"la encantadora belleza de este sublime estudio se manifiesta en su completo hechizo solamente a aquellos que tienen el valor de adentrarse en él"
- Carl Friedrich Gauss a Sophie Germain.

SEGUNDA CAPACITACIÓN

NIVEL AVANZADO

10° Y 11°

PROBLEMA 1.

Un colegio de Santander está planeando retornar a clases presenciales de forma alternada. Para ello, a cada estudiante le ofrecen asignarle aleatoriamente 3 días de lunes a viernes para tomar sus clases en las instalaciones. ¿Cuál es el menor número de niños que deben aceptar la propuesta del colegio para que sea seguro que al menos dos de ellos vayan los mismos días a las instalaciones?

PROBLEMA 2.

¿Cuántos números naturales $1 \leq n \leq 99999$ tienen alguno de sus dígitos igual a 1?

PROBLEMA 3.

¿Cuántos números enteros positivos menores que 2021 tienen entre sus cifras al 0, al 1 o al 2?

PROBLEMA 4.

¿Cuántos números capicúas positivos de 6 dígitos divisibles por 33 existen tales que la cifra de las decenas sea múltiplo de 3 y la cifra de las unidades deje residuo 1 al dividirse entre 4?

Nota: Un número es capicúa si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

PROBLEMA 5.

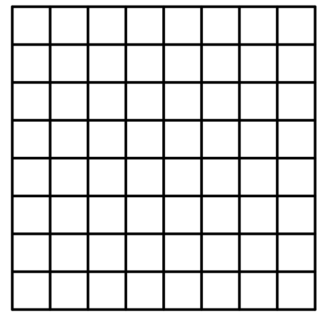
En un supermercado se etiquetan los productos con códigos que son números enteros de 10 dígitos. ¿Cuántos códigos $ABCDEFGHIJ$ cumplen que todos sus dígitos son diferentes y

$$A > B > C > D > E < F < G < H < I < J?$$

Por ejemplo, el código 8652013479 cumple.

Problema 6.

¿Cuántos rectángulos hay en la siguiente cuadrícula de 8×8?



Y si la cuadrícula es de $n \times n$, ¿cuántos rectángulos hay?

Problema 7.

Daniela quiere elegir una clave para el candado de su bicicleta, de modo que la suma de los dígitos sea su edad. Si la clave debe tener 4 dígitos y su edad es 9 años, ¿de cuántas formas puede elegir la clave? Por ejemplo, una clave posible es 0504.

Problema 8.

Sea n un número natural tal que su factorización prima es $n = p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times \cdots \times p_k^{n_k}$, esto es, los p_i son números primos distintos y los n_i son números enteros positivos.

(a) Pruebe que la cantidad de divisores positivos de n está dada por $(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_k+1)$.

(b) Determine el número de divisores positivos de cada uno de los siguientes números:

- 2^5
- 432
- 831.600
- 10^{1000}
- 2020^{2019}
- $20!$

Problema 9.

Una sucesión de números enteros es *radiactiva* si cada término, después del primero se obtiene al dividir el término anterior entre el menor de sus divisores primos. ¿Cuántas sucesiones *radiactivas* tienen su decimotercer término igual a 715?

SCAN ME

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.
@edumat.uis

Solucionario
Segunda Capacitación
Nivel Avanzado
10° y 11°

Solución Problema 1.

Se trata de escoger 3 de 5 días posibles. No importa el orden y no se puede repetir Combinaciones sin repetición.

Tenemos 5 días en donde cada niño podrá ir 3 días, luego el total de posibilidades para que un estudiante asista al plantel es

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

Por el principio de casillas como tenemos 10 posibilidades basta con que 11 niños tomen el nuevo modelo, de esta manera al menos dos de ellos compartirán los días para ir al colegio.

Solución Problema 2.

En este caso conviene contar los que NO tienen al 1 entre sus dígitos, estos son: $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^5$ y restarlos del total de números 99999. Por lo tanto hay $99999 - 9^5 = 40950$ números naturales mayores o iguales que 1 y menores o iguales que 99999 que tienen al 1 entre sus dígitos.

Solución Problema 3.

Hay 2020 enteros positivos menores 2021. Contaremos los que NO tienen entre sus cifras al 0, al 1 o al 2 y restaremos esta cantidad de 2020 para obtener los que cumplen la condición del enunciado.
En efecto, de una cifra hay 7 números enteros positivos menores que 2021 que NO tienen entre sus cifras al 0, al 1 o al 2. De dos cifras hay $7 \times 7 = 49$ de estos números, pues tanto la cifra de la unidades como la de las decenas tiene 7 posibilidades. De tres cifras hay $7 \times 7 \times 7 = 343$ de estos números; y de cuatro cifras no hay.
Por lo tanto, los números que cumplen la condición del enunciado son

$$2020 - 7 - 49 - 343 = 1621.$$

Solución Problema 4.

Si un número es divisible por 33, entonces es divisible por 11 y por 3. Todo número capicúa de 6 dígitos es divisible[a] por 11, pues la suma alternada de sus cifras es $0 = 11 \times 0$. Ahora, para que sea divisible en 3 la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 3, en nuestro caso, como el número es capicúa, se debe cumplir que el número formado por los 3 últimos dígitos sea múltiplo de 3, pues las 3 primeras cifras son iguales a las 3 últimas, y si la suma de los 3 últimos dígitos no es múltiplo de 3, entonces 2 veces dicho valor tampoco es lo es. La cifra de las decenas puede tomar valores del conjunto $\{0, 3, 6, 9\}$, 4 en total. La cifra de las unidades puede tomar valores del conjunto $\{1, 5, 9\}$, para el 1 la cifra de las centenas tiene 3 posibilidades en el conjunto $\{2, 5, 8\}$, para el 5 hay 3 posibilidades en $\{1, 4, 7\}$, y para el 9 hay 4 posibilidades en el conjunto $\{0, 3, 6, 9\}$. De modo que el total de números capicúas que cumplen lo dicho es:

$$(3 \times 4 \times 1) + (3 \times 4 \times 1) + (4 \times 4 \times 1) = 40.$$

[a]Un número es divisible por 11 si y solo si la suma alternada de sus cifras es múltiplo de 11.

Solución Problema 5.

De las condiciones del enunciado se deduce que $E = 0$. Además, como los dígitos de cada código están ordenados, al escoger A, B, C y D, los demás dígitos quedarán determinados. Ahora bien, los dígitos del código deben ser diferentes, entonces A, B, C y D se pueden escoger de $\binom{9}{4} = 126$ formas diferentes.

Por lo tanto, hay 126 códigos que cumplen las condiciones del enunciado.

Solución Problema 6.

Note que para formar un rectángulo se deben escoger dos rectas horizontales y dos rectas verticales.
Hay 9 rectas horizontales y 9 verticales. Por lo tanto hay

$$\binom{9}{2} \times \binom{9}{2} = 36^2 = 1296,$$

rectángulos en la cuadrícula.
Si la cuadrícula es $n \times n$, entonces habrán

$$\binom{n}{2} \times \binom{n}{2} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Solución Problema 7.

Se trata de contar de cuántas formas se puede escribir a 9 como suma de cuatro dígitos (no necesariamente diferentes).
Representamos al 9 con 9 puntitos:

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

y usaremos tres barras para separar los puntos quedando 4 grupos de puntos que representan cada uno un dígito.
Por ejemplo, la clave 0504 se representa por el siguiente arreglo:

$$|\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet||\bullet\bullet\bullet\bullet$$

Otras claves serían:

$$\bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet\bullet|\bullet \longrightarrow 1341,$$

$$\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet| \longrightarrow 2430.$$

Note que en total hay 12 objetos (9 puntos y 3 barras) y cada caso diferente está determinado por la posición de las barras, luego nuestro problema se reduce a contar de cuántas formas podemos ubicar las 3 barras en las 12 posiciones que determinan los objetos y esto se puede hacer de

$$\binom{12}{3} = 220$$

formas diferentes.
Por lo tanto Daniela puede elegir la clave de 220 formas diferentes.

Solución Problema 8.

(a) -

(b) Usando la descomposición prima de cada número y el resultado del ítem (a) tenemos:

- 2^5, tiene $5+1=6$ divisores positivos.
- $432 = 2^4 \cdot 3^3$, tiene $(4+1)(3+1) = 20$ divisores positivos.
- $831600 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$, tiene $(4+1)(3+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 240$ divisores positivos.
- $10^{1000} = (2 \times 5)^{1000} = 2^{1000} \times 5^{1000}$, tiene $(1001)^2$ divisores positivos.
- $2020^{2019} = (2^2 \cdot 5 \cdot 101)^{2019}$, tiene $(2 \cdot 2019 + 1)(2019+1)(2019+1)$ divisores positivos
- $20! = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdots 2 \cdot 1 = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$, tiene $19 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 41040$, divisores positivos.

Solución Problema 9.

Note que cada sucesión queda definida a partir de su término inicial, luego habrán tantas sucesiones como posibilidades hay para el término inicial. Contemos las posibilidades para el término inicial de una sucesión con las características del enunciado.
Dado que $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$, entonces el término inicial será de la forma

$$2^a \cdot 3^b \cdot 5^{c+1} \cdot 11 \cdot 13,$$

donde a, b y c son enteros no negativos y $a+b+c=12$, pues hasta el término 13 se ha dividido este término 12 veces por alguno de sus divisores primos (como se indica en el enunciado) es decir, la suma de los exponentes de sus divisores primos han disminuido 12 unidades.
Así las cosas, se trata de mirar de cuántas formas se puede escribir al 12 como suma de tres números enteros no negativos, esto lo podemos hacer de la siguiente forma:
Representemos al 12 con 12 puntitos:

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

y usaremos dos símbolos $+$ para separar los puntos, quedando 3 grupos de puntos que representan cada uno, un número. Por ejemplo, la suma $1+3+8=12$ se representa así:

$$\bullet + \bullet\bullet\bullet + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

Otras posibles sumas son:

$$+\bullet\bullet\bullet\bullet+\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \longrightarrow 0+4+8=12,$$

$$\bullet\bullet\bullet\bullet++\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \longrightarrow 4+0+8=12,$$

$$\bullet\bullet+\bullet\bullet\bullet\bullet+\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \longrightarrow 2+4+6=12.$$

Note que en total hay 14 objetos (12 puntos y 2 símbolos $+$) y cada caso diferente está determinado por la posición de los $+$, luego nuestro problema se reduce a determinar de cuántas formas podemos ubicar los 2 símbolos $+$ en las 14 posiciones que determinan los objetos, y esto se puede hacer de

$$\binom{14}{2} = 91$$

formas diferentes.[a] Por lo tanto, existen 91 sucesiones diferentes con las características del enunciado.

[a] En general, el número de formas en que se pueden separar n objetos en k categorías está dado por:

$$\binom{\text{objetos } + \text{ categorías } - 1}{\text{categorías } - 1} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

a este método se le conoce como Técnica de separadores.