XIV OLIMPIADAS REGIONALES MATEMÁTICAS

SECUNDARIA

INFORMES

olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Tel.: 6344000, ext.: 2316

Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

Olimpiadas Regionales de Matemáticas

GRUPO EDUCACIÓN MATEMÁTICA UIS EDUMAT

SEA Sistema de apoyo a la excelencia académica

INSTITUTO DE PROYECCIÓN REGIONAL Y EDUCACIÓN A DISTANCIA IPRED EDUCACIÓN INTERACTIVA Y ABIERTA AL LIDERAZGO

Vicerrectoría Académica

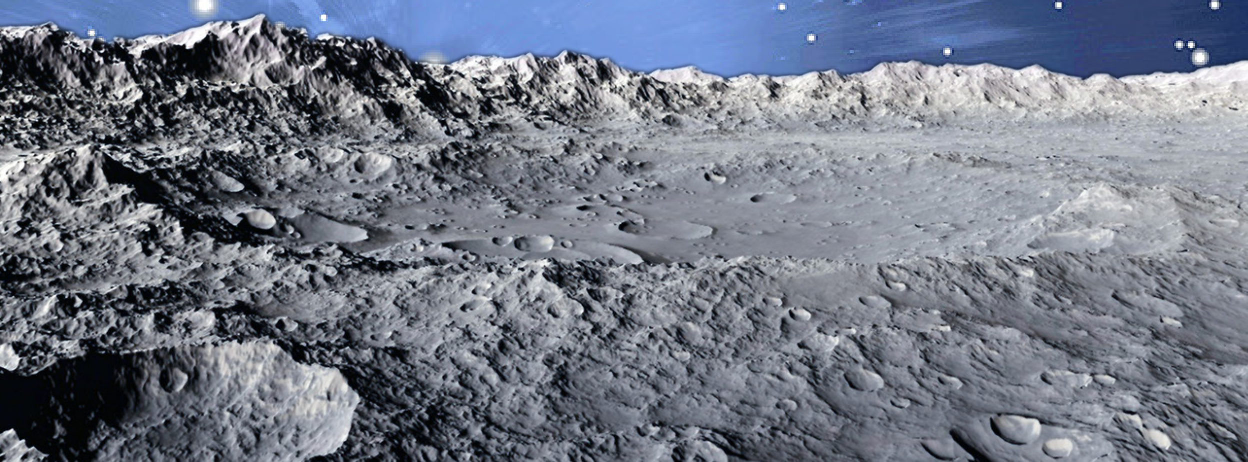
Universidad Industrial de Santander UIS

"VIGILADA MINEDUCACIÓN"

XIV Olimpiadas Regionales Matemáticas

Secundaria

Julio Garavito Armero fue un astrónomo, matemático, economista, poeta e ingeniero colombiano. Sus investigaciones contribuyeron al desarrollo de las ciencias en Colombia durante el siglo XIX. En su honor, uno de los cráteres lunares del lado opuesto al visible desde la Tierra, fue bautizado con su nombre en el año 1970.



Olimpiadas Regionales de Matemáticas

Grupo Educación Matemática UIS EDUMAT

SEA Sistema de apoyo a la excelencia académica

IPRED Instituto de Proyección Regional y Educación a Distancia. Educación interactiva y abierta al liderazgo

Vicerrectoría Académica

Universidad Industrial de Santander

"VIGILADA MINEDUCACIÓN"

Decimocuartas Olimpiadas Regionales de Matemáticas Secundaria

Universidad Industrial de Santander

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga

2022

Elaboración y edición

Grupo Olimpiadas Regionales de Matemáticas - 2022.

Directora

Adriana Alexandra Albarracín Mantilla

Coordinador

Jorge Eliécer Gómez Ríos

Monitores

Álvaro Javier Riaño Blanco
Jamir Santiago Castellanos Mantilla
Javier Mauricio Sierra Villabona
José Camilo Rueda Niño
Juan Carlos Anaya Bohórquez
Julián Enrique Neira Díaz
Karol Andrea Meléndez Gómez
Keren Slendy Rodríguez Calderón
Sara Michell Estévez
Sergio Andrés Caicedo Araque
Thomas Javier Carrillo Basto

Introducción

"Una manera de calcular el número pi a través de la probabilidad es este: se trazan unas líneas paralelas equidistantes en un papel, se lanza una aguja de cierta dimensión y se van contando las veces que esta corta las líneas. Ese número, que relaciona las veces que se lanza la aguja con las que corta alguna de las líneas tiende al número pi"

-Clara Helena Sánchez Botero (UNAL),
sobre El juego de la aguja de Julio Garavito Armero

La Universidad Industrial de Santander, como institución de educación superior del ámbito regional, forma ciudadanos como profesionales integrales, éticos, con sentido político e innovadores; apropia, utiliza, crea, transfiere y divulga el conocimiento por medio de la investigación, la innovación científica, tecnológica y social, la creación artística y la promoción de la cultura, buscando de este modo el fortalecimiento de una sociedad democrática, participativa, deliberativa y pluralista, con justicia y equidad social, comprometida con la preservación del medio ambiente y el buen vivir.

En el marco de esta misión institucional, la Escuela de Matemáticas ofrece a la sociedad santandereana y de la región de influencia de la Universidad, un escenario de alta calidad para el cultivo de las matemáticas, promoviendo entre los integrantes de la comunidad académica una actitud creativa y rigurosa, y construyendo un ambiente académico basado en la solidaridad, la empatía y el reconocimiento de los otros en su dignidad humana. Es por esta razón que, desde sus inicios, la Escuela de Matemáticas se ha comprometido con la educación matemática, no solo por la calidad reconocida a nivel nacional e internacional de los egresados de sus programas académicos de pregrado y posgrado, sino también por su participación activa y crucial en la formación de los estudiantes de otros programas de la Universidad.

Como parte de su responsabilidad académica y su proyección social frente a los diversos retos en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las habilidades matemáticas en el nororiente colombiano, la Escuela de Matemáticas ha diseñado y ejecutado desde el 2009, el proyecto Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (ORM-UIS), para secundaria y primaria, a través del fortalecimiento de las competencias matemáticas de los estudiantes y la capacitación simultánea de los profesores que orientan dichos procesos.

Las ORM-UIS abordan cinco (5) áreas, a saber: i) teoría de números; ii) combinatoria; iii) álgebra, iv) lógica, y v) geometría. Por otra parte, las ORM-UIS se desarrollan en tres (3) niveles, según el grado de escolaridad de los participantes, de la formación básica secundaria y media vocacional, así:

- **Nivel Básico:** grados sexto y séptimo,
- **Nivel Medio:** grados octavo y noveno,
- **Nivel Avanzado:** grados décimo y undécimo.

La cartilla que tiene en sus manos compendia los problemas matemáticos propuestos por el equipo de trabajo de las ORM-UIS en las distintas fases de la Decimocuarta versión del certamen, desarrollada durante el año 2022, dirigido a estudiantes de educación media vocacional. En esta oportunidad se contó con la participación de 75 colegios, para un total de 2927 estudiantes en competencia, provenientes de 23 municipios de los departamentos de Santander, Norte de Santander y Cesar.

En esta versión las ORM-UIS, como siempre lo hace con alguien en especial, destacó la vida y obra del ingeniero y matemático colombiano Julio Garavito Armero $(1865-1920)$, tan importante en el mundo de la astronomía que la Unión Astronómica Internacional (UAI) en 1977, nombró un cráter lunar con su nombre, ubicado en el hemisferio sur del lado oculto de este cuerpo celeste. Cuando quiso ser profesor de matemáticas en la Universidad Nacional -fue el primero- se habilitó con dos textos. El primero llamado *El Juego de la aguja*, en donde demostró lúdicamente, partiendo del teorema de Bernoulli, relativo al cálculo de las probabilidades, la tendencia a que un acto azaroso contemplado desde el maravilloso mundo de los números, tienda hacia el número pi. El otro texto, *Cálculo de manómetro de aire comprimido para una graduación uniforme*, donde destacó los usos matemáticos que puede dársele a dicho instrumento, a partir del análisis de la relación entre la diferencial de una función o sus derivadas y la variable o las variables de que depende. Estas obras muestran la disciplina personal y académica del profesor Garavito, quien en su época fue admirado por su destreza para moverse con habilidad entre diversas disciplinas de la ciencia.

Este documento consta de tres (3) capítulos, cada uno correspondiente a un nivel de la competencia: nivel básico, nivel medio y nivel avanzado. En cada uno de ellos el lector encontrará los problemas y una solución, de las distintas soluciones que puede tener cada uno. Por esa razón, el equipo de trabajo de las ORM-UIS recomienda e incentiva a quien desee enfrentar nuevamente estos problemas, a descubrir y proponer, métodos alternativos de solución que se destaquen por su sencillez, ingenio y belleza matemática.

La Escuela de Matemáticas, a través del Grupo de Investigación en Educación Matemática de la UIS (EDUMAT), reconoce la labor esencial del maestro en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las competencias matemáticas de los estudiantes, y por ello elabora esta cartilla para su utilización en el aula de clase, que incluye, también, la preparación y discusión creativa entre pares en los espacios de formación docente. Esperamos que los participantes de la educación básica secundaria y media vocacional, los profesores, y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, disfrute tanto como nosotros lo hicimos, el hermoso y milenario ejercicio del pensamiento matemático.

Las ORM-UIS no son una mera competencia, implican una puesta en escena colectiva para que los niños, niñas y adolescentes desplieguen sus capacidades, fortalezcan sus habilidades y se reconozcan como sujetos capaces de enfrentar problemas y solucionarlos. Esto psicológicamente fomenta la autopercepción como sujetos con comprensión de su entorno, y esa es la exigencia que hace hoy la humanidad. Creemos firmemente que allí debemos dirigir todos nuestros esfuerzos, al fortalecimiento de ciudadanías que, gracias al pensamiento crítico que se desarrolla desde el ejercicio matemático, puedan enfrentarse a la diversidad de problemáticas que enfrenta la sociedad actual y que requieren de una mirada no solo crítica, sino, además, creativa para ser solucionadas.

El proyecto ORM- UIS agradece y destaca al grupo de estudiantes de Santander y Norte de Santander, que participaron de esta versión, y que han demostrado ser capaces de asumir el reto de pensar y sentir problemas sencillos y bellos de matemáticas, con pasión y con rigor.

Índice general

Capítulo 1

Nivel Básico

1.1. Prueba Clasificatoria

PROBLEMA 1.

Se tienen 3 vasos de jugo iguales que, de izquierda a derecha, pertenecen a Laura, Javier y Ximena, respectivamente. Empieza bebiendo Ximena, bebe todo su jugo y toma un poco del de Javier. Luego Javier toma lo que queda de su vaso y bebe del de Laura. Por último, Laura se toma el jugo que le queda. Si Ximena terminó bebiendo el doble que Javier, y Javier el doble que Laura, ¿qué fracción de la bebida de su propio vaso tomó Javier?

(a) $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{2}{7}$ (c) $\frac{5}{7}$ (d) $\frac{6}{7}$ (e) No sé

Solución: Considere la siguiente tabla:

	Vaso 1	Vaso 2	Vaso 3
Laura			$1-b$
Javier		$1-a$	b
Ximena	1	a	

En total, Ximena tomó $1+a$, Javier tomó $1-a+b$ y Laura $1-b$. Pero Ximena terminó bebiendo el doble que Javier, y Javier el doble que Laura esto es:

$$\begin{aligned} 1+a &= 2\left(1-a+b\right), \\ 1-a+b &= 2\left(1-b\right). \end{aligned}$$

Lo que resulta en el sistema de ecuaciones:

$$3a - 2b = 1,$$
$$-a + 3b = 1,$$

cuyas soluciones son $a = \frac{5}{7}$ y $b = \frac{4}{7}$. Por lo tanto, Javier tomó $1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$ de su propio vaso.

Problema 2.

¿De cuántas maneras se puede leer la palabra **MUTE** en el siguiente arreglo, uniendo letras cuyas casillas tengan un lado en común?

			M			
		M	U	M		
	M	U	T	U	M	
M	U	T	E	T	U	M
	M	U	T	U	M	
		M	U	M		
			M			

Nota: puede leerse en cualquiera de las direcciones arriba, abajo, izquierda, derecha.

(a) 12 (b) 24 (c) 28 (d) 30 (e) No sé

Solución: Considere el siguiente etiquetado de las casillas:

			1			
		2	3	4		
	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16
	17	18	19	20	21	
		22	23	24		
			25			

Contaremos las palabras que inician en las posiciones 1, 2 y 5, luego usando la simetría del arreglo, calcularemos el total. Veamos:

- en la posición 1 inicia una sola: $(1, 3, 7, 13)$.
- en la posición 2 inician 3: $(2, 3, 7, 13)$, $(2, 6, 7, 13)$ y $(2, 6, 12, 13)$.
- en la posición 5 inician 3 : $(5, 6, 7, 13)$, $(5, 6, 12, 13)$ y $(5, 11, 12, 13)$.

Ahora, por la simetría del arreglo, en cada una de las posiciones 1, 16, 25 y 10 inician la misma cantidad de palabras. Los mismo ocurre en las posiciones 2, 4, 24 y 22, y también en las posiciones 5, 9, 21 y 17. Por lo tanto, hay $4 \times 7 = 28$ formas de leer la palabra MUTE en el arreglo.

Problema 3.

En una granja hay 30 vacas y 70 ovejas. En promedio, cada vaca come $70\,kg$ de concentrado semanal, mientras que cada oveja come $30\,kg$. ¿Cuánto concentrado come en promedio cada uno de los 100 animales semanalmente?

(a) $40\,kg$ (b) $42\,kg$ (c) $45\,kg$ (d) $50\,kg$ (e) No sé

Solución: El total de concentrado que comen las 30 vacas semanalmente es $70 \times 30 = 2100\,kg$ mientras que el total de concentrado que comen las 70 ovejas es $30 \times 70 = 2100\,kg$. Por lo tanto, el promedio de concentrado que come cada uno de los 100 animales semanalmente es:

$$\frac{2100 + 2100}{100} = 42\,kg.$$

Problema 4.

Mario quiere cambiar la clave de su facebook, intercambiando dos de sus seis dígitos. ¿De cuántas formas puede cambiar así la clave?

(a) 15 (b) 12 (c) 30 (d) 24 (e) No sé

Solución 1: Note que el primer dígito se puede intercambiar con los otros 5, van 5 formas. El segundo dígito se puede intercambiar con los restantes 3 (porque con el primero ya lo contamos), van otras 3 formas. El tercer dígito se puede intercambiar de 2 formas, y el segundo, de 1 forma. En total, la clave puede cambiarse de $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ formas.

Solución 2: Note que se trata de escoger 2 de 6 elementos, sin importar el orden y sin repetir elemento, esto se puede hacer de $\binom{6}{2} = 15$ formas[1].

PROBLEMA 5.

Carlos, Lucía, Andrés y Felipe se formaron en una fila para contar de 3 en 3 hasta llegar a 2022, según el orden de formación así: el primero dijo 3, el segundo 6, el tercero 9, el cuarto 12, el primero 15, y así sucesivamente. Si Carlos dijo 144, Lucía 222, Andrés 999 y Felipe 1221, ¿quién dijo 2022?

(a) Felipe (b) Carlos (c) Andrés (d) Lucía (e) No sé

Solución: Considere la siguiente tabla

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
$3 = 3 \times 1$	$6 = 3 \times 2$	$9 = 3 \times 3$	$12 = 3 \times 4$
$15 = 3 \times 5$	$18 = 3 \times 6$	$21 = 3 \times 7$	$24 = 3 \times 8$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$3(4k+1)$	$3(4k+2)$	$3(4k+3)$	$3(4k)$

Note que el primero de fila dice los números de la forma $3(4k+1)$, el segundo, los de la forma $3(4k+2)$, el tercero, los de la forma $3(4k+3)$ y el cuarto los de la forma $3(4k)$, con $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Ahora, observe que

$$\begin{aligned}
144 &= 3 \times 48 = 3(4 \times 12)\\
222 &= 3 \times 74 = 3(4 \times 18 + 2)\\
999 &= 3 \times 333 = 3(4 \times 83 + 1)\\
1221 &= 3 \times 407 = 3(4 \times 101 + 3)\\
2022 &= 3 \times 674 = 3(4 \times 168 + 2)
\end{aligned}$$

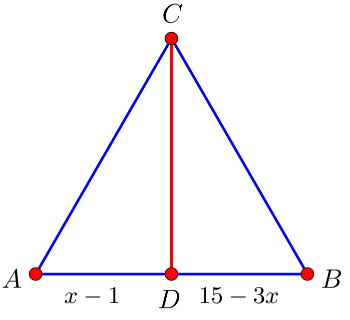
Por lo tanto, el primero en la fila es Andrés, la segunda es Lucía, el tercero es Felipe y el cuarto es Carlos. Además quien dijo el número 2022 fue la segunda en la fila, es decir, Lucía.

---

[1] Recordar que el número combinatorio $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$, con $0 \le k \le n$, puede interpretarse como el número de formas en que se pueden elegir k elementos de un conjunto con n elementos, SIN IMPORTAR EL ORDEN de la elección y SIN REPETIR elementos

Problema 6.

A un triángulo equilátero ABC se le traza la mediana $\overline{CD}$. Si $AD = x - 1$ y $DB = 15 - 3x$, ¿cuál es el perímetro del triángulo?



(a) 9 (b) 12 (c) 18 (d) 24 (e) No sé

Solución: Dado que D es el punto medio de $\overline{AB}$ se cumple que $x - 1 = 15 - 3x$, esto es $4x = 16$, de donde $x = 4$. Pero,

$$\overline{AB} = x - 1 + 15 - 3x = -2x + 14 = -8 + 14 = 6\,cm,$$

por lo tanto el perímetro del triángulo ABC es $3 \times 6 = 18\,cm$.

Problema 7.

De los estudiantes de un colegio $\frac{4}{9}$ usan gafas, $\frac{5}{8}$ hacen deporte y $\frac{7}{15}$ viven en el área rural. Si el total de estudiantes está entre 650 y 1000, ¿cuántos estudiantes hay en el colegio?

(a) 720 (b) 840 (c) 800 (d) No se puede determinar (e) No sé

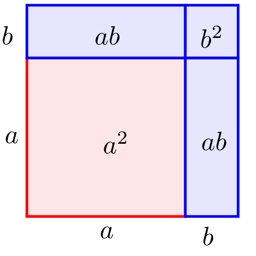
Solución: El número de estudiantes que usan gafas debe ser un entero, al igual que los que hacen deporte y los que viven en el área rural, de ahí que el número de estudiantes del colegio debe ser múltiplo de 9, de 8 y de 15 a la vez, y por lo tanto múltiplo de $\mathrm{mcm}(9, 8, 15) = 360$. Dado que el único múltiplo de 360 entre 650 y 1000 es el 720, entonces este debe ser el número de estudiantes del colegio.

PROBLEMA 8.

Si dos lados adyacentes de un cuadrado de área a^2 unidades cuadradas, se aumentan b unidades, ¿cuánto aumenta su área?

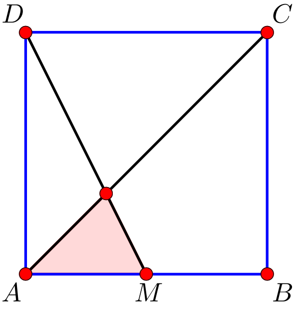
(a) $2ab$ (b) b^2 (c) $b(a+b)$ (d) b^2+2ab (e) No sé

Solución: En la siguiente figura se ilustra la situación. Note que el área azul es el área aumentada y corresponde a b^2+2ab.



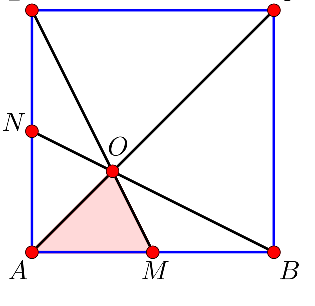
PROBLEMA 9.

En la siguiente figura M es punto medio del lado $\overline{AB}$ del cuadrado $ABCD$. Si el lado del cuadrado mide $6\,cm$, ¿cuál es el área sombreada?



(a) $2\,cm^2$ (b) $3\,cm^2$ (c) $4\,cm^2$ (d) $6\,cm^2$ (e) No sé

Solución: Considere la siguiente figura, en la que N es el punto medio de $\overline{AD}$



Note que las áreas de los triángulos AOM, MOB y AON tienen la misma área (porque tienen una base con la misma longitud y la altura correspondiente a esa base tiene la misma longitud en cada triángulo) y por lo tanto, el área de cada uno de estos triángulos es $\frac{1}{3}$ del área del triángulo ABN.
Además, $AN = 3\,cm$ y $AB = 6\,cm$, entonces el área del triángulo ABN es $\frac{6 \times 3}{2} = 9\,cm^2$. Así, el área sombreada es:

$$\frac{1}{3}\left(9\,cm^2\right) = 3\,cm^2.$$

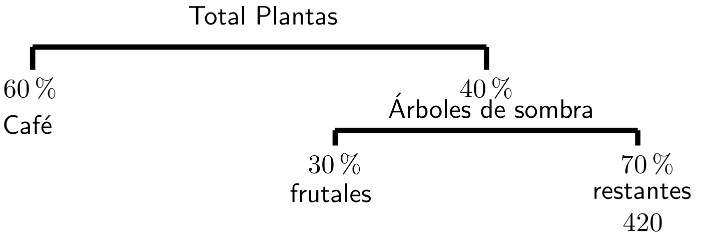
1.2. Prueba Selectiva

Problema 1.

Un agricultor plantó cierto número de plantas en su finca, de estas el $60\,\%$ eran de café y el resto árboles de sombra. El $30\,\%$ de los árboles de sombra son frutales y los 420 restantes no lo son. ¿Cuántas plantas de café plantó el agricultor?

(a) 600 (b) 900 (c) 1260 (d) 1500 (e) No sé

Solución: El siguiente es un esquema de la situación:



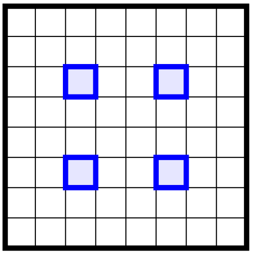
Dado que el $70\,\%$ de los árboles de sombra son 420 árboles, entonces el $100\,\%$ de los árboles de sombra son 600 árboles (use regla de tres simple). Ahora, sabiendo que el total de árboles de sombra es 600 y estos equivalen al $40\,\%$ del total de plantas, entonces el total $(100\,\%)$ de plantas es 1500. Así, el número de plantas de café que plantó el agricultor es $1500 - 600 = 900$.

Problema 2.

¿Cuál es el número mínimo de casillas que se deben colorear en un tablero de 8×8 casillas, para que cada subtablero de 3×3 casillas contenga por lo menos una casilla coloreada?

(a) 8 (b) 7 (c) 4 (d) 3 (e) No sé

Solución: El mínimo número de casillas que deben colorearse para cumplir lo que pide el enunciado es 4, como se muestra en la figura:



Problema 3.

El triángulo ABC es isósceles en B y el triángulo DEF, inscrito en el triángulo ABC, es equilátero. Si x, y, z son las medidas de los ángulos marcados, es correcto afirmar que:

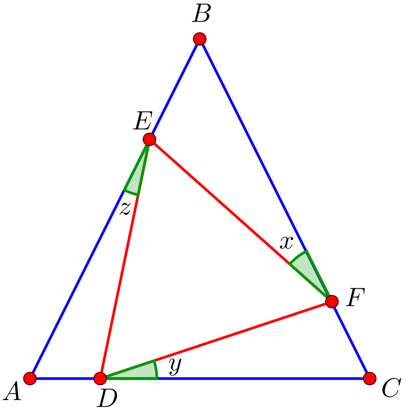
(a) $x = \dfrac{y-z}{2}$

(b) $x = 2y - z$

(c) $x = \dfrac{y+z}{2}$

(d) $x = 2z - y$

(e) No sé



Solución: Los ángulos internos del triángulo equilátero DEF miden, cada uno, $60°$, luego $x + 60 + \measuredangle DFC = 180$, esto es $\measuredangle DFC = 60 - x$. Análogamente, $\measuredangle EDA = 60 - y$. Además, dado que la suma de las medidas los ángulos internos de todo triángulo es $180°$, se cumple

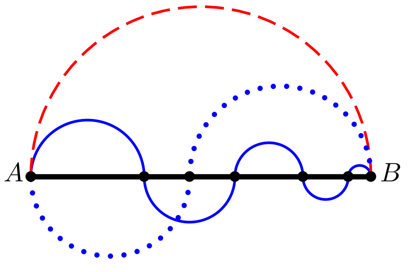
$$
\begin{aligned}
y + \measuredangle DFC + \measuredangle C &= 180 \\
\measuredangle C &= 180 - \measuredangle DFC - y = 180 - (60 - x) - y \\
&\boxed{\measuredangle C = 60 + x - y} \\
z + \measuredangle EDA + \measuredangle A &= 180 \\
\measuredangle A &= 180 - \measuredangle EDA - z = 180 - (60 - y) - z \\
&\boxed{\measuredangle A = 60 + y - z}
\end{aligned}
$$

Pero el triángulo ABC es isósceles en B luego $\measuredangle A = \measuredangle C$, de ahí que

$$
\begin{aligned}
60 + x - y &= 60 + y - z \\
x &= 2y - z.
\end{aligned}
$$

PROBLEMA 4.

En la siguiente figura se muestran tres caminos para ir desde A hasta B: rayado, punteado y continuo, construidos con semicircunferencias cuyos centros están sobre el segmento $\overline{AB}$. De lo anterior es correcto afirmar que:



(a) la longitud del camino continuo es mayor que la longitud de los otros dos.

(b) la longitud del camino rayado es mayor que la longitud de los otros dos.

(c) la longitud del camino punteado es mayor que la longitud de los otros dos.

(d) los tres caminos tienen la misma longitud.

(e) No sé

Solución: Note que AB es el diámetro de la semicircunferencia que forma el camino rayado, por lo tanto su longitud es $L_1 = \dfrac{\pi \times AB}{2}$.

Ahora sean D_1 y D_2 los diámetros de las dos semicircunferencias que conforman el camino punteado. Entonces $D_1 + D_2 = AB$ y la longitud del camino punteado está dada por

$$L_2 = \frac{\pi \times D_1}{2} + \frac{\pi \times D_1}{2} = \frac{\pi \times D_1 + \pi \times D_2}{2} = \frac{\pi(D_1 + D_2)}{2} = \frac{\pi \times AB}{2}.$$

Por otro lado, si d_1, d_2, d_3, d_4 y d_5 son los diámetros de las cinco semicircunferencias que conforman el camino continuo, entonces $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = AB$ y la longitud de este camino está dada por:

$$\begin{aligned} L_3 &= \frac{\pi \times d_1}{2} + \frac{\pi \times d_2}{2} + \frac{\pi \times d_3}{2} + \frac{\pi \times d_4}{2} + \frac{\pi \times d_5}{2} \\ &= \frac{\pi(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)}{2} = \frac{\pi \times AB}{2}. \end{aligned}$$

Por lo anterior, se concluye que los tres caminos tienen la misma longitud.

PROBLEMA 5.

Sobre una recta se marcan 101 puntos diferentes. ¿Cuántos segmentos de recta tienen sus extremos en estos puntos, pero no contienen al punto central?

(a) 2450 (b) 2550 (c) 4950 (d) 5048 (e) No sé

Solución 1: Para definir un segmento de recta, debemos unir dos de los 101 puntos, pero como los segmentos no deben contener el punto central, entones ninguno de los primeros 50 puntos puede unirse con los 50 últimos puntos. Con los 50 primeros puntos podemos formar $\binom{50}{2} = 1225$ segmentos, pues se trata de escoger 2 entre 50 puntos posibles, y esta es la misma cantidad de segmentos que se pueden formar con los 50 últimos puntos. De modo que, en total, hay $1225 + 1225 = 2450$ segmentos que cumplen las condiciones del enunciado.

Solución 2: Otra forma de contar los segmentos que podemos formar con los primeros 50 puntos es la siguiente: enumeremos los puntos desde el 1 hasta el 50, entonces los segmentos con punto inicial en el punto 1 son 49 (se consiguen uniendo el punto 1 con cualquiera de los restantes 49, análogamente los segmentos con punto inicial en 2 son 48, los que inician el punto 3 son 47 y así sucesivamente. De modo que con los primeros 50 puntos se pueden formar[2] $49 + 48 + 47 + \cdots + 1 = 1225$ segmentos. Y con los 50 puntos finales, se pueden formar la misma cantidad, así la cantidad total de segmentos es $2 \times 1225 = 2450$.

PROBLEMA 6.

El número ganador de una rifa lo tiene Sara, David, Lucía o Hermes, quienes tienen los boletos: 17, 25, 32 y 46, uno cada uno, pero no necesariamente en ese orden. Se sabe que, la suma de los boletos de Sara y David es un número primo, y la suma de los números de David y Lucía es múltiplo de un cuadrado perfecto mayor que 1. Si el número ganador es el que tiene más divisores primos distintos, ¿quién ganó la rifa?

(a) David (b) Sara (c) Lucía (d) Hermes (e) No sé

[2] Recuerde que la suma de los primeros n números naturales está dada por

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solución: Sean S, D, L y H los números que tienen Sara, David, Lucía y Hermes, respectivamente. Como dado que $S+D$ es un número primo, necesariamente $S, D \in \{25, 46\}$, pues $25+46=71$ es el único primo que se puede obtener como suma de dos de los posibles números. También $D+L$ es múltiplo de un cuadrado perfecto mayor que 1, entonces $D+L=46+17=63=3^2\times 7$. En la siguiente tabla se registran los números de cada uno:

	17	25	32	46
Sara	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\times$
David	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$
Lucía	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\times$
Hermes	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\times$

Ahora, revisando la descomposición en números primos de cada número tenemos:

$$17 = 17 \text{ (es primo)}, \qquad 25 = 5^2, \qquad 32 = 2^5, \qquad 46 = 2\times 23.$$

Por lo tanto, el ganador de la rifa es David, con el boleto 46.

Problema 7.

Un jardinero debe regar 100 árboles que están plantados cada $4{,}5$ metros sobre la orilla de un camino recto. El agua está en un pozo, sobre la misma orilla del camino con el árbol más cercano a 9 metros. Para desplazar el agua solo dispone de un balde, cuya capacidad de agua es exactamente la que debe aportar a cada árbol. ¿Cuál es la distancia recorrida por el jardinero al terminar su tarea, si inicia y termina en el pozo?

Solución: En la siguiente tabla se registra la distancia recorrida al regar cada uno de los primeros árboles iniciando y terminando en el pozo:

Árbol	Distancia
1	$9+9=18$
2	$18+4{,}5+4{,}5=18+9,$
3	$(18+9)+9=18+9\times 2$
4	$(18+9\times 2)+9=18+9\times 3$
$\vdots$	$\vdots$
100	$18+9\times 99$

De modo que la distancia total recorrida por el jardinero está dada por:

$$\begin{aligned} D &= 18 + 9 + 18 + 9(2) + 18 + 9(3) + 18 + 9(4) + \cdots + 18 + 9(99), \\ &= 18(100) + 9(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99), \\ &= 1800 + 9 \times S, \end{aligned}$$

donde $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99$. Hallemos S, observe que

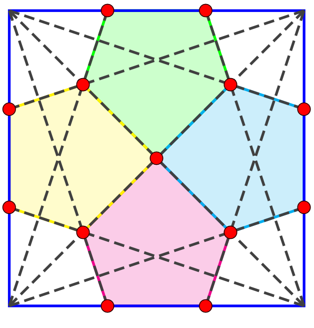
$$\begin{array}{rl} S & = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99, \\ S & = 99 + 99 + 98 + 97 + \cdots + 1, \\ \hline 2S & = \underbrace{100 + 100 + 100 + 100 + \cdots + 100}_{99-veces} \end{array}$$

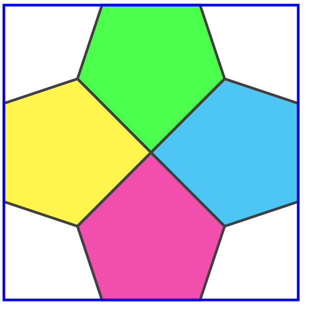
esto es $S = \dfrac{99 \times 100}{2} = 4950$. Por lo tanto,

$$D = 1800 + 9 \times 4950 = 46350\, metros.$$

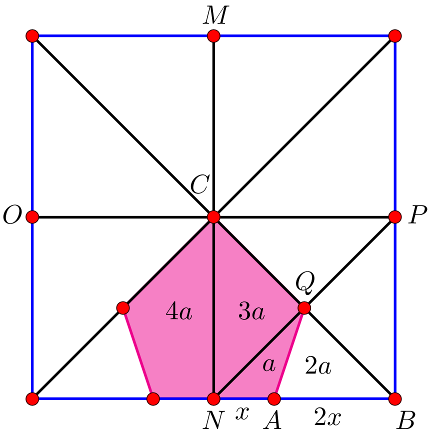
PROBLEMA 8.

El siguiente es un modelo de baldosa cuadrada. Los puntos marcados dentro del cuadrado están sobre sus diagonales y los puntos marcados en cada uno de sus lados, lo dividen en tres segmentos con igual longitud. ¿Qué fracción del área total de la baldosa representa el área coloreada?





Solución: Observe la siguiente figura auxiliar en la que M, N, O y P son los puntos medios de los respectivos lados del cuadrado.



Sea $x = NA$, entonces $AB = 2x$. De modo que, si el área del triángulo NQA es a, entonces el área del triángulo AQB es $2a$, el área del triángulo CQN es $3a$, el área del cuadrado $NCPB$ es $12a$ y por lo tanto el área de la baldosa es $4 \times 12a = 48a$. Note que el área sombreada en la figura auxiliar es $8a$, luego el área coloreada en la baldosa es $4 \times 8a = 32a$. Por lo anterior, la fracción del área total de la baldosa que está coloreada es $\dfrac{32a}{48a} = \dfrac{2}{3}$.

Problema 9.

¿Es posible guardar en una caja de dimensiones: $81\,cm$, $27\,cm$ y $18\,cm$, cubitos de madera iguales, con arista mayor de $1\,cm$, sin que sobre ni falte espacio dentro de la caja? Si es posible, ¿cuál es el volumen máximo que pueden tener estos cubitos? ¿Cuántos cubitos de volumen máximo caben en la caja?

Solución: Dado que $\text{mcd}(81, 27, 18) = 9$, entonces es posible meter en la caja 54 cubitos de volumen máximo $9 \times 9 \times 9 = 729\,cm^3$.

1.3. Prueba Final

PROBLEMA 1.

En una escuelita los estudiantes están aprendiendo las operaciones básicas y para practicarlas hacen una actividad que consiste en los siguientes pasos:

I. Los estudiantes se enumeran desde el 1 hasta el 100.

II. Sobre el piso completamente limpio de la cancha, un profesor escribe con tiza el número 1, luego, cada estudiante escribe el producto de su número con el sucesor de su número.

III. Finalmente, cada estudiante, en el orden de enumeración, borra dos números de los que están escritos en el piso de la cancha, pero escribe el resultado de dividir el producto de estos dos números entre su suma.

¿Cuál es el número que queda escrito en la cancha al finalizar la actividad?

Solución:

1. Observar que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{ab}{a+b}\right)^{-1}$

2. La suma de los inversos multiplicativos de los números escritos en la cancha es

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1} + \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n(n+1)} &= 1 + \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{101} \\
&= 1 + 1 - \frac{1}{101} \\
&= \frac{201}{101}
\end{aligned}$$

3. Por el ítem (a), la suma de los inversos multiplicativos de los números escritos en la cancha siempre es la misma. De modo que, el número que queda escrito en la cancha al final de la actividad es el $\frac{101}{201}$.

Problema 2.

Sean A, B y C así:

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2022},$$
$$B = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2022^2},$$
$$C = \frac{1^2}{2^2} + \frac{2^2}{3^2} + \cdots + \frac{2021^2}{2022^2}.$$

Determine números enteros m, n y s de modo que $C = m + n \times A + s \times B$.

Solución: Note que

$$\frac{1^2}{2^2} + \frac{2^2}{3^2} + \cdots + \frac{2021^2}{2022^2} = \frac{(2-1)^2}{2^2} + \frac{(3-1)^2}{3^2} + \cdots + \frac{(2022-1)^2}{2022^2},$$

y obedeciendo al trinomio cuadrado perfecto, se tiene

$$\frac{2^2 - 2 \times 2 \times 1 + 1^2}{2^2} + \frac{3^2 - 2 \times 3 \times 1 + 1^2}{3^2} + \cdots + \frac{2022^2 - 2 \times 2022 \times 1 + 1^2}{2022^2}$$

$$= 1 - 2 \times \frac{2}{2^2} + \frac{1}{2^2} + 1 - 2 \times \frac{3}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + 1 - 2 \times \frac{2022}{2022^2} + \frac{1}{2022^2},$$

a lo que reagrupando las sumas, queda

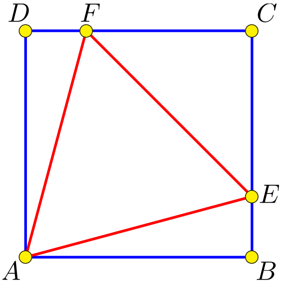
$$2021 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2022}\right) + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2022^2},$$

y sustituyendo,

$$C = 2021 - 2(A-1) + B - 1 = 2022 - 2A + B.$$

Problema 3.

En la siguiente figura el triángulo AEF es equilátero y está inscrito en el cuadrado $ABCD$. ¿Cuál es la razón entre las áreas de los triángulos ABE y CEF?



Solución: Sea $CE = x$, entonces $FC = x$ y $EB = L - x$, siendo L la longitud del lado del cuadrado. Así, razón entre las áreas de los triángulos ABE y CEF está dada por

$$\frac{\frac{L \times (L-x)}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \frac{L(L-x)}{x^2}$$

Por otro lado, del Teorema de Pitágoras se sigue que

$$\begin{aligned}(L-x)^2 + L^2 &= h^2\\ x^2 + x^2 &= h^2\end{aligned}$$

siendo h la medida del lado del triángulo equilátero inscrito, de ahí que

$$\begin{aligned}(L-x)^2 + L^2 &= x^2 + x^2\\ L^2 - 2Lx + x^2 + L^2 &= 2x^2\\ 2L^2 - 2Lx &= x^2\\ 2L(L-x) &= x^2\\ \frac{L(L-x)}{x^2} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

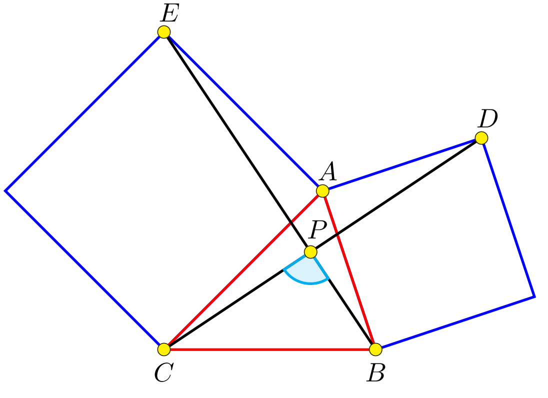
Por lo tanto, la razón entre las áreas de los triángulos ABE y CEF es $\frac{1}{2}$.

PROBLEMA 4.

Sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo ABC se construyen dos cuadrados, como se muestra en la figura. El punto P es la intersección de los segmentos $\overline{EB}$ y $\overline{DC}$.

(a) Pruebe que los triángulos ABE y ADC son congruentes.

(b) Determine la medida del ángulo CPB.



Solución:

(a) Observe que $AB = AD$, $AE = AC$ por ser pares de lados de dos cuadrados. Además $\measuredangle EAB = \measuredangle CAD$, así por el criterio de congruencia lado-ángulo-lado (L-A-L) tenemos que los triángulos ABE y ADC son congruentes.

(b) Por la congruencia probada en el ítem anterior tenemos que $\measuredangle ABE = \measuredangle ADC$. Además, dado que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, se tiene que $\measuredangle EAB + \measuredangle ABE + \measuredangle BEA = 180°$.

También la suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero es $360°$, luego en el cuadrilátero $EPDA$ tenemos:

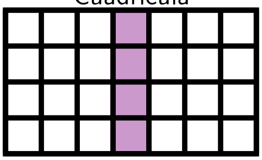
$$\begin{aligned}
\measuredangle PEA + \measuredangle EAB + 90° + \measuredangle ADC + \measuredangle DPE &= 360°,\\
(\measuredangle BEA + \measuredangle EAB + \measuredangle ABE) + \measuredangle DPE &= 270°,\\
180 + \measuredangle DPE &= 270°,\\
\measuredangle DPE &= 90°.
\end{aligned}$$

Y dado que los ángulos CPB y DPE so opuestos por el vértice, concluye que $\measuredangle CPB = \measuredangle DPE = 90°$.

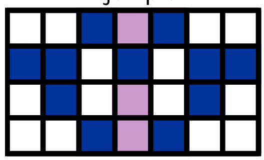
Problema 5.

Fernando tiene la cuadrícula 4×7 que se muestra y 11 fichas iguales disponibles, donde cada una llena exactamente un cuadradito. Colocando las fichas sobre los cuadraditos, juega a armar figuras simétricas sobre la cuadrícula respecto a la columna central, de modo que no pueda colocar más de una ficha en algún cuadradito y no le sobren fichas. ¿Cuántas figuras simétricas puede armar? Se muestra de ejemplo una figura de estas.

Cuadrícula



Ejemplo



Solución: Dado que las figuras deben ser simétricas, en la columna central solo pueden haber 1 o 3 fichas. Veamos los dos casos:

En la columna central hay una ficha se distinguen cuatro subcasos, según la ficha central esté en la primera, segunda, tercera o cuarta fila. Si la ficha de la columna central está en la primera fila, entonces en cada lado de la columna central deben ponerse 5 fichas. Note que al acomodar las fichas de un lado, quedan determinadas las del otro lado, pues la figura ha de ser simétrica. Así, basta contar de cuántas formas se pueden poner las 5 fichas del lado izquierdo, en las 12 casillas posibles, esto se puede hacer de $\binom{12}{5} = 792$ formas. Los demás subcasos son análogos, de modo que en este caso tenemos $4 \times 792 = 3168$ posibles figuras.

En la columna central hay tres fichas entonces en la columna central queda una casilla vacía, de modo que también se distinguen cuatro subcasos, según esté vacía la primera, segunda, tercera o cuarta casilla de la columna central. Si la primera casilla está vacía, basta ubicar las 4 fichas del lado izquierdo en las 12 casillas de este lado. Esto se puede hacer de $\binom{12}{5} = 495$ formas. Los demás subcasos son análogos, luego en este caso tenemos $4 \times 495 = 1980$ figuras posibles.

Por lo anterior, Fernando puede armar $3168 + 1980 = 5148$ figuras simétricas, con las condiciones del enunciado.

Problema 6.

Julián afirma que:

"La menor cantidad de divisores positivos que puede tener el producto de dos enteros consecutivos mayores que 10 es 8"

¿Es verdadero o falso lo que afirma Julián? Justifique su respuesta.

Solución: Sean n y $n+1$ dos enteros consecutivos mayores que 10. Al ser consecutivos uno de los dos números debe ser par.

$\boxed{\textbf{Si } n \textbf{ es par}}$ entonces $n = 2k$, con $k > 5$ entero. Así,

$$P = n \times (n+1) = 2k(n+1),$$

luego 1, 2, k, n, $n+1$, P son 8 divisores positivos distintos de P. De modo que, en este caso la afirmación es verdadera.

$\boxed{\textbf{Si } n+1 \textbf{ es par}}$ es análogo al caso anterior.

Por lo tanto, la afirmación de Julián es verdadera.

Capítulo 2

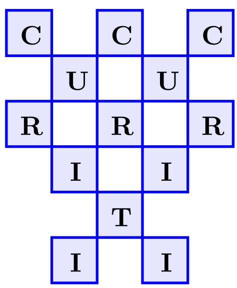
Nivel Medio

2.1. Prueba Clasificatoria

Problema 1.

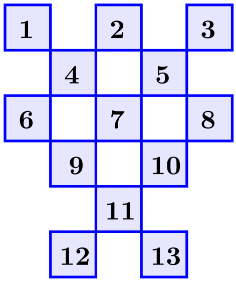
¿De cuántas formas se puede leer la palabra **CURITI** en el siguiente arreglo, uniendo letras cuyas casillas tengan al menos un vértice en común?

Nota: en cada lectura se puede repetir casilla.



(a) 24 (b) 36 (c) 48 (d) 72 (e) No sé

Solución: Considere el siguiente etiquetado de las casillas



Con la C de la posición 1 se puede leer 12 veces CURITI así:

$(1,4,6,9,11,12)$	$(1,4,7,9,11,12)$	$(1,4,7,10,11,12)$
$(1,4,6,9,11,13)$	$(1,4,7,9,11,13)$	$(1,4,7,10,11,13)$
$(1,4,6,9,11,10)$	$(1,4,7,9,11,10)$	$(1,4,7,10,11,10)$
$(1,4,6,9,11,9)$	$(1,4,7,9,11,9)$	$(1,4,7,10,11,9)$

Por la simetría del arreglo, con la C de la posición 3 se pueden leer otras 12 veces la palabra CURITI. Ahora, con la C de la posición 2 y la U de la posición 4 se pueden leer otras 12 veces CURITI, lo mismo sucede si iniciamos en la C de posición 2 y la U de la posición 5. De modo que, en total, se puede leer $4 \times 12 = 48$ veces la palabra CURITI en el arreglo.

PROBLEMA 2.

Alberto no recuerda los cuatro dígitos que forman la clave del candado de su bicicleta. Sin embargo, recuerda que al comparar las claves de sus amigos con la suya, la de Natalia tiene dos dígitos en común pero en diferente posición, al igual que la de Julián; la de Sara tiene solo dos dígitos en común, y están en la misma posición; y la de Sergio no tiene nada en común. Las claves de sus amigos son las siguientes:

Natalia	5 6 8 7
Julián	0 9 2 3
Sara	6 2 3 4
Sergio	9 0 8 1

¿Cuál es el último dígito de la clave del candado de Alberto?

(a) 6 (b) 5 (c) 4 (d) 2 (e) No sé

Solución: Dado que la clave de Alberto no tiene números en común con la de Sergio, entonces el último dígito de la clave de Alberto debe ser alguno de los siguientes: $\{2,3,4,5,6,7\}$. Las claves de Natalia y Julián comparten dos números con la clave de Alberto, pero en diferente posición, luego se descartan el 3 y el 7 para la última cifra de la clave de Alberto. La clave de Julián tiene dos dígitos en común, pero estos no pueden ser el 0 ni el 9 (porque están en la clave de Sergio), entonces los dígitos en común son el 2 y el 3, que también están en la clave de Sara, de ahí que el 4 no puede ser la última cifra de la clave de Alberto, porque de serlo la clave de Sara tendría 3 dígitos en común. Tampoco pueden ser el 2 ni el 6, porque contradice la afirmación sobre la clave de Sara. Así, la única opción para el último dígito de la clave de Alberto es el 5. De hecho, aunque el problema no pide la clave de Alberto, de la información dada se puede deducir que la clave es $\boxed{7235}$

PROBLEMA 3.

¿Cuántos números de tres cifras hay tales que la cifra central sea un tercio de la suma de sus otras dos cifras?

(a) 25 (b) 21 (c) 34 (d) 30 (e) No sé

Solución: Sea abc un número de tres cifras que cumple las condiciones del enunciado. Entonces $b = \dfrac{a+c}{3}$, luego $a+c$ debe ser múltiplo de 3. Para que la suma de dos dígitos sea múltiplo de 3 debe suceder alguno de los siguientes casos:

Caso 1. a y c son múltiplos de 3, con $a \neq 0$, esto es

$$a \in \{3,6,9\}$$
$$c \in \{0,3,6,9\}.$$

Por el principio multiplicativo, en este caso hay $3 \times 4 = 12$ posibles números.

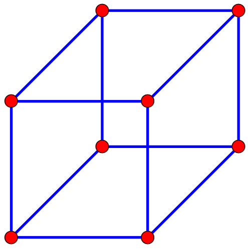
Caso 2. $a \in \{1,4,7\}$ y $c \in \{2,5,8\}$, en este caso hay $3 \times 3 = 9$ posibles números.

Caso 3. $a \in \{2,5,8\}$ y $c \in \{1,4,7\}$, en este caso hay $3 \times 3 = 9$ posibles números.

En total hay $12+9+9 = 30$ números que cumplen las condiciones del enunciado.

PROBLEMA 4.

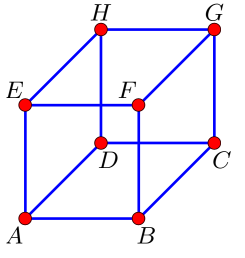
Con 12 palillos iguales, cada uno de longitud $2\,cm$, se construye la estructura que se muestra a continuación. Si una hormiga debe recorrer toda la estructura, iniciando y terminando en el mismo punto, ¿cuál es la distancia mínima que debe recorrer?



Nota: la hormiga no puede saltar.

(a) $32\,cm$ (b) $24\,cm$ (c) $28\,cm$ (d) $40\,cm$ (e) No sé

Solución: Considere la siguiente enumeración de los vértices:



Note que, dado que la hormiga no puede saltar, necesariamente debe repetir aristas. Una manera de recorrer toda la estructura, iniciando y terminando, en el mismo punto, procurando que la distancia recorrida sea mínima, es la siguiente:

$$A, B, C, D, A, E, H, D, H, G, C, G, F, B, F, E, A.$$

En este caso la distancia recorrida es $16 \times 2 = 32\,cm$. Para diseñar el recorrido anterior, se trazaron "imaginariamente" las aristas AE, BF, CG y DH, de modo que a cada vértice llega un número par de aristas, solo de esta manera, esto es, que a cada vértice llegue un número par de aristas, se puede garantizar que es posible recorrer toda la estructura iniciando y terminando en el mismo punto ¿por qué?

Problema 5.

En un terreno rectangular de $1560\,m$ por $936\,m$ se proyecta colocar paneles solares cuadrados iguales del mayor tamaño posible para recoger energía solar, de modo que se cubra exactamente el área del terreno. ¿Cuántos paneles serán necesarios?

(a) 8 (b) 15 (c) 32 (d) 312 (e) No sé

Solución: Dado que $1560 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$ y $936 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$ entonces

$$\mathrm{mcd}(1560, 936) = 2^3 \cdot 3 \cdot 13 = 312.$$

Así, el lado de los paneles solares cuadrados con el mayor tamaño posible debe medir $312\,m$. Como el área del terreno es 1560×936 y el área de cada panel solar es 312^2, entonces el número de paneles solares necesarios es

$$\frac{1560 \times 936}{312^2} = \frac{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \times 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 13^2} = 15.$$

Problema 6.

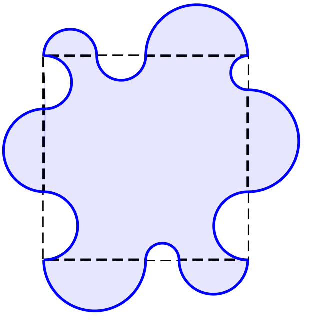
Si a, b y c son enteros positivos tales que $3a = 5b = 12c$, ¿cuál es el menor valor que puede tomar $a + b + c$?

(a) 111 (b) 60 (c) 20 (d) 37 (e) No sé

Solución: Para que se cumpla la igualdad $3a = 5b = 2^2 \cdot 3 \cdot c$, con a, b y c enteros de modo que $a + b + c$ sea mínimo, debe suceder que $a = 2^2 \cdot 5$, $b = 2^2 \cdot 3$ y $c = 5$. Por lo tanto, $a + b + c = 37$.

Problema 7.

En la siguiente figura las semicircunferencias tienen sus centros sobre los lados del cuadrado punteado. Si el área del cuadrado es $25\,cm^2$, ¿cuál es el perímetro de la región sombreada?



(a) $25\pi\,cm$ (b) $20\pi\,cm$ (c) $12{,}5\pi\,cm$ (d) $10\pi\,cm$ (e) No sé

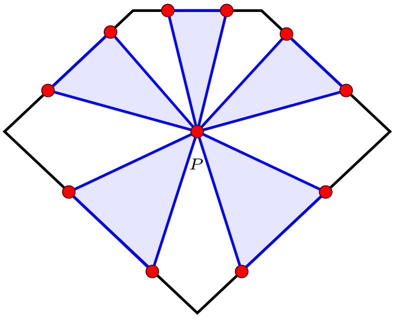
Solución: El área del cuadrado es $25\,cm^2$, entonces cada uno de sus lados mide $5\,cm$. Sean d_1, d_2, d_3 los diámetros de las tres semicircunferencias que tienen sus centros sobre uno de los lados del cuadrado. Entonces $d_1+d_2+d_3 = 5\,cm$ y además el perímetro de la figura correspondiente a ese lado del cuadrado está dado por:

$$\frac{\pi \times d_1}{2} + \frac{\pi \times d_2}{2} + \frac{\pi \times d_3}{2} = \frac{\pi(d_1+d_2+d_3)}{2} = \frac{5\pi}{2}\,cm.$$

Dado que ocurre lo mismo en cada uno de los cuatro lados del cuadrado, se concluye que el perímetro de la figura sombreada es $4 \times \dfrac{5\pi}{2} = 10\pi\,cm$.

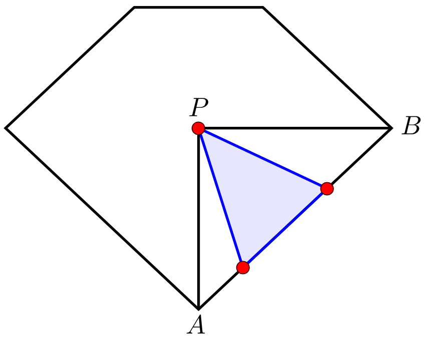
Problema 8.

En la figura, los triángulos sombreados dentro del pentágono tienen un vértice común en P, los demás vértices están sobre los lados del pentágono. Si en cada triángulo la distancia entre los dos vértices diferentes a P, es $\dfrac{2}{5}$ de la longitud del lado del pentágono sobre el que están, ¿cuál es la relación entre el área sombreada y el área no sombreada dentro del pentágono?



(a) $\dfrac{2}{3}$ (b) $\dfrac{2}{5}$ (c) $\dfrac{3}{5}$ (d) $\dfrac{3}{4}$ (e) No sé

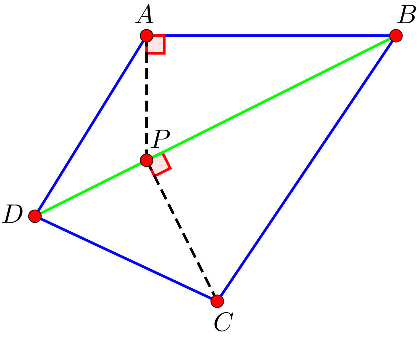
Solución: Fijémonos en uno de los triángulos sombreados. Considere la siguiente figura en la que se han trazado los segmentos desde P hasta dos vértices consecutivos del pentágono:



Como la longitud lado del triángulo que coincide con el lado del pentágono es $\frac{2}{5}$ de la longitud de dicho lado del pentágono, entonces el área del triángulo sombreado es $\frac{2}{5}$ del área del triángulo APB, y el área no sombreada dentro de APB es $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ del área de APB. Así, la razón entre el área sombreada y el área no sombreada dentro del triángulo APB es $\frac{2/5}{3/5}=\frac{2}{3}$. Repitiendo el proceso anterior para cada uno de los lados del pentágono se deduce que la razón entre el área sombreada y el área no sombreada dentro del pentágono es $\frac{2}{3}$.

Problema 9.

En la siguiente figura, P es un punto sobre la diagonal $\overline{BD}$ del cuadrilátero $ABCD$, tal que $PA = PD$; $\overline{PA}$ es perpendicular a $\overline{AB}$, así como $\overline{PC}$ lo es a $\overline{BD}$. Si $AB = a$ y $DC = b$, determine el valor de BC en términos de a y b. En la expresión resultante, reemplace $a = 4$ y $b = 3$, ¿cuál es el resultado?



(a) 7 (b) 12 (c) 5 (d) 6 (e) No sé

Solución: Sea $x = DP = AP$. Por el Teorema de Pitágoras tenemos que

$$
\begin{aligned}
PB^2 &= x^2 + a^2,\\
b^2 &= x^2 + PC^2,\\
BC^2 &= PC^2 + PB^2.
\end{aligned}
$$

Restando la segunda ecuación de la primera obtenemos $PB^2 - b^2 = a^2 - PC^2$, esto es $PC^2 + PB^2 = a^2 + b^2$, luego $BC = \sqrt{a^2 + b^2}$, haciendo $a = 4$ y $b = 3$ en la última expresión, resulta $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

2.2. Prueba Selectiva

Problema 1.

Si $a = 0,\underbrace{00\ldots 000}_{2022-ceros}1$, ¿cuál de los siguientes números es mayor?

(a) $a \times (2022)$

(b) a^{2022}

(c) $\sqrt[a]{2022}$

(d) $(2022) \div a$

(e) No sé

Solución: Note que $a = \dfrac{1}{10^{2023}}$, por lo tanto:

$$a \times 2022 = \frac{2022}{10^{2023}} = 0,\underbrace{00\ldots 000}_{2019-ceros}2022$$

$$a^{2022} = \left(\frac{1}{10^{2023}}\right)^{2022} = \frac{1}{10^{4090506}} = 0,\underbrace{000\ldots 00000}_{4090505-ceros}2022$$

$$\sqrt[a]{2022} = (2022)^{\frac{1}{a}} = (2022)^{10^{2023}} > \left(10^3\right)^{10^{2023}} = 2022\underbrace{000\ldots 00000}_{3\times 10^{2023}-ceros}$$

$$(2022) \div a = 2022 \div \frac{1}{10^{2023}} = 2022 \times 10^{2023} = 2022\underbrace{000\ldots 00000}_{2023-ceros}$$

De donde, claramente, el número mayor es $\sqrt[a]{2022}$.

Problema 2.

Sobre las edades de 4 personas se sabe que la moda es 18, la mediana es 22 y la media es 24. ¿Cuál es la edad del mayor?

(a) 34 (b) 28 (c) 32 (d) 38 (e) No sé

Solución: Sean a, b, c, d las edades de las 4 personas, escritas en orden ascendente. Entonces, dado que la moda es 18 y la mediana es 22, tenemos que $a = 18$, $b = 18$ y $\dfrac{b+c}{2} = \dfrac{18+c}{2} = 22$, de donde $c = 44 - 18 = 26$. Además, la media es 24, de ahí que:

$$
\begin{aligned}
24 &= \frac{a+b+c+d}{4} \\
24 &= \frac{18+18+26+d}{4} \\
96 &= 62+d \\
34 &= d.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la edad del mayor es 34.

Problema 3.

El doble de un número deja residuo 1 cuando se divide entre 7. ¿Cuál es el residuo que deja el número al dividirse entre 7?

(a) 3 (b) 2 (c) 6 (d) 4 (e) No sé

Solución: Sea n tal número. Entonces $2n = 7k+1$, con k entero. Multiplicando esta ecuación por 4 tenemos:

$$
\begin{aligned}
8n &= 7(4k)+4, \\
7n+n &= 7(4k)+4, \\
n &= 7(4k)-7n+4, \\
n &= 7(4k-n)+4.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el residuo que deja n al dividirse entre 7 es 4.

Problema 4.

Los tres lados de un triángulo rectángulo miden: a, $a+b$ y $a+2b$ unidades, con a y b números reales. ¿Cuál es el valor de $\frac{a}{b}$?

(a) -1 (b) 1 (c) 3 (d) $\frac{3}{2}$ (e) No sé

Solución: En primer lugar, note que a y b son reales positivos, por ser a, $a+b$ y $a+2b$ longitudes. Además, la longitud de la hipotenusa siempre es mayor que la longitud de cualquiera de los catetos, luego $a+2b$ es la longitud de la hipotenusa.

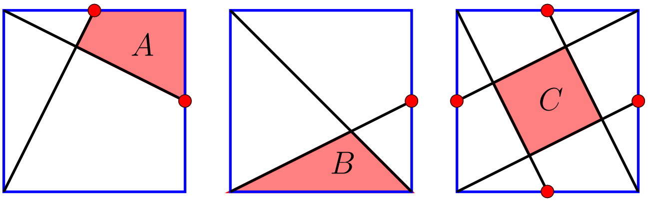
Así, del Teorema de Pitágoras, se sigue que:

$$\begin{aligned} a^2 + (a+b)^2 &= (a+2b)^2, \\ a^2 + a^2 + 2ab + b^2 &= a^2 + 4ab + 4b^2, \\ a^2 - 2ab - 3b^2 &= 0, \\ (a-3b)(a+b) &= 0 \end{aligned}$$

De lo anterior, $a + b = 0$ o $a - 3b = 0$, esto es $a = -b$ o $a = 3b$. Pero $a = -b$ es imposible, luego $a = 3b$, es decir $\frac{a}{b} = 3$.

Problema 5.

En la siguiente figura los tres cuadrados tienen igual área y los puntos marcados sobre algunos lados de los cuadrados, son sus puntos medios. Si A, B y C son, en centímetros cuadrados, las áreas sombreadas en cada cuadrado, como se muestra en la figura, es correcto afirmar que:



(a) $A > B$ y $B = C$

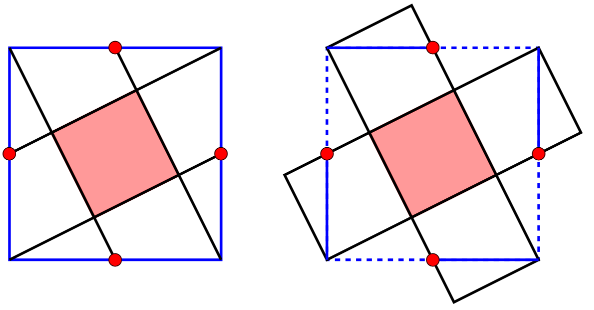
(b) $5A = 6B$ y $A = C$

(c) $C > A > B$

(d) $4C = 5B$ y $C = A$

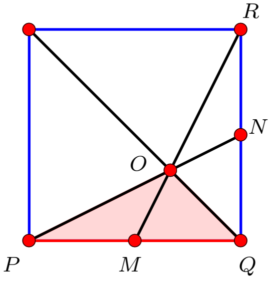
(e) No sé

Solución: Observe la siguiente figura, en que los triángulos formados en las esquinas del cuadrado de la figura de la izquierda se rotaron sobre el punto medio del correspondiente lado para formar la figura de la derecha.



Del gráfico se deduce que $C = A = \dfrac{1}{5}L^2$, siendo L el lado del cuadrado y por tanto L^2 el área del mismo.

Ahora considere la siguiente figura, en que la M y N son los puntos medios de los respectivos lados del cuadrado



Observe los triángulo POM y QOM tienen la misma área, pues tienen la misma base, $\dfrac{1}{2}PQ$, y comparten la misma altura respecto a dicha base. Por la misma razón, los triángulos QON y RON tienen la misma área, y por la simetría de la figura, esta área es la misma que la de los triángulos POM y QOM. Dado que el área del triángulo PNQ es $\dfrac{1}{4}L^2$, el área sombreada es $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{4}L^2\right) = \dfrac{1}{6}L^2$. Por lo anterior, respecto al área sombreada en las figuras del problema, se concluye que $\dfrac{A}{B} = \dfrac{\frac{1}{5}L^2}{\frac{1}{6}L^2}$, esto es $5A = 6B$ y además $A = C$.

Problema 6.

¿Cuántos múltiplos de 6 con el dígito de las unidades igual a 2, existen entre 10^3 y 10^4?

(a) 150 (b) 300 (c) 375 (d) 750 (e) No sé

Solución: Revisemos la cifra de las unidades de los primeros múltiplos positivos de $6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, \ldots$ Vemos que las cifras de las unidades tienen un ciclo $(6-2-8-4-0)$ que se repite cada 5 múltiplos. Ahora, entre 1000 y 10000 hay 9000 números, de los cuales cada 6 aparece un múltiplo de 6, es decir, hay $9000 \div 6 = 1500$ múltiplos de 6 (iniciando en 1002 y terminando en 9996) y por lo visto anteriormente, la cifra de las unidades de $\frac{1}{5}$ de estos números es 2, de modo que hay $1500 \div 5 = 300$ múltiplos de 6 entre 10^3 y 10^4, cuya cifra de las unidades es 2.

Problema 7.

Se dice que una *cuadrícula es mágica* cuando la suma de los números en cada fila, en cada columna y en cada diagonal es la misma. A dicha suma se le llama *suma mágica.* Por ejemplo, la siguiente es una cuadrícula mágica de 3×3, con suma mágica igual a 15.

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Una cuadrícula mágica se llena con números consecutivos iniciando en 1. Si la suma mágica es 671, ¿cuál es el número mayor escrito en una casilla de la cuadrícula?

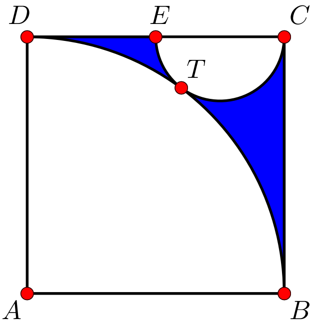
Solución: Sea n el número de filas de la cuadrícula mágica. Entonces los números escritos en la cuadrícula son los naturales desde 1 hasta n^2, cuya suma es $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$, y dado que la suma mágica es 671 tenemos que:

$$\frac{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}{n} = 671$$
$$n\left(n^2+1\right) = 1342.$$

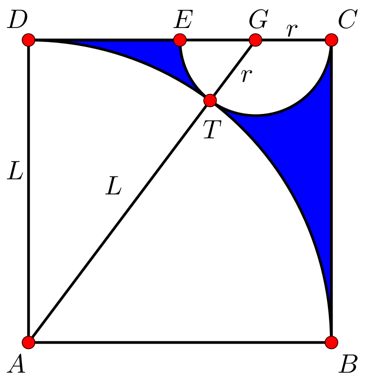
La solución real para esta última ecuación es $n = 11$, puede buscarse por ensayo-error (sabiendo que n es un natural y descartando valores de n "pequeños") o factorizando en la forma $n^3 + n - 1342 = (n-11)\left(n^2+11n+122\right)$. Por lo anterior, el mayor número escrito en la cuadrícula es el $n^2 = 11^2 = 121$.

Problema 8.

En la siguiente figura el cuarto de circunferencia con centro en el vértice A del cuadrado $ABCD$ es tangente a la semicircunferencia con diámetro CE en el punto T. Si $AB = 8\,cm$, ¿cuál es el área de la región sombreada?



Solución: Considere la siguiente figura en la que G es el centro de la semicircunferencia con diámetro CE, r la longitud de su radio y L la longitud del lado del cuadrado. Note que como T es punto de tangencia A, T y G son colineales.



Por el teorema de Pitágoras, aplicado al triángulo ADG tenemos:

$$\begin{aligned}
(L+r)^2 &= L^2 + (L-r)^2,\\
L^2 + 2Lr + r^2 &= L^2 + L^2 - 2Lr + r^2,\\
4Lr - L^2 &= 0,\\
L(4r - L) &= 0.
\end{aligned}$$

Dado que L es la longitud del lado del cuadrado, $L \neq 0$, luego $4r - L = 0$, esto es $L = 4r$, pero $L = 8\,cm$, entonces $r = 2\,cm$.

Por lo anterior, el área sombreada en la figura está dada por:

$$8^2 - \frac{\pi(8)^2}{4} - \frac{\pi(2)^2}{2} = 64 - 16\pi - 2\pi = \boxed{64 - 18\pi\, cm^2}.$$

PROBLEMA 9.

Note que, si a y b son números reales, para calcular $(a+b)^2$ usando la propiedad distributiva son necesarios $2 \times 2 = 4$ productos:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b.$$

(a) ¿Cuántos productos son necesarios para calcular $(a+b+c)^3$ usando la propiedad distributiva?

(b) ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse con los dígitos 1, 2 y 3?

(c) ¿Cuál es la suma de los productos de las cifras de todos los números de 4 cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4?

Solución:

(a) Al expandir $(a+b+c)^3$ usando la propiedad distributiva, los términos obtenidos son de la forma $y \cdot x \cdot z$ donde y, x y z pueden tomar cualquiera de los valores de a, b y c. Así, por el principio multiplicativo, tenemos que el desarrollo de $(a+b+c)^3$ tiene $3^3 = 27$ términos, pero en cada término hay dos productos, por lo tanto son necesarios 54 productos.

(b) Haciendo $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$ en el ítem anterior, e ignorando los productos en cada término de la expansión de $(a+b+c)^3$ tenemos que hay $3^3 = 27$ números de tres cifras con los dígitos 1, 2, y 3.

(c) Siguiendo las ideas de los literales anteriores, al usar la propiedad distributiva para calcular $(1+2+3+4)^4$ aparecen 4^4 términos, que son los productos de las cifras de los posibles números de 4 cifras con los dígitos $1, 2, 3,$ y 4. De modo que la suma de los productos de las cifras de todos los números de 4 cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4 es:

$$(1+2+3+4)^4 = 10^4 = 10000.$$

2.3. Prueba Final

PROBLEMA 1.

Cien atletas fueron sometidos a tres pruebas de rendimiento. Por cada prueba terminada en el tiempo establecido, el atleta recibió una medalla. Al finalizar las pruebas, los atletas fueron clasificados según el número de medallas recibidas en cuatro niveles, así:

Medallas	Nivel
0	Principiante
1	Amateur
2	Competente
3	Profesional

Sabiendo que en total se entregaron 184 medallas y que cada atleta recibió al menos una medalla,

(a) ¿es posible determinar cuántos atletas quedaron en cada nivel?

(b) ¿es posible determinar en cuál de los dos niveles: *Amateur* y *Profesional*, hay más atletas? Si es posible, ¿cuál es la diferencia entre la cantidad de atletas de estos niveles?

Solución: Sean A, C y P el número de atletas en los niveles Amateur, Competente y Profesional, respectivamente. Dado que cada atleta recibió al menos una medalla se tiene que $A+C+P=100$, además, por el número de medallas necesarias para cada nivel y el número total de medallas entregadas, también se tiene que

$$A+2C+3P=184.$$

(a) No es posible, ya que hay varias soluciones para las dos ecuaciones, por ejemplo: $P=0$, $A=16$ y $C=84$, o $P=1$, $A=17$ y $C=82$, entre otras.

(b) Multiplicando la primera ecuación por 2 se tiene $2A+2C+2P=200$ y restando a esta nueva ecuación la segunda ecuación se tiene:

$$\begin{array}{rl} 2A+2C+2P & =200 \\ -A-2C-3P & =-184 \\ \hline A-P & =16 \end{array}$$

Luego, hay más estudiantes en el nivel Amateur y la diferencia entre la cantidad de atletas de estos niveles es 16.

Problema 2.

Pruebe que al sumar 1 al producto de 4 enteros consecutivos se obtiene un cuadrado perfecto. Luego use este resultado para calcular

$$\sqrt{2019 \times 2020 \times 2021 \times 2022 + 1}$$

Solución: Observe que

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n(n+3)+1)^2.$$

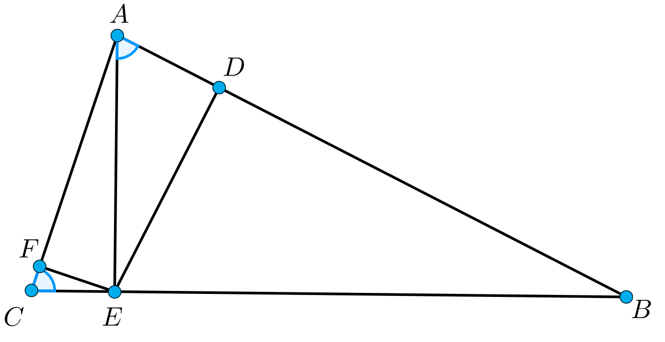
Por lo tanto,

$$\sqrt{2019 \cdot 2020 \cdot 2021 \cdot 2022 + 1} = \sqrt{(2019 \cdot 2022 + 1)^2} = 2019 \cdot 2022 + 1.$$

Problema 3.

En un triángulo ABC, se marcan los puntos D, E y F sobre los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, de modo que $\overline{AE}$ es la altura respecto a $\overline{BC}$, $\overline{DE}$ es perpendicular a $\overline{AB}$, y $\overline{EF}$ es perpendicular a $\overline{AC}$. Si $\dfrac{EF}{CF} = 3$, $\dfrac{DE}{AD} = 2$ y $AE = k\,cm$, ¿cuál es el área del triángulo ABC en términos de k?

Solución: Considere el triángulo con las características mencionadas, destacando los ángulos $\measuredangle ECF$ y $\measuredangle EAD$. Es inmediato que $\measuredangle ECF = \measuredangle ECA$ y $\measuredangle EAD = \measuredangle EAB$.



Como los triángulos ACE y CEF son ambos rectángulos, y además comparten el ángulo $\measuredangle ECF$, entonces son semejantes. De lo anterior, como $\dfrac{AE}{CE} = \dfrac{EF}{CF} = 3$, teniendo que $AE = k\ cm$, entonces $CE = \frac{k}{3}\ cm$, y el área del triángulo ACE es

$$\frac{k \times \frac{k}{3}}{2} = \frac{k^2}{6}.$$

De manera análoga, los triángulos ADE y ABE son semejantes, así, como $\frac{DE}{AD} = 2$, se tiene $\frac{BE}{AE} = 2$, por lo que $BE = 2k\ cm$, y el área del triángulo ABE es

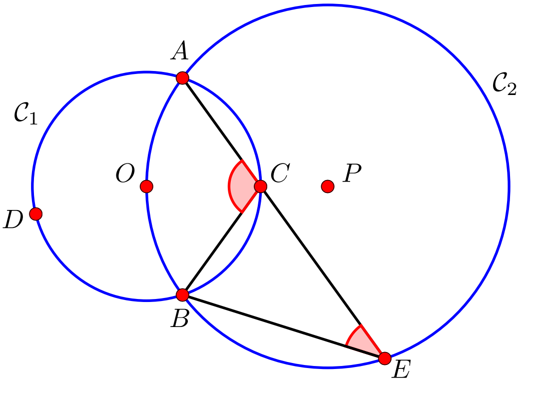
$$\frac{k \times 2k}{2} = k^2.$$

El área del triángulo ABC es

$$\frac{k^2}{6} + k^2 = \frac{7k^2}{6}.$$

Problema 4.

En la figura, las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen sus centros en O y P, respectivamente, A y B son sus puntos de intersección, $\mathcal{C}_2$ pasa por O, y $\overline{AE}$ es la extensión del segmento $\overline{AC}$ hasta $\mathcal{C}_2$. Si $\frac{\widehat{ADB}}{\widehat{ACB}} = \frac{11}{7}$, ¿cuál es el valor de $\measuredangle ACB + \measuredangle AEB$?



Solución: Trace en la figura el cuadrilátero $ADBC$, por ser un cuadrilátero cíclico, se cumple que $\measuredangle BDA + \measuredangle ACB = 180°$. Ahora, dado que $\frac{\widehat{ADB}}{\widehat{ACB}} = \frac{11}{7}$, tenemos que $\measuredangle BOA = 140°$ y como el ángulo inscrito BDA tiende el mismo arco que el ángulo central BOA entonces $\measuredangle BDA = \frac{140}{2} = 70°$, y por lo anterior $\boxed{\measuredangle ACB = 110°}$

Análogamente, como el cuadrilátero $AOBE$ es cíclico y $\measuredangle BOA = 140^\circ$, se deduce que $\boxed{\measuredangle AEB = 40^\circ}$. Finalmente, $\measuredangle ACB + \measuredangle AEB = 110^\circ + 40^\circ = 150^\circ$.

Problema 5.

¿El número $\underbrace{111\ldots111}_{2022-unos}2\underbrace{111\ldots111}_{2022-unos}$ es primo o compuesto?

Solución: Note que $N = \underbrace{111\ldots111}_{2023-unos} \times 10^{2022} + \underbrace{111\ldots111}_{2023-unos}$. Sea $a = \underbrace{111\ldots111}_{2023-unos}$, entonces

$$N = a \times 10^{2022} + a = a\left(10^{2022} + 1\right).$$

Pero, a y $10^{2022} + 1$ son enteros mayores que 1, por lo tanto N es compuesto.

Problema 6.

Para cada número natural n denotamos por $S(n)$ a la suma de sus cifras. Por ejemplo, $S(3) = 3$, $S(12) = 3$, $S(2022) = 6$. Determine una lista infinita de números naturales n, tales que $S(n) = S(3n + 11)$.

Solución: Note que 8 cumple la condición pues $S(8) = 8$ y $S(3(8)+11) = S(35) = 8$. Ahora considere el número $N_k = 8 \times 10^k$ y observe que para cada entero positivo k, N_k también cumple la condición. Por lo tanto, $8,\ 80,\ 800,\ 8000, \ldots$ es una lista infinita de números que cumplen la condición.

Capítulo 3

Nivel Avanzado

3.1. Prueba Clasificatoria

Problema 1.

¿De cuántas formas se puede leer la palabra OJO en el siguiente arreglo, uniendo letras cuyas casillas tengan al menos un vértice en común?

O	**O**	**O**
O	**J**	**O**
O	**O**	**O**

Nota: puede leerse en cualquiera de las direcciones: arriba, abajo, izquierda, derecha, en diagonal y en cada lectura puede repetirse casilla.

(a) 8 (b) 16 (c) 56 (d) 64 (e) No sé

Solución 1: Considere el siguiente etiquetado de las casillas del arreglo:

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
9	**8**	**7**

Note que, por cada O hay 8 formas de leer la palabra OJO, por ejemplo con la O de la posición 1 las formas son: $(1,5,2)$, $(1,5,3)$, $(1,5,4)$, $(1,5,6)$, $(1,5,7)$, $(1,5,8)$,

$(1,5,9)$ y $(1,5,1)$. De modo que en total, hay $8 \times 8 = 64$ formas de leer la palabra OJO en el arreglo.

Solución 2: En general, para en este tipo de arreglos, cuando la palabra es palíndromo (se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda) basta contar de cuántas formas se puede llegar al centro de la palabra, ya que este es el mismo número de formas en que se puede llegar desde el centro al final de la palabra (devolverse); y multiplicar este número por sí mismo (elevarlo al cuadrado). En nuestro caso, el número de formas de llegar desde una O a la J es 8, por lo tanto el número de formas en que se puede leer la palabra OJO es $8^2 = 64$.

Problema 2.

En el viaje de vacaciones Caro notó que, de su casa a Santa Marta el carro viajó a una velocidad media de $40\,km/h$, pero de vuelta, desde Santa Marta a su casa, el auto viajó a velocidad media de $60\,km/h$. ¿Cuál fue la velocidad media del auto en el recorrido de ida y vuelta?

(a) $42\,km/h$ (b) $45\,km/h$ (c) $48\,km/h$ (d) $50\,km/h$ (e) No sé

Solución: Sea d la distancia recorrida por el carro entre la casa de Caro y Santa Marta. Como la velocidad media de ida fue $40\,km/h$ entonces el tiempo empleado (para ir) fue $t_1 = \dfrac{d}{40}$, y como la velocidad de vuelta fue $60\,km/h$, entonces el tiempo empleado (para volver) fue $t_2 = \dfrac{d}{60}$. Así que la distancia total recorrida para la ida y la vuelta fue $2d$ y el tiempo empleado fue

$$t_1 + t_2 = \frac{d}{40} + \frac{d}{60} = \frac{3d + 2d}{120} = \frac{5d}{120}.$$

Por lo tanto, la velocidad media de ida y vuelta fue $\dfrac{2d}{\frac{5d}{120}} = 48\,km/h.$

Problema 3.

La suma de los coeficientes del polinomio $P(x)$ es 2022, y su factorización es $P(x) = a(x-3)(x+2)$. ¿Cuál es el valor de a?

(a) 2359 (b) 1685 (c) -6 (d) -337 (e) No sé

Solución: Note que la suma de los coeficientes del polinomio está dada por

$$\begin{aligned} P(1) = a(1-3)(1+2) &= 2022, \\ -6a &= 2022. \end{aligned}$$

Luego $a = \dfrac{2022}{-6} = -337$.

PROBLEMA 4.

Una parcela rectangular mide $180\,m$ de largo por $160\,m$ de ancho. Un agricultor decide dividirla en parcelas iguales, de forma cuadrada y del máximo tamaño posible, para sembrar en cada una un tipo diferente de flor. ¿Cuántos tipos de flores diferentes puede cultivar el agricultor en una temporada?

(a) 72 (b) 17 (c) 20 (d) 1440 (e) No sé

Solución: Dado que $\operatorname{mcd}(180, 160) = 20$, el área máxima de cada parcela es $20 \times 20\,m^2$. Además, la finca tiene $180 \times 160\,m^2$ de área, entonces el número de parcelas con tamaño máximo es $\dfrac{180 \times 160}{20 \times 20} = 72$. Por lo tanto, si el agricultor siembra un tipo diferente de flor en cada parcela, en una temporada podrá sembrar 72 tipos diferentes de flores en su finca.

PROBLEMA 5.

A un múltiplo de 7 se le suman sus 100 números consecutivos. ¿Cuál es el residuo que deja el resultado al dividirse entre 7?

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 5 (e) No sé

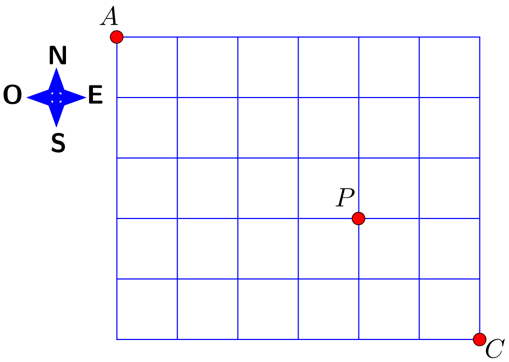
Solución: Sea $n = 7k$ el múltiplo de 7 entonces:

$$\begin{aligned} S &= 7k + (7k+1) + (7k+2) + (7k+3) + \cdots + (7k+100) \\ &= \underbrace{7k \times 101}_{\text{múltiplo de 7}} + (1 + 2 + 3 + \cdots + 100), \\ &= 7t + \frac{100(101)}{2} = 7t + 5050 = \underbrace{7t + 7(721)}_{\text{múltiplo de 7}} + 3 = 7q + 3. \end{aligned}$$

Luego S deja residuo 3 al dividirse entre 7.

PROBLEMA 6.

La figura es un bosquejo de las calles de un municipio. Los puntos A, P y C representan la casa de Ana, el parque y el colegio, respectivamente. ¿De cuántas maneras puede ir Ana desde su casa al colegio pasando por el parque, si solo puede desplazarse de norte a sur y de oeste a este?



(a) 42 (b) 210 (c) 48 (d) 180 (e) No sé

Solución: En la Figura 1. se ha puesto en cada vértice la cantidad de maneras de llegar hasta dicho vértice desde el punto A y en la Figura 2. el número en cada vértice indica la cantidad de manera de llegar desde el P.

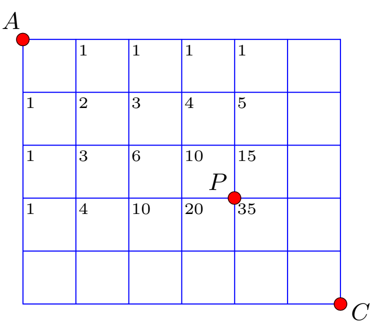


Figura 1.

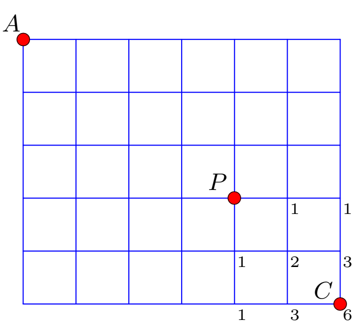
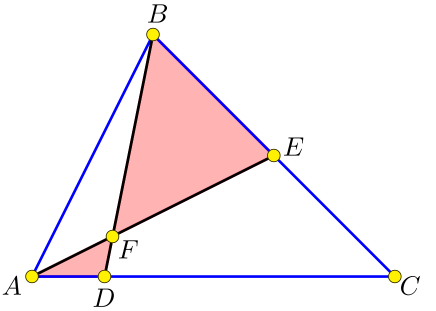


Figura 2.

De modo que desde A hasta P hay 35 caminos posibles, y desde P hasta B hay 6 caminos posibles. Así, con las condiciones del enunciado, Ana puede ir desde su casa hasta el colegio de $35 \times 6 = 210$ formas posibles.

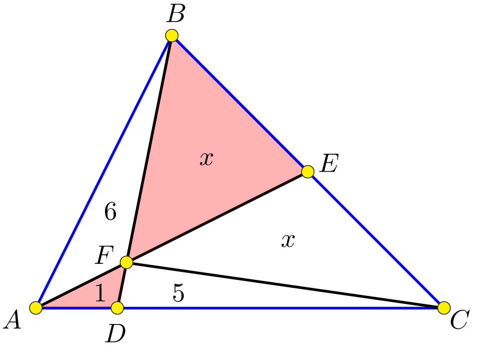
PROBLEMA 7.

Si $DC = 5AD$ y E es el punto medio de $\overline{BC}$, ¿cuál es la razón entre el área sombreada y el área no sombreada dentro del triángulo ABC?



(a) $\dfrac{8}{13}$ (b) $\dfrac{16}{42}$ (c) $\dfrac{1}{2}$ (d) $\dfrac{11}{19}$ (e) No sé

Solución: Considere la siguiente figura, en la que se ha trazado el segmento $\overline{CF}$



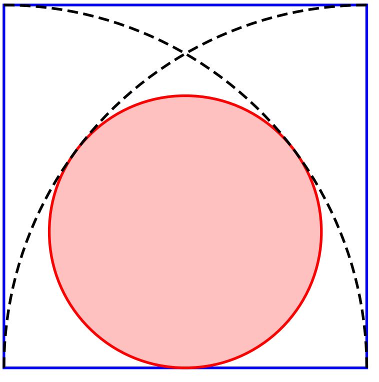
Suponiendo que el área del triángulo ADF es 1, dado que $DC = 5AD$, entonces el área del triángulo CDF es 5. Sea x el área de triángulo BFE, como E es punto medio $\overline{BC}$, entonces el área del triangulo CFE también es x, y también se cumple que las áreas de los triángulo BAE y CAE son iguales, esto es $1+5+x = a(AFB)+x$, de ahí que el área del triángulo AFB es 6. Ahora, teniendo en cuenta que $DC = 5AD$, también se tiene que el área del triángulo CDB es 5 veces el área del triángulo ABD, esto es:

$$x + x + 5 = 5(1 + 6)$$
$$2x + 5 = 35$$
$$x = 15.$$

Por lo anterior, la razón entre el área sombreada y el área no sombreada dentro del triángulo ABC es $\dfrac{1+15}{6+5+15} = \dfrac{16}{26} = \dfrac{8}{13}$.

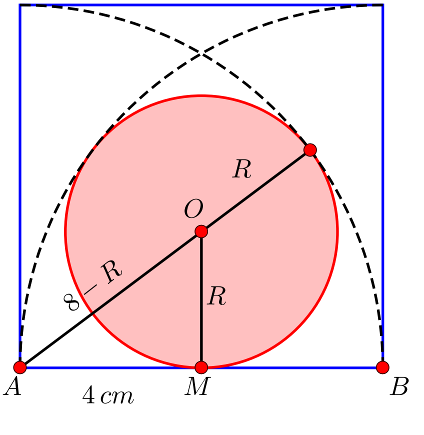
Problema 8.

Sobre una hoja cuadrada se trazan dos cuartos de circunferencia (punteados), colocando las puntas del compás en dos vértices del cuadrado. Luego se dibuja un círculo tangente a dichos cuartos de circunferencia y a un lado del cuadrado, como se muestra en la figura. Si el lado del cuadrado es $8\,cm$, ¿cuál es el área del círculo?



(a) $6\pi\,cm^2$ (b) $9\pi\,cm^2$ (c) $12\pi\,cm^2$ (d) $18\pi\,cm^2$ (e) No sé

Solución: Considere la siguiente figura, en la que R es el radio del círculo y O es su centro.



Por el Teorema de Pitágoras, aplicado en el triángulo AMO, se tiene que

$$\begin{aligned} R^2 + 4^2 &= (8 - R)^2 \\ R^2 + 16 &= 64 - 16R + R^2 \\ 16R &= 48 \\ R &= 3\,cm. \end{aligned}$$

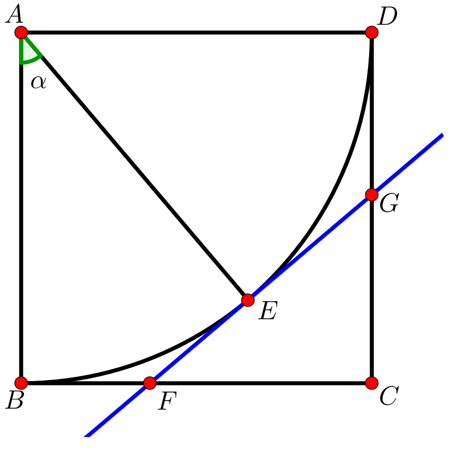
Luego el área del círculo es $\pi(3)^2 = 9\pi\, cm^2$.

Problema 9.

Dentro de un cuadrado $ABCD$ se traza un cuarto de circunferencia con centro en A y radio AB. Sobre dicho trazo se toma un punto E de modo que $\measuredangle BAE = 38°$. Luego se traza una recta tangente en E al cuarto de circunferencia y se nombran F y G a los puntos de corte de dicha recta con los lados $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ del cuadrado, respectivamente. ¿Cuál es el valor de $\measuredangle DGE$?

(a) 159° (b) 152° (c) 136° (d) 128° (e) No sé

Solución: Considere la siguiente ilustración:



La suma de los ángulos internos del cuadrilátero $ABFE$ es $360°$, dos de estos ángulos son rectos, luego $\alpha + \measuredangle EFB = 180°$, por lo que $\measuredangle EFB = 180° - \alpha$, y $\measuredangle CFE = \alpha$. Por otro lado, el triángulo CFG es rectángulo, entonces $\measuredangle EGC = 90° - \measuredangle CFE = 90° - \alpha$, de ahí que $\measuredangle DGE = 180° - \measuredangle EGC = 90° + \alpha$, pero $\alpha = 38°$, entonces $\measuredangle DGE = 128°$.

3.2. Prueba Selectiva

Problema 1.

Si una solución de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

es el doble de la otra, entonces

(a) $2b^2 = 9a$ (c) $2b^2 = 9c$ (e) No sé

(b) $9b^2 = 2ac$ (d) $2b^2 = 9ac$

Solución 1: Usando la fórmula de la ecuación cuadrática tenemos que la soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ son: $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, pero sabemos que una es el doble de la otra, esto es:

$$\begin{aligned}
\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= 2\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right), \\
-b + \sqrt{b^2 - 4ac} &= 2\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right), \\
b &= -3\sqrt{b^2 - 4ac}, \\
b^2 &= 9\left(b^2 - 4ac\right), \\
9(4ac) &= 8b^2, \\
9ac &= 2b^2.
\end{aligned}$$

Solución 2: Sean r y $2r$ las soluciones de la ecuación, entonces, por el Teorema Fundamental del Álgebra (o factorizando el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$) se tiene que:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a(x - r)(x - 2r), \\
ax^2 + bx + c &= ax^2 - 3rax + 2ar^2,
\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de la última ecuación tenemos: $a = a$, $b = -3ra$ y $c = 2ar^2$, esto es $b^2 = 9r^2a^2$ y $r^2 = \dfrac{c}{2a}$, de modo que $b^2 = 9a^2\left(\dfrac{c}{2a}\right)$. Así: $2b^2 = 9ac$.

Problema 2.

¿Cuántas triplas (x, y, z) de enteros satisfacen que

$$\frac{5x+3}{x+5} + \frac{8y}{2y+3} + z = 2021,$$

donde las fracciones mostradas resultan en enteros?

Nota: *dos triplas de enteros* (a, b, c) *y* (x, y, z) *son iguales si y solo si* $a = x$, $b = y$ *y* $c = z$.

(a) 96 (b) 32 (c) 24 (d) 8 (e) No sé

Solución: Simplifiquemos la expresión

$$\frac{5x+3}{x+5} + \frac{8y}{2y+3} + z = \frac{5x+25}{x+5} - \frac{22}{x+5} + \frac{8y+12}{2y+3} - \frac{12}{2y+3} + z = 2021,$$

ello es equivalente a que

$$-\frac{22}{x+5} - \frac{12}{2y+3} + z = 2012.$$

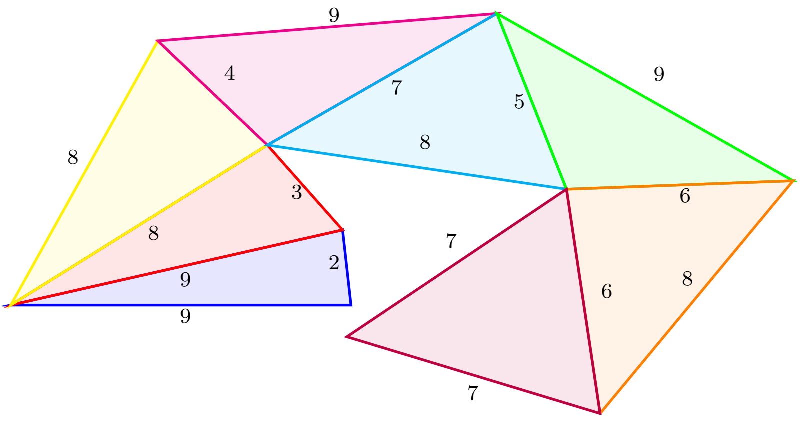
Como $22/(x+5)$ es un entero, entonces $x+5$ puede tomar 8 valores, todos los divisores de 22, a lo que x también puede tomar 8 valores. Al ser $12/(2y+3)$ entero, entonces $2y+3$ es un divisor de 12 que es impar por su expresión, por lo que puede tomar 4 valores, $-3, -1, 1, 3$, y para cada uno de estos corresponde un y. En total, hay $8 \times 4 \times 1 = 32$ triplas de enteros (x, y, z) que cumplen la expresión inicial.

Problema 3.

Apolo construye todas las piezas triangulares posibles con perímetro $20\,cm$ cuyos lados tienen longitud entera. Luego juega a formar polígonos con ellas, juntándolas por los lados con igual longitud. ¿Cuál es mayor perímetro que puede tener un polígono construido con todas las piezas de Apolo?

(a) 70 (b) 84 (c) 90 (d) 160 (e) No sé

Solución: Las piezas triangulares con perímetro $20\,cm$ cuyos lados tiene longitud entera son: $(2, 9, 9)$, $(3, 8, 9)$, $(4, 8, 8)$, $(4, 7, 9)$, $(5, 7, 8)$, $(5, 6, 9)$, $(6, 6, 8)$ y $(6, 7, 7)$. Para conseguir el polígono con mayor perímetro, apolo debe juntar las piezas por los lados con menor longitud, una forma de hacerlo es la siguiente:



Luego el mayor perímetro que puede tener un polígono construido con las condiciones del enunciado es $70\,cm$.

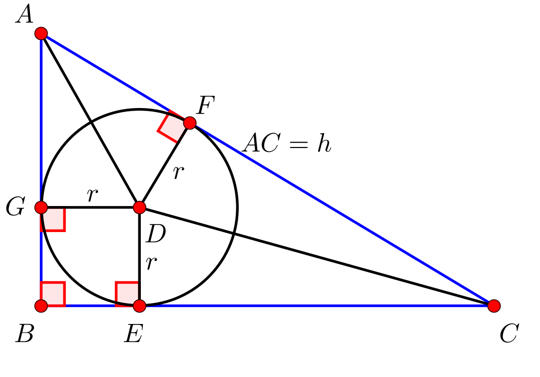
Problema 4.

¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide h, si el radio del círculo inscrito mide r?

(a) $r(r+h)$ (c) $\frac{3}{2}rh$ (e) No sé

(b) $2rh$ (d) $r^2 + \frac{rh}{2}$

Solución: Considere la siguiente figura, en la que el triángulo ABC es rectángulo, con ángulo recto en B y los puntos E, F y G son los puntos de tangencia del incírculo (círculo inscrito en el triángulo) con el los lados del triángulo.



Dado que los puntos E, F y G son puntos de tangencia, los ángulos marcados con vértice en estos puntos son rectos, por lo tanto $BEDG$ es un cuadrado con lado r y su área es r^2.

Además, observe que el área del triángulo CDA es $\dfrac{h \times r}{2}$ y los triángulos AGD y AFD son congruentes, así como los triángulos CED y CFE.

Por lo anterior, el área del triángulo ABC está dada por:

$$A = r^2 + 2\left(\frac{h \times r}{2}\right) = r^2 + hr = r(r + h).$$

PROBLEMA 5.

Un número deja residuo 7 cuando se divide entre 11, y 5 cuando se divide entre 10, ¿cuál es el residuo cuando se divide entre 110?

(a) 15 (b) 35 (c) 95 (d) 12 (e) No sé

Solución: Sea n dicho número. Entonces

$$\begin{aligned} n &= 11k + 7, \\ n &= 10t + 5, \end{aligned}$$

con $k, t \in \mathbb{Z}$, multiplicando la primera ecuación por 10 y la segunda por 11 tenemos:

$$\begin{aligned} 10n &= 110k + 70, \\ 11n &= 110t + 55, \end{aligned}$$

restando la primera ecuación de la segunda tenemos:

$$\begin{aligned} n &= 110(t - k) - 15, \\ n &= 110(t - k)\underbrace{-110 + 110}_{cero} - 15, \\ n &= 110(t - k - 1) + 95, \\ n &= 110q + 95, \end{aligned}$$

donde $q = t - k - 1$ es un entero. Así, por el algoritmo de la división, el residuo que deja n al dividirse entre 110 es 95.

Problema 6.

Javier escribe los números 2, 3, 5 y 7, en este orden y en sentido horario, sobre una circunferencia. Luego construye una sucesión de números con las siguientes reglas:

(i) el número en la posición n tiene n cifras, enumeradas de derecha a izquierda.

(ii) la primera cifra de cada número, es el residuo que se obtiene al dividir entre 10, el menor número sobre la circunferencia elevado a la posición de la cifra.

(iii) cada cifra, salvo la primera, es el residuo que se obtiene al dividir entre 10, el siguiente número del que se tomó para la cifra anterior (desplazándose en sentido horario sobre la circunferencia) elevado a la posición de la cifra actual.

Los primeros términos de la sucesión de Javier son:

$$2,\ 92,\ 592,\ 1592,\ldots$$

¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide a la diferencia entre el número en la posición 564 y el número en la posición 128 de la sucesión de Javier?

(a) 2^{436} (b) 2^{515} (c) 2^{128} (d) 2^{131} (e) No sé

Solución: Tenemos los primos 2, 3, 5 y 7, los cuales se van tomando de menor a mayor cíclicamente. Al hacer los cálculos, $N_4 = 1592$, si se continúa, $N_8 = 15921592$, esto pues sean a y k enteros positivos, a^{4n+k} deja el mismo residuo entre 10 que a^k, con n un entero no negativo. Generalizando los resultados anteriores, sea m múltiplo de 4, se tiene que

$$N_m = 1592 \times (10^{m-4} + 10^{m-8} + \ldots + 10^4 + 10^0),$$

$$N_m = 2^3 \times 199 \times (10^{m-4} + 10^{m-8} + \ldots + 10^4 + 1).$$

La mayor potencia de 2 que divide a N_m es 2^3. Considerando $N_{564} - N_{128}$,

$$N_{564} - N_{128} = 10^{128} \times N_{436} = 2^{128} \times 2^3 \times p,$$

donde p es un impar. Resulta entonces que la mayor potencia de 2 que divide a $N_{564} - N_{128}$ es 2^{131}.

PROBLEMA 7.

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números tal que cada término (salvo el primero a_1) se obtiene sumando al término anterior un número fijo d, llamado **razón.** De modo que el término general es de la forma $a_n = a_1 + (n-1) \times d$. Por ejemplo, la siguiente sucesión es una progresión aritmética, con término inicial 5 y razón 2:

$$a_1 = 5, \quad a_2 = 7, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 11, \ldots, a_n = 5 + 2(n-1)$$

(a) Hallar el décimo término de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de sus n primeros términos es $n(n+7)$.

(b) Una progresión aritmética cumple que el término en la posición k es t, mientras que el término en la posición t es k. Determinar la razón de esta progresión.

Solución:

(a) Dado que la suma de los primeros n términos de la sucesión es $n(n+7)$, entonces el primer término es $a_1 = 1(1+7) = 8$ y

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 2(2+7) \\ 8 + a_2 &= 18, \\ a_2 &= 10. \end{aligned}$$

Así, la razón de la progresión es $d = a_2 - a_1 = 10 - 8 = 2$. De modo que el término general de la progresión está dado por $a_n = 8 + 2(n-1)$, de ahí que el décimo término es $a_{10} = 8 + 2(10-1) = 26$.

(b) Sea $a_n = a_1 + (n-1)d$, el término general de la progresión, siendo a_1 el primer término y d la razón. Entonces $a_k = t$ y $a_t = k$, esto es:

$$\begin{aligned} a_1 + (k-1)d &= t, \\ a_1 + (t-1)d &= k. \end{aligned}$$

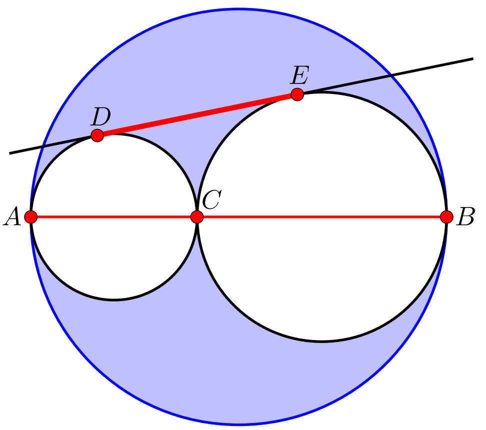
Restando la segunda ecuación de la primera se obtiene

$$\begin{aligned}(k-1)d-(t-1)d &= t-k\\ kd-d-td+d &= t-k,\\ d(k-t) &= t-k.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la razón de la progresión es: $d = \dfrac{t-k}{k-t} = \dfrac{-(k-t)}{k-t} = -1.$

Problema 8.

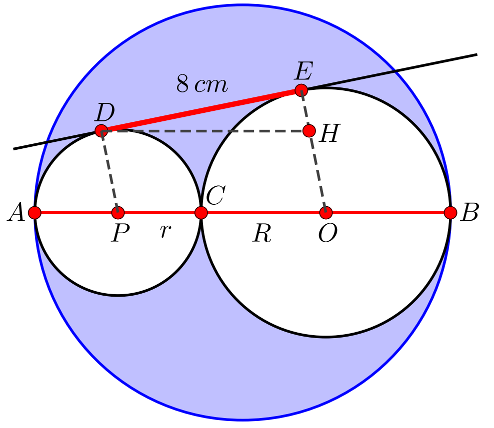
En la siguiente figura las tres circunferencias tienen un diámetro sobre $\overline{AB}$, mientras que A, B, C, D y E son puntos de tangencia. Si $DE = 8\,cm$, ¿cuál es el área sombreada?



Solución: Sean r y R los radios de las circunferencias con diámetros AC y CB, respectivamente. Entonces el área sombreada está dada por

$$\begin{aligned}A &= \pi(r+R)^2-\pi r^2-\pi R^2,\\ A &= \pi\left(r^2+2rR+r^2\right)-\pi r^2-\pi R^2,\\ A &= 2\pi rR.\end{aligned}$$

Hallemos el valor de rR, para ello considere la siguiente figura auxiliar, en la que O y P son respectivamente, los centros de las circunferencias con radios $OB = R$ y $PC = r$. Además $\overline{DH}$ es paralelo a $\overline{PO}$.



Observe que $\overline{OE}$ y $\overline{PD}$ son perpendiculares a $\overline{DE}$ y por lo tanto paralelos entre sí. Además $\overline{DH}$ es paralelo a $\overline{PO}$, de ahí que $DH = PO = r + R$, $HO = PD$ y $EH = R - r$. Como triángulo DEH es rectángulo con ángulo recto en E, entonces se por el Teorema de Pitágoras se cumple que

$$\begin{aligned} DH^2 &= DE^2 + EH^2, \\ (r+R)^2 &= 8^2 + (R-r)^2, \\ r^2 + 2rR + R^2 &= 64 + R^2 - 2rR + r^2, \\ 4rR &= 64, \\ rR &= 16. \end{aligned}$$

Por lo anterior, el área sombreada es $A = 2\pi(16) = \boxed{32\pi\, cm^2}$.

Problema 9.

Sea $N = \dfrac{\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2}{a+b}$, donde $\overline{ab}$ denota al número de dos cifras con b unidades y a decenas, y $\overline{ba}$ al número de dos cifras con a unidades y b decenas.

(a) Probar que N siempre es un entero.

(b) Si $a \neq b$, ¿cuál es la mayor cantidad de divisores positivos que puede tener N?

Solución:

(a) Note que

$$\begin{aligned}\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 &= (10a+b)^2 - (10b+a)^2,\\ &= 100a^2 + 20ab + b^2 - 100b^2 - 20ba - a^2,\\ &= 99a^2 - 99b^2,\\ &= 99\left(a^2 - b^2\right),\\ &= 99(a-b)(a+b)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$N = \frac{\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2}{a+b} = \frac{99(a-b)(a+b)}{a+b} = 99(a-b),$$

donde $a-b$ es un entero, pues a y b son enteros (dígitos). De modo que N es un entero.

(b) Si $a \neq b$, entonces $a - b \neq 0$. Note además que

$$N = 3^2 \times 11 \times (a-b),$$

con $1 \leq |a-b| \leq 8$. Luego N tendrá la mayor cantidad de divisores cuando $|a-b| = 8$ ($a = 9$ y $b = 1$), pues en tal caso

$$N = 3^2 \times 11 \times 2^3,$$

cuya cantidad de divisores positivos es $3 \times 2 \times 4 = 24$.

Nota: En la prueba no aparecía la condición $a \neq b$ en el ítem (b), luego $a = b$ era posible, e implica que $N = 0$, en cuyo caso la cantidad de divisores positivos es infinita. (Esta respuesta se tomó como válida en la calificación del ejercicio).

3.3. Prueba Final

Problema 1.

En un pueblo con 1000 habitantes quieren poner a prueba un nuevo modelo de “partidos políticos” para evitar la polarización. El modelo se basa en las siguientes dos reglas:

I. Ningún partido político puede tener más del $50\,\%$ de los habitantes.

II. Cualesquiera dos personas, deben pertenecer a un partido político en común.

(a) ¿Es posible que solo hayan dos partidos políticos en el municipio?

(b) ¿Es posible que una persona pertenezca a un solo partido político?

(c) ¿Es posible que una persona pertenezca a máximo dos partidos políticos?

(d) ¿Cuál es el número mínimo de partidos políticos que habrían en el municipio con este modelo?

Solución:

(a) Imposible, ya que el tal caso, por la regla I., cada partido debería tener 500 habitantes, pero entonces no se cumpliría la regla II.

(b) Imposible, si una persona pertenece a un solo partido político, por la regla II. todos los demás habitantes deberían pertenecer también a este partido, pero entonces no se cumple la regla I.

(c) Imposible, por lo visto en (a) una persona no puede pertenecer a un solo partido. Ahora si una persona pertenece a solo dos partidos políticos, por la regla II, los restantes 999 habitantes deben pertenecer a alguno de estos dos partidos, pero en tal caso la suma mínima para la cantidad de integrantes de los dos partidos sería 1001 (pues la persona que está en los dos partidos cuenta doble), luego no se cumple la regla I. ya que en algún partido habría más del $50\,\%$ de los habitantes.

(d) Por lo visto en los literales anteriores, cada persona debe pertenecer al menos a 3 partidos. Para conseguir la menor cantidad de partidos, supongamos que cada partido tiene el número máximo de integrantes, que según la regla I. es

500, entonces el número mínimo de partidos estaría dado por

$$\frac{3 \times 1000}{500} = 6.$$

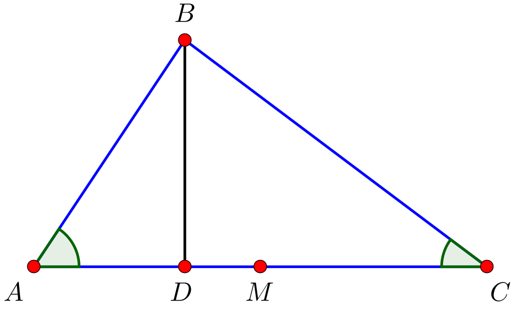
En efecto, veamos que con 6 partidos es posible el modelo. Reparta a los 1000 habitantes en 4 grupos, cada uno con 250 habitantes, sean A, B, C y D estos grupos. Ahora defina los partidos políticos así:

- Partido $1 : A \cup B$
- Partido $2 : A \cup C$
- Partido $3 : A \cup D$
- Partido $4 : B \cup C$
- Partido $5 : B \cup D$
- Partido $6 : C \cup D$

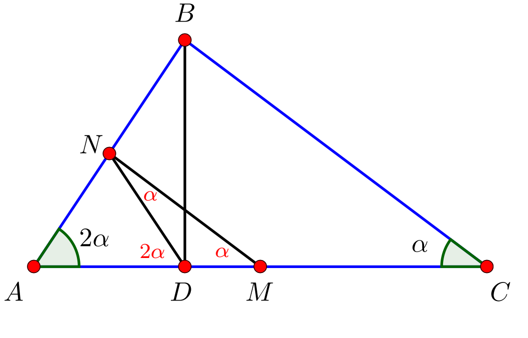
Verifique que se cumplen las dos reglas.

Problema 2.

Una altura del triángulo ABC corta al lado $\overline{AC}$, en el punto D. Si $\measuredangle CAB = 2 \times \measuredangle BCA$ y M es el punto medio de $\overline{AC}$, determine el valor de $\dfrac{AB}{DM}$.



Solución: Considere la siguiente figura en la que N es el punto medio del segmento $\overline{AB}$, $\alpha = \measuredangle BCA$ y por tanto $\measuredangle CAD = 2\alpha$.



Note que el triángulo ADB es rectángulo en D, luego está inscrito en una semicircunferencia con diámetro $\overline{AB}$, de ahí que $NA = NB = DN$. Así, que el triángulo AND es isósceles y por lo tanto $\measuredangle NDA = 2\alpha$ y $\measuredangle MDN = 180° - 2\alpha$.

Por otra parte, dado que M y N son los puntos medios de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, entonces $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y por ello $\measuredangle NMA = \alpha$.

Además,

$$\begin{aligned}
\measuredangle DNM + \measuredangle MDN + \measuredangle NMD &= 180° \\
\measuredangle DNM + 180° - 2\alpha + \alpha &= 180° \\
\measuredangle DNM &= \alpha.
\end{aligned}$$

Luego el triángulo MDN también es isósceles con $DN = DM$, pues $\measuredangle NMD = \measuredangle DNM$. Así, la razón buscada es:

$$\frac{AB}{DM} = \frac{AN + NB}{DM} = \frac{2DN}{DN} = 2.$$

PROBLEMA 3.

Sea S_n una sucesión tal la suma de sus primeros k términos es igual a $k^2 \times S_k$, esto es:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_k = k^2 \times S_k.$$

Determine el valor de S_{2022}, sabiendo que $S_1 = 2022$.

Solución: De la condición $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_k = k^2 \cdot S_k$, se sigue que:

$$\begin{aligned}
S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{k-1} &= k^2 \cdot S_k - S_k, \\
(k-1)^2 S_{k-1} &= (k^2 - 1) S_k, \\
\frac{(k-1)^2 S_{k-1}}{k^2 - 1} &= S_k, \\
\frac{(k-1)^2 S_{k-1}}{(k-1)(k+1)} &= S_k.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\boxed{S_k = \dfrac{k-1}{k+1} S_{k-1}}$ para $k > 1$. De modo que

$$\begin{aligned}
S_{2022} &= \frac{2021}{2023} \cdot S_{2021}, \\
S_{2021} &= \frac{2020}{2022} \cdot S_{2020}, \\
S_{2020} &= \frac{2019}{2021} \cdot S_{2020}, \\
&\vdots \\
S_4 &= \frac{3}{5} \cdot S_2, \\
S_3 &= \frac{2}{4} \cdot S_2, \\
S_2 &= \frac{1}{3} \cdot S_1.
\end{aligned}$$

Reemplazando "hacia abajo" tenemos:

$$\begin{aligned}
S_{2022} &= \frac{2021}{2023} \cdot \frac{2020}{2022} \cdot \frac{2019}{2021} \cdots \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_1 \\
S_{2022} &= \frac{2 \cdot 1}{2023 \cdot 2022} \cdot 2022 \\
S_{2022} &= \frac{2}{2023}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 4.

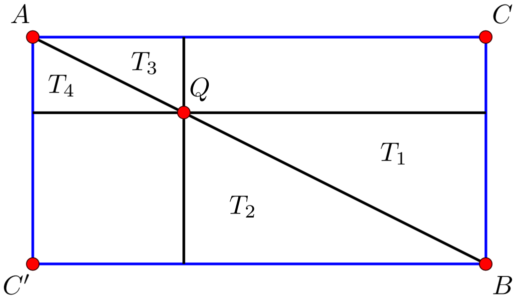
En un triángulo rectángulo cuyos catetos miden a y b centímetros se inscribe un rectángulo R con área máxima. Hallar en términos de a y b

(a) el área de R,

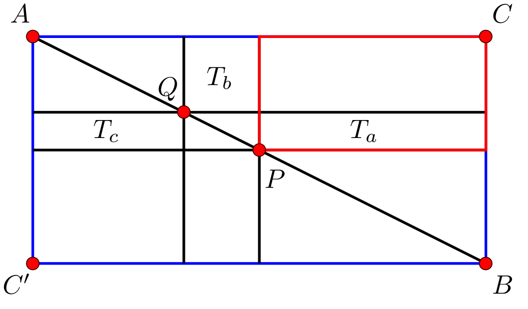
(b) el máximo perímetro que puede tener R.

Solución: Solo hay dos formas de inscribir un rectángulo R en un triángulo rectángulo T, analicemos el área en cada caso:

Caso 1. R y T comparten el ángulo recto. En este caso el rectángulo de mayor área es el que tiene vértice en el punto medio de la hipotenusa. Considere la imagen en la que ABC es el triángulo rectángulo, ABC' es congruente con ABC, Q es un punto cualquiera en la hipotenusa y T_1, T_2, T_3, T_4 son las áreas de los respectivos triángulos.

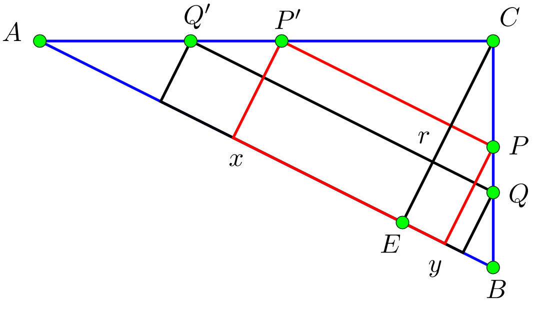


Es claro que $T_1 = T_2$ y $T_3 = T_4$, luego los rectángulos de diagonales QC y QC' tienen la misma área. Ahora, si P es el punto medio de la hipotenusa:



Entonces para mostrar que el rectángulo de diagonal PC tiene mayor área que el de diagonal QC, solo hace falta ver que $T_b \leq T_a$. Pero por el paso anterior: $T_b = T_c$; y claramente $T_c \leq T_a$. Además, el rectángulo de diagonal PC tiene la mitad del área de ABC.

Caso 2. Un lado de R está contenido en la hipotenusa de T. Considere la siguiente imagen donde E es pie de altura, P y P' están en los puntos medios de los catetos y Q es cualquier punto sobre el cateto $\overline{BC}$:



Por el primer caso, sabemos que el rectángulo de diagonal EP tiene mayor área que el de diagonal EQ. Lo mismo sucede con los otros rectángulos. Así que el rectángulo de mayor área es el de lado PP', el cual también tiene la mitad del área de ABC.

De ambos casos posibles se concluye que el área máxima que puede tener un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo con catetos a y b es $A_{max} = \dfrac{ab}{4}$.

Ahora, determinemos el perímetro máximo. Para ello, vamos a comparar los perímetros del rectángulo del **Caso** 1. con el del **Caso** 2. El perímetro del primero es $P_1 = a + b$ y el del segundo es

$$P_2 = 2\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) + 2\left(\frac{r}{2}\right) = x + y + r = h + r,$$

donde $x = AE$, $y = EB$, $h = x + y$ es la hipotenusa y $r = CE$. Note que $(P_1)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = h^2 + 2ab$, pero $\boxed{ab = hr}$, entonces nos queda que $(P_1)^2 = h^2 + 2hr$ y $(P_2)^2 = h^2 + 2hr + r^2$, de donde se concluye que $P_1 \leq P_2$. De modo que el perímetro máximo lo tiene el rectángulo del **Caso** 2. y es

$$P_{max} = h + r = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{h} + \underbrace{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{r=ab/h} = \frac{a^2+b^2+ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

PROBLEMA 5.

Responder cada literal

(a) ¿Cuál es la suma de las cifras de $\dfrac{10^{2022}-1}{9}$?

(b) Si $N = \underbrace{444\ldots444}_{2022-4's}\underbrace{888\ldots888}_{2021-8's}9$, ¿cuál es la suma de las cifras de $\sqrt{N}$?

Solución: Note que $\dfrac{10^{2022}-1}{9} = \dfrac{\overbrace{999\ldots999}^{2022-9's}}{9} = \underbrace{111\ldots111}_{2022-1's}$. Luego la suma de las cifras de este número es 2022. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
N &= 4\left(\underbrace{111\ldots111}_{2022-1's}\right)\times 10^{2022}+8\left(\underbrace{111\ldots111}_{2022-1's}\right)+1,\\
&= 4\left(\frac{10^{2022}-1}{9}\right)\times 10^{2022}+8\left(\frac{10^{2022}-1}{9}\right)+1,\\
&= \frac{4\left(10^{4044}\right)-4\left(10^{2022}\right)+8\left(10^{2022}\right)-8+9}{9},\\
&= \frac{\left(2\cdot 10^{2022}\right)^2+2\left(2\cdot 10^{2022}\right)+1}{9},\\
&= \left(\frac{2\cdot 10^{2022}+1}{3}\right)^2.
\end{aligned}$$

Luego N es un cuadrado perfecto. Para ver la suma de las cifras de $\sqrt{N} = \dfrac{2\cdot 10^{2022}+1}{3}$, podemos ver el valor de $\dfrac{2\cdot 10^{k}+1}{3}$ para algunos valores de k :

k	$\frac{2\cdot 10^k+1}{3}$
1	7
2	67
3	667
4	6667

Conjeturamos que $\sqrt{N} = \underbrace{666\ldots666}_{2021-6's}7$. De hecho,

$$\underbrace{666\ldots6}_{2021-6's}7 = 6\left(\frac{10^{2022}-1}{9}\right)+1 = \frac{2\cdot 10^{2022}}{3}-\frac{2}{3}+1 = \frac{2\cdot 10^{2022}+1}{3} = \sqrt{N}.$$

Por lo tanto, la suma de las cifras de $\sqrt{N}$ es $6\times 2021+7 = 12133$.

Problema 6.

¿Cuántos enteros a desde el 1 hasta el 2022 cumplen que el dígito de las unidades de a^a es el mismo de a?

Solución: Sea u el dígito de las unidades de a, entonces el dígito de las unidades de a^a es el mismo que el de u^a, de modo que basta analizar las potencias de los números dígitos. Observe que si el dígito de las unidades de a es 0, 1, 5 o 6, cualquier potencia de a terminará en 6, luego todos los números desde 1 hasta 2022 que terminen en 6 cumplen la condición del enunciado, estos son: $202+203+202+202 = 809$.

Veamos los ciclos de la cifra de las unidades en las potencias de los dígitos restantes:

$\boxed{\textbf{Potencias de } 2}$ ciclo: 2 4 8 6, luego las únicas potencias de 2 que terminan en 2 son aquellas cuyo exponente es de la forma $4k+1$, como estos exponentes son impares, concluimos que si a termina en 2 entonces a^a no termina en 2.

$\boxed{\textbf{Potencias de } 3}$ ciclo: 3 9 7 1, luego las únicas potencias de 3 que terminan en 3 son aquellas cuyos exponentes son de la forma $4k+1$, veamos la forma de los números terminados en 3 :

- $3 = 4(0) + 3$ ¡no cumple!
- $13 = 4(3) + 1$ ¡cumple!
- $23 = 4(5) + 3$ ¡no cumple!
- $33 = 4(8) + 1$ ¡cumple! ...

cada dos de estos números uno cumple, por lo tanto, la mitad de los números terminados en 3 cumplen la propiedad del enunciado, estos son 101.

$\boxed{\textbf{Potencias de } 4}$ ciclo: 4 6 es decir, las potencias impares terminan en 4 y las potencias pares en 6, de modo que si a termina en 4 entonces a^a terminará en 6, luego ninguno de los números terminados en 4 cumplen la condición.

$\boxed{\textbf{Potencias de } 7}$ ciclo: 7 9 3 1, de manera análoga al caso de las potencias de 3, se concluye que la mitad de los números terminados en 7 cumplen la condición, estos son 101.

$\boxed{\textbf{Potencias de } 8}$ ciclo: 8 4 2 6, de manera análoga al caso de las potencias de 2, se concluye que ningún número terminado en 8 cumple la condición.

$\boxed{\textbf{Potencias de } 9}$ ciclo: 9 1, es decir, las potencias impares terminan en 9 y las potencias pares en 1, de modo que si a termina en 9 entonces a^a terminará en 9, luego todos los números terminados en 9 cumplen la condición, estos son 202.

Por lo anterior, desde el 1 hasta el 2022, hay $809 + 101 + 101 + 202 = 1213$ números que cumplen la condición del enunciado.

Apéndice A

Cuadro de Honor

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la Decimocuarta versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Secundaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 2927 participantes del certamen, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

NIVEL BÁSICO

PUESTO	MEDALLA	PARTICIPANTE
1.º		*Sofía González Nossa* *Colegio Reggio Amelia, Bucaramanga*
2.º		*Danna Valeria Peña Pedraza* *Colegio Integrado Los Santos, Los Santos.*
3.º		*Karen Liliana Barros Gonzales* *Colegio La Buena Semilla, Socorro.*
4.º		*Natalia Rincón Vila* *Gimnasio San Diego, Floridablanca.*
5.º		*Samuel Matías Cuadros Frías* *Col. Gimnasio Campestre San Sebastián, Bucaramanga.*

NIVEL MEDIO

Puesto	Medalla	Participante
1.^{o}		*Bellorossme Nhajais Mogollón Padilla* *Col. Nuestra Señora del Perpetuo Socorro, Bucaramanga.*
2.^{o}		*Juan Diego Castellanos Pinzón* *Colegio de La Presentación, Bucaramanga.*
3.^{o}		*Daniel Blanco García* *Fundación Colegio UIS, Floridablanca.*
4.^{o}		*Kevin Mojica Castellanos* *Colegio Nuestra Señora de Fátima, Onzaga.*
5.^{o}		*Fayber Arley Becerra Oviedo* *E.N.S Francisco de Paula Santander, Málaga.*

NIVEL AVANZADO

Puesto	Medalla	Participante
1.^{o}		*David Alfonso Pérez Rojas* *Colegio Cooperativo Comfenalco, Bucaramanga.*
2.^{o}		*Luisa Fernanda Caballero* *ASPAEN Cantillana, Piedecuesta.*
3.^{o}		*Jefferson Andrés López Pinzón* *Inst. Tec. Salesiano Eloy Valenzuela, Bucaramanga.*
4.^{o}		*Santiago Méndez Mesa* *Fundación Colegio UIS, Floridablanca.*
5.^{o}		*María Andrea Torres Rodríguez* *ASPAEN Cantillana, Piedecuesta.*

Bibliografía

[1] BOLAÑOS W. *Problemas y Soluciones Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas Universitaria 1998-2019.* Universidad Antonio Nariño y Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[2] BROCHERO F. Y RESTREPO J. *Un recorrido por la Teoría de Números.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[3] BURTON, D. *Elementary Number Theory*, segunda edición. Brown Publishers, 1989.

[4] CALDERÓN, S., MORALES, M. *Analisis Combinatorio*, Editorial Tecnológica de Costa Rica, 1992.

[5] CASTRO, J. *Lecciones de matemáticas para biociencias*. Departamento de Matemáticas-Universidad del Valle.

[6] COMELLAS., SÁNCHEZ, ANNA., FRANCESC FÁBREGA, JOSEP., SERRA, ORIOL. *Matemática Discreta*, Edicions UPC, 2001.

[7] GARCÍA, F. *Un pequeño manual para resolución de problemas*, Priego de cordoba, 2002.

[8] GÓMEZ J., VALDEZ R. Y VÁZQUEZ R. *Principio de las Casillas.* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2011.

[9] HEMMERLING E. *Geometría Elemental.* Bakersfield College. Limusa, México, 2009.

[10] HOYOS, D., PERDOMO, O. *Geometría Fundamental*. Departamento de Matemáticas-Universidad del Valle, 2006.

[11] Jiménez L., Gordillo J. y Rubiano G. *Teoría de números para principiantes.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2004.

[12] Madroñero J y Contreras I. *Un recorrido por el Álgebra.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[13] Ministerio de Educación. *Matemáticas Lineamentos Curriculares: Áreas obligatorias y fundamentales*. Libros & libros S.A., 1998.

[14] Rosen, K. *Elementary Number Theory*, quinta edición. MgGraw-Hill.

[15] Rosen, K. *Matemática Discreta y sus aplicaciones*, quinta edición. MgGraw-Hill, 2004.

[16] Serge, L., Gene, M. *Geometry*, second edition. 1988.

[17] Soberón P. *Combinatoria para olimpiadas* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2010.

[18] Restrepo P. *Un recorrido por la Combinatoria I.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2010.

Enlaces de interés

1. Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

   Pruebas anteriores:

   http://matematicas.uis.edu.co/?q=olimpiadas-secundaria

   Cartillas de los años anteriores:

   http://matematicas.uis.edu.co/?q=descargas

   Página de facebook:

   https://web.facebook.com/OlimpiadasRegionalesDeMatematicasUis

2. Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

   https://www.acmven.org/pruebas/

3. CanadaMath, canal de youtube

   https://www.youtube.com/channel/UCPjak7r62HVJ6rvgsu2xoFA

4. International Mathematical Olympiad (IMO)

   http://www.imo-official.org/problems.aspx

5. Olimpíada Brasileira de matemática das escolas públicas

   http://www.obmep.org.br/banco.htm

6. Olimpiada Matemática Argentina,

   Problemas Semanales: https://www.oma.org.ar/problemas/index.php

   Archivo de enunciados: https://www.oma.org.ar/enunciados/index.htm#omn

   Simulacros en línea: https://www.oma.org.ar/canguro/problemas.html

7. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

   https://www.ommenlinea.org/material-de-entrenamiento/introductorio/

8. Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Baja California

   http://ommbc.org/sitio/#/entrenate

9. Olimpiada Panameña de Matemáticas

   https://opm.org.pa/recursos/

10. Olimpiadas de Matemáticas, página de preparación y problemas
    http://wpd.ugr.es/~jmmanzano/preparacion/problemas.php

11. Olimpiadas Matemáticas de la Universidad de Antioquia.
    https://www.olimpiadasudea.co/matematicas/talleres.html

12. Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico
    http://om.pr/

13. Olimpíadas Portuguesas de Matemática
    http://olimpiadas.spm.pt/index.php?id=69&tipo=1

14. Olimpíada Brasileira de Matemática
    https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/

15. Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño
    https://orm.udenar.edu.co/?page_id=1612

16. Toomates Coolección
    http://www.toomates.net/