

ANILLOS Y MÓDULOS GRADUADOS POR GRUPOS

YERLY VANESA SOLER PORRAS

Escuela de Matemáticas

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga.

ALCOM

10 de noviembre de 2017

Resumen

Un resultado bien conocido de los polinomios sobre \mathbb{Z} , es que cualquier polinomio se puede escribir de manera única como una suma de monomios. A diferencia de los polinomios, los monomios tienen la propiedad de que tanto la suma como el producto de estos da como resultado un monomio. Si consideramos una partición sobre los polinomios determinada por el grado de los monomios, notamos que dicha partición satisface la propiedad mencionada anteriormente. Tal tipo de partición puede generalizarse, y la noción general es la de un anillo graduado. En esta charla, introduciremos los siguientes conceptos.

Sea G un grupo multiplicativo con identidad $e \in G$.

1. Un anillo R se dice G -graduado, si existe una familia $\{R_\sigma, \sigma \in G\}$, de subgrupos aditivos R_σ de R , tal que

$$R = \bigoplus_{\sigma \in G} R_\sigma,$$

y además $R_\sigma R_\tau \subseteq R_{\sigma\tau}$ para cada $\sigma, \tau \in G$. Un anillo G -graduado R se dice *fuertemente graduado* por G , si $R_\sigma R_\tau = R_{\sigma\tau}$ para cada $\sigma, \tau \in G$.

2. Si un anillo $R = \bigoplus_{\sigma \in G} R_\sigma$ es G -graduado. Entonces decimos que un R -módulo a izquierda M es G -graduado si existe una familia $\{M_x, x \in G\}$ de subgrupos aditivos M_x de M , tal que

$$M = \bigoplus_{x \in G} M_x,$$

y además $R_\sigma M_x \subseteq M_{\sigma x}$ para cada $\sigma \in G$ y $x \in G$.

Presentaremos algunos resultados tales como:

Teorema Sea $R = \bigoplus_{\sigma \in G} R_\sigma$ un anillo G -graduado. Entonces se tiene que

- (I) $1 \in R_e$ y R_e es un subanillo de R .
- (II) El inverso r^{-1} de un elemento homogéneo $r \in U(R)$ ($U(R)$ denota el conjunto de los inversos multiplicativos de R) también es homogéneo.
- (III) El anillo R es fuertemente graduado si y sólo si $1 \in R_\sigma R_{\sigma^{-1}}$ para todo $\sigma \in G$.

Referencias

- [1] Dade, E.C. *Group Graded Rings and Modules*, Math. Zeitschrift, 174,3 (1980) 241-262.
- [2] Năstăsescu, C., Oystaeyen, F. *Methods of Graded Rings*, Lecture notes in Math, vol. 1836, Springer-Berlin (2004).
- [3] Nystedt, P., Öinert, J., Pinedo, H. *Epsilon-strongly graded rings, separability and semisimplicity*, (preprint).