SEGUNDA CAPACITACIÓN

Olimpiadas Regionales de Matemáticas-Secundaria

Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Grupo Edumat

Bucaramanga, marzo 19 de 2022

Informes:
`olimpiadas.matematicas@uis.edu.co`
Tel.: 6344000 *ext.* 2316.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

METODOLOGÍA

NIVELES

Básico: para estudiantes de 6° y 7°.

Medio: para estudiantes de 8° y 9°.

Avanzado: para estudiantes de 10° y 11°.

FASES

1. Capacitaciones.
2. Prueba Clasificatoria.
3. Prueba Selectiva.
4. Prueba Final.
5. Entrenamientos.

FASES

Capacitaciones

- 3 talleres gratuitos de capacitación para docentes y estudiantes.

Prueba Clasificatoria

- Participan los estudiantes inscritos.
- **Modalidad virtual,** en la plataforma Moodle.
- Consta 9 problemas de selección múltiple con única respuesta.

FASES

PRUEBA SELECTIVA

- Participan los estudiantes clasificados por alguno de los siguientes criterios:

  Criterio 1. el estudiante pertenece al conjunto del 10% de los estudiantes que obtuvieron los mejores puntajes en la Prueba Clasificatoria.

  Criterio 2. si alguna institución participante no alcanzó la clasificación del 10% de los estudiantes participantes, el Comité Organizador clasifica a los restantes estudiantes, para completar el 10% de clasificación en cada nivel.

- **Modalidad presencial**, en las sedes regionales (Barbosa, Barrancabermeja, Bucaramanga, Málaga, Socorro, UFPS-Ocaña).

FASES

Prueba Final

- Participan los estudiantes clasificados por alguno de los siguientes criterios:

  Criterio 1. el estudiante pertenece al conjunto de los 20 estudiantes con los mejores puntajes en la prueba selectiva de cada nivel.

  Criterio 2. si un municipio no tiene representación por el criterio 1, el Comité otorga el título de Estudiante Finalista al participante del municipio con el mejor puntaje en la prueba de selectiva.

- **Modalidad presencial**, en las instalaciones de la UIS-Bucaramanga.

Entrenamientos

A los estudiantes finalistas se les ofrecerá una preparación especial con el ánimo que participen en otras competencias de matemáticas.

ESTÍMULOS

- MENCIÓN DE HONOR para los estudiantes clasificados de cada nivel en primera prueba.
- DIPLOMA DE FINALISTA
- PREMIOS para los 5 mejores puntajes de cada nivel en la prueba final.

FECHAS IMPORTANTES

INSCRIPCIONES

del 15 de febrero al 9 de abril de 2022.

PRUEBAS

Prueba Clasificatoria: semana del 2 al 6 de mayo.

Prueba Selectiva: jueves, 26 de mayo.

Prueba Final: sábado, 16 de julio.

PROCESO DE INSCRIPCIÓN

1. Diligenciar el formulario de Google del siguiente enlace:
   `https://forms.gle/1S6bwfBGVdDgJ5Fo9`
2. El número mínimo de estudiantes inscritos por institución debe ser 10.

VALOR DE LA INSCRIPCIÓN POR ESTUDIANTE:

- 8.500 para grupos de 10 a menos de 40 estudiantes.
- 7.500 para grupos de 40 a 499 estudiantes.
- 7.000 para grupos de más de 499 estudiantes.

CONTACTO

Correo electrónico: olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Teléfonos: 6344000, Ext: 2316

Página de Facebook: Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

OTROS GRUPOS DE EDUMAT-UIS

SEMILLERO MATEMÁTICO

Correo electrónico: semillero@matematicas.uis.edu.co

Teléfono: 6344000, Exts: 2316.

CALENDARIO MATEMÁTICO

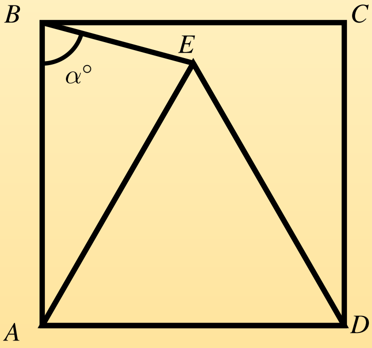
Correo electrónico: calendariomatematico2011@gmail.com

Teléfonos: 6344000, Exts: 2316. - 3125586597 (Daniel Moreno)

Nivel Básico

Problema #1

En la siguiente figura $ABCD$ y DAE son polígonos regulares. ¿Cuál es el valor de α?



Solución

Dado que el triángulo ADE es regular, es decir es equilátero, entonces $\measuredangle DAE = 60^\circ$. Además, el polígono $ABCD$ es un cuadrado de modo que $\measuredangle DAB = 90^\circ$ luego

$$\measuredangle EAB = \measuredangle DAB - \measuredangle DAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Por otra parte, note que $AB = AE$, luego el triángulo EAB es isósceles en A, así que $\alpha^\circ = \measuredangle ABE = \measuredangle BEA$ y como la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°, entonces:

$$\begin{aligned}
180^\circ &= \measuredangle EAB + \measuredangle ABE + \measuredangle BEA, \\
180^\circ &= 30^\circ + \alpha^\circ + \alpha^\circ, \\
150^\circ &= 2\alpha^\circ, \\
75^\circ &= \alpha^\circ.
\end{aligned}$$

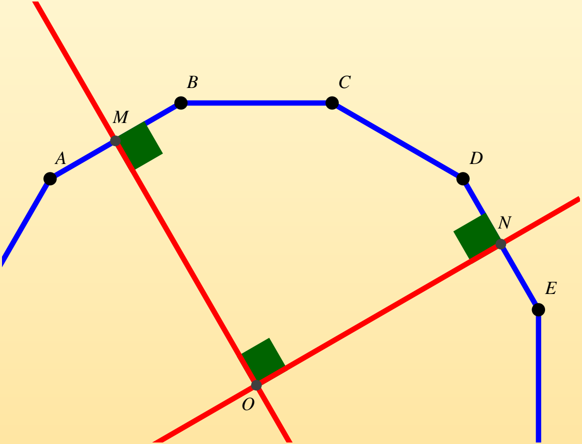
Nivel Básico

Problema #2

Los puntos A, B, C, D, y E son vértices consecutivos diferentes de un polígono regular de n lados. Si las mediatríces de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ de este polígono se cortan perpendicularmente, ¿cuá es el valor de n?

Solución

Considere la siguiente figura:



Sea n el número de lados del polígono regular. Sabemos que la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono con n lados es $180(n-2)$ luego, la suma de los ángulos internos del polígono $OMBCDN$ (con 6 lados)

Solución

$$90 + 90 + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D + 90 = 180(6-2) \tag{1}$$

Por otra parte, como el polígono del enunciado es regular y tiene n lados, cada uno de sus ángulos internos mide

$$\frac{180(n-2)}{n},$$

en particular,

$$\measuredangle B = \measuredangle C = \measuredangle D = \frac{180(n-2)}{n}, \tag{2}$$

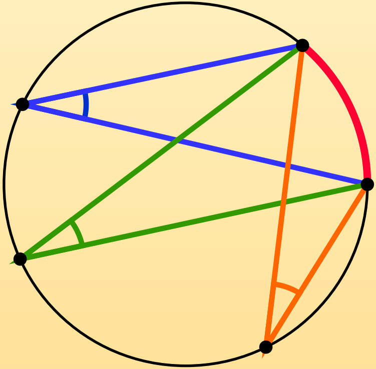
De esta manera, reemplazando (2) en (1) se tiene que:

$$\begin{aligned}
3 \times 90 + 3 \times \frac{180(n-2)}{n} &= 180 \times 4,\\
\frac{540(n-2)}{n} &= 450,\\
540n - 1080 &= 450n,\\
90n &= 1080,\\
n &= 12.
\end{aligned}$$

Nivel Básico

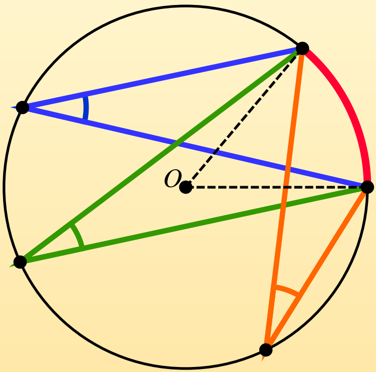
Problema #3

Determine la suma de las medidas (en grados) de los ángulos marcados en la siguiente figura, sabiendo que la longitud del arco rojo, corresponde a $\frac{1}{9}$ de la longitud total de la circunferencia.



Solución

Considere la siguiente figura en la que O es el centro del círculo:



Dado que el arco rojo corresponde a $\dfrac{1}{9}$ de la longitud de la circunferencia, entonces el ángulo central O mide $\dfrac{360^\circ}{9} = 40^\circ$. Ahora, note que los otros tres ángulos subtienden el mismo arco y están inscritos en la circunferencia.

Solución

Sabiendo que la medida de un ángulo central que subtiende el mismo arco de un ángulo inscrito, es el doble de la medida del ángulo inscrito; se tiene que cada uno de los tres ángulos marcados mide $20°$, y por lo tanto la suma de las medidas de dichos ángulos es $60°$.

Nivel Medio

Problema #4

Sean x, y, z números reales tales que $xy + 1 = 3y$, $yz + 1 = 3z$ y $xz + 1 = 7x$. Determine la suma de todos los valores que puede tomar $x \times y \times z$.

Solución

Del enunciado,

$$x + \frac{1}{y} = 3, \qquad y + \frac{1}{z} = 3, \qquad z + \frac{1}{x} = 7.$$

Multiplicando estas expresiones se obtiene:

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{x}\right) &= xyz + (x + y + z) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{xyz}, \\ &= 3 \times 3 \times 7 = 63.\end{aligned}$$

Pero,

$$(x + y + z) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + 3 + 7 = 13.$$

Luego,

$$xyz + 13 + \frac{1}{xyz} = 63.$$

Solución

Haciendo $xyz = t$ se tiene:

$$t + 13 + \frac{1}{t} = 63,$$
$$t^2 - 50t + 1 = 0.$$

De ahí que $t = xyz = 25 \pm 4\sqrt{39}$. Por lo tanto, la suma de todos los valores que puede tomar $x \times y \times z$ es 50.

Nivel Medio

Problema #5

Si a y b son las soluciones de la ecuación $2x^2 + 15x + 16 = 0$, determinar el valor de $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

Solución

Dado que a y b son las soluciones de la ecuación $2x^2 + 15x + 16 = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 15x + 16 &= 2(x-a)(x-b). \\ &= 2(x^2 - bx - ax + ab), \\ &= 2x^2 - 2x(a+b) + 2ab. \end{aligned}$$

De modo que, igualando coeficientes, se obtiene:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ 15 &= -2(a+b), \\ 16 &= 2ab. \end{aligned}$$

de donde, $a + b = -\dfrac{15}{2}$ y $ab = 8$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab} = \frac{-15/2}{8} = -\frac{15}{16}.$$

Nivel Medio

Problema #6

Si a, b y c son las soluciones de la ecuación $x^3 - 2x^2 - 3x + 8 = 0$, ¿cuál es el valor de $a^2 + b^2 + c^2$?

Solución

Note que

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc).$$

Además, por el Teorema Fundamental del Álgebra, se tiene que

$$\begin{aligned} x^3-2x^2-3x+8 &= (x-a)(x-b)(x-c), \\ &= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{aligned} -2 &= -(a+b+c), \\ -3 &= ab+ac+bc. \end{aligned}$$

Luego,

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+ac+bc) = 2^2-2(-3) = 10.$$

Nivel Medio

Problema #7

Si a, b y c son las soluciones de la ecuación $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$, determinar el valor de $(a+1)(b+1)(c+1)$.

Solución

Dado que a, b y c son las soluciones de la ecuación $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + 3x - 4 &= (x-a)(x-b)(x-c), \\ &= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{aligned} -2 &= -(a+b+c), \\ 3 &= ab+ac+bc, \\ -4 &= -abc \end{aligned}$$

Luego,

$$(a+1)(b+1)(c+1) = abc+(ab+ac+bc)+(a+b+c)+1 = 4+3+2+1 = 10.$$

Nivel Avanzado

Problema #8

¿Cuántos números capicúas positivos de 6 dígitos divisibles por 33 existen tales que la cifra de las decenas sea múltiplo de 3 y la cifra de las unidades deje residuo 1 al dividirse entre 4?

Nota: Un número es capicúa si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

Solución

Si un número es divisible por 33, entonces es divisible por 11 y por 3. Todo número capicúa de 6 dígitos es divisible* por 11, pues la suma alternada de sus cifras es $0 = 11 \times 0$. Ahora, para que sea divisible en 3 la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 3, en nuestro caso, como el número es capicúa, se debe cumplir que el número formado por los 3 últimos dígitos sea múltiplo de 3, pues las 3 primeras cifras son iguales a las 3 últimas, y si la suma de los 3 últimos dígitos no es múltiplo de 3, entonces 2 veces dicho valor tampoco es lo es. La cifra de las decenas puede tomar valores del conjunto $\{0, 3, 6, 9\}$, 4 en total. La cifra de las unidades puede tomar valores del conjunto $\{1, 5, 9\}$, para el 1 la cifra de las centenas tiene 3 posibilidades en el conjunto $\{2, 5, 8\}$, para el 5 hay 3 posibilidades en $\{1, 4, 7\}$, y para el 9 hay 4 posibilidades en el conjunto $\{0, 3, 6, 9\}$. De modo que el total de números capicúas que cumplen lo dicho es:

$$(3 \times 4 \times 1) + (3 \times 4 \times 1) + (4 \times 4 \times 1) = 40.$$

*Un número es divisible por 11 si y solo si la suma alternada de sus cifras es múltiplo de 11.

Nivel Avanzado

Problema #9

En un supermercado se etiquetan los productos con códigos que son números enteros de 10 dígitos. ¿Cuántos códigos $ABCDEFGHIJ$ cumplen que todos sus dígitos son diferentes y

$$A > B > C > D > E < F < G < H < I < J?$$

Por ejemplo, el código 8652013479 cumple.

Solución

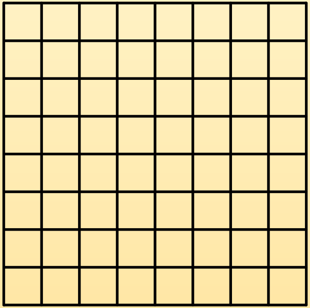
De las condiciones del enunciado se deduce que $E = 0$. Además, puesto que los dígitos de cada código están ordenados, al escoger A, B, C y D, los demás dígitos quedarán determinados. Ahora bien, los dígitos del código deben ser diferentes, entonces A, B, C y D se pueden escoger de $\binom{9}{4} = 126$ formas diferentes.

Por lo tanto, hay 126 códigos que cumplen las condiciones del enunciado.

Avanzado

Problema #10

¿Cuántos rectángulos hay en la siguiente cuadrícula de 8×8?



Y si la cuadrícula es de $n \times n$, ¿cuántos rectángulos hay?

Solución

Note que para formar un rectángulo se deben escoger dos rectas horizontales y dos rectas verticales.
Hay 9 rectas horizontales y 9 verticales. Por lo tanto hay

$$\binom{9}{2} \times \binom{9}{2} = 36^2 = 1296,$$

rectángulos en la cuadrícula.
Si la cuadrícula es $n \times n$, entonces habrán

$$\binom{n+1}{2} \times \binom{n+1}{2} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

¡GRACIAS!

Universidad
Industrial de
Santander