Seminario de Álgebra - Grupo ALCOM
Escuela de Matemáticas
Facultad de Ciencias

# Sobre anillos de grupo clean.

Jorge Andrés Rojas Gómez[a] [b] [c]

**Bucaramanga, Colombia** **13 de febrero de 2018**

[a] Áreas de interés: **A**nillos de **G**rupo & **T**ópicos **R**elacionados
[b] `E-m@il address: jarojasg@saber.uis.edu.co`
[c] Director: Prof. Alexander Holguín-Villa

**Resumen:**

Probablemente el concepto de anillo clean aparece por primera vez en el trabajo de W.K. Nicholson *Lifting Idempotents and Exchange Rings* [5]. Su objetivo en ese artículo era probar que un anillo $A$ es un anillo "exchange" si y solo si los elementos idempotentes pueden ser levantados módulo todo ideal a izquierda. Sin más preámbulos damos la definición dada por Nicholson en mencionado artículo:

**Definición 1.** *Un elemento en un anillo es llamado* ***clean*** *si puede ser escrito como la suma de una unidad y de un idempotente del anillo. Un anillo $R$ es* ***clean*** *si todo elemento del anillo es clean.*

**Ejemplo 1.** *El anillo $\mathbb{Z}$ con las operaciones usuales no es clean, aunque tiene elementos clean.*
*Como la ecuación $x = x^2$ en $\mathbb{Z}$ sólo se satisface para $x = 0$ o $x = 1$, entonces sus únicos idempotentes son $0, 1$. Los únicos elementos invertibles en $\mathbb{Z}$ son 1,-1.*
*De la definición, los elementos clean se obtienen al hacer todas las posibles sumas de elementos invertibles con idempotentes.*

$$\begin{aligned} 0 &= (-1) + 1 & \qquad 2 &= 1 + 1 \\ -1 &= (-1) + 0 & \qquad 1 &= 1 + 0. \end{aligned}$$

*Se concluye que los únicos elementos clean en $\mathbb{Z}$ son $\{-1, 0, 1, 2\}$.*

Dado un grupo $G$ y un anillo $R$, deseamos construir un $R$-módulo, teniendo los elementos de $G$ como base, y usando conjuntamente las operaciones de $G$ y $R$ para definir una estructura de anillo sobre él. Denotaremos por $RG$ al siguiente conjunto:

$$RG = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g : \alpha_g \in R \text{ y } \alpha_g \neq 0 \text{ para un número finito de } \alpha_g \right\}.$$

Es fácil verificar que el conjunto $RG$ es un anillo con unidad con las operaciones de suma y producto dadas por:

(+) $\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) + \left(\sum_{g \in G} \beta_g g\right) = \sum (\alpha_g + \beta_g) g,$

$(\cdot)$ $\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right)\left(\sum_{h\in G}\beta_h h\right) = \sum_{g,h\in G}(\alpha_g\beta_h)gh = \sum_{u\in G}c_u u$, donde $c_u = \sum_{gh=u}\alpha_g\beta_h$.

con unidad dada por $1_{RG} = \sum_{g\in G}\alpha_g g$, donde $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_g = 0$, para todo $g \neq 1$. Además, $0_{RG} = \sum_{g\in G} 0_g g$ y $-\alpha = \sum_{g\in G}(-\alpha_g)g$ es el inverso aditivo de $\alpha \in RG$. Notemos que $RG$ tiene estructura de $R$-módulo, con el producto $\mu : R\times RG \to RG$ definido por la expresión:

$$\left(\lambda, \sum_{g\in G}\alpha_g g\right) \overset{\mu}{\mapsto} \sum_{g\in G}(\lambda\alpha_g)g.$$

Si $R$ es un anillo conmutativo tenemos que $RG$ es un $R$-álgebra. En particular, si tomamos $R = \mathbb{F}$ un cuerpo, $\mathbb{F}G$ es un $\mathbb{F}$-álgebra, más aún, $\mathbb{F}G$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.

El conjunto $RG$ con las operaciones anteriormente definidas es llamado el **anillo de grupo del grupo $G$ sobre el anillo $R$**. Además, si $R$ es un anillo conmutativo, entonces $RG$ también es llamado el **álgebra de grupo de $G$ sobre $R$**.

¿Cuando es un anillo de grupo $RG$ clean? En general, la respuesta a esta pregunta no ha sido fácil para los académicos a lo largo de finales del siglo XX hasta la actualidad. Es una pregunta abierta caracterizar todos los anillos $R$ que hagan de $RC_2$, con $C_2$ el grupo cíclico de orden 2, un anillo clean. Como algunos ejemplos importantes de anillos clean son anillos semiperfectos (ver [6], [3]) se ha notado que está propiedad ayuda a decidir cuando cierto tipo de anillos de grupo son clean, a saber, los anillos de grupo $\mathbb{Z}_{(p)}C_n$ con $\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : p \nmid b\right\}$, la localización de los enteros en el primo $p$, y $C_n$ el grupo cíclico de orden $n$. Algunos resultados encontrados en la literatura son:

**Proposición 1.**

- *$RG$ es artiniano si y solo si $R$ es un anillo artiniano y $G$ es un grupo finito.*
- *Si $R$ es un anillo local y $G$ es un $2-$grupo abeliano elemental, entonces $RG$ es clean.*
- *Si $R$ es un anillo semiperfecto y $G$ es el producto directo de un número finito de copias de $S_3$, entonces $RG$ es semiperfecto.*
- *Sea $R$ un anillo semiperfecto y sea $G$ un grupo. Si $(eRe)G$ es clean para todo $e \in R$ idempotente local, entonces $RG$ es clean.*
- *Sea $R$ un anillo semiperfecto y sea $G = H \times K$ donde $H$ es un $2-$grupo abeliano elemental y $K$ es el producto directo de un número finito de copias de $S_3$. Entonces $RG$ es clean.*

Ver [1], [2], [7] y [4] para más información.

La ídea en esta charla es presentar algunos resultados existentes en la literatura, explicando como algunos de ellos están estructurados, comentar acerca de los detalles técnicos que hay detrás de algunos de estos y exponer buena parte de los resultados estudiados acerca de los anillos clean y en particular de los anillos de grupo con esta propiedad.

## Bibliografía


[1] Anderson, D. D. ; Camillo, V. P.: Commutative rings whose elements are a sum of a unit and idempotent. (2002)

[2] Camillo, V. P. ; Yu, H.-P. : Exchange rings, units and idempotents. In: *Communications in Algebra* 22 (1994), Nr. 12, S. 4737–4749

[3] Han, J. ; Nicholson, W. : Extensions of clean rings. In: *Communications in Algebra* 29 (2001), Nr. 6, S. 2589–2595

[4] Immormino, N. A.: *Clean Rings\ & Clean Group Rings*, Bowling Green State University, Diss., 2013

[5] Nicholson, W. K.: Lifting idempotents and exchange rings. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 229 (1977), S. 269–278

[6] Woods, S. : Some results on semi-perfect group rings. In: *Canad. J. Math* 26 (1974), Nr. 1, S. 121–129

[7] Zhou, Y. : On clean group rings. In: *Advances in Ring Theory* (2010), S. 335–345