obtenemos el área total del pendón: $0{,}8 + 0{,}3 = 1{,}1\,m^2$.

PROBLEMA 2.

Isabell escribe el número formado por 17 unos seguidos: $111\ldots11$. Luego, multiplica este número por 2024. ¿Cuál es la suma de las cifras del resultado?

(a) 102 (b) 136 (c) 128 (d) 144

Solución: Desarrollemos la multiplicación:

$$\begin{array}{r}
11111111111111111 \quad \times \\
2024 \\
\hline
44444444444444444 \\
22222222222222222 \\
00000000000000000 \\
22222222222222222 \\
\hline
22488888888888888664
\end{array}$$

Por lo tanto, la suma de las cifras del resultado es $2\times2+2\times4+14\times8+2\times6 = 136$.

PROBLEMA 3.

¿Cuál de los siguientes números es un número primo, que se puede descomponer como la suma de dos números primos?

(a) 17 (b) 23 (c) 29 (d) 31

Solución: Sabemos que el único número primo par es 2. Si un número primo puede escribirse como la suma de dos números primos, entonces uno de ellos debe ser necesariamente 2, ya que:

1. Todos los números primos (excepto el 2) son impares.
2. La suma de dos números impares siempre da un número par.
3. Por lo tanto, si un número primo impar es suma de dos primos, uno de ellos debe ser el único par: el 2.

Así, buscamos entre las opciones un número primo que al restarle 2 también sea primo. El único número que cumple con esta condición es 31, pues $31 - 2 = 29$ es primo.

Problema 4.

Paula debe reemplazar las letras en la siguiente igualdad por los números: 1, 2, 3, 4 y 5, de manera que letras diferentes sean números diferentes:

$$U + I + S = H + I + T.$$

¿Cuál es valor mínimo que puede tener $H \times I \times T$?

Solución: Una forma de representar el problema es disponiendo las letras U, I, S, H y T en el siguiente arreglo.

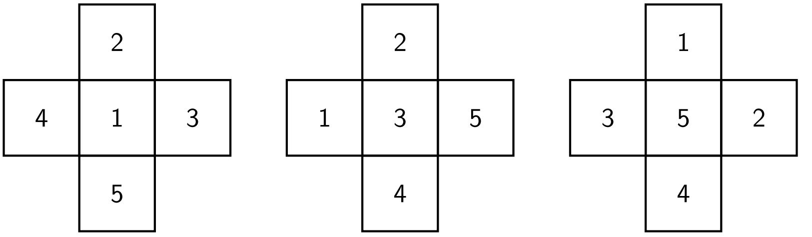
	U	
H	I	T
	S	

Recuerde que tenemos como opciones para remplazar por las letras a $1, 2, 3, 4$ y 5. Queremos que la suma de los tres números de la columna (vertical) sean igual a la suma de los tres números de la fila (horizontal).
Dado que la suma de los números del 1 al 5 es 15, y que la fila y la columna comparten el cuadrado central (letra I), el doble de la suma en la fila (o columna) es igual a 15 más el número en el cuadrado central. Por lo tanto, el número en el cuadrado central debe ser impar. Las opciones posibles para el cuadrado central son: $1, 3$ o 5. Veamos:

	4	
2	1	5
	3	

	1	
2	3	4
	5	

	3	
1	5	4
	2	



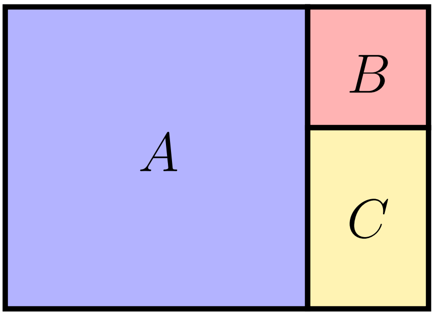
Por lo tanto, los valores que puede tener $H \times I \times T$ son:

- $2 \times 1 \times 5 = 10$
- $2 \times 3 \times 4 = 24$
- $1 \times 5 \times 4 = 20$
- $4 \times 1 \times 3 = 12$
- $1 \times 3 \times 5 = 15$
- $3 \times 5 \times 2 = 30$

De ahí que el valor mínimo que puede tener $H \times I \times T$ es 10.

Problema 5.

Un pintor ha dividido su lienzo rectangular en tres regiones (A, B y C), como se muestra en la figura.



El perímetro del lienzo es de $72\,m$, y las regiones A y B son cuadrados. Además, se sabe que la altura del lienzo es $\dfrac{5}{7}$ de la base. ¿Cuántos metros mide el perímetro de la región C?

Solución: Llamemos b a la base del lienzo rectangular. Como se sabe que la altura es $\frac{5}{7}$ de la base y el perímetro total es de $72\,m$, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$b + \frac{5}{7}b + b + \frac{5}{7}b = 72.$$

De donde obtenemos que la base del lienzo mide $b = 21\,m$ y su altura es:

$$\frac{5}{7} \times 21 = 15\,m.$$

Según el dibujo, se observa que los lados de las regiones cuadradas A y B miden $15\,m$ y $21 - 15 = 6\,m$, respectivamente.

Entonces, la región rectangular C tiene $6\,m$ de base y $15 - 6 = 9\,m$ de altura, y por lo tanto, su perímetro es: $2 \times (6 + 9) = 30\,m$.

Problema 6.

En una bolsa había 12 balotas numeradas del 1 al 12. Eduardo sacó tres balotas de la bolsa al mismo tiempo y luego afirmó: "La suma de los números de las balotas que saqué es la mitad de la suma de los números de las balotas que quedaron en la bolsa". Si lo que afirmó Eduardo es cierto, ¿cuántas posibilidades diferentes hay para las tres balotas que sacó?

Solución: La suma total de las balotas numeradas del 1 al 12 es:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78.$$

Según Eduardo, la suma de los números de las balotas que sacó es la mitad de la suma de las balotas que quedaron en la bolsa. Esto significa que las balotas extraídas suman:

$$\frac{78}{3} = 26.$$

Ahora buscamos todas las combinaciones de tres números diferentes entre 1 y 12 cuya suma sea 26. Si el número más grande es el 12, los otros dos deben sumar 14; las posibilidades son: $\{11, 3\}, \{10, 4\}, \{9, 5\}, \{8, 6\}$. Si el más grande es el 11, los otros dos pueden ser $\{10, 5\}, \{9, 6\}, \{8, 7\}$. Por último, si el 10 es el más grande, los otros dos deben ser $\{9, 7\}$. Note que el 9 no puede ser el más grande, porque $9 + 8 + 7 = 24$.

De lo anterior, todas las combinaciones válidas son:

- $\{3,\ 11,\ 12\}$
- $\{5,\ 9,\ 12\}$
- $\{5,\ 10,\ 11\}$
- $\{7,\ 8,\ 11\}$
- $\{4,\ 10,\ 12\}$
- $\{6,\ 8,\ 12\}$
- $\{6,\ 9,\ 11\}$
- $\{7,\ 9,\ 10\}$

Por lo tanto, hay un total de 8 combinaciones distintas posibles.

3.3. Prueba Final

Problema 1.

En un concurso de televisión, Luisa y Ángel deben abrir un cofre con una clave de cuatro dígitos diferentes. Cada concursante tiene dos intentos para descifrar la clave y abrir el cofre.

- En su primer intento, Luisa digita la clave $\boxed{3\ 1\ 8\ 7}$, pero el presentador comenta: *"Tiene solo dos dígitos correctos, pero ninguno en la posición correcta."*
- Luego, Ángel intenta con $\boxed{7\ 8\ 5\ 9}$. El presentador dice: *"Ninguno de los dígitos es correcto."*
- En su segundo intento, Luisa prueba con $\boxed{0\ 4\ 3\ 1}$, y el presentador le comenta: *"Tiene solo dos dígitos correctos, pero están en posiciones incorrectas."*
- Finalmente, Ángel marca $\boxed{2\ 3\ 4\ 1}$, y el presentador responde: *"Tiene tres dígitos correctos, y tan solo uno de ellos en la posición incorrecta."*

Tristemente, ninguno de los dos pudo llevarse el premio. ¿Cuál era la clave del cofre?

Solución: Note que el 8 y el 7 aparecen tanto en el primer intento de Luisa como en el primer intento de Ángel. Como en el primer intento de Ángel todos los dígitos están mal, se deduce que los dígitos correctos del primer intento de Luisa son el 3 y el 1, y que están en posiciones incorrectas.

Resumen parcial:

- Los dígitos 1 y 3 pertenecen a la clave.
- El 3 no puede estar en la primera posición.
- El 1 no puede estar en la segunda posición.
- Los dígitos $5,\ 7,\ 8,\ 9$ no son parte de la clave.

Del segundo intento de Luisa, se confirma que el 3 y el 1 están presentes pero en posiciones incorrectas y por lo tanto el 0 y 4 tampoco están en la clave.

Resumen actualizado:

- Los dígitos $0,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9$ no pertenecen a la clave.
- El 3 no puede estar en la posición 1 ni 3.
- El 1 no puede estar en la posición 2 ni 4.

En el segundo intento de Ángel:

- Sabemos que el 1 está presente pero en una posición incorrecta (ya se había descartado la posición 4).
- El 4 ya fue descartado como parte de la clave.
- Entonces, el 2 y el 3 deben estar en las posiciones correctas.

Resumen final:

- Los dígitos de la clave son: $2,\ 3,\ 1,\ 6$.
- 2 y 3 están en las posiciones 1 y 2, respectivamente.
- El 1 debe ir en la posición 3 (es la única posición disponible).
- El único dígito que no ha sido descartado ni utilizado es el 6, que debe ocupar la posición 4.

Por lo tanto, la clave es: $\boxed{2\ 3\ 1\ 6}$.

Problema 2.

Tres astronautas se embarcan en una misión espacial. Cada uno de ellos tiene tres trajes espaciales de colores: azul, blanco y gris, y dos cascos de colores: rojo y negro. Cada día, cada astronauta debe elegir un traje y un casco para vestirse. ¿Cuántos días como máximo puede durar la misión espacial sin que los tres astronautas a la vez, repitan exactamente la misma combinación de vestimenta utilizada en días anteriores?

Solución: Primero, calculamos las combinaciones posibles de vestimenta para un solo astronauta. Como cada astronauta puede elegir entre 3 trajes y 2 cascos, el número total de combinaciones de vestimenta para un astronauta es:

$$3 \times 2 = 6.$$

Dado que hay tres astronautas, y cada uno puede vestirse de manera independiente, la cantidad total de combinaciones posibles para los tres astronautas es:

$$6 \times 6 \times 6 = 216.$$

Esto significa que hay 216 formas distintas en que los tres astronautas pueden vestirse sin repetir exactamente la misma combinación.
Por lo tanto, la misión espacial puede durar hasta 216 días sin que se repita la misma combinación de vestimenta entre los tres astronautas.

Problema 3.

En una competencia artística por equipos se dividieron 225 concursantes en equipos con la misma cantidad de integrantes para pintar un mural. Además, se repartieron 105 pinceles en cantidades iguales entre los equipos formados.
¿De cuántas maneras diferentes pudo haberse organizado esto? Indica el tamaño de los equipos y la cantidad de pinceles por equipo en cada caso.

Solución 1: Necesitamos encontrar cómo dividir a los 225 niños y los 105 pinceles en x grupos iguales. Dado que $225 = 3^2 \times 5^2$ y $105 = 3 \times 5 \times 7$, entonces x puede tomar los valores de 3, 5 o 15. Esto significa que podemos separarlos en:

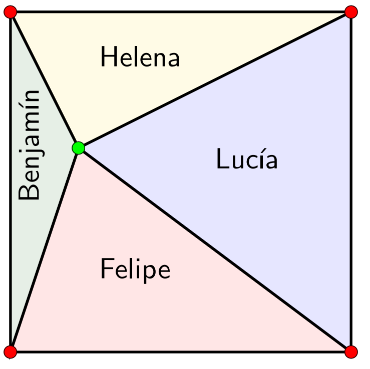
- 3 grupos, cada uno con 75 niños y 35 pinceles.
- 5 grupos, cada uno con 45 niños y 21 pinceles.
- 15 grupos, cada uno con 15 niños y 7 pinceles.

Solución 2: Los divisores comunes de 225 y 105 son 3, 5, y 15, Por lo tanto, los niños y los pinceles se pueden agrupar así:

- 3 grupos, cada uno con 75 niños y 35 pinceles.
- 5 grupos, cada uno con 45 niños y 21 pinceles.
- 15 grupos, cada uno con 15 niños y 7 pinceles.

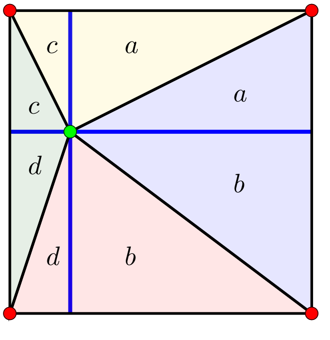
PROBLEMA 4.

La finca cuadrada de Don Federico tiene un perímetro de 24 kilómetros y ha decidido repartirla entre sus cuatro nietos de la siguiente manera: desde un árbol ubicado en el interior de la finca, trazó cuatro cercas hacia cada uno de los vértices del cuadrado. Así, cada nieto recibió una parcela triangular, como se muestra en la figura:



La parcela de Benjamín tiene un área de $4\,km^2$, y la de Helena tiene $4\,km^2$ menos que la de Felipe. ¿Cuál es la diferencia entre las áreas de las parcelas de Lucía y Felipe?

Solución 1: Dado que el perímetro de la finca cuadrada es $24\,km$, entonces cada uno de sus lados mide $24 \div 4 = 6\,km$, luego el área de toda la finca es $6 \times 6 = 36\,km^2$. Trazando segmentos paralelos a los lados que pasan por el punto interior (el árbol), como se muestra en la figura, se puede ver que la suma de las áreas de las parcelas de Benjamín y Lucía es igual a la suma de las áreas de las parcelas de Helena y Felipe.



Luego, la suma de las áreas de las parcelas de Benjamín y Lucía es la mitad del área de toda la finca, es decir, $18\,km^2$. Como la de Benjamín tiene $4\,km^2$, entonces la de Lucía tiene $14\,km^2$. También se tiene que la suma de las áreas de las parcelas de Helena y Felipe es $18\,km^2$; como la de Helena tiene $4\,km^2$ menos que la de Felipe, entonces la de Helena tiene $7\,km^2$ y la de Felipe $11\,km^2$. Por lo tanto, la diferencia entre las áreas de las parcelas de Lucía y Felipe es $14-11 = 3\,km^2$.

Solución 2: Dado que el área de la parcela triangular de Benjamín es $A_B = 4\,km^2$ y una de sus bases mide $6\,km$, entonces la altura correspondiente debe ser un número que, al multiplicarse por 6 y dividirse entre 2, dé como resultado 4, es decir, $\frac{4}{3}$. Note que, la altura de la parcela triangular de Lucía, correspondiente a la base de $6\,km$, es $6 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3}\,km$, por lo tanto, el área de su parcela es:

$$A_L = \frac{6 \times \frac{14}{3}}{2} = 14\,km^2.$$

Ahora, sabemos que el área de la parcela de Helena A_H es $4\,km^2$ menor que la de Felipe A_F, es decir:

$$A_H = A_F - 4.$$

También se cumple que:

$$A_B + A_L + A_H + A_F = 36\,km^2.$$

Reemplazando los valores conocidos:

$$\begin{aligned} 4 + 14 + A_F - 4 + A_F &= 36 \\ 2A_F &= 22 \\ A_F &= 11. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la diferencia entre las áreas de las parcelas de Lucía y Felipe es $14 - 11 = 3\,km^2$.

Apéndice A

Cuadro de Honor

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander felicita de manera especial a los estudiantes que, con a su esfuerzo, disciplina y talento, se destacaron en la Décimotercera versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS-Primaria. Entre los 8805 participantes que aceptaron este reto, ellos lograron los puntajes más altos en la prueba final, convirtiéndose en un orgullo para sus instituciones y sus familias:

NIVEL BÁSICO

Puesto	Medalla	Participante
1.º		*Matías Alejandro Corzo Trigos* *Colegio Cajasan Lagos, Floridablanca.*
2.º		*Violetta Cuevas Estupiñán* *Col. Técnico Industrial José Elías Puyana, Floridablanca.*
3.º		*Nicolás Contreras Rodríguez* *I. E. Bicentenario de La Independencia de La República de Colombia, Bucaramanga.*
4.º		*María Alejandra Peñaloza Benítez* *Colegio de La Presentación, Bucaramanga.*
5.º		*Emiliano Correa Granados* *Institución Educativa Jorge Ardila Duarte, Bucaramanga.*

NIVEL MEDIO

Puesto	Medalla	Participante
1.º		*Sofía Tobón Ruíz* *Colegio Virtual Siglo XXI, Bogotá.*
2.º		*María del Mar Díaz Piñerez* *Colegio Integrado Caro y Cuervo, Bucaramanga.*
3.º		*Paula Juliana Villalba Díaz* *Gimnasio Superior Empresarial Bilingüe, Bucaramanga.*
4.º		*José Manuel Sánchez Jara* *Colegio Infantil Colombianitos, San Gil.*
5.º		*Pedro Alejandro Durán Pallares* *I. E. Alfonso López Pumarejo, Río de Oro.*

NIVEL AVANZADO

Puesto	Medalla	Participante
1.º		*Samuel Andrés Álvarez Vega* *Colegio La Salle Bucaramanga.*
2.º		*Juan Diego Ortiz Gutiérrez* *Escuela Normal Superior de Piedecuesta.*
3.º		*Samuel Rangel Santos* *Escuela Normal Superior de Oiba.*
4.º		*David Alejandro Hernández Pinzón* *Colegio Niño Jesús de Praga, Girón.*
5.º		*Luciana Villabona Sánchez* *Colegio Integrado Caro y Cuervo, Bucaramanga.*

Bibliografía

[1] Bolaños W. *Problemas y Soluciones Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas Universitaria 1998-2019.* Universidad Antonio Nariño y Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[2] Brochero F. y Restrepo J. *Un recorrido por la Teoría de Números.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[3] Gómez J., Valdez R. y Vázquez R. *Principio de las Casillas.* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2011.

[4] Hemmerling E. *Geometría Elemental.* Bakersfield College. Limusa, México, 2009.

[5] Jiménez L., Gordillo J. y Rubiano G. *Teoría de números para principiantes.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2004.

[6] Madroñero J y Contreras I. *Un recorrido por el Álgebra.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[7] Soberón P. *Combinatoria para olimpiadas* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2010.

[8] RESTREPO P. *Un recorrido por la Combinatoria I.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2010.

[9] VALDERRAMA A. Y GONZÁLEZ E. *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Nivel Intermedio 2010* Universidad Antonio Nariño, 2010

[10] VALDERRAMA A. Y GONZÁLEZ E. *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Primer Nivel 2010* Universidad Antonio Nariño, 2010.

Enlaces de interés

1. Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

   Pruebas anteriores:

   http://matematicas.uis.edu.co/?q=olimpiadas-primaria/pruebas_anteriores

   Página de facebook:

   https://www.facebook.com/OlimpiadasMatematicasUIS/

2. Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño:

   https://orm.udenar.edu.co/?page_id=1612

3. Olimpiadas Matemáticas de la Universidad de Antioquia.

   https://www.olimpiadasudea.co/matematicas/talleres.html

4. Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

   https://www.acmven.org/pruebas/

5. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

   https://www.ommenlinea.org/material-de-entrenamiento/introductorio/

6. Olimpiada Matemática Argentina,

   Problemas Semanales: https://www.oma.org.ar/problemas/index.php

   Archivo de enunciados: https://www.oma.org.ar/enunciados/index.htm#omn

   Simulacros en línea: https://www.oma.org.ar/canguro/problemas.html

7. Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico

   http://om.pr/