12.as Olimpiadas Regionales de Matemáticas

Primaria 2023

Aniversario
UIS 1948 - 2023

Las matemáticas son tan creativas como cualquier otra disciplina artística. Cuando hago matemáticas estoy jugando

Eduardo Sáenz de Cabezón
Divulgador matemático, youtuber

ÓRBITA LAIKA

Derivando
Un video cada x+1= días

INFORMES

olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000, ext.: 2316
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

ORM Olimpiadas Regionales de Matemáticas
Grupo Educación Matemática UIS EDUMAT
SEA Sistema de apoyo a la excelencia académica
Instituto de Proyección Regional y Educación a Distancia IPRED Educación Interactiva y Abierta al Liderazgo
Vicerrectoría Académica
Universidad Industrial de Santander
"VIGILADA MINEDUCACIÓN"

Apoyan:

Rectoría, Vicerrectoría Académica, Dirección de Admisiones y Registro Académico, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Grupo de Investigación EDUMAT, Sistema de Excelencia Académica SEA-UIS, Instituto de Proyección Social y Educación a Distancia IPRED

Duodécimas Olimpiadas Matemáticas UIS para Primaria

Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga

2023

Edición

Grupo Olimpiadas Regionales de Matemáticas - 2023.

Director

Gilberto Arenas Díaz

Coordinador

Jorge Eliécer Gómez Ríos

Monitores

Brayan Isaac Vásquez Portocarrero

Cesar Derian Duvan García Padilla

Daniel Eduardo Naranjo Garzón

Daniel Santiago Jaimes Portilla

Jamir Santiago Castellanos Mantilla

Javier Mauricio Sierra Villabona

Jefferson Sneyder Moreno Toloza

José Camilo Rueda Niño

Luis Fernando Muñoz Gutiérrez

Mateo Rincón Pinzón

Sergio Andrés Caicedo Araque

Thomas Javier Carrillo Basto

Introducción

"No, yo no hago que las matemáticas "sean" o "parezcan" atractivas; lo que hago es mostrar que en realidad las matemáticas son atractivas, interesantes, apasionantes en sí mismas".

Eduardo Sáenz de Cabezón.

La Universidad Industrial de Santander, como institución de educación superior del ámbito regional, forma ciudadanos como profesionales integrales, éticos, con sentido político e innovadores; apropia, utiliza, crea, transfiere y divulga el conocimiento por medio de la investigación, la innovación científica, tecnológica y social, la creación artística y la promoción de la cultura, buscando de este modo el fortalecimiento de una sociedad democrática, participativa, deliberativa y pluralista, con justicia y equidad social, comprometida con la preservación del medio ambiente y el buen vivir.

En el marco de esta misión institucional, la Escuela de Matemáticas ofrece a la sociedad santandereana y de la región de influencia de la Universidad, un escenario de alta calidad para el cultivo de las matemáticas, promoviendo entre los integrantes de la comunidad académica una actitud creativa y rigurosa, y construyendo un ambiente académico basado en la solidaridad, la honestidad, la empatía y el reconocimiento de los otros en su dignidad humana. Es por esta razón que, desde sus inicios, la Escuela de Matemáticas se ha comprometido con la educación matemática, no solo por la calidad reconocida a nivel nacional e internacional de los egresados de sus programas académicos de pregrado y posgrado, sino también por su participación en la formación de los estudiantes de otros programas de la Universidad.

Como parte de su responsabilidad académica y su proyección social frente a los diversos retos en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las habilidades matemáticas en el nororiente colombiano, la Escuela de Matemáticas ha diseñado y ejecutado desde el 2009, el proyecto Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (ORM-UIS), para secundaria y primaria, a través del fortalecimiento de las competencias matemáticas de los estudiantes y la capacitación simultánea de los profesores que orientan dichos procesos. Las ORM-UIS abordan cinco (5) áreas, a saber: i) teoría de números; ii) combinatoria; iii) álgebra, iv) lógica, y v) geometría. Por otra parte, las ORM-UIS se desarrollan en tres (3) niveles, según el grado de escolaridad de los participantes, de la formación en básica primaria, así:

- **Nivel Básico:** grado tercero,
- **Nivel Medio:** grado cuarto,
- **Nivel Avanzado:** grado quinto.

La cartilla que tiene en sus manos compendia los problemas matemáticos propuestos por el equipo de trabajo de las ORM-UIS en las distintas fases de la duodécima versión del certamen, desarrollada durante el segundo semestre de 2023, dirigido a estudiantes de educación básica primaria. En esta oportunidad se contó con la participación de 142 colegios, para un total de 5545 estudiantes en competencia, provenientes de 51 municipios del nororiente colombiano.

En esta versión las ORM-UIS, como siempre lo hace con alguien en especial, destacó la vida y obra del matemático español Eduardo Saénz de Cabezón, divulgador científico y profesor de álgebra computacional en la Universidad de la Rioja. Es famoso por ser el presentador del programa *Órbita Laika*, del sistema de *Radio y Televisión Española* (RTVE), así como el autor de múltiples exposiciones como en las mundialmente conocidas conferencias TED (**Las matemáticas son para siempre**) o en las famosas conferencias *Aprendido Juntos* del BBVA (**¿Para qué sirven las matemáticas?**), además de otras tantas intervenciones que pueden consultarse en las redes sociales, especialmente, en su canal **Derivando**. Es un precursor en exponer la importancia de las matemáticas, no como una ciencia para algunos eruditos, predestinados a vivir encerrados haciendo cuentas, sino, como un conocimiento que enriquece la experiencia social de cualquier ciudadano del mundo, al hacerlo menos proclive a la desinformación y a la manipulación, lo que le permite entender y proteger su libertad y autonomía. El profesor Eduardo nos invita, además, a descubrir el placer y la alegría al estudiar las matemáticas. Quien tenga en su mente la idea de que las matemáticas son aburridas es porque ha tenido una muy mala relación con el aprendizaje del sentido de las matemáticas. Al medir el mundo, al cuantificarlo, tratamos de comprenderlo y de comprendernos a nosotros en ese mundo. Parte fundamental de nuestra historia y trayectoria como especie ha estado ligada al uso consciente o inconsciente de los números, para resolver los problemas del día a día y para emprender las aventuras extraordinarias que nos han permitido sobrevivir y evolucionar. Tener una estructura de comprensión del mundo y de nosotros, es parte de la finalidad de aprender el rigor y la sistematicidad del álgebra o del cálculo, de la geometría o de la teoría de los números. Como dice el profesor Sáenz de Cabezón en alguna de sus conferencias, quizás el contar y escribir historias y el apasionarnos por los números, son las pruebas más significativas y distintivas de nuestra condición de seres humanos.

Este documento consta de tres (3) capítulos, cada uno correspondiente a un nivel de la competencia: nivel básico, nivel medio y nivel avanzado. En cada uno de ellos el lector encontrará los problemas y la correspondiente solución, de las distintas soluciones que puede tener cada uno. Por esa razón, el equipo de trabajo de las ORM-UIS recomienda e incentiva a quien desee enfrentar nuevamente estos problemas, a descubrir y proponer, métodos alternativos de solución que se destaquen por su sencillez, ingenio y belleza matemática.

La Escuela de Matemáticas, a través del Grupo de Investigación en Educación Matemática de la UIS (EDUMAT), reconoce la labor esencial del maestro en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las competencias matemáticas de los estudiantes, y por ello elabora esta cartilla para su utilización en el aula de clase, que incluye, también, la preparación y discusión creativa entre pares en los espacios de formación docente. Esperamos que los participantes de la educación básica primaria, los profesores, y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, disfrute tanto como nosotros lo hicimos, el hermoso y milenario ejercicio del pensamiento matemático.

Las ORM-UIS no son una mera competencia, implican una puesta en escena colectiva para que los niños, niñas y adolescentes desplieguen sus capacidades, fortalezcan sus habilidades y se reconozcan como sujetos capaces de enfrentar problemas y solucionarlos. Esto psicológicamente fomenta la autopercepción como sujetos con comprensión de su entorno, y esa es la exigencia que hace hoy la humanidad. Creemos firmemente que allí debemos dirigir todos nuestros esfuerzos, al fortalecimiento de ciudadanías que, gracias al pensamiento crítico que se desarrolla desde el ejercicio matemático, puedan enfrentarse a la diversidad de problemáticas que enfrenta la sociedad actual y que requieren de una mirada no solo crítica, sino, además, creativa para ser solucionadas.

El proyecto ORM- UIS agradece y destaca al grupo de estudiantes de Santander y Norte de Santander, que participaron de esta versión, y que han demostrado ser capaces de asumir el reto de pensar y sentir problemas sencillos y bellos de matemáticas, con pasión y con rigor.

Índice general

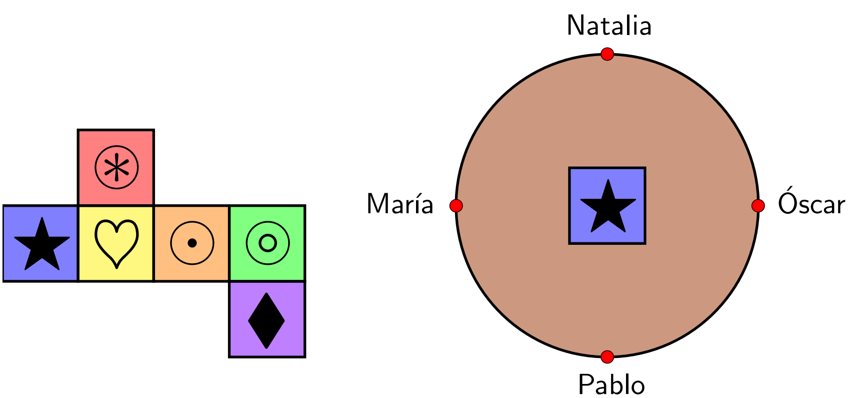
Capítulo 1

Nivel Básico

1.1. Prueba Clasificatoria

Problema 1.

Sara construyó un cubo a partir de la figura que se muestra en la parte izquierda. Después, se lo presentó a sus compañeros, quienes estaban sentados alrededor de una mesa redonda, como indica la figura de la derecha, en la que se ve la cara superior del cubo. Si Pablo tiene frente a él la cara del cubo que está marcada con el símbolo $\circledast$, ¿qué símbolo tiene la cara que está frente a Óscar?



(a) $\heartsuit$ (b) $\circledcirc$ (c) $\blacklozenge$ (d) $\odot$ (e) No sé

Solución: *Al armar el cubo y colocarlo sobre la mesa según se muestra en la figura, se establece que si Pablo tiene la cara del cubo marcada con* $\circledast$ *frente a él, entonces Natalia tiene la cara con* $\blacklozenge$ *frente a ella, la cara que está pegada a la mesa tiene el símbolo* $\odot$, *María tiene la cara con* $\heartsuit$ *frente a ella, y Óscar tiene la cara con el símbolo* $\circledcirc$ *frente a él. Por lo tanto, la respuesta correcta es* (b) $\circledcirc$.

Problema 2.

Una tripulación de astronautas despegó hacia una misión espacial un viernes. Si su misión duró 47 días, ¿qué día de la semana regresaron a la Tierra?

(a) miércoles (b) jueves (c) martes (d) lunes (e) No sé

Solución 1: *Observe que trascurridos 7 días de la misión espacial, vuelve a ser viernes, y ocurre lo mismo transcurridos, 14, 21, 28, 35, 42 días. Por lo tanto, si la misión duró 47 días, entonces los astronautas regresaron a la Tierra un miércoles*

V	S	D	L	M	M	J	V	$\cdots$	V	$\cdots$	V	S	D	L	M	M
0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$	14	$\cdots$	42	43	44	45	46	47

Solución 2: *Una semana tiene 7 días, entonces 47 días son 6 semanas y 5 días. Así, cada vez que transcurre una semana del viaje espacial, vuelve a ser viernes. Por lo tanto, transcurridas las 6 semanas vuelve a ser viernes y transcurridos 5 días más, será miércoles.*

Problema 3.

En una floristería, hay cierta cantidad de flores listas para ser puestas en 24 jarrones. El dueño de la tienda calculó que, si reparte las flores por igual, cada jarrón tendría 15 flores. Pero su gato travieso rompió 6 jarrones mientras jugaba por la tienda. Ahora, con menos jarrones, ¿cuántas flores irán en cada uno de los jarrones que no se rompieron?

(a) 5 (b) 18 (c) 20 (d) 21 (e) No sé

Solución 1: *Las flores que originalmente estaban destinadas a los 6 jarrones que el gato rompió son* $6 \times 15 = 90$. *Estas 90 flores deben ser distribuidas entre* *los 18 jarrones restantes. Por lo tanto, cada jarrón, además de las 15 flores que le correspondían inicialmente, recibirá $90 \div 18 = 5$ flores adicionales. En consecuencia, cada uno de los jarrones que no se rompió contendrá $15 + 5 = 20$ flores.*

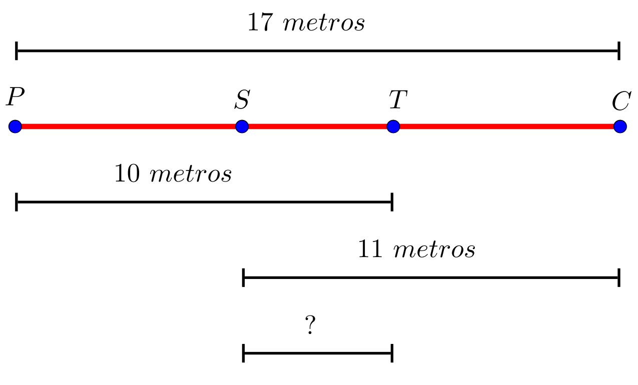
Solución 2: *Con un total de 24 jarrones y una asignación de 15 flores por jarrón, el dueño de la tienda tenía $24 \times 15 = 360$ flores. Sin embargo, debido a que el travieso gato rompió 6 de los jarrones, ahora solo quedan $24 - 6 = 18$ jarrones. Por lo tanto, la distribución de las flores en los jarrones no afectados será de $360 \div 18 = 20$ flores por jarrón.*

PROBLEMA 4.

Cuatro amigos están parados sobre una línea recta. La separación entre el primero y el último es de 17 metros. Entre el primero y el tercero, hay 10 metros de distancia, mientras que entre el segundo y el último hay 11 metros. ¿Qué distancia hay entre el segundo y el tercero amigo?

(a) 1 metro (b) 4 metros (c) 6 metros (d) 7 metros (e) No sé

Solución: *Considere el siguiente bosquejo:*



Observamos que al sumar la distancia entre el Primer amigo y el Tercero con la distancia entre el Segundo amigo y el Cuarto, obtenemos $10 + 11 = 21$ metros. Esta suma representa la distancia total entre el Primer amigo y el Cuarto. No obstante, es importante destacar que al realizar esta suma, hemos incluido dos *veces la distancia entre el Segundo amigo y el Tercero. Por lo tanto, la distancia entre el Segundo y el Tercero es* $21 - 17 = 4$ *metros.*

PROBLEMA 5.

David, Damián y Daniel nacieron el mismo día. ¿Cuál de los siguientes números puede ser la suma de sus edades?

(a) 23 (b) 26 (c) 35 (d) 42 (e) No sé

Solución: *Dado que David, Damián y Daniel nacieron el mismo día, sus edades son iguales. Así, la suma de sus edades debe ser un múltiplo de* 3.

Entre las opciones dadas, 42 *es el único número que es un múltiplo de* 3*. Por lo tanto, la suma de sus edades puede ser* 42*. Las otras opciones no son múltiplos de* 3*, por lo que no son posibles sumas de edades para estos tres amigos.*

PROBLEMA 6.

Un cajero solo tiene monedas de \$200, \$500 y \$1000. ¿De cuántas formas diferentes puede entregar \$2000 de vueltos el cajero?

(a) 3 (b) 5 (c) 6 (d) 9 (e) No sé

Solución: *En total, hay* 6 *formas diferentes de entregar* \$2000 *en monedas de* \$200, \$500 *y* \$1000*. Las posibilidades son:*

- 2 *monedas de* \$1000.
- 1 *moneda de* \$1000 *y* 2 *monedas de* \$500.
- 1 *moneda de* \$1000 *y* 5 *monedas de* \$200.
- 4 *monedas de* \$500.
- 2 *monedas de* \$500 *y* 5 *monedas de* \$200
- 10 *monedas de* \$200.

1.2. Prueba Selectiva

Problema 1.

Cantor es el encargado de asignar estacionamientos en un concurrido centro comercial durante la temporada de rebajas. El centro comercial cuenta con 4 zonas de estacionamiento, identificadas por colores: amarillo, azul, rojo y verde. Los vehículos se estacionan de acuerdo al orden de llegada, así: el primer vehículo que llega se estaciona en la zona amarilla, el segundo en la azul, el tercero en la roja, y el cuarto en la verde. A partir del quinto vehículo, el ciclo de asignación se repite. Bajo este esquema, ¿en qué zona de estacionamiento se encontrará el vehículo número 267?

(a) amarillo (b) azul (c) rojo (d) verde (e) No sé

Solución: *En la tabla, ubicamos los primeros vehículos para identificar un patrón.*

Observe que en la zona de estacionamiento verde siempre quedan los vehículos cuyo número de llegada sea un múltiplo de 4. *Como* 268 *es múltiplo de* 4, *entonces el vehículo número* 267 *(uno antes de un múltiplo de* 4*) se estacionará en la zona roja (antes de la verde).*

Amarillo	*Azul*	*Rojo*	*Verde*
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Problema 2.

En el bosque encantado, Dobby, el elfo libre, tiene 10 pares de calcetines mágicos, y cada par es de un color diferente. Después de lavar sus calcetines en el lago de las luciérnagas, estos quedan mezclados. Si Dobby recoge los calcetines del lago uno por uno, ¿cuántos calcetines debe recoger para asegurarse de tener al menos un par completo del mismo color?

Respuesta numérica: $\boxed{}$

Solución: Si Dobby recoge los calcetines del lago uno por uno, el peor escenario sería recoger 10 *calcetines de* 10 *colores diferentes, ya que, hasta ese momento, no habría ningún par completo. Sin embargo, al recoger el* 11*-ésimo calcetín, tendría que coincidir con al menos uno de los colores previos, formando así un par completo.*

Por lo tanto, Dobby debe recoger al menos 11 *calcetines para asegurarse de tener al menos un par completo del mismo color.*

PROBLEMA 3.

En clase de matemáticas la maestra propone el siguiente juego de adivinanzas. La maestra tiene en sus manos cuatro tarjetas, cada una con un número, que deja ver a todos los estudiantes de la clase: $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{6}$ y $\boxed{9}$. Luego las entrega al azar a Karla, Felipe, Ana y David quienes deben decir una afirmación FALSA sobre su número, para que los demás compañeros no logren adivinarlo.
En la primera ronda:

- Karla dice: "Mi número es múltiplo de 3".
- Felipe comenta: "El mío es divisor de 6".
- Ana afirma: "Me correspondió un número impar".
- David dice: "Mi número es mayor que 10".

Con esta información, ¿quién tiene el número 6 en su tarjeta?
(a) Ana (b) Karla (c) Felipe (d) David (e) No sé

Solución: Karla afirma "Mi número es múltiplo de 3*", como esta afirmación es falsa, entonces el número de Karla NO es múltiplo de* 3*, el único número en las tarjetas que no es múltiplo de* 3*, es el* 2*, luego Karla tiene el* 2*. El número de Felipe NO es divisor de* 6*, de los que quedan, el único que cumple es el* 9*, entonces Felipe tiene el* 9*. Ana tiene un número par, de los dos que quedan el único par es el* 6*, por lo tanto, Ana tiene el número* 6 *en su tarjeta.*

PROBLEMA 4.

Durante una excursión escolar al bosque encantado, Carlos quedó fascinado por un árbol centenario que brillaba de forma única. Mientras lo contemplaba, una hoja resplandeciente cayó sobre sus manos con el siguiente mensaje:

"Cuando tengas el triple de la edad que tienes en este momento, este árbol tendrá un regalo especial para ti."

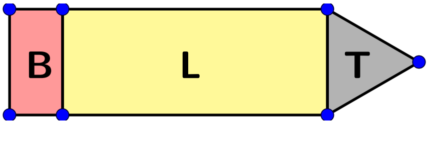
Motivado por la promesa, Carlos regresó al bosque 24 años después. Su sorpresa fue mayúscula al encontrar que, del árbol centenario, pendía una gigantesca manzana de oro para él, haciendo realidad el mensaje que había leído años atrás.
¿Cuántos años tenía Carlos cuando descubrió el enigmático mensaje del árbol?

Respuesta numérica: $\boxed{}$

Solución: Carlos regresó al bosque 24 *años después, cuando su edad era el triple de la que tenía cuando leyó el mensaje de la hoja. Entonces Carlos tenía* 12 *años cuando descubrió el enigmático mensaje, ya que* $12 + 24 = 36$ *es el triple de* 12.

PROBLEMA 5.

En la figura dada, el rectángulo B y el triángulo equilátero T tienen el mismo perímetro, mientras que el perímetro del rectángulo L es el triple del perímetro de B. Si el perímetro del triángulo es $6\,cm$, ¿cuál es el perímetro de toda la figura?



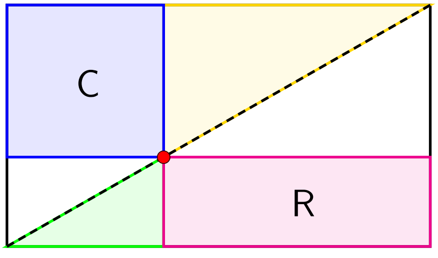
(a) $14\,cm$ (b) $22\,cm$ (c) $26\,cm$ (d) $30\,cm$ (e) No sé

Solución: Dado que el perímetro del triángulo equilátero es 6*, cm entonces cada uno de sus lados mide* $2\,cm$ *y el perímetro del rectángulo* L *es* $18\,cm$*. Ahora, el perímetro de toda la figura es la suma de los perímetros de* B*,* L *y* T ***menos*** 4 *veces la longitud de sus lados en común, porque los segmentos internos de la figura no forman parte de su contorno. Cada uno de los lados en común entre las figuras* B*,* L *y* T *mide* $2\,cm$*, entonces el perímetro de toda la figura es:*

$$6 + 18 + 6 - 2 - 2 - 2 - 2 = 22\,cm.$$

PROBLEMA 6.

En la siguiente figura, el rectángulo C y el rectángulo R tienen un vértice en común, sobre la diagonal punteada del rectángulo mayor. Si el área del rectángulo mayor es $20\,cm^2$ y el área de los triángulos NO coloreados es $6\,cm^2$, ¿de cuántos centímetros cuadrados es el área del rectángulo C?



Respuesta numérica:

Solución: Al reflejar, respecto a la diagonal punteada del rectángulo mayor, el triángulo no coloreado que tiene un lado en común con R*, se observa que el área del rectángulo* C *más el área de los triángulos no sombreados equivale a la mitad del área del rectángulo mayor, es decir a* $20 \div 2 = 10\,cm^2$*. Pero el área no sombreada es* $6\,cm^2$*. Entonces el área del rectángulo* C *es* $10 - 6 = 4\,cm^2$*.*

1.3. Prueba Final

Problema 1.

A Jair le encanta formar figuras con sus cubitos de colores. Un día, con sus cubitos de un $1\,cm$ de lado, armó un cubo más grande cuyo lado medía $3\,cm$, pero luego decidió desarmarlo y usó los mismos cubitos para construir una torre, montando uno encima del otro. ¿Cuál es la altura de la torre que construyó Jair?

Solución: El cubo de lado $3\,cm$ esta formado por $3 \times 3 \times 3 = 27$ cubitos de $1\,cm$ del lado. Luego, al construir la torre, montando un cubito encima del otro, esta alcanzará una altura de $27\,cm$.

Problema 2.

El producto de las edades de tres hermanos es el doble de la edad de su madre. Si la edad de la madre es 45 años y la edad del hermano del medio es un número par, ¿cuál es la edad de cada uno de los tres hermanos?

Solución: El producto de las edades de los tres hermanos es $45 \times 2 = 90$. Además $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$. Como la edad del hermano del medio es par, entonces las edades de los hermanos son: 1, 6 y 15.

Problema 3.

La alfombra mágica de Aladín tenía la forma de un cuadrado con área de $25\,m^2$. Un día, al ver que no podía viajar con todos sus amigos en la alfombra, le pidió un favor al genio de la lámpara: *"¡Quiero que mi alfombra sea más grande!"* Y como por arte de magia, la alfombra creció y creció conservando la forma de cuadrado, pero su perímetro se duplicó. Aladín está muy contento porque ahora todos sus amigos pueden viajar con él, pero tiene una duda, ¿cuántos metros cuadrados tiene su nueva alfombra? Resuelve la duda de Aladín.

Solución: *Al inicio la alfombra tenía* $25\,m^2$ *de área, por lo tanto cada lado medía* $5\,m$. *Como la alfombra duplicó su perímetro, entonces cada lado de la nueva alfombra mide* $10\,m$, *luego el área de la alfombra nueva es* $10 \times 10 = 100\,m^2$.

Problema 4.

María quiere ahorrar 15300 pesos para comprar un juguete que vio en televisión. Si inicia su ahorro un domingo con 100 pesos y decide que en adelante, cada día ahorrará 100 pesos más de lo que ahorró el día anterior, ¿en qué día de la semana terminará de juntar el dinero necesario para comprar su juguete?

Solución: *Los ahorros de María los podemos ver en la siguiente tabla:*

Día	***Ahorro del día***	***Total ahorrado***
domingo	*100*	*100*
lunes	*200*	*300*
martes	*300*	*600*
miércoles	*400*	*1000*
jueves	*500*	*1500*
viernes	*600*	*2100*
sábado	*700*	*2800*
domingo	*800*	*3600*
lunes	*900*	*4500*
martes	*1000*	*5500*
miércoles	*1100*	*6600*
jueves	*1200*	*7800*
viernes	*1300*	*9100*
sábado	*1400*	*10500*
domingo	*1500*	*12000*
lunes	*1600*	*13600*
martes	*1700*	***15300***

Por lo tanto, María termina de ahorrar el dinero para su juguete un martes.

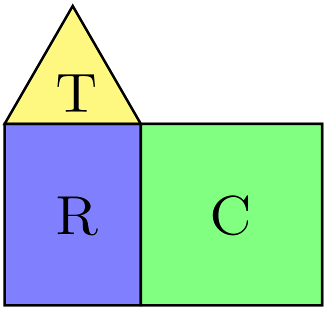
Capítulo 2

Nivel Medio

2.1. Prueba Clasificatoria

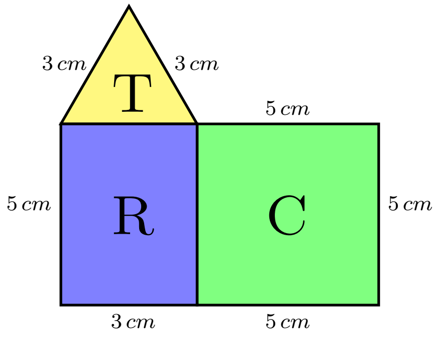
Problema 1.

En la siguiente figura se muestra un triángulo equilátero T, un rectángulo R y un cuadrado C. Si el perímetro de T es $9\,cm$ y el área de R es $15\,cm^2$, ¿cuál es el perímetro de toda la figura?



(a) $24\,cm$ (b) $29\,cm$ (c) $37\,cm$ (d) $45\,cm$ (e) No sé

Solución: *El triángulo T es equilátero con $9\,cm$ de perímetro, entonces cada uno de sus lados mide $3\,cm$. El lado de R que coincide con un lado de T mide $3\,cm$ entonces el lado de R que coincide con un lado del cuadrado C mide $5\,cm$, pues el área de R es $3 \times 5 = 15\,cm^2$. Finalmente, para hallar el perímetro de toda la figura, sumamos las longitudes de los segmentos que conforman su contorno: $3+3+5+3+5+5+5 = 29\,cm$.*



Problema 2.

En una tienda de útiles escolares, por cada docena de cuadernos pagados se recibe uno adicional gratis. Si Enrique sale de la tienda con 26 docenas de cuadernos, ¿cuántas docenas pagó?

(a) 23 (b) 24 (c) 25 (d) 26 (e) No sé

Solución: Por cada docena paga, Enrique recibe un cuaderno adicional. Por lo tanto, al pagar 12 *docenas ha recibido una docena gratis y al pagar* 24 *docenas recibió* 2 *docenas gratis. Dado que Enrique sale de la tienda con un total de* $24 + 2 = 26$ *docenas de cuadernos, entonces él pagó solo* 24 *docenas.*

Problema 3.

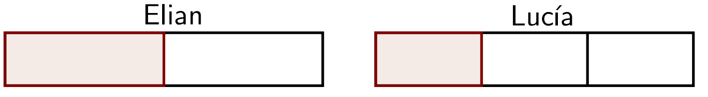
Iván ha ganado varias medallas en las olimpiadas de matemáticas. Un día, decidió organizarlas en grupos de 3 y no le quedó ninguna suelta. Luego las organizó en grupos de 6 y tampoco le sobró alguna; lo mismo sucedió cuando las organizó en grupos de 7. ¿Cuál es la menor cantidad de medallas que puede tener Iván?

(a) 16 (b) 18 (c) 42 (d) 126 (e) No sé

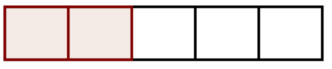
Solución: El número de medallas debe ser un múltiplo de 3*, de* 6 *y* 7*. Como se pide la menor cantidad de medallas posible, entonces esa cantidad es el mínimo común múltiplo de estos números:* $\text{mcm}(3, 6, 7) = 42$.

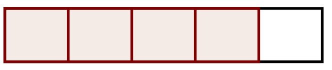
PROBLEMA 4.

Elian y Lucía tenían, cada uno, una chocolatina del mismo tamaño. Elian dividió su chocolatina en dos partes iguales y comió una de ellas. Por otro lado, Lucía dividió su chocolatina en tres partes iguales y comió dos de esas partes. En la figura, se muestra la fracción de chocolatina que le quedó a cada uno.

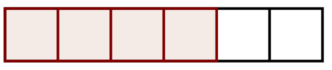


Si juntamos los trozos de chocolatina que les quedaron, ¿cuál de las siguientes figuras se puede formar?

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) No sé.

Solución: A Elian le queda $\frac{1}{2}$ *de chocolatina y a Lucía,* $\frac{1}{3}$*. Al juntar lo que le queda a cada uno obtenemos* $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$*. Por lo tanto, la figura que se puede formar con los dos trozos de chocolatina es:*

PROBLEMA 5.

Con el desarrollo de la Figura 1, Samuel armó la pirámide que se muestra en la Figura 2.

Figura 1.

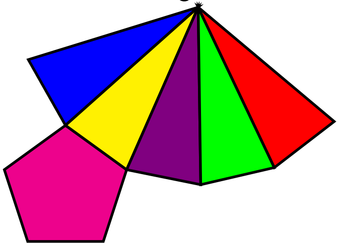
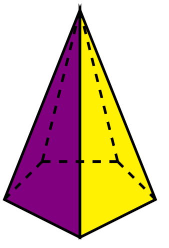
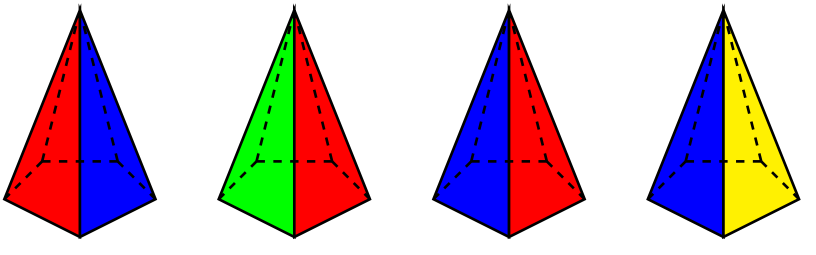


Figura 2.

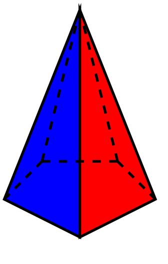


¿Cuántas de las siguientes vistas también corresponden a la pirámide que armó Samuel?



(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) No sé

Solución: De la Figura 2. se deduce que la pirámide se armó "hacia adentro" pues la cara amarilla debe quedar a la derecha de la cara morada. De esta manera se puede apreciar que la única vista que corresponde la pirámide es la tercera



Por lo tanto, solo 1 vista corresponde a la pirámide que armó Samuel.

Problema 6.

¿Cuántos números de tres cifras, que son múltiplos de 3, tienen al 6 como cifra de las unidades y al 4 como cifra de las centenas?

(a) 3 (b) 1 (c) 2 (d) 4 (e) No sé

Solución: *Recordemos que los múltiplos de* 3 *cumplen con la condición de que la suma de sus cifras debe ser un múltiplo de* 3. *En nuestro caso, ya conocemos dos de las tres cifras del número: las unidades, que son* 6, *y las centenas, que son* 4, *cuya suma es* 10. *Para que la suma total de las tres cifras sea un múltiplo de* 3, *la cifra de las decenas debe ser* 2, 5, *u* 8. *Por lo tanto, solo existen* 3 *números que cumplen con las condiciones del problema:* 426, 456, *y* 486.

2.2. Prueba Selectiva

PROBLEMA 1.

En el reino de Numerlandia, cada número pertenece a una familia. Hay cuatro grandes familias: Amarilla, Azul, Roja y Verde. Las reglas de este reino determinan a qué familia pertenece cada número:

- El número 1 brilla en la luminosa familia Amarilla.
- El número 2 se sumerge en la tranquilidad de los Azules.
- El número 3 arde con la pasión de los cálidos Rojos.
- El número 4 florece con la frescura de los saludables Verdes.

A partir del número 5, esta danza de colores se repite. Así, el 5 brilla nuevamente en Amarillo, el 6 se vuelve Azul, el 7 enciende en Rojo y el 8 refresca en Verde. El ciclo continúa de esta manera.
Un día, el sabio Gauss decidió sumar su número favorito con un número de la familia Amarilla. Sorprendentemente, el resultado pertenecía a la familia Verde. ¿A qué familia pertenece el número favorito de Gauss?

(a) Amarilla (b) Azul (c) Roja (d) Verde (e) No sé

Solución: Revisemos los primeros números de cada familia:

Amarilla	*Azul*	*Roja*	*Verde*
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Observemos que los números de la familia verde son los múltiplos de 4, los de la familia amarilla son aquellos que exceden en 1 a un múltiplo de 4, los de la familia azul exceden en 2 a un múltiplo de 4, y los de la familia roja exceden en 3 a un múltiplo de 4.

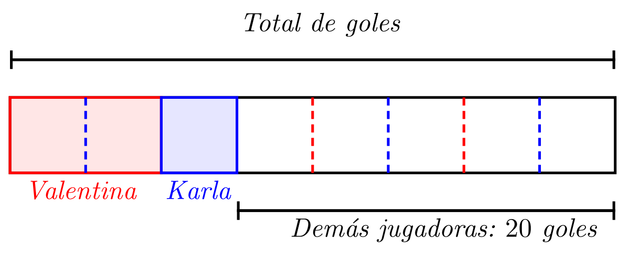
Cuando Gauss suma su número con uno de la familia amarilla y obtiene uno de la familia verde, es decir, obtuvo un múltiplo de 4*, al sumar a su número favorito un número que excede en* 1 *a un múltiplo de* 4*, entonces su número debe exceder en* 3 *a un múltiplo de* 4 *para que, al sumar ambos excedentes, se complete el múltiplo de* 4 *resultante. De este modo, el número favorito de Gauss pertenece a la familia ROJA.*

Problema 2.

Durante la última temporada de la liga de fútbol femenino, dos jugadoras destacadas del equipo "Estrellas del Campo" brillaron en el terreno de juego. La delantera estrella, Valentina, anotó $\frac{1}{4}$ de todos los goles del equipo. Su compañera de equipo, Karla, quien también mostró un gran talento, anotó $\frac{1}{6}$ de los goles restantes después de contar los de Valentina. Si las demás jugadoras del equipo anotaron un total 20 goles, ¿cuántos goles anotó "Estrellas del Campo" durante toda la temporada?

Respuesta numérica: $\boxed{}$

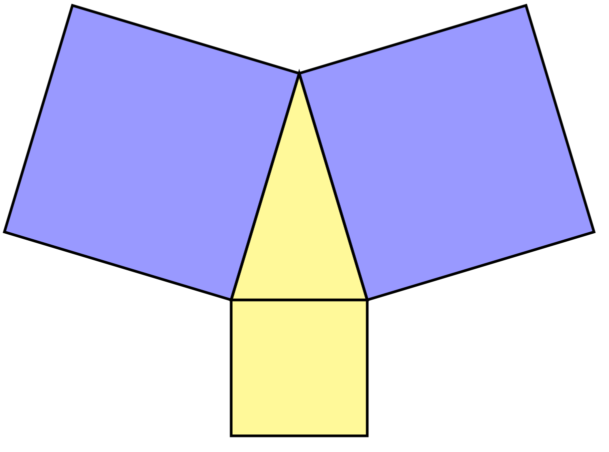
Solución: *Considere el siguiente bosquejo*



La totalidad de los goles la dividimos en 4 *partes iguales, una de estas partes corresponde a los goles de Valentina. Luego, las tres cuartas partes restantes, las dividimos en* 6 *partes iguales, como se muestra en el diagrama; una de estas partes son los goles de Karla, las restantes son los goles de las demás jugadoras. Observe en el dibujo que* 5 *casillas iguales corresponden a los* 20 *goles de las demás jugadoras, entonces en cada casilla "hay"* 4 *goles. Por lo* *tanto, Karla anotó* 4 *goles y Valentina* 8. *Así el total del goles anotados por el equipo "Estrellas del campo" es* $20+4+8=32$.

Problema 3.

Daniel tiene fichas cuadradas y triangulares. Las fichas del mismo color, tienen el mismo perímetro. Daniel arma una figura haciendo coincidir los lados de sus fichas, como se ilustra en la imagen. Si el perímetro de la figura armada es $72\,cm$, ¿cuál es el perímetro de la ficha triangular?



(a) $18\,cm$ (b) $24\,cm$ (c) $27\,cm$ (d) $36\,cm$ (e) No sé

Solución: Dado que el perímetro del triángulo es igual al perímetro del cuadrado pequeño en la figura, podemos deducir que la medida de los dos lados del triángulo, que no coinciden con el lado del cuadrado pequeño, es igual a la longitud de tres lados del cuadrado pequeño. Además, esta medida es la misma que la de dos lados de los cuadrados grandes.

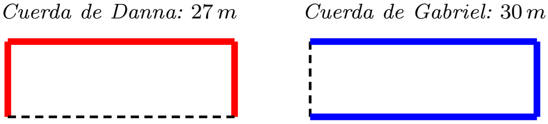
De modo que, el perímetro de la figura es igual a 8 *veces la longitud de un lado del cuadrado grande. Dado que el perímetro es de* $72\,cm$, *cada lado del cuadrado grande mide* $72 \div 8 = 9\,cm$. *Así, cada lado del cuadrado pequeño mide* $(9+9)\div 3 = 6\,cm$. *Por lo tanto, el perímetro del triángulo es* $9+9+6=24\,cm$.

Problema 4.

Danna y Gabriel desean conocer el área del jardín rectangular de su colegio. Para ello Danna utiliza una cuerda con la que puede medir tres lados del jardín obteniendo un total de $27\,m$. Gabriel, con otra cuerda también mide tres lados del jardín y obtiene un total de $30\,m$. ¿Cuántos metros cuadrados mide el área del terreno del jardín?

Respuesta numérica: $\boxed{}$

Solución: Considere la siguiente ilustración



Observemos que la diferencia entre un lado mayor y un lado menor del rectángulo es de $3\,m$. Además, al sumar las longitudes de las dos cuerdas $27+30=57\,m$, obtenemos la longitud de tres lados mayores y tres lados menores. Luego, la medida de un lado mayor junto con uno menor es $57 \div 3 = 19\,m$. Sin embargo, como el lado mayor excede en $3\,m$ al lado menor, entonces la medida del lado mayor es $11\,m$ y la del lado menor es $8\,m$. Por lo tanto, el área del jardín es $11 \times 8 = 88\,m^2$.

Problema 5.

¿Cuántos números de dos cifras tienen la característica de que, al sumar sus cifras, el resultado es un número par?

(a) 45 (b) 50 (c) 25 (d) 20 (e) No sé

Solución: Hay 9 opciones para la primera cifra (de 1 a 9) y 10 opciones para la segunda cifra (de 0 a 9). La única restricción es que la suma de ambas cifras sea un número par.

Caso 1. *Si la primera cifra es par, entonces la segunda cifra debe ser par para que la suma sea par. Las cifras pares son: 0, 2, 4, 6, 8.*

Para la primera cifra tenemos 4 opciones y para la segunda cifra tenemos

5 opciones, entonces para este caso, tenemos $4 \times 5 = 20$ números que cumplen las condiciones.

$\boxed{\textbf{Caso } 2.}$ *Si la primera cifra es impar, entonces la segunda cifra debe ser impar para que la suma sea par. Las cifras impares son:* 1, 3, 5, 7, 9.

Para la primera cifra tenemos 5 opciones y para la segunda cifra también tenemos 5 opciones, entonces para este caso tenemos $5 \times 5 = 25$ números que cumplen las condiciones.

En total, hay $20 + 25 = 45$ números de dos cifras que cumplen con la característica deseada.

Problema 6.

En el reino de las hadas, el pequeño dragón Fuego tiene cierto número de escamas mágicas en su cola. Sabemos que:

- Fuego tiene entre 10 y 20 escamas.
- La madre de Fuego contó sus escamas de tres en tres y no sobró ninguna.
- El siguiente año, Fuego tendrá dos escamas más en su cola y, si la madre las cuenta de cuatro en cuatro, tampoco sobrará ninguna.

¿Cuántas escamas tiene Fuego en su cola?

Respuesta numérica: $\boxed{}$

Solución: *Para determinar cuántas escamas tiene Fuego en su cola actualmente, consideramos los números que son múltiplos de 3 dentro del rango 10 a 20, estos son:* 12, 15, 18. *Sin embargo, al observar que el siguiente año tendrá dos escamas más y el total será un múltiplo de 4, la única opción que cumple con esta condición es 18. Por lo tanto, Fuego tiene actualmente 18 escamas en su cola.*

2.3. Prueba Final

Problema 1.

En el valle encantado, los duendes sembraron entre 30 y 50 plantas de judías mágicas. Al momento de la cosecha, los duendes observaron que:

- Si cosechan 5 plantas de judías mágicas cada día, al finalizar la cosecha les quedan 2 plantas sin cosechar, las cuales deben dejar como alimento para las criaturas encantadas del valle.
- Pero, si cosechan 4 plantas de judías mágicas diarias, solo 1 queda sin cosechar y la dejan para las criaturas encantadas.

¿Cuántas plantas de judías mágicas sembraron los duendes?

Solución: *Dado que el número de plantas está entre* 30 *y* 50, *y excede en* 2 *a un múltiplo de* 5, *entonces debe ser uno de los siguientes números:*

$$32, 37, 42, 47.$$

Pero el número de plantas también es un múltiplo de 4 *aumentado en* 1. *De los anteriores números, el único que cumple es el* 37. *Por lo tanto, el número de plantas que sembraron los duendes es* 37.

Problema 2.

Un número natural se llama *esquelético* si sus cifras son solo ceros o unos. Por ejemplo, el número 10110 es esquelético. ¿Cuántos números esqueléticos menores que un millón son múltiplos de 3 y de 5 a la vez? ¿Cuáles son estos números?

Solución: *Dado que las cifras de estos número solo son* 0 *o* 1, *y deben ser múltiplos de* 5, *entonces los números esqueléticos que estamos buscando terminan en* 0. *También deben ser menores que* 1 *millón, entonces deben tener máximo* 5 *cifras. Además, deben ser múltiplos de* 3, *entonces la suma de sus cifras debe ser múltiplo de* 3, *como sus cifras son solo ceros o unos, entonces los números* *que buscamos deben tener* 0 *o* 3 *unos, de esta manera, los números que estamos buscando son:*

$$0, 1110, 10110, 11010, 11100, 100110,$$

$$101010, 101100, 110010, 110100, 111000.$$

En total, 11 *números.*

PROBLEMA 3.

Están escritos los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Carlos borra dos números y se da cuenta que la suma de los números que borró es la mitad de la suma de los números que quedaron.

(a) ¿Cuál es la suma de los dos números que borró Carlos?

(b) ¿Cuáles números pudo haber borrado Carlos? Da todas las posibilidades

Solución:

(a) *La suma de los números* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 *y* 9 *es* 45. *Dado que la suma de los dos números que borró es la mitad de la suma de los números que quedan, entonces los números que borró deben sumar* 15 *(y los que quedan* 30.*)*

(b) *Las posibilidades para sumar* 15 *con dos de los números son:* 6 *y* 9 *o* 7 *y* 8.

PROBLEMA 4.

Lucía quiere cambiar el color del piso rectangular de su sala. En el almacén, encontró un descuento en baldosas rectangulares de su color favorito que miden $15\,cm$ de ancho por $35\,cm$ de largo. Aunque no está segura de cuántas baldosas necesita, recuerda que el piso de su sala actualmente está cubierto con 24 filas, y cada fila contiene 14 baldosas cuadradas de $40\,cm$ de lado. ¿Puedes ayudar a Lucía a calcular cuántas baldosas necesita para cambiar el piso de su sala?

Solución: *El piso de la sala de Lucía tiene* $24 \times 14 = 336$ *baldosas, cada una con área* $40 \times 40 = 1600\,cm^2$. *Por lo tanto, el área de la sala es* $336 \times 1600 = 537600\,cm^2$. *Ahora, cada tableta nueva tiene* $35 \times 15 = 525\,cm^2$, *luego Lucía necesitará* $\dfrac{537600}{525} = 1024$ *baldosas para cambiar el piso de su sala.*

Capítulo 3

Nivel Avanzado

3.1. Prueba Clasificatoria

Problema 1.

Valeria y Gabriel tienen un número favorito cada uno. Si la suma de sus números es 99 y la diferencia es 71, ¿cuál es el producto de sus números favoritos?

(a) 994 (b) 1190 (c) 1245 (d) 1386 (e) No sé

Solución 1: Si sumamos las dos cantidades que conocemos: 99 *(la suma) y* 71 *(la diferencia) obtendremos el doble del número mayor:* $99 + 71 = 170$. *Entonces, el número mayor es* $170 \div 2 = 85$.
Ahora, restando 85 *de* 99 *encontramos el número más pequeño:* $99 - 85 = 14$.
Finalmente, multiplicamos los dos números para encontrar el producto:

$$85 \times 14 = 1190.$$

Solución 2: Sean a y b los números favoritos de Valeria y Gabriel, supongamos que el mayor de los dos números es a. Entonces,

$$a + b = 99$$
$$a - b = 71.$$

Si sumamos estas dos cantidades obtenemos que $2a = 170$, *luego* $a = 85$ *y*

$b = 99 - 85 = 14$. *Por lo tanto, el producto de los números favoritos de Valeria y Gabriel es* $85 \times 14 = 1190$.

Problema 2.

Todos los días, Emmanuel, Isabella, Daniela y Jerónimo llevan, cada uno, 1 litro de agua para consumir en el colegio. Cierto día, durante el descanso, Emmanuel bebió la mitad de su agua; Isabella, $\frac{3}{4}$; Daniela, $\frac{5}{7}$ y Jerónimo $\frac{8}{11}$. ¿Quién consumió más agua ese día durante el descanso?

(a) Isabella (b) Emmanuel (c) Daniela (d) Jerónimo (e) No sé

Solución 1: Para determinar quién consumió más agua durante el descanso, vamos a comparar las fracciones de agua que cada uno bebió, usando su expresión decimal:

Emmanuel *bebió* $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

Isabella *bebió* $\frac{3}{4} = 0{,}75$

Daniela *bebió* $\frac{5}{7} \approx 0{,}714$

Jerónimo *bebió* $\frac{8}{11} \approx 0{,}727$

La mayor cantidad es $0{,}75$*, que corresponde a Isabella. Por lo tanto, Isabella consumió más agua ese día durante el descanso.*

Solución 2: Para comparar las fracciones de agua que cada uno bebió, las "complificaremos" para que tengan el mismo denominador.

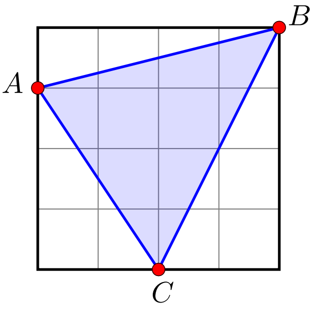
El denominador común debe ser un múltiplo común de los denominadores 2, 4, 7 *y* 11*. El mínimo común múltiplo (MCM) de estos números es* 308*. Entonces, convertimos cada fracción al denominador común* 308*:*

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 154}{2 \times 154} = \frac{154}{308}$$
$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 77}{4 \times 77} = \frac{231}{308}$$
$$\frac{5}{7} = \frac{5 \times 44}{7 \times 44} = \frac{220}{308}$$
$$\frac{8}{11} = \frac{8 \times 28}{11 \times 28} = \frac{224}{308}$$

De esta manera es fácil determinar cuál es la mayor fracción, solamente comprando sus numeradores. Observamos que el numerador más grande es 231, *que corresponde a Isabella.*

Problema 3.

En una hoja cuadriculada, se ha dibujado el triángulo ABC tal como se muestra en la figura. Si el perímetro de la hoja es de $32\,cm$, ¿cuál es el área del triángulo ABC?



(a) $36\,cm^2$ (b) $14\,cm^2$ (c) $18\,cm^2$ (d) $28\,cm^2$ (e) No sé

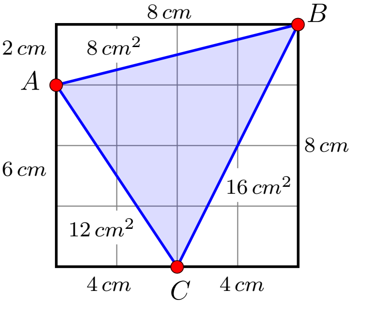
Solución: El perímetro de la hoja está formada por 16 *lados de los cuadraditos de la cuadrícula. Por lo tanto cada lado de de los cuadraditos de la figura mide* $32 \div 16 = 2\,cm$.

Ahora, para hallar el área sombreada podemos restar al área de la hoja, las áreas de los tres triángulos que no están sombreados, así:

El área de la hoja es: $8 \times 8 = 64\,cm^2$.

Las áreas de los tres triángulos no sombreados dentro de la hoja son:

$$\frac{2 \times 8}{2} = 8\,cm^2$$
$$\frac{4 \times 6}{2} = 12\,cm^2$$
$$\frac{4 \times 8}{2} = 16\,cm^2.$$



Por lo tanto, el área del triángulo sombreado ABC *es:*

$$64 - 8 - 12 - 16 = 28\,cm^2.$$

Problema 4.

Felipe ha creado un diseño de un Koala utilizando puntillas y cuerdas, tal como se puede observar en la figura. La medida del ángulo destacado en el cuerpo del Koala está

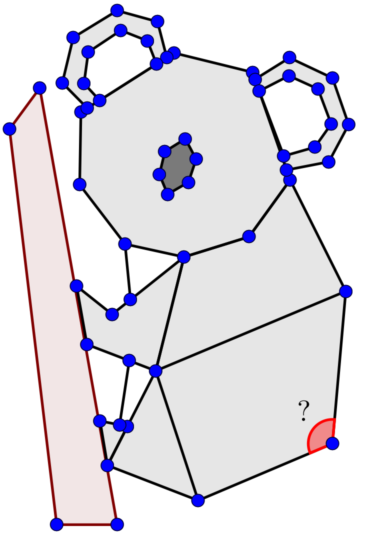
(a) entre $90°$ y $180°$

(b) entre $0°$ y $90°$

(c) entre $180°$ y $270°$

(d) entre $270°$ y $360°$

(e) No sé.



Solución: *De la figura, notamos que el ángulo señalado es mayor que un ángulo recto (podemos ver esto comparándolo con la esquina de una hoja de papel), pero es menor que un ángulo llano. Por lo tanto, su medida está entre* $90°$ *y* $180°$*.*

Problema 5.

Un artista debe pintar un rostro usando solamente 2 colores. Si tiene disponibles 6 colores diferentes, ¿de cuántas formas puede elegir los 2 colores para pintar el rostro?

(a) 12 (b) 15 (c) 30 (d) 36 (e) No sé

Solución: *Las posibles formas para elegir los dos colores diferentes son* 15*. Para ver esto, supongamos que los colores son* A, B, C, D, E *y* F*; entonces las posibles parejas de dos colores diferentes son:*

$$\begin{array}{ccccc} A\text{-}B & A\text{-}C & A\text{-}D & A\text{-}E & A\text{-}F \\ & B\text{-}C & B\text{-}D & B\text{-}E & B\text{-}F \\ & & C\text{-}D & C\text{-}E & C\text{-}F \\ & & & D\text{-}E & D\text{-}F \\ & & & & E\text{-}F \end{array}$$

Problema 6.

Un tendero tiene 48 dulces de fresa y 36 de chocolate. Quiere empacarlos en bolsitas, sin mezclar los sabores y de manera que cada bolsita contenga la misma cantidad de dulces. Si su objetivo es usar el menor número de bolsitas posible, ¿cuántas necesitará para guardar todos los dulces?

(a) 2 (b) 4 (c) 7 (d) 12 (e) No sé

Solución: *Debemos encontrar el número máximo de dulces que puede contener cada bolsita de forma que se dividan exactamente tanto los 48 dulces de fresa como los 36 de chocolate. Este número es el máximo común divisor (MCD) de 48 y 36. El MCD de 48 y 36 es 12, esto significa que cada bolsita debe contener 12 dulces.*

Ahora, calculamos cuántas bolsitas se necesitan para cada tipo de dulce:

- *Para los 48 dulces de fresa se necesitan $\frac{48}{12} = 4$ bolsitas.*
- *Para los 36 dulces de chocolate se necesitan $\frac{36}{12} = 3$ bolsitas.*

Entonces, en total, el tendero necesitará:

$$4 \text{ bolsitas} + 3 \text{ bolsitas} = 7 \text{ bolsitas}.$$

3.2. Prueba Selectiva

PROBLEMA 1.

En una tienda de dulces, cada chocolatina se vende a $\$500$, cada bocadillo a $\$600$ y cada dulce de leche a $\$400$. Si sumamos el valor de todas las unidades producidas en un día de estos tres productos, obtenemos $\$22800$. Curiosamente, si duplicaran la producción de bocadillos, el valor de la totalidad de los tres productos sería $\$31800$. ¿Cuál es el valor todas las chocolatinas y dulces de leche producidos en un día?

(a) $\$4800$ (b) $\$9000$ (c) $\$18000$ (d) $\$13800$ (e) No sé

Solución: *Dado que al duplicar la producción de bocadillos el valor total de los tres productos cambia de* $\$22800$ *a* $\$31800$, *podemos concluir que el valor de la producción normal de bocadillos al día es de* $\$31800 - \$22800 = \$9000$.

Por lo tanto, para encontrar el valor total de todas las chocolatinas y dulces de leche producidos en un día, simplemente restamos el valor de la producción normal de bocadillos ($\$9000$*) del valor total original (*$\$22800$*):*

$$\$22800 - \$9000 = \$13800.$$

Así, el valor total de todas las chocolatinas y dulces de leche producidos en un día es de $\$13800$.

PROBLEMA 2.

Todos los días, David camina $\frac{1}{5}$ del camino desde su colegio a casa, luego avanza $\frac{2}{3}$ del camino en el carro de su tío, y finalmente recorre $2{,}4\,km$ en la bicicleta de su primo, hasta llegar a casa. ¿Cuántos kilómetros hay en total desde el colegio hasta la casa de David?

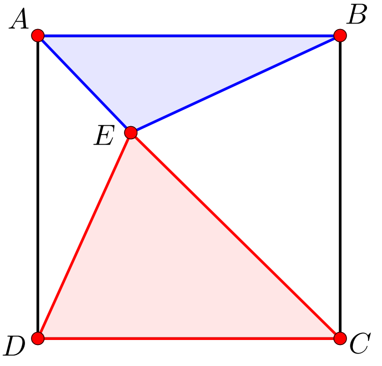
Respuesta numérica: $\boxed{}$

Solución: *David camina* $\frac{1}{5}$ *del camino desde su colegio a casa, luego avanza* $\frac{2}{3}$ *del camino en el carro de su tío. Hasta este momento, le queda* $1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$

del camino por recorrer. Esta fracción corresponde a $2{,}4\,km$*, que los recorre en bicicleta.*
Como $\frac{2}{15}$ *del camino es* $2{,}4\,km$*, entonces* $\frac{1}{15}$ *es* $1{,}2\,km$*, y por lo tanto, la longitud del camino desde el colegio hasta la casa de David es* $\frac{15}{15}$*, que corresponde a* $1{,}2\,km$ *multiplicado por* 15*, lo que da* $18\,km$*.*

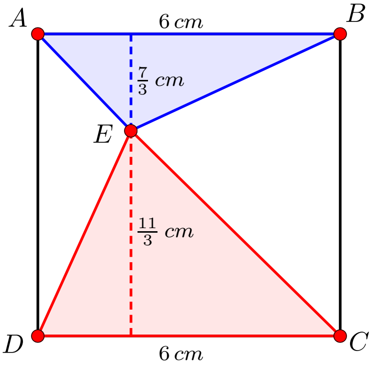
PROBLEMA 3.

En la figura dada, el cuadrado $ABCD$ tiene $24\,cm$ de perímetro. Si el área del triángulo AEB es $7\,cm^2$ ¿Cuál es el área del triángulo DEC?



(a) $10\,cm^2$ (b) $11\,cm^2$ (c) $12\,cm^2$ (d) $13\,cm^2$ (e) No sé

Solución: *Dado que el perímetro del cuadrado es* $24\,cm$*, entonces cada uno de sus lados mide* $6\,cm$*.*



Dado que el área del triángulo AEB es $7\,cm^2$, podemos utilizar la fórmula del área de un triángulo $\left(\acute{A}rea = \dfrac{base \times altura}{2}\right)$ *para encontrar la altura del triángulo AEB.*

Sabemos que la base AB del triángulo AEB es $6\,cm$, entonces entonces su altura es un número que al multiplicarlo por 6 (la base) y al dividirlo entre 2 da 7. Ese número es $\frac{7}{3}$. De este modo, descubrimos que la altura del triángulo DEC marcada en la figura es $6\,cm - \frac{7}{3}\,cm = \frac{11}{3}\,cm$ y por lo tanto, el área de este triángulo es:

$$\frac{6 \times \frac{11}{3}}{2} = 11\,cm^2.$$

PROBLEMA 4.

De una hoja rectangular, Amelia recorta un rectángulo de $2\,cm$ ancho por $5\,cm$ de largo. A la parte restante de la hoja, le realiza dos cortes tal como se muestra en la Figura 1. Luego, gira los triángulos obtenidos con los cortes, sobre los puntos señalados, para formar un triángulo como se aprecia en la Figura 2. ¿De cuántos centímetros cuadrados era el área de la hoja original de Amelia?

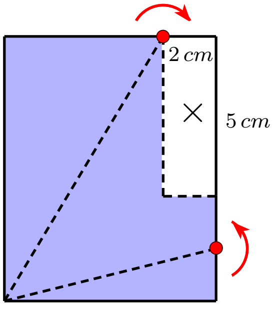


Figura 1.

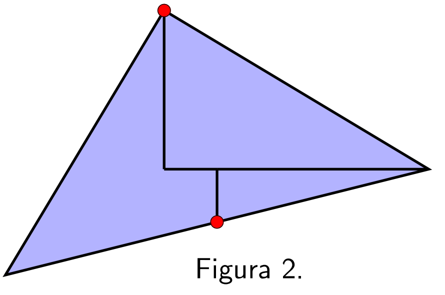
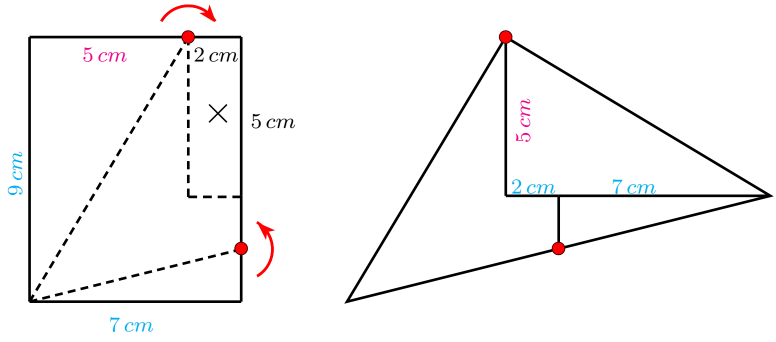


Figura 2.

Respuesta numérica: ☐

Solución: *Al analizar las rotaciones de las piezas (observe la siguiente figura), se observa que los lados del rectángulo original medían $7\,cm$ y $9\,cm$.*



Por lo tanto, el área del rectángulo original era $7 \times 9 = 63\,cm^2$.

Problema 5.

Durante una emocionante carrera de observación, los participantes recibirán diversas pistas que les ayudarán a abrir un cofre al final de la travesía. Este cofre, repleto de premios, solo puede desbloquearse con una combinación numérica específica de seis dígitos.

Sara, una de las competidoras más veloces, solo pudo recopilar las siguientes pistas sobre la clave durante su recorrido:

- Es un número impar.
- Es múltiplo de 3.
- Entre sus dígitos, uno es el 2 y otro es el 6. Todos los demás dígitos en el número son idénticos entre sí.
- Ninguna de sus cifras es mayor que 6.

Con las pistas en mano, Sara se pregunta: ¿cuántas claves para abrir el cofre son posibles con estas características?

Respuesta numérica: $\boxed{}$

Solución: *Dado que el número de seis dígitos debe ser impar, entonces la última cifra debe ser impar, es decir,* 1, 3, 5, 7 *o* 9. *También sabemos que entre sus dígitos solo hay un* 2 *y un* 6, *los demás son el mismo dígito, y este debe ser impar. Además, el número de la clave es múltiplo de* 3, *es decir, la suma de sus cifras es múltiplo de* 3. *Por lo tanto,* $2 + 6 + 4 \times$ (*el dígito impar*) *debe ser un* *múltiplo de* 3*. Revisando las opciones, solo funcionan los dígitos impares* 1 *y* 7*. Pero ninguna de las cifras de la clave es mayor que* 6*, entonces el dígito impar es el* 1*.*

Por lo tanto, con las pistas que tiene Sara, hay 20 *posibles claves para abrir el cofre:*

261111	*126111*	*112611*	*111261*
216111	*121611*	*112161*	*111621*
211611	*121161*	*116211*	
211161	*162111*	*116121*	
621111	*161211*		
612111	*161121*		
611211			
611121			

Problema 6.

En Numerlandia, cada número natural pertenece a una familia. Existen cuatro familias en total: Amarilla, Azul, Roja y Verde. La tradición dice que los números se unen a estas familias de la siguiente manera:

- El número 1 brilla en la luminosa familia Amarilla.
- El número 2 se sumerge en la tranquilidad de los Azules.
- El número 3 arde con la pasión de los cálidos Rojos.
- El número 4 florece con la frescura de los saludables Verdes.

A partir del número 5, esta danza de colores se repite. Así, el 5 brilla nuevamente en Amarillo, el 6 se vuelve Azul, el 7 enciende en Rojo y el 8 refresca en Verde. El ciclo continúa de esta manera.

Dada esta tradición, si eliges dos números de diferentes familias y los sumas, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado pertenezca a la familia Roja?

$(a)\ \frac{1}{2}$ $(b)\ \frac{1}{3}$ $(c)\ \frac{1}{4}$ $(d)\ \frac{1}{6}$ (e) No sé

Solución: Revisemos los primeros números de cada familia:

Amarilla	*Azul*	*Roja*	*Verde*
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Observemos que los números de la familia verde son los múltiplos de 4*, los de la familia amarilla son aquellos que exceden en* 1 *a un múltiplo de* 4*, los de la familia azul exceden en* 2 *a un múltiplo de* 4*, y los de la familia roja exceden en* 3 *a un múltiplo de* 4*.*
Veamos que pasa al sumar dos números de familias diferentes. Al sumar un número (amarillo) que es uno más que múltiplo de 4*, con otro (azul) que excede en* 2 *a un múltiplo de* 4*, se obtiene un número que excede en* 3 *a un múltiplo de* 4*. Por lo tanto, el resultado de sumar un amarillo con un azul es un número rojo. Haciendo este análisis para cada caso se tiene:*

- *Amarillo+Azul=rojo*
- *Amarillo+Rojo=verde*
- *Amarillo+Verde=amarillo*
- *Azul+Rojo=amarillo*
- *Azul+Verde=azul*
- *Rojo+Verde=rojo*

Por lo tanto, la probabilidad de que al sumar dos números de familias diferentes el resultado pertenezca a la familia Roja es $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

3.3. Prueba Final

Problema 1.

Daniel planea llevar una empanada y un jugo para cada uno de sus compañeros del salón, pero no está seguro de si el dinero que ha ahorrado será suficiente. Decide preguntar a su familia para tener una idea de los precios. Su tía le cuenta que compró 6 empanadas y 3 jugos y pagó $\$14700$. Por otro lado, su tío le dice que él compró 3 empanadas y 6 jugos por $\$14100$. ¿Cuánto dinero necesitará Daniel para comprar las empanadas y los jugos de sus 20 compañeros de salón?

Solución: Note que 9 *empanadas y* 9 *jugos valen* $\$14700 + \$14100 = \$28800$. *Luego,* 1 *empanada y un jugo cuestan* $\$28800 \div 9 = \$3200$. *Como Daniel planea comprar* 1 *empanada y* 1 *jugo para cada uno de sus* 20 *compañeros, entonces necesitará* $20 \times \$3200 = \$64000$.

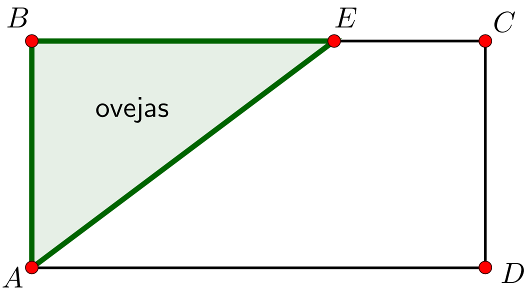
Problema 2.

Tres astronautas, Astro, Cosmo y Estrella, están en una emocionante misión en el espacio. Cada uno de ellos lleva un botón en su traje que brilla cuando envía señales a la central espacial. El botón de Astro brilla cada 4 minutos, el de Cosmo brilla cada 5 minutos y el de Estrella brilla cada 6 minutos. A las 7 a.m., los astronautas comienzan su caminata espacial y, en ese momento, sus tres botones brillan al mismo tiempo. Si la caminata espacial terminó a las $11:45$ a.m., ¿en qué momentos durante la caminata brillaron los tres botones al mismo tiempo?

Solución: El mínimo común múltiplo de 4, 5 *y* 6 *es* 60. *Luego, cada* 60 *minutos, es decir* 1 *hora, brillarán los tres botones a la vez. Esto es, a las* 8, 9, 10 *y* 11 *a.m.*

PROBLEMA 3.

Ana construyó un corral triangular en una esquina de su parcela rectangular, como se representa en el dibujo adjunto; con el fin de que sus ovejas puedan pastar solo dentro del corral. Al delimitar el corral para sus ovejas, descubrió que este tiene un área de $100\,m^2$ y que el lado BE es el doble de largo que el lado EC. ¿Cuál es el área de la parcela en la que no pueden pastar la ovejas?



Solución: Sea $EC = x$, entonces $BE = 2x$ y $BC = 3x$. Entonces el área del corral es:

$$\frac{AB \times 2x}{2} = 100,$$

De ahí que $AB \times x = 100$. De modo que el área de toda la parcela es $AB \times 3x = 3(AB \times x) = 300\,m^2$. Luego las ovejas no podrán pastar en $300 - 100 = 200\,m^2$.

PROBLEMA 4.

Se dice que un número está embrujado si, al dividirse entre 31, deja un residuo de 10. El 31 de octubre, un profesor celebró Halloween escondiendo números embrujados por todo el colegio, de manera que cada estudiante, al descubrir un número embrujado, tenía la oportunidad de reclamar una calabaza llena de dulces. ¿Cuántos números embrujados, todos menores que 500, podrían haber estado ocultos en el colegio?

Solución: Un número embrujado excede en 10 a un múltiplo de 31. Por lo tanto, *los números embrujados menores que* 500 *son* 16 *en total:*

- $31 \times 0 + 10 = 10$,
- $31 + 10 = 41$,
- $31 \times 2 + 10 = 72$,
- $31 \times 3 + 10 = 103$,
- $31 \times 4 + 10 = 134$,
- $31 \times 5 + 10 = 165$,
- 196,
- 227,
- 258,
- 289,
- 320,
- 351,
- 382,
- 413,
- 444,
- 475

Apéndice A

Cuadro de Honor

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la Duodécima versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Primaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 5545 participantes del certamen, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

NIVEL BÁSICO

Puesto	Medalla	Participante
1.º		*Jerónimo Porras Ariza* *Colegio Cooperativo, Barbosa.*
2.º		*José Manuel Sánchez Jara* *Colegio Infantil Colombianitos, San Gil.*
3.º		*Sara Lucía Avilés Cediel* *Colegio Bilingüe La Consolata, Bucaramanga.*
4.º		*Sarith Rodríguez Cala* *Col. Técnico Industrial José Elías Puyana, Floridablanca.*
5.º		*Jaime Santiago Avella Díaz* *Escuela Madre Caridad, Piedecuesta.*

NIVEL MEDIO

Puesto	Medalla	Participante
1.^{o}		*Samuel Rangel Santos* *Escuela Normal Superior, Oiba.*
2.^{o}		*David Alejandro Hernández Pinzón* *Colegio Niño Jesús de Praga, Girón.*
3.^{o}		*Jhosué González Maldonado* *Institución Educativa Jorge Ardila Duarte, Bucaramanga.*
4.^{o}		*Bernabé Angarita López* *Gimnasio Pedagógico Comfenalco, Bucaramanga.*
5.^{o}		*Samuel Andrés Álvarez Vega* *Redcol Newport School, Floridablanca.*

NIVEL AVANZADO

Puesto	Medalla	Participante
1.^{o}		*Emilio Andrés López Canchila* *Colegio Reggio Amelia, Bucaramanga.*
2.^{o}		*Danna Sofía Zaraza Morantes* *Institución Educativa Gabriela Mistral, Bucaramanga.*
3.^{o}		*Valentina García Dulcey* *Colegio El Rosario, San Gil.*
4.^{o}		*Sara Valentina Jácome Quintero* *Institución Educativa Colegio Agustina Ferro, Ocaña.*
5.^{o}		*Nicoll Mariana Mateus Rodríguez* *Colegio Nuestra Señora del Rosario, Floridablanca.*

Bibliografía

[1] Bolaños W. *Problemas y Soluciones Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas Universitaria 1998-2019.* Universidad Antonio Nariño y Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[2] Brochero F. y Restrepo J. *Un recorrido por la Teoría de Números.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[3] Gómez J., Valdez R. y Vázquez R. *Principio de las Casillas.* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2011.

[4] Hemmerling E. *Geometría Elemental.* Bakersfield College. Limusa, México, 2009.

[5] Jiménez L., Gordillo J. y Rubiano G. *Teoría de números para principiantes.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2004.

[6] Madroñero J y Contreras I. *Un recorrido por el Álgebra.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[7] Soberón P. *Combinatoria para olimpiadas* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2010.

[8] RESTREPO P. *Un recorrido por la Combinatoria I.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2010.

[9] VALDERRAMA A. Y GONZÁLEZ E. *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Nivel Intermedio 2010* Universidad Antonio Nariño, 2010

[10] VALDERRAMA A. Y GONZÁLEZ E. *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Primer Nivel 2010* Universidad Antonio Nariño, 2010.

Enlaces de interés

1. Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

   Pruebas anteriores:

   http://matematicas.uis.edu.co/?q=olimpiadas-primaria/pruebas_anteriores

   Página de facebook:

   https://www.facebook.com/OlimpiadasMatematicasUIS/

2. Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño:

   https://orm.udenar.edu.co/?page_id=1612

3. Olimpiadas Matemáticas de la Universidad de Antioquia.

   https://www.olimpiadasudea.co/matematicas/talleres.html

4. Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

   https://www.acmven.org/pruebas/

5. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

   https://www.ommenlinea.org/material-de-entrenamiento/introductorio/

6. Olimpiada Matemática Argentina,

   Problemas Semanales: https://www.oma.org.ar/problemas/index.php

   Archivo de enunciados: https://www.oma.org.ar/enunciados/index.htm#omn

   Simulacros en línea: https://www.oma.org.ar/canguro/problemas.html

7. Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico

   http://om.pr/