Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
XIV Olimpiadas Regionales de Matemáticas.
SECUNDARIA-2022.

"Investiga. Pregunta. Encuentra a alguien que haga aquello en lo que estás interesado. Sé curioso."
- Katherine Johnson.

SEGUNDA CAPACITACIÓN

NIVEL MEDIO

8° Y 9°

PROBLEMA 1.

En una veterinaria hay 4 perros y 3 gatos. Al pesar los perros de todas las formas posibles en grupos de dos, los pesos son $34\,kg$, $20\,kg$, $32\,kg$, $28\,kg$, $40\,kg$ y $26\,kg$. Los pesos de los gatos en todas las parejas posibles son $9\,kg$, $8\,kg$ y $7\,kg$. ¿Cuál es la diferencia entre el peso total de los perros y el peso total de los gatos?

PROBLEMA 2.

Si $x - y = 2$ y $x^2 - y^2 = 8$. ¿Cuál es el valor de $2x - 6y$?

PROBLEMA 3.

Para los números reales a y b definimos la siguiente operación:

$$a \bigtriangleup b = \frac{b^2 - 1}{a^2 + 1}.$$

Encuentre el valor de la siguiente expresión:

$$(\ldots(((20 \bigtriangleup 19) \bigtriangleup 18) \bigtriangleup 17) \ldots \bigtriangleup 1)$$

PROBLEMA 4.

Sean a y b dos números reales tales que $ab^{-1} + ba^{-1} = 2$. Determinar el valor numérico de la expresión

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2019} + \left(\frac{b}{a}\right)^{2019}.$$

PROBLEMA 5.

Ana, Brandon y Camila son hermanos. La edad de Ana es

$$A = \sqrt[3]{9\sqrt[3]{9\sqrt[3]{9 \cdots \sqrt[3]{9\sqrt[3]{9\sqrt[3]{27}}}}}},$$

y la edad de Brandon es

$$B = \sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c}}} \times \sqrt{b\sqrt{c\sqrt{a}}} \times \sqrt{c\sqrt{a\sqrt{b}}},$$

donde $a \times b \times c = \sqrt[7]{256}$. Si la edad de Camila es $C = A + B$, ¿cuál será su edad en 8 años?

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.
@edumat.uis

Problema 6.

Determine los valores reales de a, b y c, sabiendo que $ab = 27$, $bc = 6$ y $ac = 8$.

Problema 7.

Si $x^2 - y^2 = 2$ y $\dfrac{y}{x+y} - \dfrac{x}{x-y} = -3$, ¿cuál es el valor de $x^2 + y^2$?

Problema 8.

Sean x, y, z números reales tales que $xy + 1 = 3y$, $yz + 1 = 3z$ y $xz + 1 = 7x$. Determine la suma de todos los valores que puede tomar $x \times y \times z$.

Problema 9.

Sea S el cuadrilátero en el plano, cuyos vértices son los puntos (a, b), (b, a), $(-a, -b)$, $(-b, -a)$; con $0 < b < a$. Si el área de S es 16, ¿cuál es el valor de $a^2 - b^2$?

Problema 10.

Si las dos soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 - 33x + c = 0$ son números primos, ¿cuál es el valor de c?

Problema 11.

Si a y b son las soluciones de la ecuación $2x^2 + 15x + 16 = 0$, determinar el valor de $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

Problema 12.

Si a, b y c son las soluciones de la ecuación $x^3 - 2x^2 - 3x + 8 = 0$, ¿cuál es el valor de $a^2 + b^2 + c^2$?

Problema 13.

Si a, b y c son las soluciones de la ecuación $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$, determinar el valor de $(a+1)(b+1)(c+1)$.

Solucionario
Segunda Capacitación
Nivel Medio
8° y 9°

Solución Problema 1.

Sean p_1, p_2, p_3 y p_4 los pesos de los cuatro perros; g_1, g_2 y g_3 los pesos de los tres gatos. Note que cualquier perro o gato se pesó tres veces, luego la suma de los pesos en parejas dados la podemos expresar como:

$$3(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 34 + 20 + 32 + 28 + 40 + 26 = 180,$$
$$3(g_1 + g_2 + g_3) = 9 + 8 + 7 = 24.$$

De ahí que,

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 60,$$
$$g_1 + g_2 + g_3 = 12$$

Por lo tanto, la diferencia entre el peso total de los perros y el peso total de los gatos es $60 - 12 = 48\,kg$.

Solución Problema 2.

Note que $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 8$, pero $x - y = 2$, entonces $x + y = 4$. Sumando estas dos últimas ecuaciones tenemos que $2x = 6$, esto es $x = 3$ por lo tanto $y = x - 2 = 1$. Así, $2x - 6y = 6 - 6 = 0$.

Solución Problema 3.

Note que $n \triangle 1 = 0$, para cualquier n. De modo que al operar con el último 1 en la expresión del enunciado, obtenemos 0.

Solución Problema 4.

Observe que

$$ab^{-1} + ba^{-1} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = 2.$$

Por lo tanto $a^2 + b^2 = 2ab$, esto es $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 = 0$, de ahí que $a = b$. Así,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2019} + \left(\frac{b}{a}\right)^{2019} = 1^{2019} + 1^{2019} = 2.$$

Solución Problema 5.

Note que $A = 3$ y $B = a^{\frac{7}{8}} b^{\frac{7}{8}} c^{\frac{7}{8}} = (abc)^{\frac{7}{8}} = \left(\sqrt[7]{2^8}\right)^{\frac{7}{8}} = 2$, luego $C = A + B = 5$, por lo tanto, en 8 años Camila tendrá 13 años.

Solución Problema 6.

Usando la simetría de las ecuaciones, tenemos que

$$ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = 27 \times 6 \times 8 = 2^4 \times 3^4,$$

de ahí que $abc = \pm 36$. Así que los posibles valores para (a, b, c) son $\left(\frac{36}{6}, \frac{36}{8}, \frac{36}{27}\right) = \left(6, \frac{9}{2}, \frac{4}{3}\right)$ y $\left(\frac{-36}{6}, \frac{-36}{8}, \frac{-36}{27}\right) = \left(-6, -\frac{9}{2}, -\frac{4}{3}\right)$

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.
@edumat.uis

Solución Problema 7.

Dado que $x^2 - y^2 = 2$, entonces

$$-3 = \frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y} = \frac{y(x-y) - x(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{xy - y^2 - x^2 - xy}{x^2 - y^2} = \frac{-(x^2+y^2)}{2},$$

Por lo tanto $\dfrac{-(x^2+y^2)}{2} = -3$, esto es $x^2 + y^2 = 6$.

Solución Problema 8.

Del enunciado,

$$x + \frac{1}{y} = 3, \qquad y + \frac{1}{z} = 3, \qquad z + \frac{1}{x} = 7.$$

Multiplicando estas expresiones se obtiene:

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right) &= xyz + (x+y+z) + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{xyz},\\ &= 3 \times 3 \times 7 = 63.\end{aligned}$$

Pero,

$$(x+y+z) + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 3 + 3 + 7 = 13.$$

Luego,

$$xyz + 13 + \frac{1}{xyz} = 63.$$

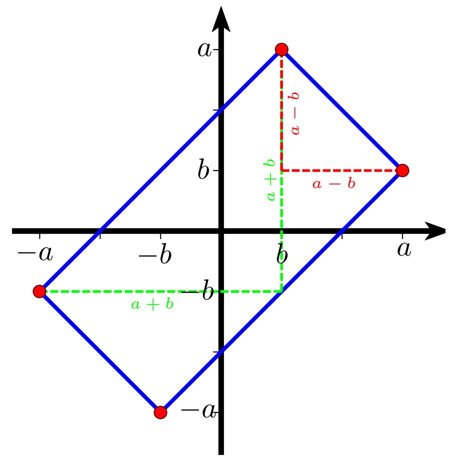
Haciendo $xyz = t$ se tiene:

$$\begin{aligned}t + 13 + \frac{1}{t} &= 63,\\ t^2 - 50t + 1 &= 0.\end{aligned}$$

De ahí que $t = xyz = 25 \pm 4\sqrt{39}$. Por lo tanto, la suma de todos los valores que puede tomar $x \times y \times z$ es 50.

Solución Problema 9.

Considere la siguiente ilustración:



Note que el cuadrilátero es un rectángulo y por el teorema de Pitágoras dos de sus lados adyacentes miden

$$\sqrt{(a-b)^2+(a-b)^2} = \sqrt{2}(a-b),$$
$$\sqrt{(a+b)^2+(a+b)^2} = \sqrt{2}(a+b).$$

Así que su área está dada por:

$$\begin{aligned} 16 &= \sqrt{2}(a-b) \times \sqrt{2}(a+b), \\ 16 &= 2(a-b)(a+b), \\ 16 &= 2(a^2-b^2); \end{aligned}$$

de ahí que $a^2 - b^2 = 8$.

Solución Problema 10.

Sean p y q las soluciones de la ecuación $x^2 - 33x + c = 0$, entonces

$$x^2 - 33x + c = (x-p)(x-q),$$

donde $(-p)(-q) = pq = c$ y $-p - q = -33$. Luego $p + q = 33$, pero p y q son primos, entonces $p = 2$ y $q = 31$, por lo tanto $c = pq = 62$.

Solución Problema 11.

Dado que a y b son las soluciones de la ecuación $2x^2 + 15x + 16 = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 15x + 16 &= 2(x-a)(x-b). \\ &= 2(x^2 - bx - ax + ab), \\ &= 2x^2 - 2x(a+b) + 2ab. \end{aligned}$$

De modo que, igualando coeficientes, se obtiene:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ 15 &= -2(a+b), \\ 16 &= 2ab. \end{aligned}$$

de donde, $a + b = -\dfrac{15}{2}$ y $ab = 8$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab} = \frac{-15/2}{8} = -\frac{15}{16}.$$

Solución Problema 12.

Note que

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc).$$

Además, por el Teorema Fundamental del Álgebra, se tiene que

$$\begin{aligned} x^3-2x^2-3x+8 &= (x-a)(x-b)(x-c), \\ &= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{aligned} -2 &= -(a+b+c), \\ -3 &= ab+ac+bc. \end{aligned}$$

Luego,

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+ac+bc) = 2^2-2(-3) = 10.$$

Solución Problema 13.

Dado que a, b y c son las soluciones de la ecuación $x^3-2x^2+3x-4=0$

$$\begin{aligned} x^3-2x^2+3x-4 &= (x-a)(x-b)(x-c), \\ &= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{aligned} -2 &= -(a+b+c), \\ 3 &= ab+ac+bc, \\ -4 &= -abc \end{aligned}$$

Luego,

$$(a+1)(b+1)(c+1) = abc+(ab+ac+bc)+(a+b+c)+1 = 4+3+2+1 = 10.$$