XI OLIMPIADAS REGIONALES DE MATEMATICAS UIS

Secundaria 2019

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Premio Nacional de Matemáticas

Junio de 2017

Homenaje a

José Oswaldo Lezama Serrano

INFORMES

olimpiadas@matematicas.uis.edu.co

Tel.: 6450301, 6344000 Ext.: 2316, 2583, 2581

Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

ORM Olimpiadas Regionales de Matemáticas

EDUMAT

SEA Sistema de apoyo a la excelencia académica

IPRED Educación interactiva y abierta al liderazgo

Vicerrectoría Académica

Universidad Industrial de Santander

"VIGILADA MINEDUCACIÓN"

Undécimas Olimpiadas Regionales de Matemáticas Secundaria

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga

2019

Elaboración y edición

Grupo Olimpiadas Regionales de Matemáticas - 2019.

Director

Jorge Eliécer Gómez Ríos

Monitores

Cristhian Alejandro González Duarte

Cristhian Daniel Cáceres Garavito

Edson Jair Suárez Porras

Edwin David Valencia Oviedo

Gabriel Moncada Santos

Gerson Leonel Barajas Ávila

Jenifer Tatiana Puentes Correa

Jesús Fernando Carreño Díaz

Johan Sebastián Cortés Villamizar

José Camilo Rueda Niño

Juan Camilo Cala Barón

Juan Camilo Camacho Parra

Leidy Marcela Angarita Celis

Mauricio Jafet Santos

Natalia Stefania Garzón Laguado

Nicolás Luna Chacón

Yzel WIly Alay Gómez Espíndola

Introducción

> *" (...) nuestra educación conformista y represiva parece concebida para que los niños se adapten por la fuerza a un país que no fue pensado para ellos, en lugar de poner el país al alcance de ellos para que lo transformen y engrandezcan. Semejante despropósito restringe la creatividad y la intuición congénitas, y contraría la imaginación, la clarividencia precoz y la sabiduría del corazón, hasta que los niños olviden lo que sin duda saben de nacimiento: que la realidad no termina donde dicen los textos, que su concepción del mundo es más acorde con la naturaleza que la de los adultos, y que la vida sería más larga y feliz si cada quien pudiera trabajar en lo que le gusta, y sólo en eso"*
>
> **Gabriel García Márquez** - Por un país al alcance de los niños.

La Universidad Industrial de Santander, como institución de educación superior del ámbito regional, forma ciudadanos como profesionales integrales, éticos, con sentido político e innovadores; apropia, utiliza, crea, transfiere y divulga el conocimiento por medio de la investigación, la innovación científica, tecnológica y social, la creación artística y la promoción de la cultura, buscando de este modo el fortalecimiento de una sociedad democrática, participativa, deliberativa y pluralista, con justicia y equidad social, comprometida con la preservación del medio ambiente y el buen vivir.

En el marco de esta misión institucional, la Escuela de Matemáticas ofrece a la sociedad santandereana y a la región de influencia de la Universidad, un escenario de alta calidad para el cultivo de las matemáticas, promoviendo entre los integrantes de la comunidad académica una actitud creativa y rigurosa, y construyendo un ambiente académico basado en la solidaridad, la empatía y el reconocimiento de los otros en su dignidad humana. Es por esta razón que, desde sus inicios, la Escuela de Matemáticas se ha comprometido con la educación matemática, no solo por la calidad reconocida a nivel nacional e internacional de los egresados de sus programas académicos de pregrado y posgrado, sino también por su participación activa y crucial en la formación de los estudiantes de otros programas de la Universidad.

Como parte de su responsabilidad académica y su proyección social frente a los diversos retos en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las habilidades matemáticas en el nororiente colombiano, la Escuela de Matemáticas ha diseñado y ejecutado desde el 2009, el proyecto Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (ORM-UIS), para secundaria y primaria, a través del fortalecimiento de las competencias matemáticas de los estudiantes y la capacitación simultánea de los profesores que orientan dichos procesos.

Las ORM-UIS abordan cinco (5) áreas, a saber: i) teoría de números; ii) combinatoria; iii) álgebra, iv) lógica, y v) geometría; y se desarrollan en cinco (5) fases, así:

- **Preparatoria:** En esta fase el proyecto realiza tres talleres gratuitos de capacitación, previos a la fase de clasificación y durante el período de inscripciones. Estos talleres se llevan a cabo en el campus principal de la UIS, Bucaramanga; las sedes regionales de la UIS (Barbosa, Barrancabermeja, Málaga y Socorro) y en la Universidad Francisco de Paula Santander, sede Ocaña, Norte de Santander.

- **Clasificatoria:** En esta etapa participan los estudiantes inscritos, quienes presentan la prueba en su institución educativa según el grado de escolaridad. La prueba consta de problemas de selección múltiple con única respuesta.

- **Selectiva:** En esta prueba participa el $10\,\%$ de los estudiantes inscritos que corresponda a los mejores puntajes de la prueba clasificatoria, quienes presentan la prueba en la sede regional correspondiente según el grado de escolaridad. La prueba consta de problemas de selección múltiple con única respuesta, y problemas tipo ensayo (en donde deben justificarse las respuestas).

- **Final:** A esta instancia sólo clasifican los estudiantes que obtengan en cada nivel los 20 mejores puntajes en la prueba selectiva. La prueba consta de problemas tipo ensayo. Además de la presentación de la prueba final y la ceremonia de clausura del certamen, los finalistas participan en actividades lúdicas organizadas por el Grupo de Investigación en Educación Matemática - EDUMAT.

- **Entrenamiento a estudiantes finalistas:** A estos estudiantes, se les ofrece una preparación especial con el ánimo que participen en otras competencias de matemáticas, a nivel nacional e internacional.

Por otra parte, las ORM-UIS se desarrollan en tres (3) niveles, según el grado de escolaridad de los participantes, tanto de la formación en básica primaria, como la media vocacional, del modo como se muestra en la siguiente tabla:

	Nivel Básico	Nivel Medio	Nivel Avanzado
Primaria	3	4	5
Secundaria	6 y 7	8 y 9	10 y 11

La cartilla que tiene en sus manos reúne los problemas matemáticos propuestos por el equipo de trabajo de las ORM-UIS en las distintas fases de la Undécima versión del certamen, desarrollada durante el primer semestre de 2019, dirigido a estudiantes de educación media vocacional. En esta oportunidad se contó con la participación de 104 colegios, para un total de 5032 estudiantes en competencia, provenientes de 37 municipios de los departamentos de Santander, Norte de Santander y Cesar.

En esta versión las ORM-UIS, como siempre lo hace con alguien en especial, destacó la trayectoria y el amor por las matemáticas del profesor colombiano José Oswaldo Lezama Serrano, quien nos invita a reconocer en el rigor y la exactitud del pensamiento matemático su belleza y utilidad para la vida cotidiana, máxime, en la sociedad tecnológica que habitamos, donde se requieren habilidades para evaluar críticamente la información que producimos y recibimos unos de otros, a través de los medios de comunicación y las redes sociales.

Este documento consta de tres (3) capítulos, cada uno correspondiente a un nivel de la competencia: básico, medio y avanzado. En cada nivel, el lector encontrará los problemas de las tres pruebas y una solución para cada uno de ellos, de las distintas que puede tener cada uno. Por esa razón, el equipo de trabajo de las ORM-UIS, recomienda e incentiva a quien desee enfrentar nuevamente estos problemas, a descubrir y proponer, métodos alternativos de solución que se destaquen por su sencillez, ingenio y belleza matemática. Además, la cartilla contiene (3) anexos. En el anexo A, se proponen algunos ejercicios para quienes deseen potenciar sus habilidades matemáticas. En el anexo B, se exalta la meritoria participación en el certamen, de los estudiantes que alcanzaron un excelente desempeño, y lograron ocupar los cinco (5) primeros puestos en la prueba final de cada uno de los niveles. Finalmente, en el anexo C, se adjuntan los cuadernillos de cada una de las pruebas, por si es el deseo del lector reproducir este material.

La Escuela de Matemáticas, a través del Grupo de Investigación en Educación Matemática de la UIS (EDUMAT), reconoce la labor esencial del maestro en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las competencias matemáticas de los estudiantes, y por ello elabora esta cartilla para su utilización en el aula de clase, que incluye, también, la preparación y discusión creativa entre pares en los espacios de formación docente. Esperamos que los participantes de la educación básica secundaria y media vocacional, los profesores, y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, disfrute tanto como nosotros lo hicimos, el hermoso y milenario ejercicio del pensamiento matemático.

Las ORM-UIS no son una mera competencia, implican una puesta en escena colectiva para que los niños, niñas y adolescentes desplieguen sus capacidades, fortalezcan sus habilidades y se reconozcan como sujetos capaces de enfrentar problemas y solucionarlos. Esto psicológicamente fomenta la autopercepción como sujetos con comprensión de su entorno, y esa es la exigencia que hace hoy la humanidad. Creemos firmemente que allí debemos dirigir todos nuestros esfuerzos, al fortalecimiento de ciudadanías que, gracias al pensamiento crítico que se desarrolla desde el ejercicio matemático, puedan enfrentarse a la diversidad de problemáticas que enfrenta la sociedad actual y que requieren de una mirada no solo crítica, sino, además, creativa para ser solucionadas.

El proyecto ORM- UIS agradece y destaca al grupo de casi $5{,}000$ estudiantes de Santander y Norte de Santander, que participaron de esta versión, y que han demostrado ser capaces de asumir el reto de pensar y sentir problemas sencillos y bellos de matemáticas, con pasión y con rigor.

Índice general

1. Nivel Básico **1**

1.1. Prueba Clasificatoria 1

1.2. Prueba Selectiva 6

1.3. Prueba Final 13

2. Nivel Medio **19**

2.1. Prueba Clasificatoria 19

2.2. Prueba Selectiva 24

2.3. Prueba Final 31

3. Nivel Avanzado **37**

3.1. Prueba Clasificatoria 37

3.2. Prueba Selectiva 44

3.3. Prueba Final 52

A. Ejercicios propuestos **57**

B. Cuadro de Honor **69**

C. Cuadernillos **71**

Capítulo 1

Nivel Básico

1.1. Prueba Clasificatoria

1. Sea x un número natural tal que al resolver y simplificar la expresión

$$\frac{20+x+15+8}{4}$$

se obtiene un número natural, ¿cuál es el residuo que se obtiene al dividir x entre 4?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

Solución: Note que

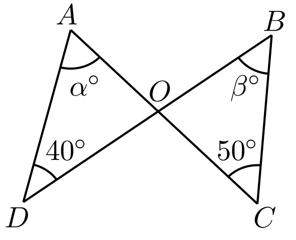
$$\frac{20+x+15+8}{4}=\frac{x+43}{4}.$$

Además, como al simplificar esta fracción se obtiene un número natural, entonces el numerador $x+43$, *debe ser múltiplo del denominador* 4; *esto es* $x+43=4k$; *con* k *un número natural, así:*

$$x=4k-43=4k-44+1=4(k-11)+1.$$

Luego x *es un múltiplo de* 4 *más* 1, *de ahí que* x *deja residuo* 1 *cuando se divide entre* 4.

2. En la siguiente figura los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en O. Si el triángulo BOC es isósceles en O, determine el valor de $\alpha^\circ+\beta^\circ$, considerando la información adicional dada en la gráfica.



(a) 90° (b) 100° (c) 110° (d) 80°

Solución: Dado que el triángulo BOC es isósceles en O, entonces $\measuredangle OBC = \measuredangle BCO = 50°$, esto es $\beta° = 50°$.

Por otra parte, sabemos que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, aplicando este resultado al triángulo BOC, se obtiene que $\measuredangle COB = 80°$.

Finalmente, observe que el ángulo AOD es opuesto por el vértice al ángulo COB, luego $\measuredangle AOD = 80°$. De modo que la medida del tercer ángulo interno del triángulo ADO está dada por $\alpha° = 180° - 40° - 80° = 60°$. Por lo tanto, $\alpha° + \beta° = 60° + 50° = 110°$.

3. ¿Cuál es la cifra de las unidades del producto de los primeros 2019 números primos?

(a) 0 (b) 5 (c) 2 (d) 3

Solución: El producto de los primeros 2019 números primos es múltiplo de 10, puesto que 2 y 5 son factores de este producto. De modo que la cifra de las unidades de este producto es 0.

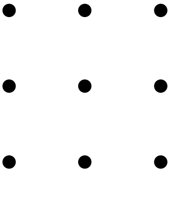
4. En la siguiente figura los puntos son los vértices de una cuadrícula de 2×2. ¿Cuántos cuadrados se pueden construir con vértices en estos puntos?

(a) 6

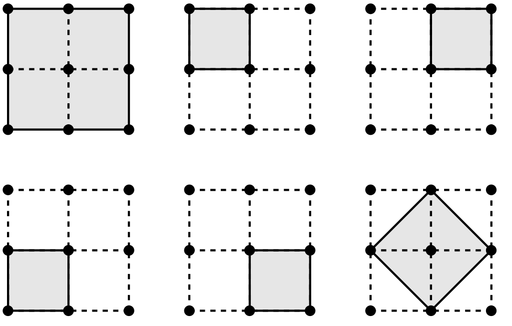
(b) 4

(c) 7

(d) 5



Solución: El número de cuadrados que se pueden construir con vértices en los puntos señalados es 6, *estos son:*



5. La cuarta parte del triple del doble del quíntuple de la tercera parte de un número es 20. ¿Cuál es el número?

(a) 8 (b) $\dfrac{5}{2}$ (c) 100 (d) $\dfrac{1}{18}$

Solución: Sea x el número que se quiere hallar. Del enunciado se tiene que

$$\frac{3\left(2\left(5\left(\frac{x}{3}\right)\right)\right)}{4}=20,$$

Así que, despejando x en la expresión anterior, se encuentra que $x=8$.

6. En el salón de clase de Lucía, las niñas se agrupan de a 3 y los niños, de a 4; sin que sobre alguno. Si en total hay 17 personas en el salón de Lucía, ¿cuántas niñas hay?

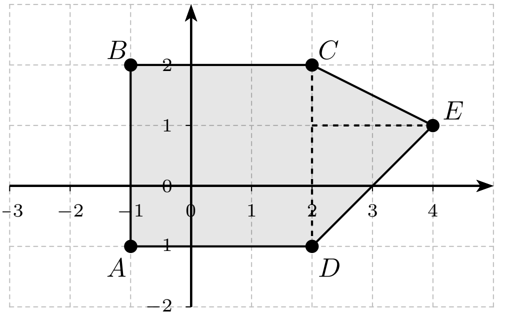
(a) 3 (b) 6 (c) 8 (d) 9

Solución: Sea y el número de grupos de niñas y x el número de grupos de niños. Según el enunciado se tiene que $3y+4x=17$. Como x es un número natural entonces $x\in\{0,1,2,3,4\}$, pero la única posibilidad para que y también sea un número natural es que $x=2$ y en tal caso $y=3$. De modo que el número de niñas en el salón de Lucía es $3\times 3=9$.

7. Sobre el plano cartesiano se marcan los puntos: $A(-1,-1)$, $B(-1,2)$, $C(2,2)$, $D(2,-1)$ y $E(x,1)$. Si el pentágono $ABCED$ tiene 12 unidades cuadradas de área y x es un número natural, ¿cuál es el valor de x?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Solución: Considere la siguiente ilustración



Note que el área del pentágono $ABCED$ corresponde a la suma del área del cuadrado $ABCD$ con el área del triángulo CED. Como el área del cuadrado $ABCD$ es $9\,u^2$ y del enunciado sabemos que el área del pentágono es $12\,u^2$, entonces el área del triángulo CED es $3\,u^2$. Además, la base $\overline{CD}$ de dicho triángulo mide $3\,u$, por lo tanto su altura respecto a esta base es $2\,u$. Así la coordenada x del punto E es $x = 2 + 2 = 4$.

8. Javier tiene clase de lunes a viernes. Él ve matemáticas 3 días de la semana, ciencias 2 días y ningún día tiene las dos materias. ¿De cuántas maneras distintas puede ver Javier estas dos materias en la semana, si siempre las ve en la primera hora de clase?

(a) 2 (b) 3 (c) 10 (d) 15

Solución 1: En total son 10 posibilidades, como se muestra en la siguiente tabla, en la que M denota matemáticas y C ciencias.

Lunes	*Martes*	*Miércoles*	*Jueves*	*Viernes*
M	M	M	C	C
M	M	C	M	C
M	M	C	C	M
M	C	M	M	C
M	C	M	C	M
M	C	C	M	M
C	C	M	M	M
C	M	C	M	M
C	M	M	C	M
C	M	M	M	C

Solución 2: Como Javier ve matemáticas 3 días a la semana y en los demás ve ciencias, entonces el problema consiste en determinar de cuántas formas se puede escoger 3, de entre los 5 días en los que él ve clases; estas formas están dadas por

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10.$$

Nota: También se puede contar de cuántas formas puede ver ciencias 2 de los 5 días de la semana, ya que en los demás ve matemáticas, esto es

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10.$$

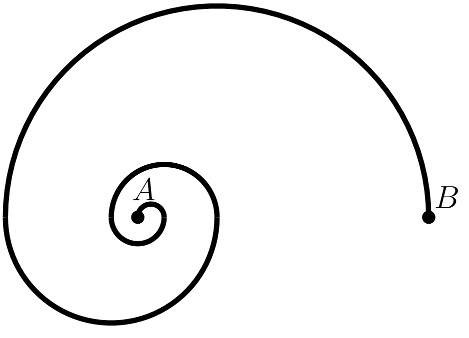
9. En la primera fila de un teatro hay 50 asientos. ¿Cúal es el número mínimo de personas que se deben sentar en la primera fila, para asegurar que hay 6 asientos consecutivos ocupados?

(a) 43 (b) 44 (c) 45 (d) 46

Solución: Considere el “caso extremo” en el que hay 1 asiento vacío en seguida de 5 asientos consecutivos ocupados. Como en la primera fila hay 50 asientos en total, entonces hay 42 asientos ocupados y 8 asientos vacíos. Note que si se sienta una persona más, con seguridad habrá 6 asientos consecutivos ocupados, luego el número mínimo de personas que se deben sentar para ***asegurar*** *que hay 6 asientos consecutivos ocupados es 43.*

1.2. Prueba Selectiva

1. Una hormiga se desplaza desde el punto A hasta el punto B, siguiendo un camino de semicircunferencias cuyo radio se duplica cada vez, como se muestra en la figura. Si la semicircunferencia de menor longitud tiene radio de $1\ cm$, ¿cuál es la distancia recorrida de la hormiga, en centímetros?



(a) 15π (b) 31π (c) 32π (d) 62π

Solución: Como la longitud de una semicircunferencia de radio r *es* $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$, *se tiene que la distancia recorrida por la hormiga está dada por la siguiente suma:*

$$\pi + 2\pi + 4\pi + 8\pi + 16\pi = 31\pi,$$

donde cada uno de los sumandos corresponde a la longitud de cada semicircunferencia que conforma el camino que recorre la hormiga.

2. Jairo se reunió con sus primos para competir entre ellos en un torneo de ajedrez. Como requisito, cada uno debía traer un tablero de ajedrez junto con sus respectivas fichas. Si se contó un total de 56 caballos, ¿cuántas fichas hay, entre peones y reinas?

Nota: *en cada tablero de ajedrez hay dos grupos de fichas (negras y blancas), y en cada grupo de fichas hay* 1 *reina,* 2 *caballos y* 8 *peones.*

(a) 126 (b) 238 (c) 252 (d) 476

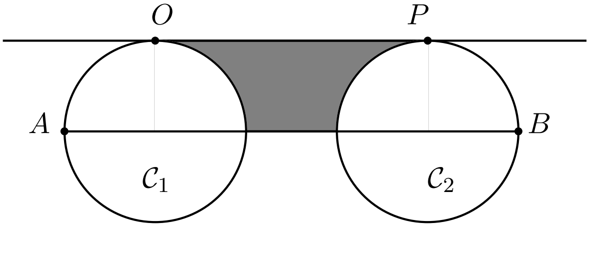
Solución: Dado que en cada tablero de ajedrez hay dos grupos de fichas (negras y blancas), y en cada grupo de fichas hay 1 *reina,* 2 *caballos y* 8 *peones,* *entonces por cada tablero hay en total:* 2 *reinas,* 4 *caballos y* 16 *peones. Si se contó un total de* 56 *caballos, entonces habían* $56 \div 4 = 14$ *tableros, por lo tanto eran* $(14 \times 2) + (14 \times 16) = 252$ *fichas entre reinas y peones.*

3. Pedro quiere conocer las siguientes ciudades: Bogotá, Madrid, Londres, París y Miami. Si Pedro está en Bucaramanga, ¿de cuántas formas se pueden escoger el orden de visita a estas ciudades, teniendo en cuenta que no hay manera de ir de Bucaramanga a Madrid, Londres o París?

(a) 5 (b) 24 (c) 48 (d) 120

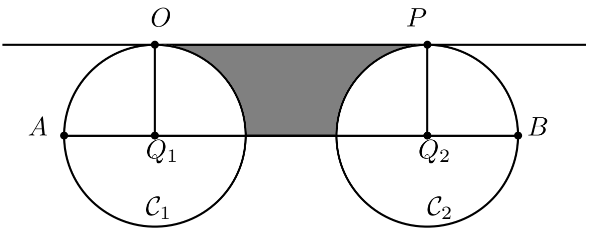
Solución: Estando en Bucaramanga Pedro solo tiene dos opciones para su primer destino: Miami o Bogotá; para su segundo destino, puede escoger alguna de las cuatro ciudades restantes después de haber escogido el primer destino; de esta manera, para su tercer destino tendrá tres opciones; para su cuarto destino, dos opciones y finalmente, en su último viaje tendrá que visitar la ciudad restante. Así que por el principio de multiplicidad, tenemos que el número de formas en que Pedro puede conocer las 5 *ciudades es* $2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$.

4. En la siguiente figura $AB = 10\,cm$ y las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tiene sus centros sobre $\overline{AB}$ y radio $2\,cm$. Si $\overline{OP}$ es tangente a las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en O y P respectivamente, ¿cuál es el valor del área sombreada, en centímetros cuadrados?



(a) $2(6-\pi)$ (b) $4(3-\pi)$ (c) $2(2-\pi)$ (d) $2(10-\pi)$

Solución: Considere la siguiente figura, en la que Q_1 *y* Q_2 *son los centros de los círculos* C_1 *y* C_2 *respectivamente.*

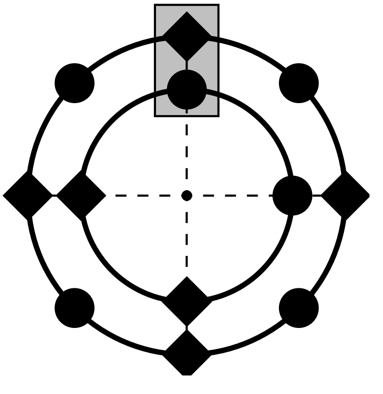


Note que Q_1OPQ_2 es un rectángulo en el que $\overline{Q_1Q_2}$ y $\overline{OP}$ miden $6\,cm$, y $\overline{Q_1O}$ y $\overline{PQ_2}$ miden $2\,cm$, así el área de Q_1OPQ_2 es $6 \times 2 = 12\,cm^2$.

Por otra parte, se observa que el área sombreada corresponde al área del rectángulo Q_1OPQ_2 menos el área de dos cuartos de círculo de radio $2\,cm$, es decir, medio círculo de radio $2\,cm$. Por lo tanto, el área sombreada, en centímetros cuadrados, es

$$12 - \frac{\pi \times 2^2}{2} = 12 - 2\pi = 2(6 - \pi).$$

5. Sobre dos circunferencias concéntricas giratorias se han dibujado círculos y rombos como se muestra en la siguiente figura:



La circunferencia de menor radio gira en el sentido de las manecillas del reloj, mientras la circunferencia de mayor radio lo hace en sentido contrario. Si cada vez que pasa un minuto cada figura ocupa el lugar de su adyacente, despúes de 1 hora, ¿cuántas veces ha sucedido que dentro del rectángulo sombreado hay dos círculos?

(a) 14 $\qquad$ (b) 15 $\qquad$ (c) 20 $\qquad$ (d) 30

Solución: Etiquetando los círculos con 1 *y los rombos con* 2*, cada rueda da una secuencia de números de acuerdo al cambio de figura cada minuto, dentro del rectángulo sombreado, así:*

rueda externa	2	1	2	**1**	2	1	2	**1**	2	1	2	**1**	$\cdots$
rueda interna	1	2	2	**1**	1	2	2	**1**	1	2	2	**1**	$\cdots$

Note que cada 4 *números ocurre que en las dos secuencias hay simultáneamente un* 1*, esto es, cada* 4 *minutos coinciden dentro del rectángulo dos círculos. De modo que en una hora (*60 *minutos), ha sucedido* 15 *veces que dentro del rectángulo hay dos círculos.*

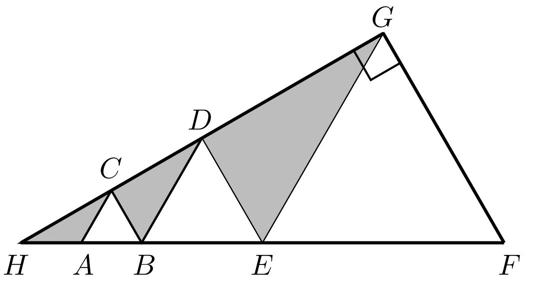
6. El número de estudiantes en un colegio es 248. Si la cantidad de niños está entre 40 y 150 y es múltiplo de 7, y la cantidad de niñas es múltiplo de 13, ¿cuál es la diferencia entre el número de niñas y el número de niños?

(a) 220 (b) 144 (c) 53 (d) 38

Solución: Dado que el total de estudiantes del colegio es 248*, y la cantidad de niñas es un múltiplo de* 13*, se resta de* 248 *cada múltiplo de* 13 *y de estos resultados se observa cuál es un múltiplo de* 7 *que se encuentre entre* 40 *y* 150*. Siguiendo este procedimiento se encuentra que el número de niñas es* $13 \times 11 = 143$ *y el número de niños es* $248 - 143 = 105 = 7 \times 15$*. De modo que la diferencia entre el número de niñas y el número de niños es* 38.

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

7. En la siguiente figura, los triángulos ABC, BED y EFG son equiláteros. Además $HA = AB = 1\,cm$, $BE = 2\,cm$, $EF = 4\,cm$ y $\overline{HG} \perp \overline{GF}$. ¿Determine la medida del perímetro de la región sombreada?



Solución: Note que el perímetro P de la región sombreada (en centímetros), está dado por

$$\begin{aligned}P &= HA + AC + CB + BD + DE + EG + HG,\\ &= 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 4 + HG,\\ &= 11 + HG.\end{aligned}$$

Además, el triángulo HGF es rectángulo en G, así, por el Teorema de Pitágoras se tiene que

$$HG = \sqrt{(HF)^2 - (GF)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}.$$

Por lo tanto $P = 11 + 4\sqrt{3}\,cm$.

8. David, Santiago, Felipe y José salieron de su clase de atletismo y fueron a una frutería. Las peras y manzanas que pidieron los cuatro amigos en la frutería sumaban 15, pero el número de peras excedía en 5 al número de manzanas. Además, el total de uvas pedidas por los cuatro amigos era 13 y aunque David y Felipe no pidieron manzanas, cada uno pidió el doble de uvas que Santiago. Si Felipe pidió 5 peras, José pidió 2 manzanas, 1 pera y a uvas, David pidió 3 peras, Santiago pidió b manzanas y c uvas, y dos personas pidieron la misma cantidad de frutas, ¿cuál es el valor de $a \times b \times c$?

Solución: En la siguiente tabla se resume la información dada en el enunciado.

	Peras	*Manzanas*	*Uvas*	*Total*
David	3	0	$2c$	$3+2c$
Felipe	5	0	$2c$	$5+2c$
Santiago		b	c	$b+c$
José	1	2	a	$3+a$
Total	10	5	13	

De la tabla se puede deducir que $b = 3$ *y que Santiago pidió* 1 *pera, además que* $5c + a = 13$. *Ahora, si* $c = 0$, *entonces* $a = 13$ *y en este caso no tendríamos dos personas con el mismo número de frutas. Si* $c = 1$, *tenemos* $a = 8$ *y* $a \times b \times c = 8 \times 3 \times 1 = 24$. *Si* $c = 2$, *entonces* $a = 3$ *y* $a \times b \times c = 3 \times 3 \times 2 = 18$.

9. ¿Cuántos números naturales de 6 cifras son múltiplos de 15 y se leen igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda?

Solución: Note que un número con las condiciones del enunciado tiene la forma abccba, con a, b *y* c *dígitos; y es múltiplo de* 15, *esto es, múltiplo de* 3 *y de* 5. *Por ser múltiplo de* 5, *se deduce que* $a = 5$; *además, por ser múltiplo de* 3, *la suma de sus cifras* $2(5 + b + c)$ *es múltiplo de* 3, *esto es* $5 + b + c$ *es múltiplo de* 3. *De modo que* $(b + c) \in \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$. *Veamos las posibilidades:*

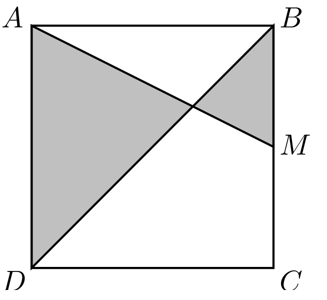
- $b+c=1 \Rightarrow \begin{cases} b=0, & c=1 \\ b=1, & c=0 \end{cases}$
- $b+c=4 \Rightarrow \begin{cases} b=0, & c=4 \\ b=4, & c=0 \\ b=1, & c=3 \\ b=3, & c=1 \\ b=2, & c=2 \end{cases}$
- $b+c=7 \Rightarrow \begin{cases} b=0, & c=7 \\ b=7, & c=0 \\ b=1, & c=6 \\ b=6, & c=1 \\ b=2, & c=5 \\ b=5, & c=2 \\ b=3, & c=4 \\ b=4, & c=3. \end{cases}$
- $b+c=10 \Rightarrow \begin{cases} b=1, & c=9 \\ b=9, & c=1 \\ b=2, & c=8 \\ b=8, & c=2 \\ b=3, & c=7 \\ b=7, & c=3 \\ b=4, & c=6 \\ b=6, & c=4 \\ b=5, & c=5. \end{cases}$
- $b+c=13 \Rightarrow \begin{cases} b=4, & c=9 \\ b=9, & c=4 \\ b=5, & c=8 \\ b=8, & c=5 \\ b=6, & c=7 \\ b=7, & c=6. \end{cases}$

- $b + c = 16 \Rightarrow \begin{cases} b = 7, & c = 9 \\ b = 9, & c = 7 \\ b = 8, & c = 8. \end{cases}$

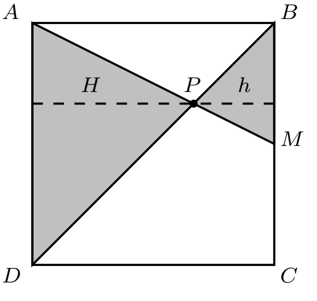
De modo que en total son 33 *los números que cumplen las condiciones del enunciado.*

1.3. Prueba Final

1. En la siguiente figura $ABCD$ es un cuadrado. Si M es el punto medio del segmento $\overline{BC}$, determine la fracción del área del cuadrado que representa el área sombreada.



Solución 1: En la siguiente figura, P es la intersección de los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{DB}$. Las alturas de los triángulos BPM y APD con respecto a las bases $\overline{BM}$ y $\overline{AD}$, se denotan por h y H respectivamente.



Sea L la longitud del lado del cuadrado, entonces $H + h = L$. Además, note que los triángulos APD y MPB son semejantes, entonces

$$\frac{H}{h} = \frac{AD}{BM} = \frac{L}{L/2} = 2,$$

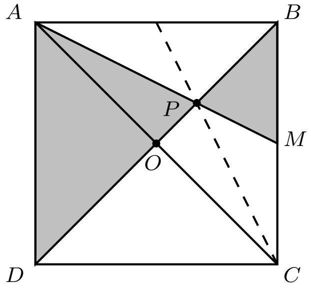
luego $H = 2h$. Así, $H = 2(L - H) = 2L - 2H$, de donde $3H = 2L$, esto es, $H = \dfrac{2L}{3}$.
Por otro lado, note que la fracción del área del cuadrado que representa el área sombreada está dada por

$$\frac{\dfrac{L \times H}{2} + \dfrac{(L/2) \times h}{2}}{L^2} = \frac{\dfrac{L}{2}\left(H + \dfrac{h}{2}\right)}{L^2} = \frac{L}{2L^2}\left(\frac{2H + h}{2}\right) = \frac{2H + h}{4L}.$$

Ahora, dado que $H + h = L$, se tiene que

$$\frac{2H + h}{4L} = \frac{H + L}{4L} = \frac{2L/3 + L}{4L} = \frac{5}{12}.$$

Solución 2: Considere la siguiente figura



Note que el área del triángulo AOD es $\frac{1}{4}$ del área del cuadrado. Por otro lado, dado que las tres medianas de un triángulo dividen al triángulo en 6 triángulos con igual área[1]*, se deduce que el área del triángulo APO y el área del triángulo BPM corresponden, cada una, a $\frac{1}{6}$ del área del triángulo ABC, es decir, $\frac{1}{12}$ del área del cuadrado $ABCD$. Por lo tanto, la fracción del área del cuadrado que representa el área sombreada es*

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

2. El promedio de las edades de un grupo de personas es 15. Si llega un nuevo miembro al grupo cuya edad es 20 y el promedio se eleva a 16, ¿cuántas personas había inicialmente en dicho grupo?

Solución 1: Sea n el número de personas que había inicialmente en dicho grupo. Del enunciado, si llega un nuevo miembro cuya edad es 20 años el promedio se eleva a 16, esto es

$$\frac{15n + 20}{n + 1} = 16.$$

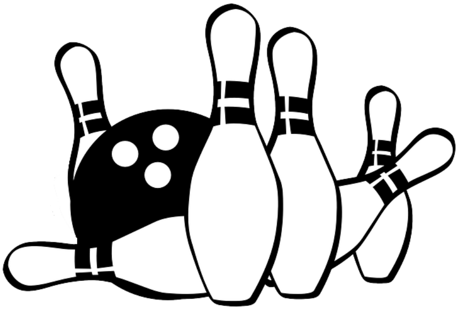
[1]Ver el ejercicio 2 del Nivel Avanzado en el Apéndice A.

Despejando n de la ecuación anterior, se tiene que $15n + 20 = 16(n + 1)$, luego $n = 4$, por lo que 4 era el número de personas que había inicialmente en el grupo.

Solución 2: Al llegar el nuevo miembro con 20 años el promedio de edad aumenta en 1, entonces los 4 años que tiene esta persona por encima del nuevo promedio, deben distribuirse sumando un año a cada uno de los miembros iniciales, es decir, inicialmente había 4 personas.

3. María y Paula juegan a los bolos en su casa, con una pelota y 6 pinos. Cada una realiza 7 lanzamientos, de tal forma que después de cada lanzamiento se vuelven a levantar los pinos.

Si el número total de pinos tumbados por Paula es un número primo tal que el producto de sus cifras coincide con el número de pinos tumbados por María, y el número de pinos tumbados por María tiene 6 divisores positivos, ¿cuántos pinos en total tumbaron las dos niñas?



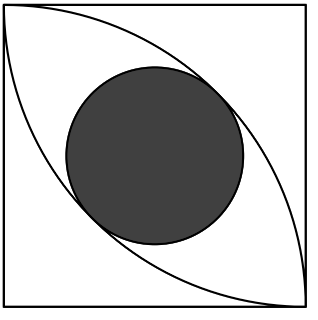
Solución: Note que el número máximo de pinos que pudo tumbar Paula es $7 \times 6 = 42$ y los números primos menores que 42 son:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41.$$

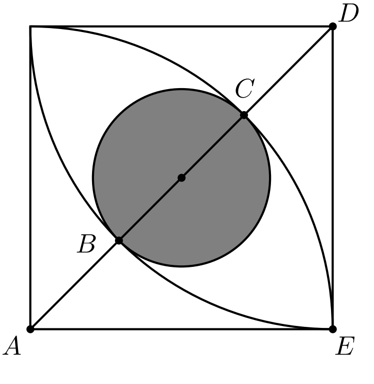
Sabiendo que el número de pinos tumbados por Paula es un número primo tal que el producto de sus cifras coincide con el número de pinos tumbados por María, y el número de pinos tumbados por María tiene 6 divisores positivos; de la lista anterior se descartan los números del 2 al 19 y el 31, pues el producto de sus cifras es un número primo (tiene solo dos divisores) o es 1

(solo tiene un divisor). De los restantes números en lista, se observa que solo el 29 *cumple las condiciones para el número de pinos tumbados por Paula. Así, el número de pinos tumbados por las dos niñas es* $29 + 18 = 47$.

4. La siguiente figura muestra el diseño de una baldosa, que se ha construido a partir de un cuadrado de lado l y dos cuartos de circunferencia, cada uno con centro en un vértice del cuadrado y radio l. Determine el área del círculo sombreado en la figura, sabiendo que este es tangente a los dos cuartos de circunferencia.



Solución: Considere la siguiente figura, en la que B *y* C *son los puntos de tangencia del círculo sombreado y los cuartos de circunferencia. El lector debe probar que los puntos* A, B, C, D, *y el centro del círculo sombreado son colineales.*



Como el triángulo ADE *es rectángulo en* E, *del Teorema de Pitágoras, se sigue que*

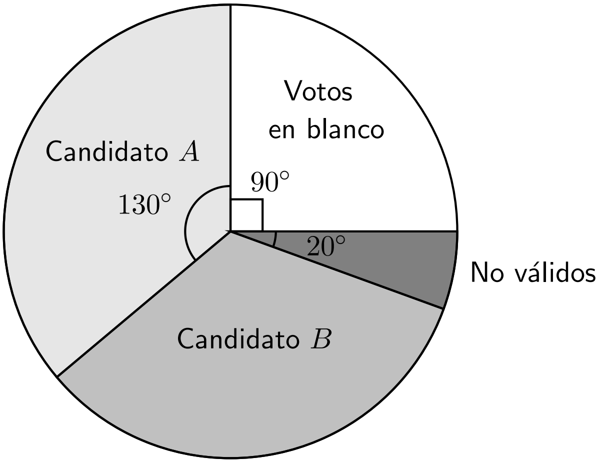
$$AD = \sqrt{(AE)^2 + (DE)^2} = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}.$$

Además, observe que

$$AB = CD = AD - AC = l\sqrt{2} - l,$$
$$BC = AC - AB = l - \left(l\sqrt{2} - l\right) = l\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

Finalmente, como $\overline{BC}$ es el diámetro del círculo sombreado, entonces su área, en unidades cuadradas, está dada por $\pi\left(\dfrac{l\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}\right)^2$.

5. El siguiente gráfico ilustra los resultados de las elecciones de alcalde en un pueblo con 10.000 habitantes.



Si el $54\,\%$ de los habitantes participaron de las elecciones, determine el número de personas que votaron por el candidato ganador.

Solución: Del gráfico se deduce que el ángulo barrido por el sector circular correspondiente al candidato B, mide $360° - 130° - 90° - 20° = 120°$. *Por lo que el candidato ganador es A. Además, el* $54\,\%$ *de los* 10.000 *habitantes corresponde a* 5.400 *personas, que es la cantidad de electores para alcalde. De ahí que el número de votos que obtuvo A es*

$$5.400 \times \frac{130}{360} = 1.950.$$

6. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, y 5, ¿cuántos números de 5 cifras diferentes se pueden formar que sean múltiplos de 3?

Solución: Un número es divisible por 3 *si la suma de sus cifras es un múltiplo de* 3; *por lo tanto, las cifras de los números que cumplen las condiciones del enunciado deben pertenecer al conjunto* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; *o bien al conjunto* $\{0, 1, 2, 4, 5\}$. *Por el principio multiplicativo, con los dígitos* $1, 2, 3, 4, 5$ *podemos formar* $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ *números que satisfacen las condiciones del problema; mientras que con los dígitos* $0, 1, 2, 4, 5$; *podemos formar* $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$, *puesto que el dígito* 0 *no puede estar en la cifra de las decenas de mil. De modo que, en total hay* $120 + 96 = 216$ *números con las condiciones dadas.*

Capítulo 2

Nivel Medio

2.1. Prueba Clasificatoria

1. Dos equipos de fútbol se han enfrentado 45 veces. El $20\,\%$ de los partidos jugados han terminado en empate. Si el total de victorias de uno de los equipos triplica las victorias del otro , ¿cuántas victorias de diferencia hay entre los dos equipos?

(a) 9 (b) 18 (c) 27 (d) 36

Solución: El $20\,\%$ de 45 es $45 \times 0.2 = 9$, luego 9 partidos han terminado en empate. Sea x el número total de victorias del equipo A y y el número total de victorias del equipo B. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el equipo A es quien ha tenido más victorias, entonces

$$\begin{aligned} x + y &= 45 - 9 = 36, \qquad \text{y además,} \\ x &= 3y. \end{aligned}$$

De modo que $y = 9$ y $x = 27$, luego las victorias de diferencia entre los dos equipos son $27 - 9 = 18$.

2. Una rueda de $0{,}25$ metros de radio se desplaza sin deslizarse por un camino recto. Si la rueda ha dado 8 vueltas, ¿cuál es la distancia que ha recorrido?

(a) 2π metros (b) 4π metros (c) 8π metros (d) 16π metros

Solución: Longitud de la circunferencia de la rueda, en metros, está dada por $2\pi \times 0.25 = 0.5\pi$. *Como la rueda ha dado 8 vueltas, entonces la distancia que ha recorrido la rueda, en metros, es* $8 \times 0.5\pi = 4\pi$.

3. Si $x = 2$ es una raíz del polinomio

$$P(x) = 3x^3 - 2ax - 4,$$

es decir $P(2) = 0$; ¿cuál es el valor de $P(1)$?

(a) -11 (b) -4 (c) 0 (d) 5

Solución: Sea $P(x) = 3x^3 - 2ax - 4$. *Sabemos que* $P(2) = 0$, *es decir que,* $P(2) = 3(2)^3 - 2a(2) - 4 = 0$. *Lo cual implica que* $a = 5$. *De esta manera,* $P(1) = 3(1)^3 - 10(1) - 4 = -11$.

4. Pepe quiere descubrir la contraseña del internet de su vecino, él sabe de la clave que:

- tiene 5 caracteres (letras o números).
- inicia y termina en vocal
- los tres caracteres centrales son números cuya suma es par.
- se lee igual tanto de derecha a izquierda, como de izquierda a derecha.

¿Cuántas contraseñas cumplen con estas condiciones?

(a) 5^5 (b) 5^4 (c) 250 (d) 125

Solución: La clave tiene 5 *caracteres e inicia en vocal, esto es, para el primer caracter hay* 5 *posibilidades, pero como se lee igual de derecha a izquierda que izquierda a derecha, entonces una vez se elige el primer caracter queda determinado el último, puesto que es el mismo.*

Por otra parte, como los tres dígitos centrales suman un número par, entonces estos deben ser tres dígitos pares o bien dos impares y uno par. Veamos los dos casos:

- *Si los tres dígitos centrales son pares, por lo anterior y teniendo en cuenta que el segundo dígito debe coincidir con el penúltimo, del principio multiplicativo se tienen* $5\times5\times5\times1\times1 = 125$ *claves que cumplen las condiciones.*

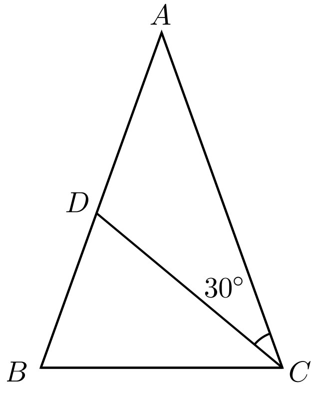
$$\underbrace{5}_{a,e,i,o,u} \times \underbrace{5}_{0,2,4,6,8} \times \underbrace{5}_{0,2,4,6,8} \times \underbrace{1}_{Igual\ al\ 2^\circ} \times \underbrace{1}_{Igual\ al\ 1^\circ} = \underbrace{125}_{claves}$$

- *Análogamente, si dos de los dígitos centrales son impares y uno par, por el principio multiplicativo se tienen* $5 \times 5 \times 5 \times 1 \times 1 = 125$ *claves que cumplen las condiciones.*

$$\underbrace{5}_{a,e,i,o,u} \times \underbrace{5}_{1,3,5,7,9} \times \underbrace{5}_{0,2,4,6,8} \times \underbrace{1}_{Igual\ al\ 2^\circ} \times \underbrace{1}_{Igual\ al\ 1^\circ} = \underbrace{125}_{claves}$$

De modo que en total son 250 *contraseñas que cumplen las condiciones.*

5. En la siguiente figura los triángulos ABC y BCD son isósceles en A y en C respectivamente. Si el ángulo ACD mide $30°$, ¿cuál es la medida del ángulo BDC?



(a) $70°$ (b) $50°$ (c) $30°$ (d) $40°$

Solución: Puesto que los triángulos ABC *y* BCD *son isósceles en* A *y en* C *respectivamente, entonces* $\measuredangle CBA = \measuredangle ACB$ *y* $\measuredangle CBD = \measuredangle BDC$. *Además, observe que* $\measuredangle ACB = \measuredangle DCB + 30°$ *y* $\measuredangle CBA = \measuredangle CBD$. *Luego, sumando los ángulos internos del triángulo* BCD, *se tiene que*

$$\measuredangle CBD + \measuredangle BDC + \measuredangle DCB = 180°.$$

Pero por las igualdades anteriores,

$$\measuredangle BDC + \measuredangle BDC + (\measuredangle BDC - 30^\circ) = 180^\circ.$$

De esta manera, $3(\measuredangle BDC) = 210^\circ$ *y así* $\measuredangle BDC = 70^\circ$.

6. Tristán escribió en su cuaderno tres números diferentes menores que 50 y de dos cifras. Luego notó que su máximo común divisor es 6 y su mínimo común múltiplo es 120. ¿Cuál es la diferencia positiva entre el mayor de los números y el menor de los números?

(a) 30 (b) 18 (c) 12 (d) 6

Solución: Los tres números deben ser múltiplos de 6*, de dos cifras y menores que* 50*. Con estas condiciones encontramos los números* 12, 18, 24, 30, 36, 42 *y* 48*. Como el mínimo común múltiplo de los tres números es* 120*, se concluye que los números deben ser divisores de* 120*, por tanto los números que escribió Tristán en su cuaderno son* 12, 24 *y* 30*. De esta manera la diferencia positiva entre el mayor y el menor de los números es* $30-12=18$.

7. Pedro suma 10 números enteros y al dividir el resultado entre 5 encuentra que el residuo es 3. Si ahora suma los inversos aditivos de dichos números, ¿cuál es el residuo de dividir este resultado entre 5?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

Solución: Sea S *la suma de los diez números enteros. Como* S *deja residuo* 3 *cuando se divide entre* 5*, entonces* $S = 5k+3$*, con* k *un número entero. Note que la suma de los inversos aditivos de estos números es* $-S$*, y además,*

$$-S = -5k - 3 - \mathbf{2} + \mathbf{2} = 5(-k-1) + \mathbf{2}.$$

Por lo tanto, el residuo que deja al dividirse $-S$ *entre* 5 *es* 2.

8. Bob el constructor colocó una escalera dañada apoyada a un muro, de tal forma que el punto donde se toca con el muro está a 12 metros del suelo y el punto donde toca el suelo está a 5 metros de la base del muro. Cada 50 centímetros la escalera tiene un peldaño, pero cada dos peldaños el siguiente está roto. Si los dos primeros peldaños no están rotos, ¿cuántos peldaños no están rotos?

Nota: Tenga en cuenta que el primer peldaño de la escalera está a $50\ cm$ del punto de apoyo en el suelo y el último peldaño, a $50\ cm$ del punto de apoyo en el muro.

(a) 8 (b) 13 (c) 16 (d) 17

Solución: Del Teorema de Pitágoras se tiene que la longitud de la escalera es $\sqrt{5^2+12^2}=13$ *metros. Como cada* $50\,cm$ *hay un peldaño, si no estuviese dañada, la escalera tendría* 25 *peldaños, pero como cada dos hay uno roto, solo* 17 *están en buen estado.*

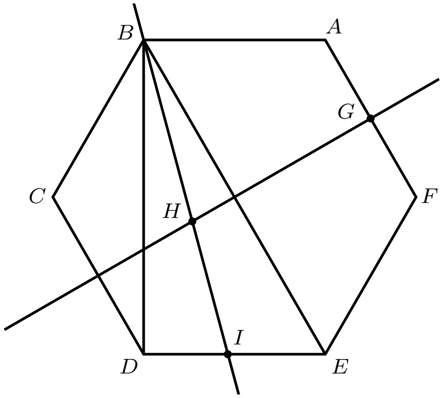
9. Las edades del papá, la mamá y tres hijos suman 135 años. Si todos tienen edades diferentes, múltiplos de 5 y la diferencia de edades entre el menor de los padres y el mayor de los hijos no es menor que 20, ¿cuál es la mayor edad que puede tener el menor de los hijos?

(a) 5 años (b) 10 años (c) 15 años (d) 20 años

Solución: El menor de los hijos podría tener 0 *o* 5 *años y las edades de los demás miembros de la familia podrían establecerse cumpliendo las condiciones del enunciado. El menor de los hijos también podría tener* 10 *años, sus hermanos* 15 *y* 20 *y los padres podrían tener* 40 *y* 50*. Sin embargo, note que si el menor de los hijos tuviese* 15 *años, los hermanos como mínimo podrían tener* 20 *y* 25 *años haciendo que las edades de los padres sumen exactamente* 75 *años, lo cual no es posible de acuerdo a las condiciones del enunciado, pues el menor de los padres debería tener* 45 *años. Por lo tanto, la mayor edad que puede tener el menor de los hijos es* 10 *años.*

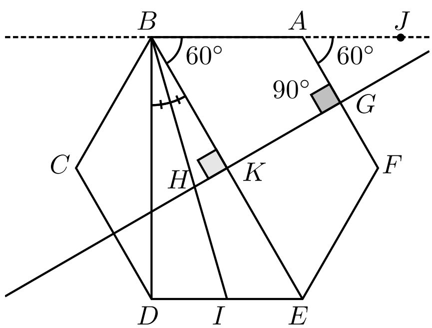
2.2. Prueba Selectiva

1. En la siguiente figura $ABCDEF$ es un hexágono regular. Si $\overline{GH}$ es la mediatriz del segmento $\overline{AF}$ y $\overline{BI}$ es la bisectriz del ángulo DBE, ¿cuál es la amplitud del ángulo IHG?



(a) $115°$ (b) $110°$ (c) $105°$ (d) $75°$

Solución 1: Considere la siguiente figura, en la que se ha punteado la prolongación del segmento $\overline{AB}$.



Dado que el hexágono $ABCDEF$ es regular, sus ángulos internos miden $120°$ cada uno, de modo que $\measuredangle BAG = \measuredangle CBA = 120°$; luego $\measuredangle GAJ = \measuredangle KBA = 60°$; esto muestra que los segmentos $\overline{BE}$ y $\overline{AF}$ son paralelos. Además, la transversal $\overline{GH}$, de los segmentos $\overline{BE}$ y $\overline{AF}$, es la mediatríz del segmento $\overline{AF}$, entonces $\measuredangle AGH = \measuredangle BKH = 90°$.

Por otro lado, el triángulo DCB *es isósceles en* C *y* $\measuredangle DCB = 120°$, *luego* $\measuredangle CBD = 30°$, *de ahí que* $\measuredangle DBE = 120° - 30° - 60° = 30°$, *y como* $\overline{BI}$ *es la bisectríz del ángulo* DBE, *entonces* $\measuredangle IBE = 15°$.

Finalmente, como las medidas de los ángulos internos de todo triángulo suman $180°$, *se tiene que* $\measuredangle KHB = 180° - 90° - 15° = 75°$ *y por lo tanto la amplitud del ángulo* IHG *es* $180° - 75° = 105°$.

Solución 2: Sabiendo que la suma de las medidas de los ángulos internos de un pentágono es $540°$, *se deduce que*

$$\measuredangle IHG + \measuredangle HGF + \measuredangle GFE + \measuredangle FEI + \measuredangle EIH = 540°.$$

Además, como el hexágono $ABCDEF$ *es regular se tiene que* $\measuredangle GFE = \measuredangle FEI = 120°$, $\measuredangle DBE = 30°$, $\angle BED = 60°$; *y como* $\overline{GH}$ *es la mediatríz de* $\overline{AF}$, $\measuredangle HGF = 90°$.

Por otro lado, dado que $\overline{BI}$ *biseca el ángulo* DBE, *entonces* $\measuredangle IBE = 15°$. *de ahí que* $\measuredangle EIB = 180° - 60° - 15° = 105°$.

Finalmente, de la primera igualdad se obtiene

$$\measuredangle IHG + 90° \ + 120° \ + 120° \ + 105° \ = \measuredangle IHG + 435° = 540°,$$

esto es $\measuredangle IHG = 105°$.

2. El 31 de agosto de 2019 es un sábado. ¿Cuántos años deben pasar para que el 31 de agosto sea nuevamente un sábado?

Nota: *el año bisiesto más cercano es el* 2020.

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

Solución: Puesto que el año 2020 *es bisiesto,* 366 *días después del* 31 *de agosto de* 2019, *vuelve a ser* 31 *de agosto, pero del año* 2020. *Además, como cada semana tiene* 7 *días, entonces* $366 = 52 \times 7 + \mathbf{2}$ *días, equivalen a* 52 *semanas y* 2 *días, es decir, el* 31 *de agosto del año* 2020 *será un lunes (dos días después del sábado).*

El año 2021 *tiene* $365 = 52 \times 7 + \mathbf{1}$ *días. Luego el* 31 *de agosto del* 2021 *será un martes (un día después del lunes). Análogamente, se deduce que el* 31 *de* *agosto del 2022, será un miércoles; del 2023 será un jueves, y del 2024, un sábado, pues el año 2024 será bisiesto.*

Por lo tanto deben pasar 5 años, para que el 31 de agosto sea nuevamente un sábado.

3. Si el doble de la edad de Laura menos la edad de Juan es divisible por 3, es correcto afirmar que

(a) la edad de Laura y la edad de Juan son múltiplos de 3.

(b) la edad de Laura y la edad de Juan son números impares.

(c) la edad de Juan es un número impar.

(d) la suma de sus edades es múltiplo de 3.

Solución: Supongamos que la edad de Juan es un número n, y que la edad de Laura, m. Del enunciado se tiene que $2m - n = 3k$, donde k es un número entero. Equivalentemente $2m = 3k + n$, sumando m en ambos miembros de la igualdad se obtiene $3m = 3k + n + m$, por lo tanto $m + n = 3(m - k)$, esto es, la suma de las edades de Juan y Laura es múltiplo de 3. Es fácil, mostrar que las demás afirmaciones son falsas, tomando, por ejemplo, $m = 4$ y $n = 2$.

4. ¿Cuántos números naturales de tres cifras son múltiplos de 5 y la suma del dígito de las decenas con el dígito de las centenas también es múltiplo de 5?

(a) 14 (b) 28 (c) 18 (d) 36

Solución: Los múltiplos de 5 terminan en 0 o 5; luego los números que cumplen las condiciones del enunciado tienen la forma $ab5$ o $ab0$, con $a + b$ múltiplo de 5. Contemos los números de la forma $ab5$ con $a + b$ múltiplo de 5, a y b dígitos.

- *Si $a = 1$, entonces $b \in \{4, 9\}$*
- *Si $a = 2$, entonces $b \in \{3, 8\}$*
- *Si $a = 3$, entonces $b \in \{2, 7\}$*
- *Si $a = 4$, entonces $b \in \{1, 6\}$*
- *Si $a = 5$, entonces $b \in \{0, 5\}$*
- *Si $a = 6$, entonces $b \in \{4, 9\}$*

- *Si* $a = 7$, *entonces* $b \in \{3, 8\}$
- *Si* $a = 8$, *entonces* $b \in \{2, 7\}$
- *Si* $a = 9$, *entonces* $b \in \{1, 6\}$

De modo que los números de la forma $ab5$ *que cumplen las condiciones del enunciado son* 18. *Análogamente se cuentan los* 18 *números de la forma* $ab0$. *Así, en total son* 36 *números los que cumplen las condiciones del enunciado.*

5. ¿Cuál es el residuo que deja al dividir entre 5 la suma de los múltiplos positivos de 7 menores que 2019?

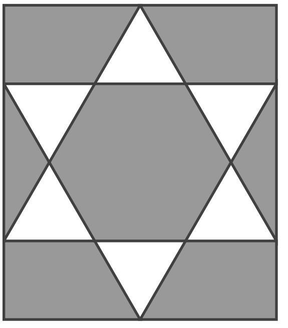
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

Solución: Para que un número sea divisible en 5 *debe terminar en* 0 *o en* 5, *por otro lado al sumar dos o más números de varias cifras, la cifra de las unidades del resultado es el residuo de dividir entre* 10 *la suma de las cifras de las unidades de los sumandos. Con esta idea en mente, escribimos las cifras de las unidades de los primeros* 20 *múltiplos positivos de* 7, *estas son:*

$$7,\ 4,\ 1,\ 8,\ 5,\ 2,\ 9,\ 6,\ 3,\ 0,\ 7,\ 4,\ 1,\ 8,\ 5,\ 2,\ 9,\ 6,\ 3,\ 0.$$

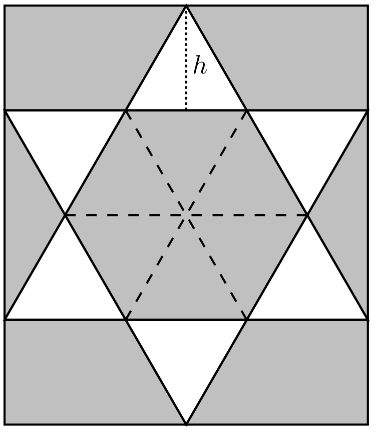
Observe que los primeros diez números son todos diferentes y luego estos mismos 10 *se repiten en el mismo orden, también se puede establecer que la suma de los primeros* 10 *múltiplos positivos de* 7, *tiene a* 5 *por cifra de las unidades, pasa lo mismo con los segundos* 10 *múltiplos positivos de* 7 *y los siguientes bloques de* 10 *múltiplos. Se concluye que la suma de los múltiplos de* 7 *desde* 7 *hasta* $1960 = 7 \times 280$ *deja residuo* 0 *al dividirse entre* 5. *Note que la cifra de las unidades de la suma* $1967 + 1974 + 1981 + 1988 + 1995 + 2002 + 2009 + 2016$, *es* 2. *Por lo tanto, la suma de los múltiplos positivos de* 7 *menores que* 2019 *deja como residuo* 2 *al dividirse entre* 5.

6. En la siguiente figura la estrella inscrita en el rectángulo está formada por un hexágono regular de lado $4\,cm$ y seis triángulos equiláteros. ¿Cuál es el valor, en centímetros cuadrados, del área sombreada?



(a) $72\sqrt{3}$ (b) $24\sqrt{3}$ (c) $96\sqrt{3}$ (d) $48\sqrt{3}$

Solución: Considere la siguiente figura, en la que se han punteado las diagonales del hexágono regular y se ha marcado una altura, h, de uno de los triángulos equiláteros.



Note que el área sombreada corresponde al área del rectángulo menos el área del hexágono regular. Además, las dimensiones, en centímetros, del rectángulo son 12 y $4h$, mientras que el perímetro del hexágono regular es 24 y su apotema, h.

Con el Teorema de Pitágoras, se deduce que $h = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}\,cm$.

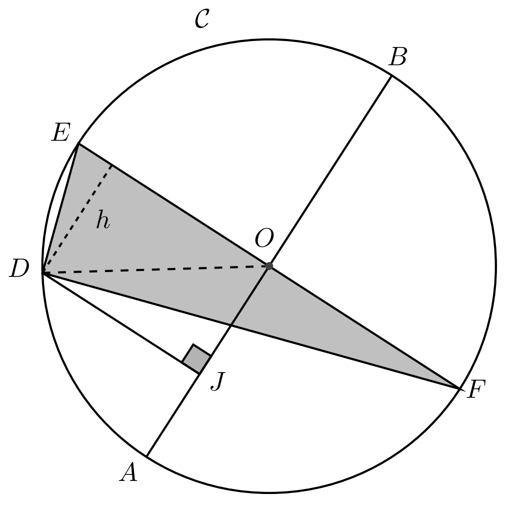
De modo que el área sombreada está dada por:

$$12 \times 4\left(2\sqrt{3}\right) - \frac{24 \times 2\sqrt{3}}{2} = 72\sqrt{3}\,cm^2.$$

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

7. Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia, $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ dos diámetros perpendiculares de $\mathcal{C}$, y $\overline{JD}$ un segmento perpedicular a $\overline{AB}$ tal que J está en $\overline{AB}$ y D está en $\mathcal{C}$. Si $JD = 4\,cm$ y $AB = 10\,cm$, ¿cuál es el área del triángulo DEF?

Solución 1: En la siguiente figura se ilustra la situación planteada en el enunciado, tenga en cuenta que O es el centro de la circunferencia.



Dado que un diámetro de la circunferencia mide $10\,cm$, *entonces* $DO = 5\,cm$, *por ser uno de sus radios. Además,* $JD = 4\,cm$, *de modo que, por el Teorema de Pitágoras se tiene que* $JO = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\,cm$. *Note que la altura,* h, *del triángulo* DEF, *correspondiente a la base* $\overline{EF}$, *es congruente con el segmento* $\overline{JO}$, *por lo tanto el área del triángulo* DEF *está dada por:*

$$\frac{10\,cm \times 3\,cm}{2} = 15\,cm^2.$$

Solución 2: Por el teorema de la media geométrica en triángulos rectángulos, aplicado al triángulo ADB, *se tiene que* $JA \times JB = 4^2 = 16$, *y además* $JA + JB = 10$. *Reemplazando* $JB = 10 - JA$ *en la primera ecuación se obtiene la ecuación cuadrática* $(JA)^2 - 10(JA) + 16 = 0$, *cuyas únicas soluciones son* $JA = 8$ *o* $JA = 2$, *pero de acuerdo con la ilustración la* *única solución que tiene sentido es* $JA = 2\,cm$*, por lo tanto* $JO = 3\,cm$*. Así, el área del triángulo* DEF *es*

$$\frac{EF \times JO}{2} = \frac{10\,cm \times 3\,cm}{2} = 15\,cm^2.$$

8. Determine los valores de a y b, enteros positivos, tales que

$$\operatorname{mcd}(a, b) = 2019,$$
$$135 \times a = 28 \times b.$$

Solución: Dado que $135 \times a = 28 \times b$*, esto es* $5 \times 3^3 \times a = 2^2 \times 7 \times b$*, entonces por el Teorema Fundamental de la Aritmética, se tiene que*

$$a = 2^2 \times 7 \times k,$$
$$b = 5 \times 3^3 \times k,$$

para algún número entero positivo k*.*

De modo que, $\operatorname{mcd}(a, b) = k = 2019$*. Así,* $a = 28 \times 2019 = 56532$ *y* $b = 135 \times 2019 = 272565$*.*

9. Si las raíces del polinomio $P(x) = 2x^3 - bx^2 - 3x - d$, son r, $-r$ y 3, ¿cuál es el valor numérico de $b + d$?

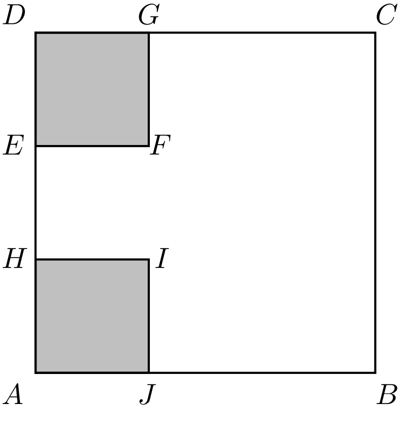
Solución: Por el Teorema Fundamental del Álgebra tenemos que

$$\begin{aligned} 2x^3 - bx^2 - 3x - d &= 2(x - r)(x + r)(x - 3) \\ &= 2\left(x^2 - r^2\right)(x - 3) \\ &= 2x^3 - 6x^2 - 2r^2x + 6r^2. \end{aligned}$$

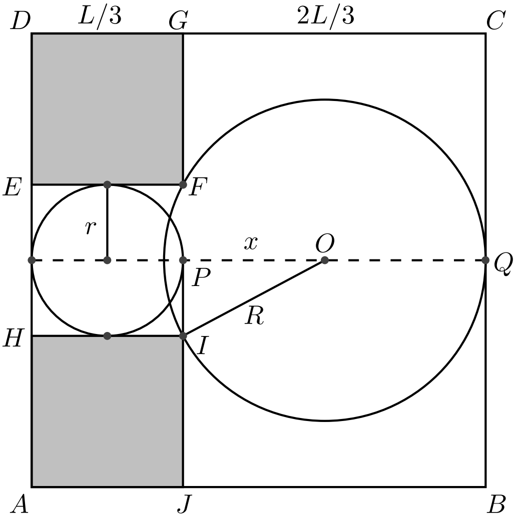
Así, igualando los coeficientes de ambos miembros de la igualdad anterior, tenemos que $b = 6$*,* $r^2 = \dfrac{3}{2}$ *y* $d = -6r^2$*. Por lo tanto* $b + d = 6 - 9 = -3$*.*

2.3. Prueba Final

1. En la siguiente figura $ABCD$, $DGFE$ y $HIJA$ son cuadrados. Si E y H trisecan al segmento $\overline{AD}$, encuentre la razón entre los radios de los dos círculos que se pueden construir de tal manera que toquen a cada uno de los cuadrados $ABCD$, $DGFE$ y $HIJA$, en exactamente un punto.



Solución: De las condiciones del problema, se deduce que el centro de cada uno de los dos círculos debe estar dentro del cuadrado $ABCD$ y sobre la mediatríz del segmento $\overline{AD}$, como se muestra en la siguiente figura.



Sea $\mathcal{C}_1$ el círculo de radio r y $\mathcal{C}_2$ el círculo de radio R. Entonces, si L es la longitud del lado del cuadrado $ABCD$, la longitud r es $\frac{L}{6}$.

Por otro lado, sea P el punto medio de $\overline{FI}$, Q el punto medio de $\overline{BC}$, O el centro del círculo $\mathcal{C}_2$ y x la longitud de $\overline{OP}$. Como E y H trisecan al segmento $\overline{AD}$, entonces $PI = L/6$, $DE = DG = L/3$, y $GC = 2L/3$, de modo que cada radio del círculo $\mathcal{C}_2$ mide $R = OQ = OI = \frac{2L}{3} - x$.

Así, por el Teorema de Pitágoras, aplicado al triángulo OPI se tiene que

$$x^2 + \left(\frac{L}{6}\right)^2 = \left(\frac{2L}{3} - x\right)^2,$$

de donde se deduce que $x = \frac{5L}{16}$, y por lo tanto $R = \frac{2L}{3} - \frac{5L}{16} = \frac{17L}{48}$, de ahí que la razón entre los radios de los dos círculos está dada por $\frac{r}{R} = \frac{L/6}{17L/48} = \frac{8}{17}$, o bien, $\frac{R}{r} = \frac{17}{8}$.

2. Sean a y b dos números reales tales que $ab^{-1} + ba^{-1} = 2$. Determinar el valor numérico de la expresión

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2019} + \left(\frac{b}{a}\right)^{2019}$$

Solución: Dado que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$, entonces $\frac{a^2+b^2}{ab} = 2$, esto es $a^2 + b^2 = 2ab$. Luego

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 = 0,$$

de lo que se deduce que $a = b$ y así

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2019} + \left(\frac{b}{a}\right)^{2019} = \left(\frac{a}{a}\right)^{2019} + \left(\frac{a}{a}\right)^{2019} = 1^{2019} + 1^{2019} = 2.$$

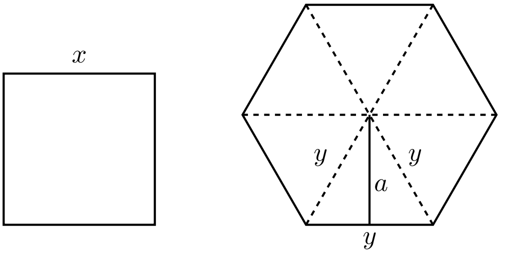
3. Muestre que no existe un conjunto con 5 enteros positivos menores o iguales que 10 tales que las sumas de los elementos de cada uno de sus subconjuntos sean todas diferentes.

Solución: Dado un conjunto de n elementos, se puede establecer que él po-

see 2^n subconjuntos. Por lo tanto de un conjunto con 5 enteros escogidos entre 1 y 10, podemos extraer $2^5 = 32$ subconjuntos. Escogiendo el conjunto $\{1, 7, 8, 9, 10\}$ conseguimos el mayor rango en los posibles resultados de las sumas de los elementos de los subconjuntos (desde 1 hasta 35), sin embargo este conjunto no cumple las condiciones del problema pues las sumas de los elementos de cada uno de sus subconjuntos $\{1, 9\}$ y $\{10\}$ son iguales. El siguiente conjunto que da el mayor rango en los posibles resultados de las sumas de los elementos de cada uno de sus subconjuntos es $\{1, 6, 7, 8, 9\}$, pero observe que el subconjunto con menor suma es $\{1\}$ y el que tiene mayor suma es $\{1, 6, 7, 8, 9\}$, cuya suma es 31, pero al tener 32 subconjuntos, por el Principio de las Casillas, no es posible que los resultados de las sumas de sus elementos sean todas distintas.

4. Un cuadrado y un hexágono regular tienen ambos la propiedad que el área de cada uno, en centímetros cuadrados, coincide con el perímetro del otro, en centímetros. Encuentre el valor numérico del área del cuadrado.

Solución: Considere la siguiente ilustración



Sea x la longitud del lado del cuadrado y y la longitud del lado del hexágono regular. De este modo, tenemos que el área del cuadrado está dada por x^2, el perímetro del cuadrado, por $4x$ y el perímetro del hexágono, por $6y$. Ahora, para calcular el área del hexágono regular debemos conocer la longitud de su apotema a, la cual corresponde a la altura de un triángulo equilátero de lado y como se muestra en la figura, esto es, $\dfrac{y\sqrt{3}}{2}$. De ahí que el área del hexágono regular está dada por $\dfrac{6y \times \dfrac{y\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{3y^2\sqrt{3}}{2}$.

Ahora, dado que el área de cada polígono, coincide con el perímetro del otro, tenemos que

$$x^2 = 6y, \tag{2.1}$$
$$8x = 3y^2\sqrt{3}. \tag{2.2}$$

Despejando y *de la igualdad* (2.1) *y reemplazando este valor en la igualdad* (2.2) *se obtiene que* $8x = 3\sqrt{3}\left(\frac{x^2}{6}\right)^2$ *de donde* $x = \sqrt[3]{\frac{96}{\sqrt{3}}}$.

Por lo tanto el valor del área del cuadrado es $\left(\sqrt[3]{\frac{96}{\sqrt{3}}}\right)^2$.

5. Si a, b y c son las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9$, y $Q(x) = x^2 - 1$, hallar el valor numérico de $Q(a)Q(b)Q(c)$.

   Solución: Por el Teorema Fundamental del Álgebra se tiene que

   $$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c).$$

   Además, $Q(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, *luego*

   $$\begin{aligned} Q(a)Q(b)Q(c) &= (a-1)(a+1)(b-1)(b+1)(c-1)(c+1), \\ &= (-1)^6(1-a)(1-b)(1-c)(-1-a)(-1-b)(-1-c), \\ &= P(1)P(-1), \\ &= \left((1)^3 - 2(1)^2 - 9\right) \times \left((-1)^3 - 2(-1)^2 - 9\right), \\ &= 120. \end{aligned}$$

6. ¿Cuántos múltiplos positivos de 33, menores que 10^{1000} hay tales que sus cifras son solo unos?

   Solución: Dado que los números deben ser múltiplos de 33, *estos deben ser múltiplos de* 3 *y de* 11, *esto es, la suma de sus cifras debe ser un múltiplo de* 3, *y como sus cifras son solo unos, por criterio de divisiblidad*[1] *del* 11,

[1] **Criterio de Divisibilidad del** 11 : Un número es divisible por 11 si y solo si la diferencia de la suma de las cifras que ocupan las posiciones impares y la suma de las cifras que ocupan las posiciones pares es un múltiplo de 11; esto es, si la suma y resta alternada de sus cifras es múltiplo de 11.

deben tener un número par de unos, es decir, la suma de sus cifras es par. Por lo tanto la suma de sus cifras debe ser un múltiplo de 6.

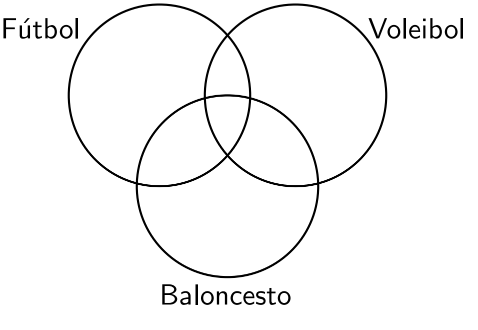
Finalmente, como los números deben ser menores que 10^{1000}, *entonces la mayor cantidad de cifras, es decir, de unos, que pueden tener es* 1000, *así la mayor suma de sus cifras es* 1000. *De modo que la cantidad de números que cumplen las condiciones del enunciado coincide con la cantidad de múltiplos positivos de* 6 *menores que* 1000, *estos son* $\left\lfloor \dfrac{1000}{6} \right\rfloor = 166$.

Capítulo 3

Nivel Avanzado

3.1. Prueba Clasificatoria

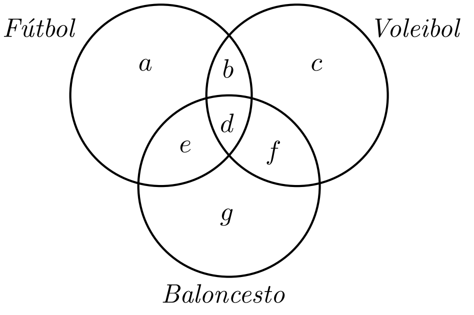
1. En el colegio de Juanito hay tres selecciones: fútbol, voleibol y baloncesto. Juanito preguntó a cada uno de sus compañeros de salón a qué selección pertenecía y escribió sus nombres en un diagrama de Venn como el que se muestra a continuación. Al finalizar Juanito observó que el número de personas escritas en cada región, era un número diferente del 1 al 7, y que en cada selección hay 13 personas.



¿Cuántas personas están en exactamente dos selecciones?

(a) 9 (b) 1 (c) 8 (d) 5

Solución: Sean a, b, c, d, e, f y g el número de personas escritas en cada región como se muestra a continuación:



Dado que el número de personas escritas en cada región es un número diferente del 1 *al* 7 *y en cada selección hay* 13 *personas, entonces*

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e+f+g &= 28, \\ a+b+d+e &= 13, \\ b+c+d+f &= 13, \\ d+e+f+g &= 13. \end{aligned}$$

Sumando las tres últimas ecuaciones se tiene

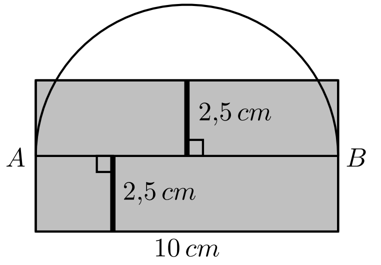
$$(a+b+c+d+e+f+g)+(b+e+f)+2d = 39.$$

De aquí que $b+e+f = 11-2d$. *Claramente* $d \in \{1,2,3,4,5\}$. *Pero si* $d=2$, *entonces* $b+e+f = 7$, *y no existen tres números naturales entre* 1 *y* 7, *diferentes entre sí y diferentes de* 2, *que sumados den* 7. *Análogamente, se descartan las opciones* 3, 4 *y* 5 *para* d. *Por lo tanto,* $d=1$ *y* $b+e+f=9$, *corresponde al número de personas que están en exactamente dos selecciones.*

2. Considere una semicircunferencia con diámetro $AB = 10\,cm$. Sea T el conjunto de todos los segmentos de recta perpendiculares al diámetro $\overline{AB}$, que pasan por él y su longitud es menor o igual que la mitad del radio de la semicircunferencia. ¿Cuál es el área formada por el conjunto T?

(a) $\dfrac{25\pi}{2}\,cm^2$ $\qquad$ (b) $100\,cm^2$ $\qquad$ (c) $25\,cm^2$ $\qquad$ (d) $50\,cm^2$

Solución: Note que el conjunto T *corresponde a un rectángulo cuyas dimensiones son* $10\,cm$ *y* $5\,cm$ *como se muestra en la siguiente figura:*



Por lo tanto su área es $10\,cm \times 5\,cm = 50\,cm^2$.

3. Si a y b son las raíces del polinomio $2x^2 + 3x + 2$, ¿cuál es el valor de $(2 - a)(2 - b)$?

(a) -16 (b) 16 (c) 8 (d) -8

Solución: Por el Teorema Fundamental del Álgebra,

$$2x^2 + 3x + 2 = 2(x - a)(x - b).$$

Evaluando en $x = 2$ *la expresión anterior se obtiene*

$$2(2)^2 + 3(2) + 2 = 2(2 - a)(2 - b),$$

de donde $(2 - a)(2 - b) = 8$.

4. ¿Cuál es el residuo que deja 6^{1000} al dividirse entre 7?

(a) 6 (b) 1 (c) 5 (d) 4

Solución 1: Estudiando el residuo que dejan al dividirse entre 7 las primeras potencias de 6 se observa que las potencias impares de 6 dejan residuo 6 al dividirse entre 7, mientras que las potencias pares dejan residuo 1, como se muestra a continuación,

Potencia de 6	***Residuo***
$6^1 = 7 \times 0 + \mathbf{6}$	6
$6^2 = 7 \times 5 + \mathbf{1}$	1
$6^3 = (7 \times 5 + 1) \times 6 = 7 \times 30 + \mathbf{6}$	6
$6^4 = (7 \times 30 + 6) \times 6 = 7 \times 180 + 36 = 7 \times 185 + \mathbf{1}$	1
$\vdots$	$\vdots$

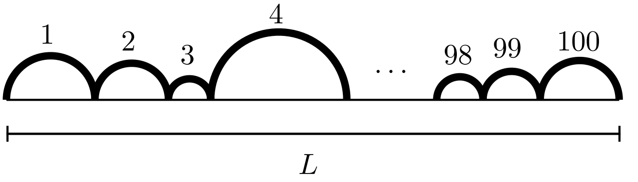
Por lo tanto 6^{1000} *deja residuo* 1 *al dividirse entre* 7.

Solución 2: Dado que $6^2 = 7 \times 5 + 1$, entonces por propiedad del binomio[1] *se tiene que $\left(6^2\right)^{500} = (7 \times 5 + 1)^{500} = 7 \times 5 \times k + 1^{500} = 7 \times p + 1$, donde $p = 5k$ es un entero positivo. Esto deja en evidencia que 6^{1000} deja residuo 1 al dividirse entre 7.*

Solución 3: Usando la notación de congruencias modulares y sus propiedades, se tiene que $6^2 = 36 \equiv 1 \pmod 7$, por lo tanto

$$\left(6^2\right)^{500} \equiv 1^{500} = 1 \pmod 7.$$

5. Sobre un segmento de longitud L se construyen 100 semicircunferencias de radios desconocidos, una en seguida de la otra, de tal forma que sus diámetros están todos sobre el segmento inicial, como se muestra en la figura. Determine la longitud del camino que se forma al unir los arcos de dichas circunferencias.



(a) πL (b) $\dfrac{100\pi L}{2}$ (c) $100\pi L$ (d) $\dfrac{\pi L}{2}$

Solución: Sean r_i y L_i el radio y la longitud de la i-ésima semicircunferencia, respectivamente, de manera que $L_i = \pi r_i$. Note que la suma los diámetros de todas las semicirfunferencias es L, esto es,

$$\sum_{i=1}^{100} 2r_i = L.$$

Puesto que 2 no depende del índice de la sumatoria se tiene que

$$\sum_{i=1}^{100} r_i = \frac{L}{2}.$$

[1] Si a, b y n son enteros positivos, entonces $(a+b)^n = a \times k + b^n$, donde k es un entero positivo.

Ahora, como la longitud S del camino que se forma con los arcos de las semicircunferencias corresponde con su suma, sigue que

$$S = \sum_{i=1}^{100} L_i = \sum_{i=1}^{100} \pi r_i = \pi \sum_{i=1}^{100} r_i = \frac{\pi L}{2}.$$

6. Si $x^2 - y^2 = 2$ y $\dfrac{y}{x+y} - \dfrac{x}{x-y} = -3$, ¿cuál es el valor de $x^2 + y^2$?

(a) $\dfrac{2}{3}$ $\quad$ (b) $-\dfrac{3}{2}$ $\quad$ (c) 6 $\quad$ (d) -6

Solución: Note que

$$\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y} = \frac{y(x-y) - x(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{-(x^2+y^2)}{x^2-y^2} = -3,$$

y dado que $x^2 - y^2 = 2$, entonces $x^2 + y^2 = 6$.

7. Sea $p > 3$ un número primo. ¿Cuál es la probabilidad que un número entero positivo menor que $15p$ no divida a $12p$?

(a) $\dfrac{15p-13}{15p-1}$ $\quad$ (b) $\dfrac{12}{15p-1}$ $\quad$ (c) $\dfrac{12p}{15p}$ $\quad$ (d) $\dfrac{1}{5}$

Solución: Dado que p es un número primo y $12p = 2^2 \times 3 \times p$, entonces $12p$ tiene $(2+1)(1+1)(1+1) = 12$ divisores positivos[2]*. Además, hay $15p - 1$ enteros positivos menores que $15p$, de modo que la probabilidad de que un número entero positivo menor que $15p$ divida a $12p$ está dada por*

$$\frac{\textit{Número de casos favorables}}{\textit{Número de casos posibles}} = \frac{12}{15p-1}.$$

Así, la probabilidad que un entero positivo menor que $15p$ NO divida a $12p$ es

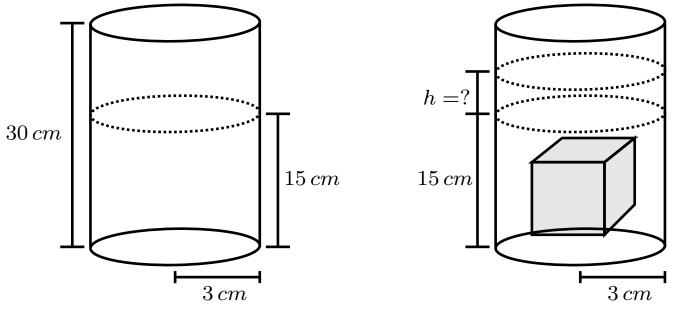
$$1 - \frac{12}{15p-1} = \frac{15p-13}{15p-1}.$$

8. Un recipiente con forma de cilindro circular recto, tiene $30\,cm$ de altura y su base tiene $3\,cm$ de radio. Si el recipiente tiene agua hasta una altura de $15\,cm$ y en él se sumerge un cubo macizo de $3\,cm$ de arista, el nivel de agua se desplaza hacia arriba

(a) $3\pi\ cm$ $\quad$ (b) $\dfrac{3}{\pi}\ cm$ $\quad$ (c) $27\,cm$ $\quad$ (d) $\dfrac{9}{2\pi}\ cm$

[2] Ver el ejercicio 1 del Nivel Avanzado en el Apéndice A.

Solución: La siguiente figura ilustra la situación planteada en el problema.



Al introducir un cubo macizo de $3\,cm$ de arista, el cual tiene un volumen de $27\,cm^3$, el nivel del agua aumenta $h\,cm$ como se muestra en la figura. Observe que el volumen aumentado dentro del cilindro está dado por $\pi \times (3)^2 \times h = 27\,cm^3$, de donde $h = \dfrac{3}{\pi}\,cm$.

9. En una competencia participan 10 personas. ¿De cuántas formas se pueden dar las medallas de oro, plata y bronce, sabiendo que solo se permiten empates de hasta dos personas en el tercer puesto?

(a) $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$

(b) $2^3 \times 3^4 \times 5$

(c) $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$

(d) $2^4 \times 3^2 \times 5$

Solución 1: Utilizando el principio multiplicativo se tiene que:

$$\underbrace{10 \text{ opciones}}_{1^\circ \text{ Puesto}} \times \underbrace{9 \text{ opciones}}_{2^\circ \text{ Puesto}} \times \underbrace{n \text{ opciones}}_{3^\circ \text{ Puesto}} = \underbrace{10 \times 9 \times n = 2 \times 5 \times 3^2 \times n}_{formas\, de\, entregar\, las\, medallas}$$

Para determinar el valor de n, debemos tener en cuenta que en el tercer puesto se admite un solo empate, es decir, de las 8 personas que quedan, el tercer puesto puede ocuparlo o bien 1 persona, o bien 2 personas, esto es: $n = \binom{8}{1} + \binom{8}{2} = 8 + 28 = 3^2 \times 2^2$. Así, el número de formas en que se pueden dar las medallas está dado por:

$$2 \times 5 \times 3^2 \times n = 2 \times 5 \times 3^2 \times 3^2 \times 2^2 = 2^3 \times 3^4 \times 5.$$

Solución 2: Se hará el conteo en dos partes:

Caso 1. *Sin empates en el tercer puesto, se tiene que:*

$$\underbrace{10\ opciones}_{1^\circ\ Puesto} \times \underbrace{9\ opciones}_{2^\circ\ Puesto} \times \underbrace{8\ opciones}_{3^\circ\ Puesto} = \underbrace{10 \times 9 \times 8}_{\substack{formas\,de\,entregar\\ las\,medallas}}$$

Caso 2. *Con empate en el tercer puesto, no importa el orden en que se escoga a los dos participantes, pues ambos ocupan el mismo puesto:*

$$\underbrace{10\ opciones}_{1^\circ\ Puesto} \times \underbrace{9\ opciones}_{2^\circ\ Puesto} \times \underbrace{\binom{8}{2}\ opciones}_{3^\circ\ Puesto} = \underbrace{10 \times 9 \times 28}_{\substack{formas\,de\,entregar\\ las\,medallas}}$$

Por lo tanto, el número de formas en que se pueden dar las medallas está dado por

$$\begin{aligned}(10 \times 9 \times 8) + (10 \times 9 \times 28) &= 10 \times 9 \times (8 + 28),\\ &= 10 \times 9 \times 36,\\ &= 2^3 \times 3^4 \times 5.\end{aligned}$$

3.2. Prueba Selectiva

1. Para los números reales a y b definimos la siguiente operación:

$$a \triangle b = \frac{b^2 - 1}{a^2 + 1}.$$

Encuentre el valor de la siguiente expresión:

$$(\ldots(((20 \triangle 19) \triangle 18) \triangle 17) \ldots \triangle 1)$$

(a) 1 $\quad$ (b) 0 $\quad$ (c) 210 $\quad$ (d) $\dfrac{19^2 - 1}{20^2 + 1}$

Solución: Sea $m = (\ldots(((20 \triangle 19) \triangle 18) \triangle 17) \ldots \triangle 2)$. *Entonces, de la definición de la operación* $\triangle$ *se tiene que*

$$(\ldots(((20 \triangle 19) \triangle 18) \triangle 17) \ldots \triangle 1) = m \triangle 1 = \frac{1^2 - 1}{m^2 + 1} = 0.$$

2. Federico extrae 3 balotas al azar de una bolsa que tiene 10 balotas enumeradas del 1 al 10. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los números de las balotas extraídas sea múltiplo de 3?

(a) $\dfrac{7}{40}$ $\quad$ (b) $\dfrac{7}{24}$ $\quad$ (c) $\dfrac{17}{24}$ $\quad$ (d) $\dfrac{21}{40}$

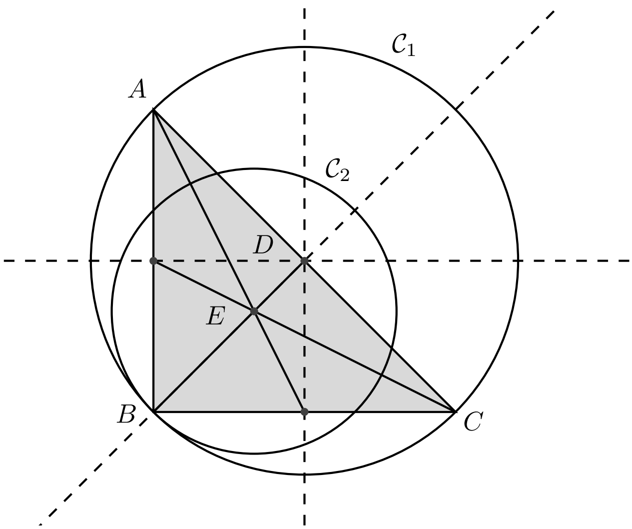
Solución: Note que hay ${}_{10}C_3 = \binom{10}{3} = 120$ *formas de extraer tres balotas de la bolsa que tiene* 10. *Por otra parte, del* 1 *al* 10, *hay* 7 *números naturales que no tienen a* 3 *entre sus factores primos, de modo que hay* ${}_{7}C_3 = \binom{7}{3} = 35$ *formas de extraer tres balotas cuyo producto de los números marcados en ellas NO sea múltiplo de* 3. *Así, los casos favorables, esto es, las formas de extraer tres balotas cuyo producto de los números marcados en ellas sea múltiplo de* 3, *son* $120 - 35 = 85$. *Por lo tanto, la probabilidad de que al extraer las tres balotas de la bolsa, el producto de los números marcados en ellas sea múltiplo de* 3, *es*

$$\frac{\textit{Número de casos favorables}}{\textit{Número de casos posibles}} = \frac{85}{120} = \frac{17}{24}.$$

3. Sea ABC un triángulo rectángulo isósceles, recto en B. Sea C_1 la circunferencia con centro en el punto D de intersección de las mediatrices de los lados de ABC y radio $\overline{DB}$ y sea C_2 la circunferencia con centro en el punto E de intersección de las medianas de los lados de ABC y radio $\overline{EB}$. ¿Cuál es la razón entre las áreas de C_1 y C_2?

$(a)\ \dfrac{1}{2}$ $(b)\ \dfrac{2}{3}$ $(c)\ 2$ $(d)\ \dfrac{9}{4}$

Solución: La siguiente figura ilustra la situación planteada:



Dado que el triángulo ABC es rectángulo e isósceles en B, se puede deducir por el teorema de segmento medio que D es punto medio de $\overline{AC}$. Note que la recta que pasa por B y por D es bisectriz del ángulo CBA, además es mediatriz de $\overline{AC}$ y por tanto $\measuredangle DBA = \measuredangle CBD = 45°$. Esto muestra que los triángulos BDA y BDC son isósceles y rectángulos. Así, por el teorema de Pitágoras se establece que

$$BD = DC = \frac{\sqrt{2}BC}{2}.$$

Por otro lado, usando teoremas de medianas se tiene que

$$BE = \frac{2}{3}BD = \frac{\sqrt{2}BC}{3}.$$

De modo que, la razón entre el área de C_1 y el área de C_2 es

$$\frac{\pi BD^2}{\pi BE^2} = \frac{9}{4}.$$

4. En una mesa redonda hay 2019 personas entre caballeros y mentirosos. Un mentiroso siempre miente y un caballero siempre dice la verdad. Si cada persona dijo que estaba entre dos mentirosos, ¿cuál es la mayor cantidad de mentirosos que puede haber?

   (a) 673 (b) 1009 (c) 1010 (d) 1346

   Solución: Puesto que los caballeros siempre dicen la verdad, entonces cada caballero está entre dos mentirosos. Por otro lado, como los mentirosos siempre mienten, entonces cada mentiroso o bien está entre dos caballeros, o bien está entre un caballero y un mentiroso. Este último caso es el que conviene a la hora de garantizar la mayor cantidad de mentirosos que puede haber, pues si denotamos por M y C a mentirosos y caballeros, respectivamente, tenemos que, escribiendo sobre una circunferencia la secuencia $MCMMCMMCMMCMMC\ldots MCM$, la cual tiene 2019 letras, entonces cada C está entre dos M, y esta es la secuencia que más mentirosos contiene, con un total de $673 \times 2 = 1346$.

5. ¿Cuál es la cifra de las unidades de 3^{5^7}?

   (a) 1 (b) 3 (c) 7 (d) 9

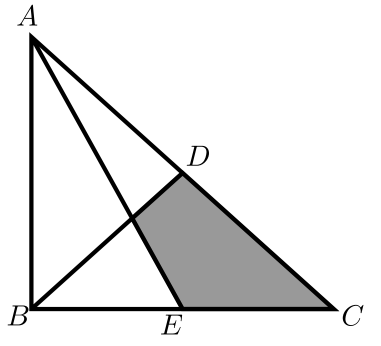
   Solución: Note que las primeras nueve potencias de 3 son:

   - $3^1 = 3,$
   - $3^2 = 9,$
   - $3^3 = 27,$
   - $3^4 = 81,$
   - $3^5 = 243,$
   - $3^6 = 729,$
   - $3^7 = 2187,$
   - $3^8 = 6561,$
   - $3^9 = 19683.$

   Así, las cifras de las unidades de las potencias de 3 entran en un ciclo cada cuatro potencias: $3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, \ldots$

   Ahora bien, puesto que $5^7 = 78125$ deja residuo 1 al dividirse por 4, se tiene que la cifra de las unidades de 3^{5^7} corresponde con el primer término del ciclo, esto es, con 3.

6. En la siguiente figura el triángulo ABC es rectángulo en B; D y E son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente y el área de la región sombreada es $8\,cm^2$. Si $BC = 8\,cm$, ¿cuánto mide el segmento $\overline{AB}$?



(a) $3\,cm$ (b) $6\,cm$ (c) $8\,cm$ (d) $\dfrac{12}{8}\,cm$

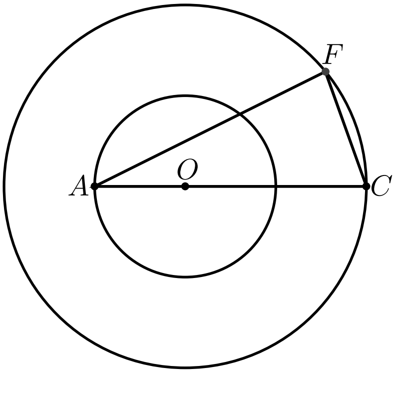
Solución: Sabiendo que las tres medianas de un triángulo dividen al triángulo en 6 triángulos con igual área, se deduce que el área sombreada corresponde a $\frac{2}{6}$ del área del triángulo ABC. Así, el área del triángulo ABC es $24\,cm^2$. Por otro lado, como el triángulo ABC es recto en C, se tiene que su área está dada por

$$\frac{BC \times AB}{2} = \frac{8 \times AB}{2} = 24\,cm^2,$$

de donde $AB = 6\,cm$.

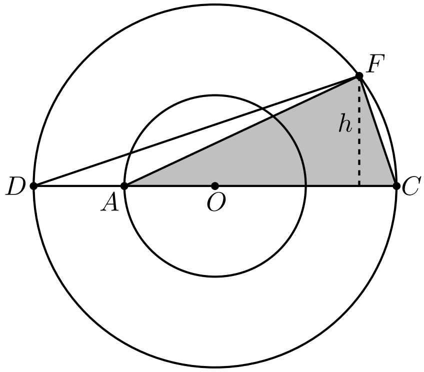
PROBLEMAS TIPO ENSAYO

7. En la siguiente figura las dos circunferencias tienen el centro en O y sus radios guardan proporción 2 a 1. Si el radio de la circunferencia más pequeña mide $3\,cm$, $FC = 2\sqrt{11}\,cm$, y los puntos A, O y C son colineales; determine el área del triángulo ACF.



Solución 1: Considere la siguiente figura, en la que D es la intersección de la prolongación del segmento $\overline{AC}$ y la circunferencia más grande, y h

es la altura de los triángulos DFC y AFC respecto a los lados $\overline{DC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente.



Note que el triángulo DFC es recto en F, pues está inscrito en una circunferencia tal que $\overline{DC}$ es uno de sus diámetros. Además, como el radio de la circunferencia pequeña mide $3\,cm$, y la proporción entre el radio de la circunferencia grande y el radio de la circunferencia pequeña es de 2 a 1, entonces el radio de la circunferencia grande es $6\,cm$, luego $DC = 12\,cm$. Así, por el Teorema de Pitágoras se tiene que

$$DF = \sqrt{12^2 - (2\sqrt{11})^2} = 10\,cm.$$

En consecuencia, el área del triángulo DFC está dada por

$$\frac{DF \times FC}{2} = \frac{DC \times h}{2},$$
$$\frac{10 \times 2\sqrt{11}}{2} = \frac{12 \times h}{2},$$
$$10\sqrt{11} = 6h.$$

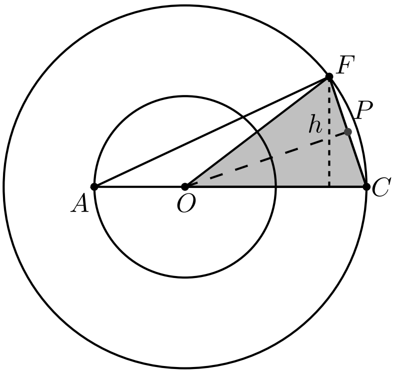
De ahí que $h = \dfrac{5\sqrt{11}}{3}\,cm$, y por lo tanto el área del triángulo AFC es

$$\frac{AC \times h}{2} = \frac{9\,cm \times \dfrac{5\sqrt{11}}{3}\,cm}{2} = \frac{15\sqrt{11}}{2}cm^2.$$

Solución 2: En la figura anterior, observe que $\overline{FO}$ es mediana del triángulo DFC y $\overline{AF}$ es mediana del triángulo DFO. Sabiendo que cada mediana de un triángulo divide al triángulo en dos triángulos con igual área, tenemos que el área del triángulo AFC es $\frac{3}{4}$ del área del triángulo DFC, esto es

$$\frac{3}{4} \times 10\sqrt{11} = \frac{15\sqrt{11}}{2} cm^2.$$

Solución 3: Considere la siguiente figura, en la que P es el punto medio del segmento $\overline{FC}$, y h es la altura de los triángulos OFC y AFC respecto a los lados $\overline{OC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Observe que el triángulo FOC es isósceles en O, con $FO = OC = 6\,cm$.



Así, por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$OP = \sqrt{6^2 - \left(\frac{2\sqrt{11}}{2}\right)^2} = 5\,cm.$$

Por lo tanto, el área del triángulo OFC está dada por

$$\frac{OP \times FC}{2} = \frac{OC \times h}{2},$$
$$\frac{5 \times 2\sqrt{11}}{2} = \frac{6 \times h}{2},$$
$$5\sqrt{11} = 3h.$$

Luego, $h = \frac{5\sqrt{11}}{3}\,cm$, y el área del triángulo AFC es $\frac{15\sqrt{11}}{2}\,cm^2$.

8. Hallar el valor de x que satisface la siguiente ecuación

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots+2019\sqrt{1+x}}}}}=3.$$

Solución: Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad y despejando se tiene que:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots+2019\sqrt{1+x}}}} &= 3^2-1\\
\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots+2019\sqrt{1+x}}}} &= \frac{(3-1)(3+1)}{2}\\
\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots+2019\sqrt{1+x}}}} &= 4.
\end{aligned}$$

Repitiendo este proceso 2018 *veces, se tiene:*

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots+2019\sqrt{1+x}}} &= 5,\\
\sqrt{1+\cdots+2019\sqrt{1+x}} &= 6,\\
&\vdots\\
\sqrt{1+x} &= 2021.
\end{aligned}$$

De este razonamiento se sigue que $x=2021^2-1$.

9. Determinar todas las parejas de enteros positivos (a,b) tales que existe un número primo p para el cual se cumple que

$$a+ab+b=p^2-1.$$

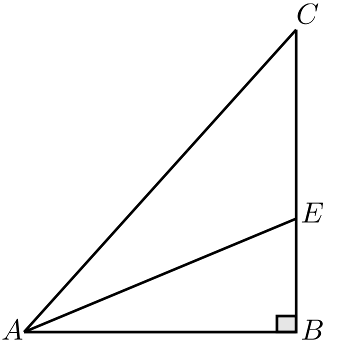
Solución: Si p *es un número primo que satisface la condición dada, entonces*

$$p^2=a+ab+b+1=(a+1)(b+1).$$

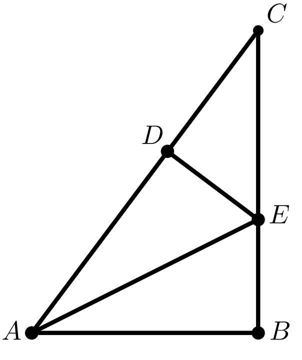
Además, por el Teorema Fundamental de la Aritmética, debe ocurrir que $p=a+1=b+1$*, de donde* $a=p-1=b$*. Así, las parejas de enteros* *positivos* (a, b) *que satisfacen las condiciones dadas son de la forma* $(p-1, p-1)$*, donde* p *recorre todos los números primos.*

3.3. Prueba Final

1. En la siguiente figura el triángulo ABC es rectángulo en B y $\overline{AE}$ es la bisectriz del ángulo BAC. Si $AB = 6\,cm$ y $BE = 3\,cm$, hallar el perímetro del triángulo ABC.



Solución: Consideremos la siguiente figura en la cual se ha trazado el segmento $\overline{DE}$, perpendicular a $\overline{AC}$.



Observe que los triángulos ADE y ABE son congruentes, luego $DE = BE = 3\,cm$ y $AD = AB = 6\,cm$. Por otro lado, usando el teorema de la bisectriz en el triángulo ABC se establece que $\dfrac{CA}{AB} = \dfrac{CE}{EB}$ y de aquí que $2CE = 6 + DC$, esto es, $CE = 3 + \dfrac{DC}{2}$. Además, usando el teorema de Pitágoras en el triángulo EDC se establece que $CE^2 = 9 + DC^2$. Reemplazando el valor de CE en la última ecuación encontramos que $DC^2 + 9 = 9 + 3DC + \dfrac{DC^2}{4}$ y de aquí que $DC = 4\,cm$. Luego $CE = 5\,cm$. Finalmente, el perímetro del triángulo ABC es $6 + 3 + 5 + 4 + 6 = 24\,cm$.

2. Sea f una función definida en todos los números reales diferentes de cero, tal que $2f(-x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x$. Encuentre $f(x)$.

Solución: Sustituyendo $y = -\dfrac{1}{x}$ *en la ecuación*

$$2f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x \tag{3.1}$$

se tiene que $2f\left(\dfrac{1}{y}\right) + f(-y) = -\dfrac{1}{y}$, *o equivalentemente,*

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(-x) = -\frac{1}{x}. \tag{3.2}$$

Restando el doble de la ecuación (3.2) *a la ecuación* (3.1) *se obtiene*

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{3x} - \frac{x}{3}. \tag{3.3}$$

Finalmente, sustituyendo $z = \dfrac{1}{x}$ *en* (3.3), *se concluye que*

$$f(z) = -\frac{2z}{3} - \frac{1}{3z},$$

o lo que es lo mismo, $f(x) = -\dfrac{1}{3}\left(2x + \dfrac{1}{x}\right)$.

3. Encuentre el número de divisores positivos del resultado de sumar los primeros 100 múltiplos de 4 con los primeros 100 múltiplos de 5.

Solución: Observe que

$$\sum_{i=1}^{100} 4i + \sum_{i=1}^{100} 5i = 9\sum_{i=1}^{100} i = 9 \times \frac{100 \times 101}{2} = 3^2 \times 5^2 \times 2 \times 101.$$

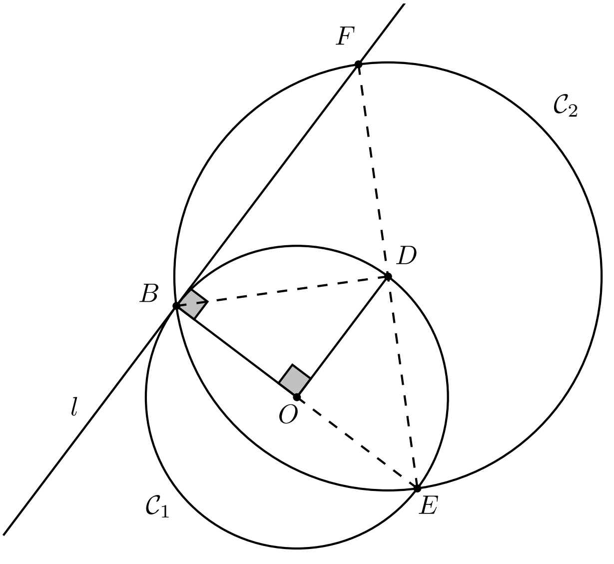
Por lo tanto, el número de divisores positivos de esta cantidad es

$$(2+1) \times (2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 36.$$

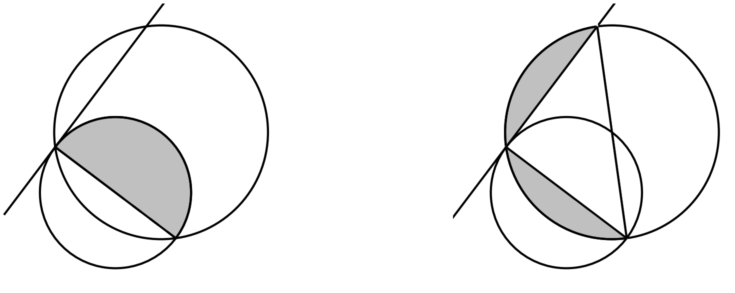
(Ver el ejercicio 1 del Nivel Avanzado en el Apéndice A.)

4. Sean $\mathcal{C}_1$ una circunferencia de radio r y centro en O, l una recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en el punto B y D un punto sobre $\mathcal{C}_1$ de tal manera que $\overline{OB}$ y $\overline{OD}$ son perpendiculares. Si $\mathcal{C}_2$ es la circunferencia con centro en D y radio DB, hallar el área de la región intersección de los círculos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, y de la región delimitada por la recta l y la circunferencia $\mathcal{C}_2$ que no contiene al punto D.

Solución: Considere la siguiente ilustración.



Note que el área de interés corresponde a la mitad del área del círculo $\mathcal{C}_1$ más la diferencia entre la mitad del área del círculo $\mathcal{C}_2$ y el área del triángulo EBF.



Por otro lado, observe que el triángulo EBF es rectángulo en B, con $BF = BE = 2r$; por lo tanto su área es $2r^2$. Además, por el Teorema de Pitágoras se tiene que el radio del círculo $\mathcal{C}_2$ mide $BD = r\sqrt{2}$, así que su área es $\pi\left(r\sqrt{2}\right)^2 = 2\pi r^2$.

Por lo mencionado anteriormente, concluimos que el área de interés está dada por la expresión

$$\frac{\pi r^2}{2} + \frac{2\pi r^2}{2} - 2r^2 = r^2\left(\frac{3\pi}{2} - 2\right).$$

5. ¿Cuál es el coeficiente de x^{2019} en la expansión del polinomio

$$\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{2018}\right)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{1009}\right)^2?$$

Solución: Si $p(x) = \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{1009}\right)^2$, *entonces* $p(x)$ *se escribe de manera general como* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2018}x^{2018}$, *para algunos números reales* a_i, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, 2018\}$. *Así, el coeficiente de* x^{2019} *en la expansión de* $\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{2018}\right)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{1009}\right)^2$ *es* $\sum_{i=1}^{2018} a_i$. *Pero note que* $\sum_{i=0}^{2018} a_i = p(1) = 1010^2$. *Además,* $a_0 = 1$, *luego* $\sum_{i=1}^{2018} a_i = 1010^2 - 1$.

6. ¿De cuántas formas se pueden comprar 10 caramelos en una tienda donde venden caramelos de 3 sabores?

Solución: Representamos los 10 *caramelos de la siguiente manera:*

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

y usaremos dos barras para separar los caramelos de diferentes sabores, por ejemplo, el siguiente arreglo indica que se compraron 5 *caramelos del sabor* A, 3 *del sabor* B *y* 2 *del sabor* C.

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet$$

También están permitidos casos como los que se ilustran a continuación:

$$|\bullet\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet: \text{ sabor } A: 0, \text{ sabor } B: 4, \text{ sabor } C: 6.$$

$$\bullet\bullet\bullet\bullet||\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet: \text{ sabor } A: 4, \text{ sabor } B: 0, \text{ sabor } C: 6.$$

Note que en total hay 12 *objetos (*10 *puntos y* 2 *barras) y cada caso diferente está determinado por la posición de las barras, luego se trata de contar de* *cuántas formas podemos ubicar las* 2 *barras en las* 12 *posiciones que determinan los objetos y esto se puede hacer de*

$$\binom{12}{2} = 66$$

formas diferentes.[3] *Por lo tanto el número de formas en que se pueden comprar* 10 *caramelos en una tienda que ofrece* 3 *sabores diferentes es* 66.

[3] En general, el número de formas en que se pueden separar n objetos en k categorías está dado por:

$$\binom{\text{objetos } + \text{ categorías } - 1}{\text{categorías } - 1} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

a este método se le conoce como Técnica de separadores.

Apéndice A

Ejercicios propuestos

Nivel Básico

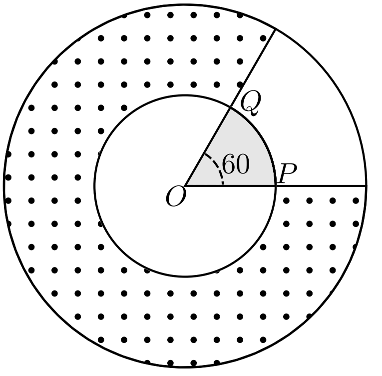
1. Camila compró una camisa con el $20\,\%$ de descuento y un pantalón que valía lo mismo que la camisa pero sin el descuento. Si en total pagó $\$36.000$, ¿cuánto valió el pantalón?

2. Javier tiene 15 chocolates y no los quiere compartir con su hermana. Su papá le propuso que si le regalaba algunos de sus chocolates a su hermana, él le compraría tantos chocolates como la suma de los divisores de la cantidad que le de. Si Javier quería la mayor cantidad de chocolates posibles, ¿cuántos chocolates debía regalarle a su hermana?

3. ¿De cuántas formas 5 personas pueden reaccionar a una publicación de Facebook con las opciones: me gusta, me encanta, me divierte, me asombra, me entristece o me enfada?

4. Sofía se tomó una foto y quiere compartirla en sus tres redes sociales: Instagram, Facebook y Twitter; pero antes quiere aplicarle un filtro de su celular. Si el celular tiene 9 filtros y quiere que en cada red social la foto tenga un filtro diferente, ¿de cuántas maneras puede compartir la foto Sofía?

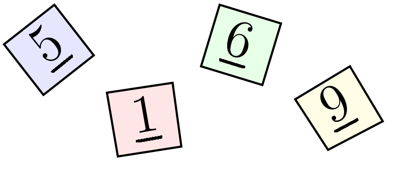
5. En la siguiente figura se muestran dos círculos con centro en O. Se sabe que la longitud de cada radio del círculo grande es el doble de la longitud de cada radio del círculo pequeño. Si el ángulo POQ mide 60 y el área de la región sombreada es $1\,cm^2$, ¿cuál es el área de la región punteada?



6. En cada uno de los siguientes casos determine el valor de a de tal forma el que número dado tenga la propiedad que se indica.

    - $561a$ es múltiplo de 6.
    - $5a61a$ es múltiplo de 9.
    - $63a$ es primo.

7. Juan juega a formar números con las siguientes cuatro tarjetas:



    De los números que Juan puede formar con sus tarjetas,

    - ¿cuántos son divisibles por 4?
    - ¿cuántos son divisibles por 15?
    - ¿cuántos son divisibles por 7?
    - ¿cuántos son múltiplos de 11?

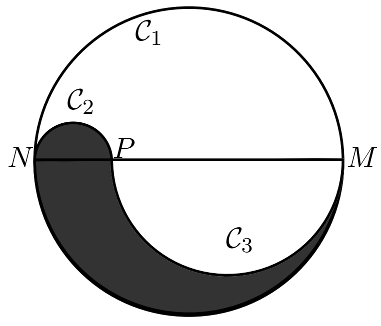
8. En una urna se encuentran 1.000 balotas numeradas de 1 a 1.000. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una balota de forma aleatoria, su número sea múltiplo de 3, 5 y 7?

9. ¿Cuántos números entre 1 y 1000 son múltiplos de 3 y 5, pero no son múltiplos de 2?

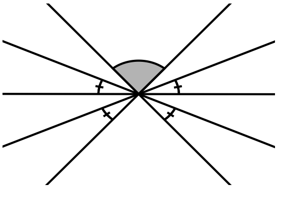
10. ¿Cuántas cifras tiene el número $4^{6.522} \times 25^{6.520}$?

11. En un cuadrado se marcan sus vértices y los puntos medios de sus lados. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con sus tres vértices en los puntos marcados?

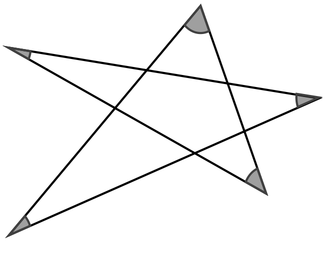
12. En la siguiente figura $\overline{NM}$ es un diámetro de la circunferencia $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ son semicircunferencias cuyos centros están sobre $\overline{NM}$. Si $MP = 4NP$, ¿qué fracción del círculo $\mathcal{C}_1$ está sombreada?

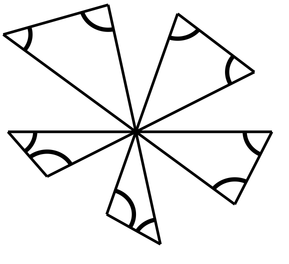


13. Halle la medida del ángulo sombreado en la siguiente figura, sabiendo que los demás ángulos marcados miden cada uno 25.



14. En cada caso hallar la suma de las medidas de los ángulos marcados.





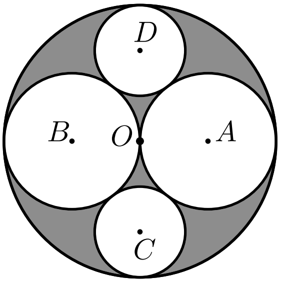
15. Las medidas (en grados) de los ángulos interiores de un triángulo son α, α y 2α. Clasifique el triángulo según la medida de sus ángulos y de sus lados.

16. Ana y Carlos dibujan, cada uno, un polígono regular cuyos lados miden $1\,cm$. La maestra observa que el perímetro del polígono de Carlos es $\dfrac{1}{10}$ del perímetro del polígono de Ana, y que la suma de las medidas de los ángulos internos del polígono de Ana es 12 veces la suma de las medidas de los ángulos internos del polígono de Carlos.

    (a) Según el número de lados, ¿qué nombre reciben los polígonos de Ana y Carlos?

    (b) Determine el perímetro, el área y el número de diagonales de cada uno de estos polígonos.

17. En la siguiente figura la circunferencia de mayor tamaño tiene centro en O y es tangente a las demás circunferencias. Las circunferencias con centro en A y B son tangentes entre sí en el punto O. Las circunferencias con centro en C y D son tangentes a las circunferencias con centro en A y B. Si el radio de la circunferencia con centro en A mide $6\,cm$, halle el valor del área sombreada.

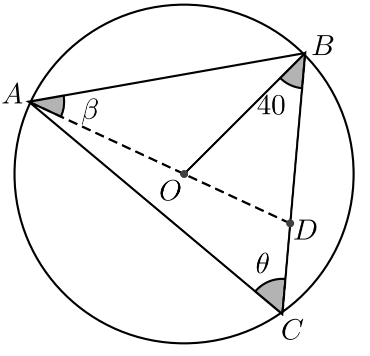


18. Un cuadrado está inscrito en una circunferencia de radio r. Halle el área y el perímetro del cuadrado en términos de r.

19. ¿Cuál es el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide $l\,cm$?

Nivel Medio

1. En la siguiente figura el triángulo ABC tiene sus vértices sobre la circunferencia cuyo centro es O y el punto D es tal que $\measuredangle OBD = 40$, $DB = OB$ y los puntos A, O y D son colineales. Si las letras β y θ representan las medidas de los correspondientes ángulos señalados, ¿cuál es el valor de $\beta + \theta$?



2. Determine el valor de $a \neq 0$, de tal forma que la suma de todos los números de cuatro cifras diferentes que se pueden formar con los dígitos a, 1, 2, 3, y 4 sea divisible entre 2^7.

3. ¿Cuál es el residuo de dividir $30 + 300 + 3000 + \cdots + 3 \times 10^{2018}$ entre 7?

4. Sean A y B dos puntos en el plano. Se realiza la siguiente construcción:

   - Sea Q el punto medio de $\overline{AB}$.
   - Se define P como el punto de intersección entre la mediatriz de $\overline{AB}$ y la semicircunferencia C_1 cuyo diámetro es $\overline{AB}$.
   - C_2 es la circunferencia con centro en P que pasa por Q.
   - Se construyen las rectas tangentes a C_2 que pasan por A y B definiendo a F y H como los puntos de tangencia entre la circunferencia C_2 y las rectas que pasan por A y B respectivamente.

   Si la longitud del segmento $\overline{AB}$ es 2, ¿cuál es la razón entre el área de la semicircunferencia C_1 y la del cuadrilátero $AFHB$?

5. Considere un triángulo con área $1\,cm^2$, tal que dos de sus lados miden 4 y 5 centímetros. Halle la magnitud del tercer lado.

6. Decimos que dos números primos p y q son *números primos gemelos* si $|p-q|=2$. Sean p y q dos números primos gemelos tales que $p<q$, demuestre que la suma de los divisores positivos de $p\times q$ es p^2+4p+3.

7. Determine el menor valor de n tal que $12\times n$ es un cuadrado perfecto y $18\times n$ es un cubo perfecto.

8. Encuentre todos los números primos de la forma n^2-1.

9. Encuentre todos los números primos de la forma n^3-1.

10. Encuentre todos los números n de dos cifras tales que n^{2019} deja residuo 3, cuando se divide entre 10.

11. Encuentre todos los números n de dos cifras tales que $\left(n^{2018}\right)^{2019}$ deja residuo 9, cuando se divide entre 10. ¿Cuáles de estos números son primos?

12. Encuentre todos los enteros positivos n de tres cifras tales que si a n se le suma el número formado al escribir las cifras de n en orden inverso, el resultado es 1372.

13. Encuentre todos los números de máximo cuatro cifras que son divisibles por 8, tales que la suma de sus dígitos es 7 y el producto de sus dígitos es 6.

14. ¿Cuántos números palíndromos de seis cifras son múltiplos de 3?

15. Si $x^4+y^4=12x^2y^2$, determine el valor de $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

16. En el rectángulo $ABCD$, los segmentos $\overline{ED}$ y $\overline{BC}$ trisecan al angúlo ADC. Halle el área del triángulo DCB, dado que $AD=2$ y $DC=4$.

17. Pruebe que al trazar todas la diagonales desde un vértice de un polígono regular con n lados, el ángulo interno del polígono correspondiente a este vértice queda dividido en $n-2$ ángulos congruentes.

18. Sean A, E y C tres puntos no colineales exteriores a una circunferencia, de modo que los segmentos $\overline{AE}$, $\overline{EC}$ y $\overline{AC}$ son tangentes a la circunferencia en los puntos F, D y B respectivamente. Si $AC + DC = 10$, $AE + AB = 10$ y $FE + EC + BC = 20$, determine el valor de AB, BC y FD.

19. De un tetraedo regular se extrae su esquina superior, en forma de tetraedro regular. Si el volumen de la pieza retirada representa $\frac{1}{8}$ del volumen del tetraedo original, ¿cuál es la razón entre la altura del tetraedro original y el tetraedro extraído?

20. Determine la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyo perímetro es $20\,cm$ y su área es $25\,cm^2$.

Nivel Avanzado

1. Sea n un número natural tal que su factorización prima es $n = p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times \cdots \times p_k^{n_k}$, esto es, los p_i son números primos distintos y los n_i son números enteros positivos.

   (a) Pruebe que la cantidad de divisores positivos de n está dada por $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_k + 1)$.

   (b) Determine el número de divisores positivos de cada uno de los siguientes números:

   - 2^5
   - 432
   - 831.600
   - 10^{1000}
   - 2020^{2019}
   - $20!$

   (c) Si p y q son números primos distintos, ¿cuántos números de la forma $p^q \times q^p$, tienen exactamente 48 divisores positivos? ¿Cuáles son?

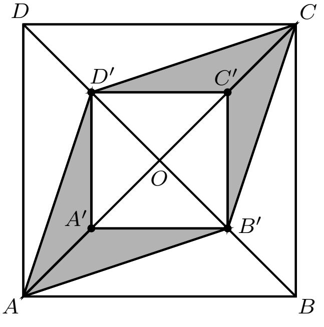
2. Una **mediana** de un triángulo es un segmento que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto a dicho lado. Es conocido que las tres medianas de un triángulo concurren en un punto llamando **baricentro**.

(a) Pruebe que al trazar una de las medianas de un triángulo, éste queda dividido en dos triángulos de igual área.

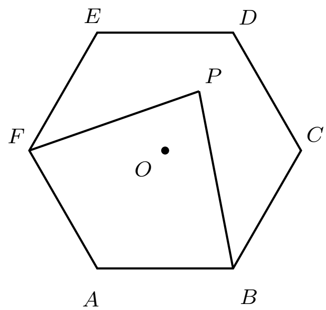
(b) Demuestre que al trazar las medianas de un triángulo, éste queda dividido en seis triángulos que tienen la misma área.

(c) Demuestre que el baricentro divide a cada mediana en dos segmentos; el segmento que une el baricentro con el vértice mide el doble que el segmento que une baricentro con el punto medio del lado opuesto.

3. $ABCD$ es un cuadrado de lado l. Si A', B', C', D' son puntos medios de $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$, $\overline{DO}$ respectivamente, calcule el área de la región sombreada.



4. En la siguiente figura, O es el centro del hexágono regular $ABCDEF$, P es el punto medio del segmento $\overline{OD}$ y $DC = 2\,cm$. Calcule el área del cuadrilátero $ABPF$.

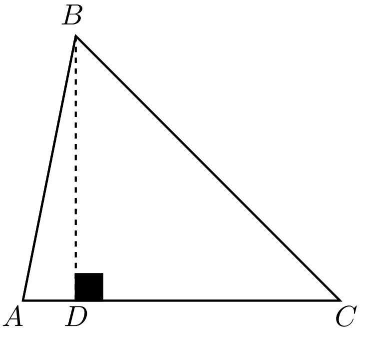


5. Sean a, b y c las longitudes de los lados del triángulo ABC, y m_a, m_b, m_c las longitudes de sus tres medianas. Demuestre que

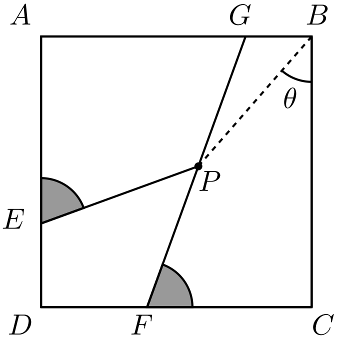
$$\frac{3}{4} < \frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c} < 1.$$

6. Sean a, b y c las raíces del polinomio $x^3 - 5x^2 + 3x - 8$. Determine el valor de la expresión $a \times b \times c \times (a + b + c)$.

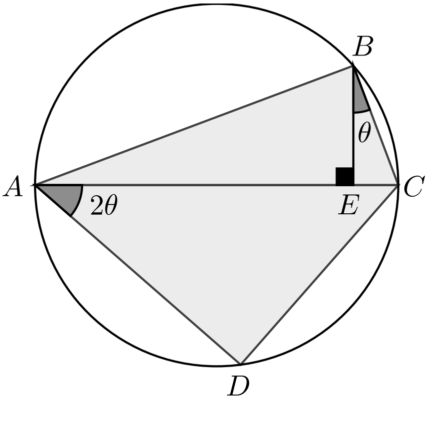
7. En la siguiente figura las medidas, en unidades de longitud $[u]$, de los tres lados del triángulo ABC son tres enteros consecutivos tales que $AB < AC < BC$ y $\overline{BD}$ es altura de este triángulo. Si a y b son las medidas (en unidades de longitud $[u]$) de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$, ¿cuál es el valor de $|a - b|$?



8. En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado, P es el punto medio del segmento $\overline{FG}$ y los ángulos sombreados son congruentes. Si $EP = x$ y $FP = y$, ¿cuál es el valor de $\tan \theta$?



9. En la siguiente gráfica el cuadrilátero $ABCD$ tiene sus vértices sobre la circunferencia de diámetro $\overline{AC}$. Si la altura $\overline{BE}$ del triángulo ABC mide 1 cm, ¿cuál es la longitud, en cm, del segmento $\overline{DC}$?



(a) 2 (b) $2\sqrt{2}$ (c) $2\csc(2\theta)$ (d) $\sin(2\theta)$

10. Si f es una función tal que $2f(x) - f(1-x) = x^2 - 1$, ¿cuál es la suma de las raíces de f?

11. Suponga que

$$\left(x^2+2x+1\right)^{50} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{99} x^{99} + a_{100} x^{100}.$$

Calcule

(a) la suma de los coeficientes que están en las posiciones pares en la expresión del lado derecho de la igualdad

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{98} + a_{100}.$$

(b) la suma de los coeficientes que están en las posiciones impares en la expresión del lado derecho de la igualdad

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{97} + a_{99}.$$

12. El número φ, conocido como *razón áurea*, es definido por

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Demuestre que para todo número natural n se tiene que

$$\varphi^n + \varphi^{n+1} = \varphi^{n+2}.$$

13. Pruebe que $1+n^2+n^4$ es compuesto para cualquier n en los enteros mayores que 1

14. Decimos que un número natural n es un número de **Edding** si la suma de sus divisores positivos es divisible entre 6. Dado cualquier número natural N, ¿cuántas potencias de 6 menores que N son números de **Edding**?

15. Sean $x_1, x_2, \cdots, x_{2018}$ reales positivos. Demuestre que

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2018}^2\right) \geq 2018 \left(x_1 \cdot x_2 \cdots x_{2018}\right)^{\frac{1}{1009}}.$$

16. La sucesión $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ \ldots$ es conocida como la sucesión de Fibonacci, la cual puede construirse recursivamente, así: $f_1 = f_2 = 1$ y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n \geq 2$. Se construye una sucesión de hexágonos regulares, tal que la longitud del lado del $n-$ésimo hexágono H_n es f_n. Demuestre que la sucesión cuyo $n-$ésimo término a_n es la medida del área del hexágono H_n está dada por: $a_1 = a_2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ y

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}, \quad \text{para } n \geq 2.$$

17. [Pierre Varignon, 1731.] Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Construya el cuadrilátero $EFGH$ cuyos vértices son los puntos medios de los lados de $ABCD$. Demuestre que:

    (a) $EFGH$ es un paralelogramo.

    (b) El área de $EFGH$ es la mitad de $ABCD$.

18. [Vincenzo Viviani, 1659.] Sea ABC un triángulo equilátero. Pruebe que cualquiera que sea P un punto en el interior de ABC, la suma de las distancias desde P hasta los lados de ABC es siempre la misma, esto es, no depende de la manera en que sea escogido P.

19. En los siguientes numerales use el principio de inducción matemática para demostrar que la fórmula o afirmación dada se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

    - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$
    - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$
    - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$
    - $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n(n+1).$
    - $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$
    - $1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$, con $a \neq 1$.

- $2^n \geq 2n$.
- $n! > 3^{n-2}$, para $n \geq 3$.
- $2n + n^3$ es divisible entre 3.
- $3^{2n} + 7$ es divisible entre 8.
- **Fórmula de Moivre** $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.
- Pruebe que el número total de diagonales de un polígono convexo de n $(n \geq 3)$ lados es $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Apéndice B

Cuadro de Honor

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la Undécima versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Secundaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 5032 participantes del certamen, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

NIVEL BÁSICO

PUESTO	MEDALLA	PARTICIPANTE
1.^{o}	ORO	*Diego Alejandro Lozano Duarte* *Colegio Campestre Celestín Freinet, Piedecuesta.*
2.^{o}	PLATA	*Isabella Rodríguez Barrera* *Colegio La Quinta del Puente, Floridablanca.*
3.^{o}	BRONCE	*Juan Esteban Mantilla Núñez* *Colegio Bilingüe Divino Niño, Bucaramanga.*
4.^{o}		*Luisa Fernanda Caballero Poveda* *ASPAEN Gimnasio Cantillana, Piedecuesta.*
5.^{o}		*Iván David Gómez Silva* *Colegio San Pedro Claver, Bucaramanga.*

NIVEL MEDIO

PUESTO	MEDALLA	PARTICIPANTE
1.^{o}	ORO	*Joseph Yacid Pino Villán* *Colegio José Eusebio Caro, Ocaña.*
2.^{o}	PLATA	*Valentina Gómez Aguirre* *Colegio La Quinta del Puente, Floridablanca.*
3.^{o}	BRONCE	*Brandon Alexander Jaimes Ortiz* *Escuela Normal Superior Sady Tobón Calle, Cerrito.*
4.^{o}		*Juan José Parra Viviescas* *Col. Técnico Nuestra Señora de La Presentación, San Gil.*
5.^{o}		*Juan Felipe Hoyos Muñoz* *Colegio San Pedro Claver, Bucaramanga.*

NIVEL AVANZADO

PUESTO	MEDALLA	PARTICIPANTE
1.^{o}	ORO	*Juan Felipe Prieto Mateus* *Colegio La Quinta del Puente, Floridablanca.*
2.^{o}	PLATA	*Dayana Valentina Mojica Ballesteros* *Colegio La Quinta del Puente, Floridablanca.*
3.^{o}	BRONCE	*Juan Andrés Guarín Rojas* *Colegio Técnico Vicente Azuero, Floridablanca.*
4.^{o}		*Juanita Robles Ariza* *Colegio La Quinta del Puente, Floridablanca.*
5.^{o}		*Juan Esteban Flórez García* *Colegio Cooperativo Comfenalco, Bucaramanga.*

Apéndice C

Cuadernillos

Bibliografía

[1] Bolaños W. *Problemas y Soluciones Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas Universitaria 1998-2019.* Universidad Antonio Nariño y Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[2] Brochero F. y Restrepo J. *Un recorrido por la Teoría de Números.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[3] Gómez J., Valdez R. y Vázquez R. *Principio de las Casillas.* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2011.

[4] Hemmerling E. *Geometría Elemental.* Bakersfield College. Limusa, México, 2009.

[5] Jiménez L., Gordillo J. y Rubiano G. *Teoría de números para principiantes.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2004.

[6] Madroñero J y Contreras I. *Un recorrido por el Álgebra.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[7] Soberón P. *Combinatoria para olimpiadas* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2010.

[8] Restrepo P. *Un recorrido por la Combinatoria I.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2010.

[9] Valderrama A. y González E. *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Nivel Intermedio 2010* Universidad Antonio Nariño, 2010

[10] Valderrama A. y González E. *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Primer Nivel 2010* Universidad Antonio Nariño, 2010.

ORM Olimpiadas Regionales de Matemáticas

EDUMAT

SEA Sistema de apoyo a la excelencia académica

IPRED Educación interactiva y abierta al liderazgo

Vicerrectoría Académica

Universidad Industrial de Santander

"VIGILADA MINEDUCACIÓN"