

# Prueba Final



Octubre 17 de 2010

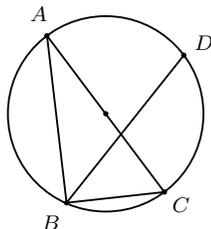
## Nivel Avanzado

Grados 10 y 11

### INSTRUCCIONES PARA LA PRESENTAR LA PRUEBA

1. Asegúrese que el examen y la hoja de respuestas que le entregan corresponde a su nivel.
2. El examen consta de 6 preguntas tipo ensayo (respuesta abierta). Para contestar una pregunta escriba únicamente la respuesta que usted considere es la del problema, si aparece más de una respuesta en la misma pregunta, dicha respuesta se considerará incorrecta.
3. Para la realización del examen solo se necesita lápiz y borrador, por tanto NO se permite el uso de ningún tipo de material adicional (Computadores, celulares, calculadoras, libros, cuadernos, etc).
4. El examen se calificará de la siguiente manera. Cada respuesta tendrá un valor máximo de 6 puntos. Las preguntas sin contestar no tendrán valor.
5. El estudiante no esta autorizado para hacer preguntas durante el examen.
6. Al terminar el examen el estudiante debe devolver al profesor encargado únicamente la HOJA DE RESPUESTAS y puede conservar este temario, sin olvidar marcarla con su nombre, colegio, grado, número de identificación y firma.

1. En la circunferencia que se muestra en la figura, tenemos que:  $AB = 4$ ,  $BC = 2$ ,  $\overline{AC}$  es el diámetro y los ángulos  $\widehat{ABD}$  y  $\widehat{CBD}$  son congruentes. Determine la medida del segmento  $\overline{BD}$ .



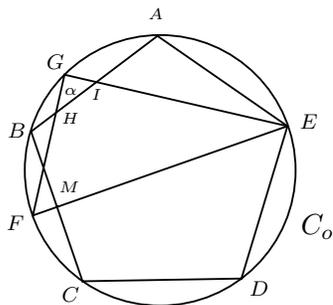
2. Dados los números enteros de 1 a 26, elegir 13 de ellos de modo que:

- a) El número 4 sea uno de los números elegidos.
- b) Ningún número elegido sea divisor de otro número elegido.

3. Sean  $x$  y  $y$  números reales positivos tales que  $x + y = 1$ . Probar que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$$

4. En la siguiente figura, el pentágono regular  $ABCDE$  y el triángulo  $EFG$  están inscritos en la circunferencia  $C_o$  y  $M$  es el punto medio del segmento  $\overline{BC}$ . ¿Cuál es el valor de  $\alpha$  (ángulo  $\widehat{GHI}$ ), en grados, para el cual los triángulos  $EFG$  y  $HIG$  son semejantes?



5. Los número naturales  $a$  y  $b$  son tales que

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$$

es un entero. Demuestre que el máximo común divisor de  $a$  y  $b$  es menor o igual que  $\sqrt{a+b}$ .

6. Se quiere colocar los naturales del 1 al 9 en las casillas de una tabla  $3 \times 3$  (uno en cada casilla), de manera que la suma en cada columna y en cada fila de la tabla sea impar. ¿De cuantas formas se puede hacer esto?



**Universidad Industrial de Santander**  
<http://matematicas.uis.edu.co/olimpiada>  
[olimpiadas@matematicas.uis.edu.co](mailto:olimpiadas@matematicas.uis.edu.co)