10.as Olimpiadas Regionales de Matemáticas

Primaria 2021

Henry Dudeney (1857 - 1930)
Inglaterra, Reino Unido

INFORMES
olimpiadas@matematicas.uis.edu.co
Tel.: 6450301, 6344000 Ext.: 2316, 2583, 2581
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

ORM Olimpiadas Regionales de Matemáticas
Grupo Educación Matemática UIS EDUMAT
SEA Sistema de apoyo a la excelencia académica
IPRED Instituto de Proyección Regional y Educación a Distancia – Educación interactiva y abierta al liderazgo
Vicerrectoría Académica
Universidad Industrial de Santander
"VIGILADA MINEDUCACIÓN"

Décimas Olimpiadas Regionales de Matemáticas Primaria

Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga

2021

Elaboración y edición

Grupo Olimpiadas Regionales de Matemáticas - 2021.

Directora

Adriana Alexandra Albarracín Mantilla

Coordinador

Jorge Eliécer Gómez Ríos

Monitores

Álvaro Javier Riaño Blanco

Jamir Santiago Castellanos Mantilla

Jesús David Acero Rueda

Johan Sebastián Cortés Villamizar

José Camilo Rueda Niño

Julián Enrique Neira Díaz

Liber Andrés Moreno Ariza

Introducción

"El hecho es que nuestras vidas se dedican en gran parte a resolver acertijos; porque ¿qué es un rompecabezas sino una pregunta desconcertante? Y desde nuestra infancia en adelante estamos perpetuamente haciéndonos preguntas o tratando de responderlas.
(...)
La resolución de acertijos consiste simplemente en el empleo de nuestras facultades de razonamiento".

Henry Dudeney.

La Universidad Industrial de Santander, como institución de educación superior del ámbito regional, forma ciudadanos como profesionales integrales, éticos, con sentido político e innovadores; apropia, utiliza, crea, transfiere y divulga el conocimiento por medio de la investigación, la innovación científica, tecnológica y social, la creación artística y la promoción de la cultura, buscando de este modo el fortalecimiento de una sociedad democrática, participativa, deliberativa y pluralista, con justicia y equidad social, comprometida con la preservación del medio ambiente y el buen vivir.

En el marco de esta misión institucional, la Escuela de Matemáticas ofrece a la sociedad santandereana y de la región de influencia de la Universidad, un escenario de alta calidad para el cultivo de las matemáticas, promoviendo entre los integrantes de la comunidad académica una actitud creativa y rigurosa, y construyendo un ambiente académico basado en la solidaridad, la empatía y el reconocimiento de los otros en su dignidad humana. Es por esta razón que, desde sus inicios, la Escuela de Matemáticas se ha comprometido con la educación matemática, no solo por la calidad reconocida a nivel nacional e internacional de los egresados de sus programas académicos de pregrado y posgrado, sino también por su participación activa y crucial en la formación de los estudiantes de otros programas de la Universidad.

Como parte de su responsabilidad académica y su proyección social frente a los diversos retos en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las habilidades matemáticas en el nororiente colombiano, la Escuela de Matemáticas ha diseñado y ejecutado desde el 2009, el proyecto Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (ORM-UIS), para secundaria y primaria, a través del fortalecimiento de las competencias matemáticas de los estudiantes y la capacitación simultánea de los profesores que orientan dichos procesos. Incluso, en esta oportunidad, para el año 2020, haciendo esfuerzos logísticos y financieros, dio continuidad al proyecto, como una manera de contribuir a la "normalidad" que nos tocó a todos inventarnos, para no dejar de encontrarnos alrededor de nuestra pasión en común por los números. Las ORM-UIS abordan cinco (5) áreas, a saber: i) teoría de números; ii) combinatoria; iii) álgebra, iv) lógica, y v) geometría. Por otra parte, las ORM-UIS se desarrollan en tres (3) niveles, según el grado de escolaridad de los participantes, de la formación en básica primaria, así:

- **Nivel Básico:** grado tercero,
- **Nivel Medio:** grado cuarto,
- **Nivel Avanzado:** grado quinto.

La cartilla que tiene en sus manos compendia los problemas matemáticos propuestos por el equipo de trabajo de las ORM-UIS en las distintas fases de la Décima versión del certamen, desarrollada durante el segundo semestre de 2021, dirigido a estudiantes de educación básica primaria. En esta oportunidad se contó con la participación de 101 colegios, para un total de 3743 estudiantes en competencia, provenientes de 28 municipios del nororiente colombiano.

En esta versión las ORM-UIS, como siempre lo hace con alguien en especial, destacó la vida y obra del matemático británico Henry Dudeney $(1857 - 1930)$, famoso por su capacidad para popularizar el pensamiento matemático a través de acertijos y rompecabezas, lo que le acarreó conocimiento mundial y el cariño de millones de ciudadanos, comunes y corrientes, que disfrutaban de las matemáticas, a través de sus retos. Ese componente lúdico y creativo de su especial amor a los números, es el que resaltamos en esta oportunidad, así como la invitación a conocer sus divertimentos matemáticos.

Este documento consta de tres (3) capítulos, cada uno correspondiente a un nivel de la competencia: nivel básico, nivel medio y nivel avanzado. En cada uno de ellos el lector encontrará los problemas y la correspondiente solución, de las distintas soluciones que puede tener cada uno. Por esa razón, el equipo de trabajo de las ORM-UIS recomienda e incentiva a quien desee enfrentar nuevamente estos problemas, a descubrir y proponer, métodos alternativos de solución que se destaquen por su sencillez, ingenio y belleza matemática.

La Escuela de Matemáticas, a través del Grupo de Investigación en Educación Matemática de la UIS (EDUMAT), reconoce la labor esencial del maestro en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las competencias matemáticas de los estudiantes, y por ello elabora esta cartilla para su utilización en el aula de clase, que incluye, también, la preparación y discusión creativa entre pares en los espacios de formación docente. Esperamos que los participantes de la educación básica primaria, los profesores, y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, disfrute tanto como nosotros lo hicimos, el hermoso y milenario ejercicio del pensamiento matemático.

Las ORM-UIS no son una mera competencia, implican una puesta en escena colectiva para que los niños, niñas y adolescentes desplieguen sus capacidades, fortalezcan sus habilidades y se reconozcan como sujetos capaces de enfrentar problemas y solucionarlos. Esto psicológicamente fomenta la autopercepción como sujetos con comprensión de su entorno, y esa es la exigencia que hace hoy la humanidad. Creemos firmemente que allí debemos dirigir todos nuestros esfuerzos, al fortalecimiento de ciudadanías que, gracias al pensamiento crítico que se desarrolla desde el ejercicio matemático, puedan enfrentarse a la diversidad de problemáticas que enfrenta la sociedad actual y que requieren de una mirada no solo crítica, sino, además, creativa para ser solucionadas.

El proyecto ORM- UIS agradece y destaca al grupo de estudiantes que participaron de esta versión, y que han demostrado ser capaces de asumir el reto de pensar y sentir problemas sencillos y bellos de matemáticas, con pasión y con rigor, a pesar de los innumerables desafíos que la pandemia por la COVID-19 trajo para todos nosotros en este año.

Índice general

Capítulo 1

Nivel Básico

1.1. Prueba Clasificatoria

Problema 1.

Dana tiene más juguetes que Sofía, la diferencia entre el número de juguetes es 10. Si le regalan 3 juguetes más a Dana, y Sofía cede 2 juguetes a su hermanito, entonces la diferencia entre los juguetes con los que quedan Dana y Sofía

(a) disminuye en 5.

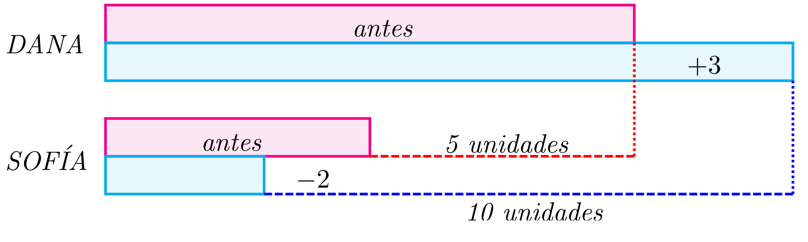
(b) aumenta en 5.

(c) aumenta en 1.

(d) disminuye en 1.

(e) No sé

Solución 1: Observe el siguiente diagrama



Del diagrama podemos deducir que la diferencia entre los juguetes con los que quedan Dana y Sofía, aumenta en 5 unidades.

Solución 2: Suponga que Dana tiene 10 *juguetes, entonces Sofía debe tener* 5. *Ahora, a Dana le regalan* 3, *luego ella queda con* 13, *mientras que Sofía cede* 2, *así que queda con* 3. *Note que la nueva diferencia es* $13 - 3 = 10$. *Como antes la diferencia era* 5, *entonces concluimos que la diferencia entre los juguetes con los que quedan Dana y Sofía, aumenta en* 5 *unidades.*

PROBLEMA 2.

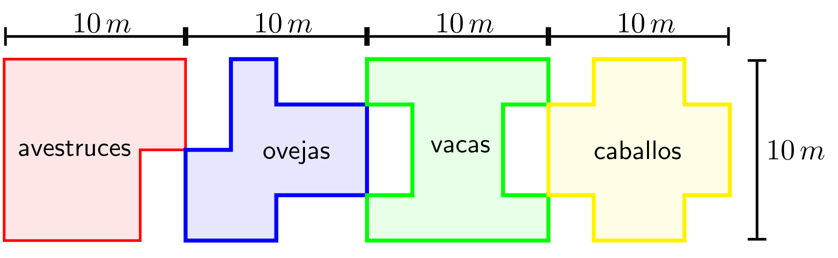
Samuel, muy despistado, compró 260 zapatos del mismo diseño y talla, pero 180 de estos son del pie izquierdo, y el resto del pie derecho. ¿Cuántos pares funcionales de zapatos compró Samuel?

(a) 80 (b) 130 (c) 180 (d) 90 (e) No sé

Solución: Hay 260 *zapatos individuales, de estos* $260 - 180 = 80$ *son del pie derecho, y como hay* 180 *zapatos del pie izquierdo. Entonces para cada zapato derecho existe un zapato izquierdo, luego hay* 80 *pares de zapatos funcionales.*

PROBLEMA 3.

El granjero Euclides construyó corrales para sus cuatro especies de animales, como se muestra a continuación:



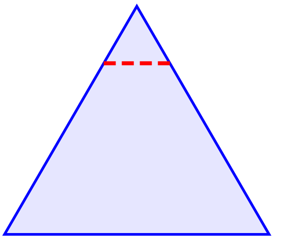
¿Cuál de los corrales tiene el mayor perímetro?

(a) avestruces (b) ovejas (c) vacas (d) caballos (e) No sé

Solución: De los cuatro corrales, el que más perímetro tiene es el de las vacas. Note que el perímetro de cada uno de los demás corrales es $40\,m$, *pero el de las vacas es mayor a* $40\,m$.

PROBLEMA 4.

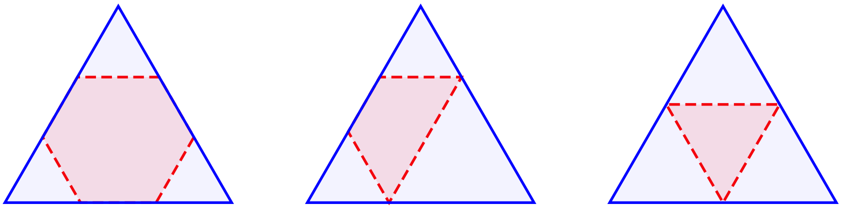
David eliminó las tres esquinas de un triángulo, con tres cortes paralelos a sus lados, como el que se muestra en la figura.



¿Cuántas diagonales como máximo tiene el polígono resultante?

(a) 15 (b) 18 (c) 6 (d) 9 (e) No sé

Solución: Al recortar las esquinas del triángulo como indica el enunciado, se pueden obtener polígonos como se muestra a continuación:



De los que se pueden obtener, el que más tiene diagonales es el hexágono, por lo tanto el número máximo de diagonales que tiene el polígono resultante es 9.

PROBLEMA 5.

Hay dos números naturales de dos cifras escritos en el tablero. El producto de sus dígitos de las unidades es 14 y el producto de sus dígitos de las decenas es 3. ¿Cuánto es la suma de los números en el tablero?

(a) 17 (b) 42 (c) 44 (d) 49 (e) No sé

Solución: Si el producto de sus dígitos de las unidades es 14 *entonces estos son* 2 *y* 7*, y a su vez, como el producto de sus dígitos de las decenas es* 3*, estos son* 1 *y* 3*. Los números son* 12 *y* 37*, o* 32 *y* 17*. En cualquier caso la suma es* 49.

Problema 6.

¿Cuántos números mayores que 2021 de 4 cifras existen tales que el producto de sus dígitos es 27?

(a) 9 (b) 12 (c) 16 (d) 20 (e) No sé

Solución: Las posibilidades para obtener 27 *al multiplicar cuatro dígitos son:* $3\times 3\times 3\times 1$ *o* $3\times 9\times 1\times 1$. *Tomando los factores de cada caso, podemos formar* 9 *números que cumplen las condiciones del enunciado, a saber:*

3133	3911	9311
3313	3191	9131
3331	3119	9113

1.2. Prueba Selectiva

PROBLEMA 1.

Ariana, Andrea y Adriana ven una foto de hace tiempo, su mamá, Mónica, les dice que cuando se tomó la foto la edad de Adriana era el triple que la de Andrea. Ariana es 2 años menor que Andrea. Si Ariana tiene 13 años, y la foto fue tomada hace 5 años, ¿cuántos años tiene Adriana?

(a) 30 (b) 35 (c) 40 (d) 45 (e) No sé

Solución: Hace 5 años Ariana tenía 8 años, luego Andrea tenía 10, y Adriana 30. En la actualidad Adriana tiene 35 años.

PROBLEMA 2.

Se dice que una cuadrícula es mágica cuando la suma de los números en cada fila, en cada columna y en cada diagonal es la misma. Por ejemplo la siguiente cuadrícula 3×3 es mágica:

4	3	8
9	5	1
2	7	6

De cierta cuadrícula mágica 5×5 sabemos que la suma de los números en una de sus diagonales es 59, y que los números de cuatro de sus casillas son: 12, 10, 8 y 19. ¿Cuánto es la suma de los números que están en las casillas restantes?

(a) 49 (b) 236 (c) 246 (d) 295 (e) No sé

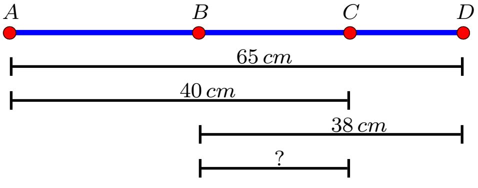
Solución: La suma de los números en cada fila es 59, y hay 5 filas, entonces la suma de todos los números en el cuadrado es $59 \times 5 = 295$, a esto le restamos la suma de los números que se conocen, $12 + 10 + 8 + 19 = 49$, y así, la suma de los números en las casillas restantes es $295 - 49 = 246$.

Problema 3.

Cuatro palomas están posadas de izquierda de derecha sobre una cuerda. La distancia entre la primera y la última paloma es $65\,cm$, entre la primera y la tercera es $40\,cm$, y entre la segunda y la cuarta es $38\,cm$. ¿Cuál es la distancia entre la segunda y la tercera?

(a) $25\,cm$ (b) $13\,cm$ (c) $27\,cm$ (d) $2\,cm$ (e) No sé

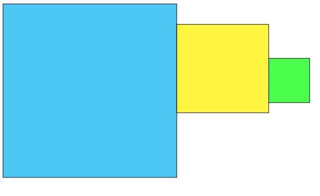
Solución: Considere la siguiente ilustración, en la que A, B, C y D representan la primera, segunda, tercera y cuarta paloma, respectivamente.



Note que al sumar $AC + BD = 40 + 38 = 78$, se obtiene la longitud total e la cuerda AD más la distancia BC, por lo tanto la distancia entre la segunda y tercera paloma está dada por: $BC = (AC + BD) - AD = 78 - 65 = 13\,cm$.

Problema 4.

En la siguiente figura, el área de cada cuadrado, salvo el más pequeño, es el cuádruple del que le sigue a la derecha. Si el área del cuadrado amarillo es $16\,cm^2$, ¿cuál es el perímetro de toda la figura?



(a) $84\,cm$ (b) $56\,cm$ (c) $50\,cm$ (d) $44\,cm$ (e) No sé

Solución: Dado que el área del cuadrado del medio es $16\,cm^2$, el área del cuadrado grande es $64\,cm^2$ y el área del pequeño es $4\,cm^2$. A partir de las áreas, el lado del cuadrado grande mide $8\,cm$, el del mediano, $4\,cm$; y el del pequeño $2\,cm$. Para hallar el perímetro de la figura, consideramos la suma de los perímetros de *los cuadrados, y a esta le restamos dos veces el lado del cuadrado mediano, y dos veces el lado del cuadrado pequeño, pues estos lados corresponden al contacto entre los cuadrados. Por lo anterior, el perímetro de la figura es*

$$4 \times 8 + 4 \times 4 + 4 \times 2 - 2 \times 4 - 2 \times 2 = 56 - 12 = 44\, cm.$$

Problema 5.

En un banco, los clientes toman un ficho para ser atendidos, de esta manera van quedando enumerados desde el 1 y son atendidos según el orden de estos números, del menor al mayor. Cada vez que un cliente es atendido, debe sumar el número de su ficho al número que se encuentra en un tablero, borrar el número que estaba en el tablero y escribir el nuevo resultado. Al iniciar cierto día, estaba escrito un número impar en el tablero, si este día fueron atendidos todos los clientes que tomaron ficho, es correcto afirmar que en este día,

(a) si el ficho de un cliente era múltiplo de 2 pero no de 4, entonces este cliente escribió un número impar.

(b) solo los clientes que tenían un ficho múltiplo de 4 escribieron números impares en el tablero.

(c) la suma de los números escritos en tablero por los clientes con fichos 1002 y 2021 es par.

(d) todos los clientes con ficho par escribieron un número par en el tablero.

(e) No sé.

Solución: Considere la siguiente tabla, en la que I indica que el número escrito en el tablero es Impar y P que es par. Tenga en cuenta que

- *Par+Par=Par,*
- *Par+Impar=Impar,*
- *Impar+Impar=Impar.*

Tablero	I	P	P	I	I	P	P	I	I	P	P
Ficho	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
Nuevo Tablero	P	P	I	I	P	P	I	I	P	P	

Note que en la secuencia de la paridad de los números escritos por los clientes en el tablero se repite el bloque $PPII$ cada cuatro turnos. con esto en mente, analicemos la veracidad de cada opción de respuesta:

(a) *Es* Falsa, *por ejemplo el cliente con el ficho* 2 *escribió un número par.*

(b) *Es* Falsa, *ya que no SOLO los que tenían ficho múltiplo de* 4 *escribieron números impartes, por ejemplo el cliente con el ficho* 3 *también escribió un número impar.*

(c) *Es* Verdadera, *note que* $1002 = 4 \times 250 + 2$ *excede en* 2 *a un múltiplo de* 4, *luego el cliente con este ficho escribió un número* PAR, *además* $2021 = 4 \times 505 + 1$, *esto es un múltiplo de* 4 *más* 1, *luego el cliente con este ficho también escribió un número* PAR *en el tablero. Así la suma de los números escritos por estos dos clientes es* $PAR + PAR = PAR$.

(d) *Es* Falsa, *por ejemplo el cliente con el ficho* 4 *también escribió un número impar.*

Problema 6.

Javier tiene un paquete de dulces. Si los reparte junto con sus nueve amigos en cantidades iguales le sobran 5. Se van cuatro amigos pero llega otro, si los reparte nuevamente le sobran también 5. Si el paquete de dulces tiene menos de 100 dulces y más de 10, ¿cuánto es la suma de los dígitos de la cantidad de dulces?

(a) 5 (b) 12 (c) 8 (d) 14 (e) No sé

Solución: La cantidad de dulces quitándole 5 *es múltiplo de* 10 *y a su vez múltiplo de* 7, *es decir, múltiplo de* 70. *Si agregamos los* 5 *que quitamos en un inicio, tenemos que la bolsa trae* 75 *dulces, entonces la suma de sus dígitos es* 12.

1.3. Prueba Final

PROBLEMA 1.

Ana escribe todos los números naturales desde el 1 hasta el 100, Bruno calcula el producto de las cifras para cada uno de estos números y Camila suma los resultados que obtuvo Bruno. ¿Cuál es el resultado que obtuvo Camila?

Solución: La suma de los productos de las cifras de los números del 1 *al* 10 *es* 45 *y la suma de los productos de las cifras del* 11 *al* 20 *es la misma. Ahora, note que la suma de los productos de las cifras de los números del* 21 *al* 30 *es el doble de la suma de los productos de las cifras del* 1 *al* 10*, es decir* $2 \times 45 = 90$.

Número	*Prod. cifras*
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	0
SUMA	45

Número	*Prod. cifras*
11	1
12	2
13	3
14	4
15	5
16	6
17	7
18	8
19	9
20	0
SUMA	45

Número	*Prod. cifras*
21	4
22	4
23	6
24	8
25	10
26	12
27	14
28	16
29	18
30	0
SUMA	$45 \times 2 = 90$

Análogamente, la suma de los productos de las cifras de los números del 31 *al* 40 *es el triple de la suma de los productos de las cifras del* 1 *al* 10*, es decir* $3 \times 45 = 135$.

Continuando de este modo tenemos que la suma de los productos de las cifras de los números:

- *del* 41 *al* 50 *es* $4 \times 45 = 180$,
- *del* 51 *al* 60 *es* $5 \times 45 = 225$,
- *del* 61 *al* 70 *es* $6 \times 45 = 270$,
- *del* 71 *al* 80 *es* $7 \times 45 = 315$,
- *del* 81 *al* 90 *es* $8 \times 45 = 360$,
- *del* 91 *al* 100 *es* $9 \times 45 = 405$.

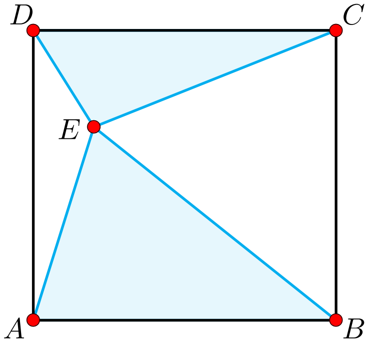
Por lo tanto, el resultado que obtuvo Camila es:

$$45 + 45 + 90 + 135 + 180 + 225 + 270 + 315 + 360 + 405 = 2070,$$

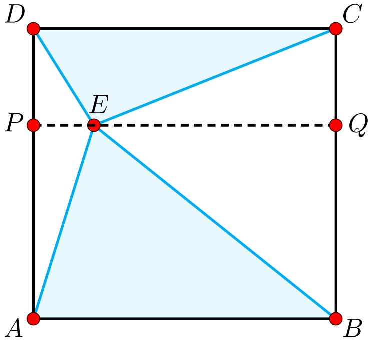
o lo que es lo mismo: $46 \times 45 = 2070$.

PROBLEMA 2.

El área del cuadrado $ABCD$ es $30\,cm^2$. La altura del triángulo ABE respecto a $\overline{AB}$ es el doble de la altura del triángulo ECD respecto a $\overline{CD}$. ¿Cuánto es el área del triángulo CDE en centímetros cuadrados?



Solución: *Consideremos el segmento* $\overline{PQ}$ *paralelo a* $\overline{AB}$ *que pasa por* E*, como se muestra a continuación:*

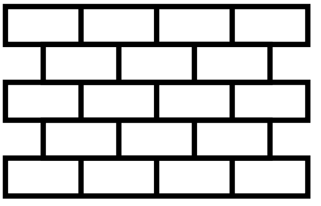


El cuadrado $ABCD$ *queda dividido en dos rectángulos,* $CDPQ$ *de área* $10\,cm^2$ *y* $ABQP$ *de área* $20\,cm^2$*, estas áreas las conocemos pues el área de* $ABCD$ *es* $30\,cm^2$ *y el área de* $ABQP$ *es el doble del área de* $CDPQ$ *ya que la altura de*

ABE respecto a $\overline{AB}$ es el doble de la altura de ECD respecto a $\overline{CD}$. Finalmente, el área de ECD es la mitad del área de $CDPQ$ pues la altura de ECD respecto a $\overline{CD}$ es CQ, por lo tanto el área de ECD es $5\,cm^2$.

Problema 3.

Hermes debe construir un muro con 18 bloques como se muestra a continuación:



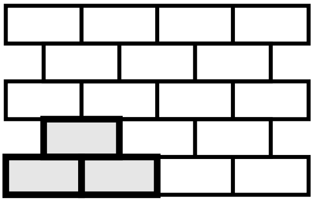
Para ello dispone de bloques de tres colores: amarillo, azul y rojo. Los bloques amarillos cuestan $\$900$, los azules $\$1000$ y los rojos $\$800$. Si desea que en el muro cada bloque tenga color diferente al de sus bloques vecinos,

(a) ¿de cuántas formas puede elegir los colores de cada bloque en el muro?

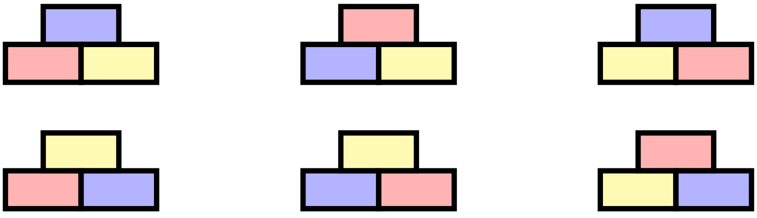
(b) ¿cuál es la mínima cantidad de dinero que necesita Hermes para comprar los bloques necesarios para la construcción del muro?

Solución:

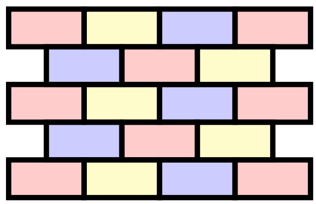
(a) *Observe que, basta elegir el color de los ladrillos resaltados a continuación, pues una vez se eligen los colores de estos, inmediatamente quedan determinados los colores de los demás.*



Ahora bien, teniendo solo los colores: amarillo, azul y rojo, los colores de *los tres ladrillos resaltados se pueden elegir de* 6 *formas, así:*



(*b*) *Tomando una de las opciones anteriores para pintar todo el muro tenemos:*



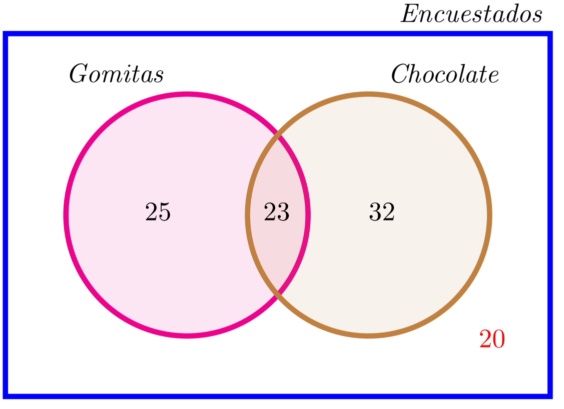
De este modo vemos que siempre quedarán 8 *ladrillos de un color y* 5 *de cada uno de los otros dos colores. Pero sabemos que los ladrillos rojos son los más económicos, por o tanto, la mínima cantidad de dinero que necesita Hermes para comprar los bloques del muro es*

$$800 \times 8 + 5 \times 1000 + 5 \times 900 = \$15{,}900.$$

Problema 4.

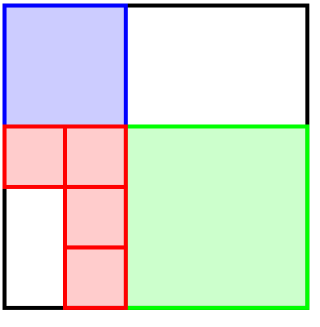
Una encuesta a 100 personas registraba si les gustaba el chocolate o las gomitas. De las personas encuestadas, $\frac{1}{5}$ dijo no gustarle ninguna de las dos opciones; 55 afirmaron que les gustaba el chocolate y 48 que les gustaban las gomitas. ¿A cuántas personas les gustaban ambas golosinas?

Solución: Se nos dice que $\frac{1}{5}$ *de los encuestados, esto es* 20 *personas, dijeron no gustarle ninguna de las dos opciones; por lo que las* 80 *restantes dijeron que les gustaba al menos una de las dos opciones. Llamemos* x *al número de personas que les gustaban ambas golosinas,* $55 - x$ *son las personas que solo les gustaba el chocolate y* 48 *son las que les gustaba las gomitas (sin necesariamente excluir el chocolate), así,* $55 - x + 48 = 80$*, entonces* $x = 23$*, es decir, a* 23 *personas* *les gustaban ambas golosinas. Lo anterior, se puede organizar en el siguiente diagrama de Venn:*

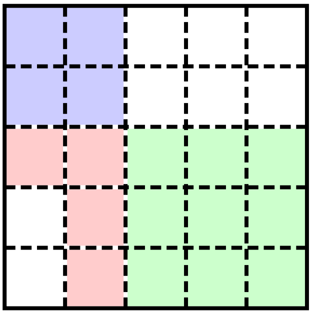


Problema 5.

El piso cuadrado de una piscina se ha cubierto parcialmente con tabletas cuadradas de colores como se muestra en la figura. Si el área del piso que falta por cubrir es $16\,m^2$, ¿cuántos metros cuadrados mide el área total del piso de la piscina?



Solución: Dividiendo el piso de la piscina como se muestra a continuación, notamos que la región que falta por cubrir equivale a 8 *cuadraditos de los rojos, es decir que cada cuadradito rojo tiene* $16 \div 8 = 2\,cm^2$ *de área. Por lo tanto, el área de todo el piso, que equivale al área de* 25 *de estos cuadraditos, es:* $25 \times 2 = 50\,cm^2$.



Problema 6.

En la enumeración de los atletas de una maratón se usaron 171 unos. Si la enumeración inicia en 1, ¿cuántos atletas había en la maratón?

Solución: *En la enumeración del* 1 *al* 9 *solamente se usa* 1 *uno; del* 10 *al* 19 *se usan* 11 *unos; del* 20 *al* 99 *se usan* 8 *unos; hasta aquí van* 20 *unos. Ahora, note que los números del* 100 *al* 199 *son los mismos números que hay del* 1 *al* 99 *agregando un* 10 *o un* 1 *a cada uno de ellos, por lo tanto del* 100 *al* 199 *se usan* $100 + 20 = 120$ *unos. Del mismo modo, tenemos que del* 200 *al* 299 *hay* 20 *unos. Así, desde el* 1 *hasta el* 299 *se usaron* 160 *unos. Pero en la enumeración de los atletas se usaron* 171 *unos, es decir falta* 11 *unos; luego en la maratón habían* 318 *atletas.*

Numeración	*Cantidad de unos*
del 1 *al* 9	1
del 10 *al* 19	11
del 20 *al* 99	8
del 100 *al* 199	120
del 200 *al* 299	20
del 300 *al* 309	1
del 300 *al* 318	10
del 1 *al* 318	171

Capítulo 2

Nivel Medio

2.1. Prueba Clasificatoria

Problema 1.

En una granja en la que hay 50 aves, se sabe que solo 13 aves tienen el plumaje blanco, y 32 son hembras. Si solo 5 hembras tienen el plumaje blanco, ¿cuántos machos no tienen el plumaje blanco?

(a) 8 (b) 10 (c) 18 (d) 27 (e) No sé

Solución: *De las* 50 *aves,* 32 *son hembras, esto es* $50 - 32 = 18$ *son machos. Por otra parte, de las* 50 *aves, solo* 13 *tienen el plumaje blanco, y de estas solo* 5 *son hembras, por lo tanto hay* $13 - 5 = 8$ *machos con plumaje blanco. Por lo anterior, el número de machos que no tienen el plumaje blanco son* $18 - 8 = 10$.

El siguiente diagrama de Carroll permite visualizar toda la información.

	Blancos	*No blancos*	*Total*
Hembras	5	27	32
Machos	8	10	18
Total	13	37	50

PROBLEMA 2.

La profesora de matemáticas escribió una lista de números en el tablero. Como tarea, cada estudiante debía hacer la suma de estos números. Felipe copió mal uno de los números en su cuaderno, en lugar de escribir 132, escribió 123, y por ello el resultado que obtuvo fue 2021. ¿Cuál es el resultado correcto?

(a) 1898 (b) 2012 (c) 2030 (d) 2153 (e) No sé

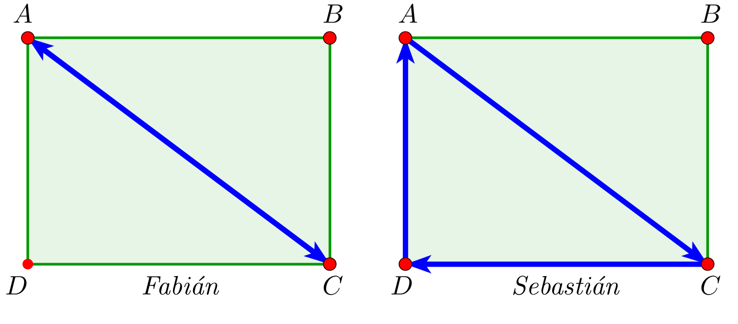
Solución: Al resultado incorrecto obtenido por Felipe, restamos el número incorrecto $2021 - 123 = 1898$, *y a este resultado le sumamos el número correcto* $1898 + 132 = 2030$, *obteniendo de este modo el resultado correcto.*

PROBLEMA 3.

En la clase de educación física harán una prueba en la cancha rectangular $ABCD$ del colegio. Empieza Fabián, desplazándose en línea recta desde A hasta C, y se devuelve corriendo. Le sigue Sebastián, desplazándose en línea recta, desde A hasta C, luego desde C hasta D, y por último desde D hasta A. Fabián recorrió $26\,m$ y Sebastián $31\,m$. Si Jaime tiene que correr por todo el perímetro de la cancha hasta volver a su posición inicial, ¿cuántos metros recorrerá?

(a) 10 (b) 29 (c) 36 (d) 62 (e) No sé

Solución 1: Considere la siguiente ilustración de los recorridos de Fabián y Sebastián:



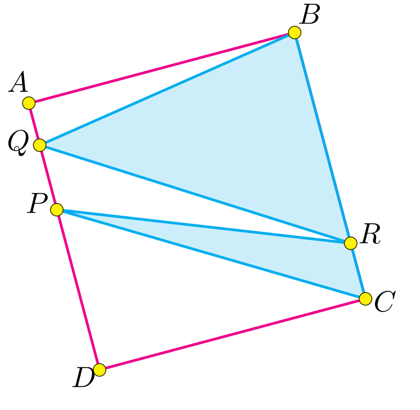
Por tratarse de un rectángulo, el perímetro de la cancha es 2 *veces lo que recorrió*

Sebastián, menos 2 veces la diagonal $\overline{AC}$, esto es lo que recorrió Fabián. De modo que los metros que Jaime recorrerá son: $2 \times 31\,m - 26\,m = 36\,m$.

Solución 2: En términos de segmentos, $AC = 13\,m$ *y* $AC + CD + AD = 31,m$. *Luego,* $\overline{CD} + \overline{AD} = 18\,m$. *El perímetro de la cancha del colegio por ser un rectángulo es:* $AB + BC + CD + AD = 2 \times (CD + AD) = 36\,m$. *Por lo tanto, Jaime recorrerá* $36\,m$.

Problema 4.

En la siguiente figura, el perímetro del cuadrado $ABCD$ es $24\,cm$, el punto R está sobre $\overline{BC}$, y los puntos P y Q están sobre $\overline{AD}$. ¿Cuánto es la suma de las áreas de los triángulos coloreados en azul?

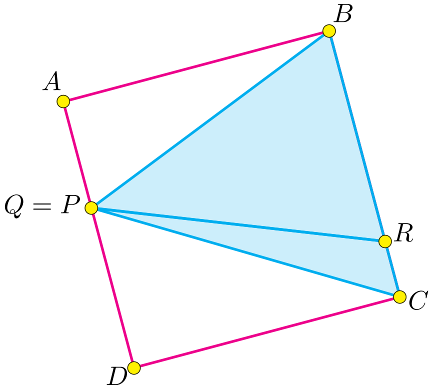


(a) 18 cm^2 (b) 21 cm^2 (c) 24 cm^2 (d) 15 cm^2 (e) No sé

Solución 1: Dado que el perímetro del cuadrado es 24, *entonces cada uno de sus lados mide* $6\,cm$. *Note que la altura de dichos triángulos, respecto a sus bases* $\overline{BR}$ *y* $\overline{RC}$, *es* AB. *Por lo tanto, la suma de las áreas de los triángulos es:*

$$\frac{AB \times BR}{2} + \frac{AB \times RC}{2} = \frac{AB}{2}(BR + RC) = \frac{6 \times 6}{2} = 18\,cm^2.$$

Solución 2: Como no hay restricciones adicionales a que los triángulos no se sobrepongan, consideremos que P *y* Q *son el mismo punto, luego ambos triángulos forman un triángulo de base* $BC = 6\,cm$ *y altura* $AB = 6\,cm$, *con un área de* $18\,cm^2$, *como se muestra en la figura:*



Problema 5.

David usa en total 15 aros para representar un número en el ábaco. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones, con seguridad, son correctas?

I. El número es múltiplo de 3.

II. El número es múltiplo de 5.

III. El número es mayor que 60.

IV. El número es impar.

(a) I y II. (b) I y III. (c) III y IV. (d) Todas son correctas. (e) No sé

Solución: Dado que el el total de aros usados para representar el número en el ábaco es 15, *entonces la suma de las cifras de este número es* 15 *y por lo tanto el número es múltiplo de* 3, *luego la afirmación I. es correcta.*

Por otra parte, en cada columna del ábaco puede haber, como máximo, 9 *aros. De modo que, el menor número que puede ser representado con* 15 *aros es el* 69, *con* 9 *aros en la columna de las unidades y* 6 *aros en la columna de las decenas, así que la afirmación III. también es correcta.*

Note que la afirmación II. no se puede asegurar, pues un número que puede ser representado con los 15 *aros es el* 69, *como vimos anteriormente, y este no es múltiplo de* 5. *La afirmación IV. tampoco se puede asegurar, pues* 78 *también se puede representar con los* 15 *aros.*

Por lo anterior, las afirmaciones correctas son I. y III.

PROBLEMA 6.

El abuelo de Santiago compra boletos de rifas todos los días. Siempre escoge el número que corresponda a la suma de las cifras de la fecha del día, por ejemplo el 26 de agosto de 2021, (26/08/2021) compra el número $21 = 2+6+0+8+2+0+2+1$. ¿Cuántas veces compró o comprará el número 12 durante el año 2021?

(a) 12 (b) 19 (c) 29 (d) 30 (e) No sé

Solución: *Sea* $ab/cd/2021$ *una de las fechas cuyas cifras suma* 12, *esto es:*

$$a+b+c+d+2+0+2+1 = 12$$
$$a+b+c+d = 7.$$

Veamos las posibilidades teniendo en cuenta que $1 \leq cd \leq 12$ *y* $1 \leq ab \leq 31$

c	d	$a+b$	a	b	*Fecha*
0	1	6	0	6	06/01/2021
			1	5	15/01/2021
			2	4	24/01/2021
0	2	5	0	5	05/02/2021
			1	4	14/02/2021
			2	3	23/02/2021
0	3	4	0	4	04/03/2021
			1	3	13/03/2021
			2	2	22/03/2021
			3	1	31/03/2021
0	4	3	0	3	03/04/2021
			1	2	12/04/2021
			2	1	21/04/2021
			3	0	30/04/2021
0	5	2	0	2	02/05/2021
			1	1	11/05/2021
			2	0	20/05/2021
0	6	1	0	1	01/06/2021
			1	0	10/06/2021

c	d	$a+b$	a	b	*Fecha*
1	0	6	0	6	06/10/2021
			1	5	15/10/2021
			2	4	24/10/2021
1	1	5	0	5	05/11/2021
			1	4	14/11/2021
			2	3	23/11/2021
1	2	4	0	4	04/12/2021
			1	3	13/12/2021
			2	2	22/12/2021
			3	1	31/12/2021

2.2. Prueba Selectiva

Problema 1.

Cuando Ximena vea a José le pedirá una cantidad de pesos colombianos múltiplo de 100, por ejemplo, $\$4700$. Para ir al encuentro José llevará monedas de 100, 200, 500 y 1000 pesos. ¿Cuál es la menor cantidad de monedas que puede llevar José para poder darle a Ximena cualquier cantidad que ella le pida desde $\$100$ hasta $\$5000$?

(a) 5 (b) 8 (c) 12 (d) 50 (e) No sé

Solución: Supongamos que José tiene que darle $\$4900$ a Ximena, la forma de hacerlo con la menor cantidad de monedas posibles es 4 monedas de $\$1000$, 1 de $\$500$ y 2 de $\$200$; 7 en total. José necesita una moneda de $\$100$ si Ximena le pide 100 pesos, llevando entonces hasta el momento 8. Con estas 8 monedas puede armar cualquier cantidad desde $\$100$ hasta $\$5000$, por lo que 8 es la respuesta.

Problema 2.

Para cada número natural n se define $\boxed{n}$ de la siguiente manera:

$$\boxed{n} = n \times (2021 - n).$$

¿Cuál es el valor de la siguiente expresión?

$$\boxed{1} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times \cdots \times \boxed{2021}$$

(a) 0

(b) 2021

(c) 1

(d) un número mayor que 2021, muy grande.

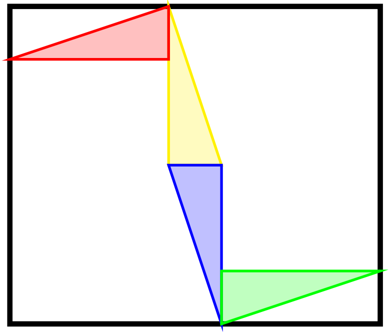
(e) No sé.

Solución: *Note que* $\boxed{2021} = 2021 \times (2021 - 2021) = 2021 \times 0 = 0$, *luego*

$$\boxed{1} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times \cdots \times \boxed{2021} = \boxed{1} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times \cdots \times 0 = 0.$$

Problema 3.

El Comité Olímpico de cierto colegio ha propuesto un diseño para la bandera de la olimpiada de matemáticas, el cual consta de cuatro triángulos rectángulos congruentes, pero de diferente color, dibujados sobre un rectángulo completamente blanco, como se muestra a continuación:



Si se imprimen de estas banderas con dimensiones $20\,cm$ y $18\,cm$, ¿qué fracción del área total de cada bandera estará coloreada por los cuatro triángulos?

(a) $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{1}{9}$ (c) $\frac{1}{10}$ (d) $\frac{4}{38}$ (e) No sé

Solución: *La altura de la bandera es* $18\,cm$, *entonces la altura de cada triángulo, respecto al lado más corto, es* $9\,cm$. *Además, los* $20\,cm$ *del ancho de la bandera corresponden a dos veces la altura de los triángulos (respecto al lado más corto) más la longitud del lado más corto, de modo que el lado más corto de cada triángulo mide* $20 - 2 \times 9 = 20 - 18 = 2\,cm$.
Por lo anterior, el área de cada triángulo es $\dfrac{9 \times 2}{2} = 9\,cm^2$, *y como son cuatro de estos triángulos, entonces el área total coloreada es* $4 \times 9 = 36\,cm^2$. *Pero el área total de la bandera es* $20 \times 18 = 360\,cm^2$, *de ahí que la fracción del área total de la bandera que estará coloreada por los cuatro triángulos es:*

$$\frac{36}{360} = \frac{1}{10}.$$

Problema 4.

El número de diagonales de cierto polígono es 5 veces el número de sus lados. ¿Cuántos lados tiene este polígono?

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 13 (e) No sé

Solución: Es fácil ver que un polígono de n lados tiene $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales. Entonces, el polígono del enunciado cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-3)}{2} &= 5n, \\ n^2 - 3n &= 10n, \\ n^2 &= 13n, \\ n &= 13. \end{aligned}$$

Esto es, el polígono tiene 13 lados.

Problema 5.

Un granjero tiene 180 huevos de pata y 168 huevos de gallina. El quiere colocarlos en canastos de modo que en cada canasto haya la misma cantidad de huevos, sin juntar huevos de pata con huevos de gallina. ¿Cuál es la mínima cantidad de canastos que necesita el granjero?

(a) 12 (b) 14 (c) 15 (d) 29 (e) No sé

Solución: Dado que los huevos de pata y los huevos de gallina deben dividirse en grupos con la misma cantidad de huevos (sin juntarse entre ellos), entonces esta cantidad es un divisor común de 180 y 168. Pero se quiere además, que la cantidad de grupos (canastos) sea la menor posible, esto se logra cuando los grupos tienen la mayor cantidad de huevos posibles, esta cantidad es el máximo divisor común entre 180 y 168, que es

$$\mathrm{mcd}(180, 168) = 12.$$

Por lo tanto, se deben hacer grupos de 12 huevos; como en total son $180+168 = 348$ huevos, entonces la mínima cantidad de grupos (canastos) es: $\dfrac{348}{12} = 29$.

Problema 6.

Camila, Javier y Simón están en clase de matemáticas. Camila pasa al tablero y empieza la sucesión de los enteros positivos en orden ascendente, como sigue:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots$$

Luego Javier toma cada número de la sucesión de Camila, lo multiplica por 3, y escribe su residuo entre 10 en la respectiva posición del número operado. Su sucesión empieza así:

$$3,\ 6,\ 9,\ 2,\ 5,\ldots$$

La profesora le pregunta a Simón por el menor número que puede tomar la suma de 3 elementos consecutivos de la sucesión de Javier. Si Simón responde correctamente, ¿cuál es su respuesta?

(a) 3 (b) 9 (c) 11 (d) 16 (e) No sé

Solución: *Extendamos un poco más la sucesión de Javier:*

$$3,\ 6,\ 9,\ 2,\ 5,\ 8,\ 1,\ 4,\ 7,\ 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 2,\ 5,\ 8,\ 1,\ 4,\ 7,\ 0,\ 3,\ldots$$

Observe que los términos de esta sucesión se repiten cada 10 *términos. Luego, basta con ver los primeros elementos de la sucesión, donde por inspección el menor valor que puede tomar la suma de* 3 *elementos consecutivos es* $0+3+6=9$.

2.3. Prueba Final

Problema 1.

Hermes, el loro de Pascal, sabe hacer cuentas solo con números naturales. Siempre que Pascal dice un número natural, Hermes lo multiplica por 9, luego suma 21, divide este resultado entre 3, al final resta 5 y grita el resultado.

(a) Si Pascal dice el número 10, ¿cuál es el número que grita Hermes?

(b) Si Hermes gritó el número 2021, ¿cuál es el número que dijo Pascal?

(c) ¿Es posible que Hermes grite el número 100?

Solución:

(a) *Si Pascal dice el número* 10, *Hermes hace las siguientes operaciones:*

$$\begin{aligned} 10 \times 9 &= 90, \\ 90 + 21 &= 111, \\ 111 \div 3 &= 37, \\ 37 - 5 &= 32. \end{aligned}$$

Por lo tanto Hermes gritó el número 32.

(b) *Si Hermes gritó el número* 2021, *devolviendo las operaciones que hizo Hermes, tenemos:*

$$\begin{aligned} 2021 + 5 &= 2026, \\ 2026 \times 3 &= 6078, \\ 6078 - 21 &= 6057, \\ 6057 \div 9 &= 673. \end{aligned}$$

De modo que el número dicho por Pascal es el 673.

(c) *No es posible puesto que, devolviendo las operaciones que debió hacer Her-*

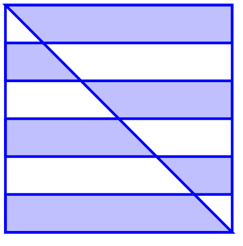
mes tenemos:

$$
\begin{aligned}
100 + 5 &= 105,\\
105 \times 3 &= 315,\\
315 - 21 &= 294,\\
294 \div 9 &= ?
\end{aligned}
$$

Pero 294 *no es divisible entre* 3 *por lo tanto esta cantidad no es un número natural y Hermes solo hace operaciones con números naturales.*

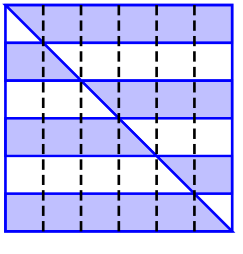
PROBLEMA 2.

La siguiente es la bandera de una isla muy lejana.



Si la bandera es cuadrada y los segmentos horizontales son equidistantes, ¿cuál es la razón entre el área total coloreada de azul y el área total blanca?

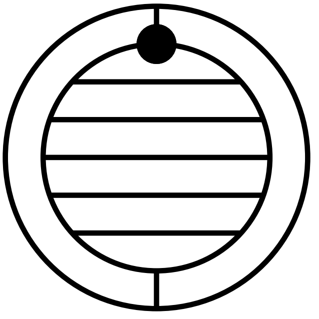
Solución: *Considere la siguiente subdivisión de la bandera*



Note que la región coloreada de azul corresponde a 21 *cuadraditos de la subdivisión, mientras que la región blanca corresponde a* 15 *cuadraditos. Por lo tanto la razón entre el área total coloreada de azul y el área total blanca es:* $\dfrac{21}{15} = \dfrac{7}{5}$.

PROBLEMA 3.

El siguiente es el logo de una empresa de autos.

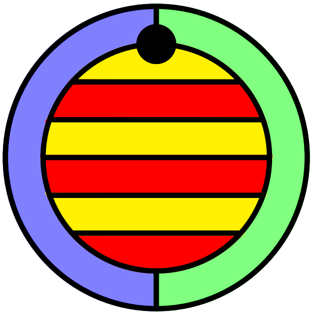


(*a*) ¿Cuántos colores como mínimo, son necesarios para pintar el logo, teniendo en cuenta que regiones vecinas no pueden tener el mismo color?

(*b*) Con la cantidad de colores hallada en el ítem anterior, ¿de cuántas formas diferentes se puede pintar el logo?

Solución:

(*a*) *La cantidad mínima de colores necesaria para pintar el logo es* 4, *una manera de hacerlo es la siguiente:*



(*b*) *Iniciando, el color de la región izquierda lo podemos elegir de* 4 *formas (los* 4 *posibles colores), luego como la región derecha es vecina de la región derecha, su color puede elegirse de* 3 *formas diferentes (los* 3 *colores restantes), finalmente los* 2 *colores restantes deben intercalarse en las regiones centrales, es decir estas regiones pueden pintarse de dos formas diferentes, por lo tanto hay* $4 \times 3 \times 2 = 24$ *formas diferentes de pintar el logo, con* 4 *colores.*

Otra solución: *Suponga que los colores son A, B, C y D. Si pintamos la región izquierda del color A entonces dado que las regiones centrales deben colorearse intercalando dos de los colores restantes, estás podrían pintarse de 6 formas: (B-C-B-C-B-C), (C-B-C-B-C-B), (B-D-B-D-B-D), (D-B-D-B-D-B), (C-D-C-D-C-D), (D-C-D-C-D-C), la región derecha se colorea del color restante. Por lo tanto, si tomamos el color A para la región izquierda tenemos 6 formas de pintar el logo. De manera análoga, si la región izquierda se pinta del color B se obtienen otras 6 formas, si se pinta de C otras 6 y si se pinta de D otras 6. En total 24 formas de pintar el logo.*

También es factible hacer un bosquejo de las 24 formas de pintar el logo usando 4 colores, lo dejamos de ejercicio al lector.

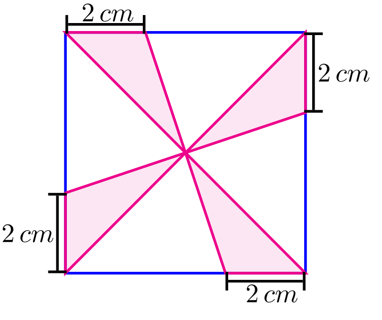
Problema 4.

Gauss multiplicó cierta cantidad de números naturales y obtuvo 225 como resultado. ¿Cuál es el menor valor posible de la suma de esos números?

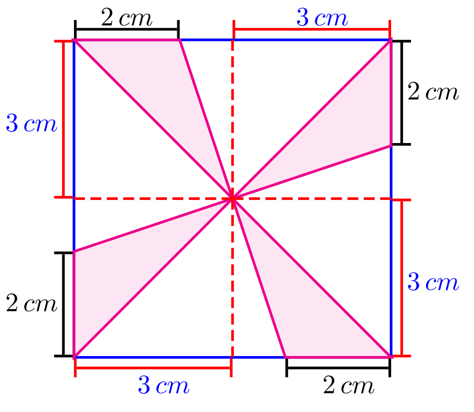
Solución: *Dado que* $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$, *entonces el menor valor posible para la suma de los números que multiplicó Gauss es* 16 *que se obtiene con los números* 3, 3, 5 *y* 5. *Note que* 255 *se puede escribir como producto de otro números, por ejemplo* $225 = 9 \times 25 = 3 \times 3 \times 25 = 3 \times 15 \times 5$, *pero con estos números no se obtiene la menor suma posible.*

Problema 5.

Si el cuadrado que se muestra a continuación tiene $24\,cm$ de perímetro, ¿de cuántos centímetros cuadrados es el área sombreada en su interior?



Solución: *Dado que el perímetro del cuadrado es* $24\,cm$, *entonces cada uno de sus lados mide* $6\,cm$. *Ahora, note que el vértice común de los cuatro triángulos sombreado es el centro del cuadrado, por lo tanto la altura de cada triángulo respecto a la base que está sobre un lado del cuadrado es* $3\,cm$ *y así el área de cada triángulo es* $\dfrac{2 \times 3}{2} = 3\,cm^2$.



De modo que el área sombreada en el interior del cuadrado es

$$4 \times 3\,cm^2 = 12\,cm^2.$$

PROBLEMA 6.

La instalación de luces del arbolito de navidad tiene tres colores de bombillos: rojos, amarillos y azules. Los bombillos rojos alumbran cada 20 segundos, los amarillos cada 30 segundos y los azules cada 18 segundos. Si al conectar la instalación alumbran todos los bombillos, ¿cuántas veces alumbran a la vez todos los bombillos de la instalación si permanece conectada durante 4 horas?

Solución: *Los bombillos alumbran todos a la vez cada* $\mathrm{mcm}(20, 30, 18) = 180$ *segundos, es decir cada* 3 *minutos. En* 4 *horas hay* $4 \times 60 = 240$ *minutos. Luego, durante las* 4 *horas los bombillos alumbra todos a la vez* $240 \div 3 + 1 = 80 + 1 = 81$ *veces.*

Note que se debe sumar 1 *a* $240 \div 3$ *puesto que, según el enunciado, cuando se conecta la instalación, en el segundo* 0, *todos los bombillos alumbran.*

Capítulo 3

Nivel Avanzado

3.1. Prueba Clasificatoria

Problema 1.

¿A qué es igual la siguiente expresión?

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{98}{99} \times \frac{99}{100}$$

(a) 100 (b) 1 (c) $0,1$ (d) $0,01$ (e) No sé

Solución: Simplificando los términos de este producto de fracciones tenemos:

$$\frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{6}} \times \cdots \times \frac{\cancel{98}}{\cancel{99}} \times \frac{\cancel{99}}{100} = \frac{1}{100} = 0{,}01.$$

Problema 2.

En agosto de cierto año habían exactamente 4 miércoles y 4 domingos. ¿Qué día fue el 26 de agosto de dicho año?

(a) lunes (b) miércoles (c) sábado (d) domingo (e) No sé

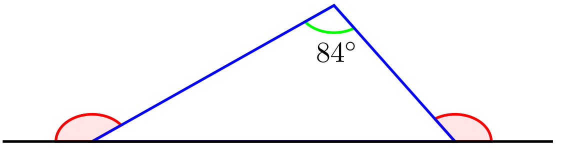
Solución: Agosto tiene 31 días. Entonces para que hayan exactamente 4 miércoles y 4 domingos, el calendario para agosto de tal año necesariamente debe ser el siguiente:

L	M	M	J	V	S	D
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Por lo tanto, el 26 *de agosto de tal año fue un lunes.*

Problema 3.

¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos sombreados en la siguiente figura?

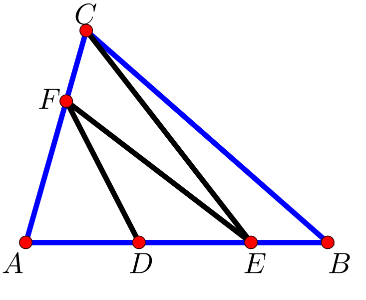


(a) 96° (b) 264° (c) 270° (d) 276° (e) No sé

Solución: La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, *Por lo tanto, la suma de los dos ángulos interiores no marcados en el interior del triángulo es* $180 - 84 = 96°$. *Así que la suma de las medidas de los dos ángulos sombreados en la figura es* $360 - 96 = 264°$.

Problema 4.

En la siguiente figura los triángulos AFD, DFE, FCE y ECB tienen la misma área. Si $AD = 21\,cm$, ¿cuál es la longitud de $\overline{EB}$?



(a) $12\,cm$ (b) $14\,cm$ (c) $15\,cm$ (d) $18\,cm$ (e) No sé

Solución: *Los triángulos AFD y DFE tienen la misma altura, respecto sus bases AD y DE, respectivamente; y dado que tienen la misma área, entonces $AD = DE = 21$. Por otro lado, los triángulos ACE y ECB tienen la misma altura respecto a sus bases AE y EB, respectivamente, pero sus áreas están a razón de 3 a 1, por lo tanto sus bases tienen la misma proporción, esto es $AE = 3EB$, esto es $42 = 3EB$, de ahí que $EB = 14\,cm$.*

Problema 5.

En un colegio se rifó un balón entre los cuatro estudiantes que obtuvieron la mayor puntuación en la Olimpiada de Matemáticas. Para ello, el profesor depositó cuatro tarjetas marcadas cada una con un número, en una caja marcada con el número 128, y anunció que ganaría el estudiante que sacara la tarjeta con el número que al ser multiplicado con el número de la caja, el resultado tenga la mayor cantidad de ceros al final.
A continuación están los nombres de los estudiantes con la tarjeta que sacó cada uno:

- Ana-$\boxed{500}$,
- Sara-$\boxed{1000}$,
- Julián-$\boxed{625}$,
- Daniel-$\boxed{750}$.

¿Quién ganó el balón?
(a) Ana (b) Daniel (c) Julián (d) Sara (e) No sé

Solución: *Veamos los resultados de multiplicar la tarjeta de cada uno con el número de la caja $128 = 2^7$.*

- *Ana:* $500 \times 2^7 = 5^3 \times 2^9 = (10)^3 \times 2^6$ *termina en 3 ceros.*
- *Julián:* $625 \times 2^7 = 5^4 \times 2^7 = (10)^4 \times 2^3$ *termina en 4 ceros.*
- *Sara:* $1000 \times 2^7 = 10^3 \times 2^7$ *termina en 3 ceros.*
- *Daniel:* $750 \times 2^7 = 2 \times 3 \times 5^3 \times 2^7 = (10)^3 \times 2^5 \times 3$ *termina en 3 ceros.*

Por lo tanto, quien ganó el balón fue Julián.

Problema 6.

¿Cuántos números diferentes se pueden representar en el ábaco, con 5 aros, si de derecha a izquierda cada barra del ábaco debe tener al menos un aro, hasta colocar el último aro?

(a) 7 (b) 12 (c) 16 (d) más de 16 (e) No sé

Solución: En total, se pueden representar 16 *números con las condiciones del enunciado, estos son:*

11111	2111	221	23	311	41	5
	1211	212	32	131	14	
	1121	122		113		
	1112					

3.2. Prueba Selectiva

Problema 1.

En una veterinaria hay 4 perros y 3 gatos. Al pesar los perros de todas las formas posibles en grupos de dos, los pesos son $34\,kg$, $20\,kg$, $32\,kg$, $28\,kg$, $40\,kg$ y $26\,kg$. Los pesos de los gatos en todas las parejas posibles son $9\,kg$, $8\,kg$ y $7\,kg$. ¿Cuál es la diferencia entre el peso total de los perros y el peso total de los gatos?

(a) $37\,kg$ (b) $48\,kg$ (c) $53\,kg$ (d) $72\,kg$ (e) No sé

Solución: *Cada perro se pesó tres veces. De modo que, si consideramos la suma de los pesos dados para los perros, $180\,kg$, estamos sumando el peso de cada perro tres veces, así, si dividimos dicha suma entre 3, tenemos el peso total de los 4 perros: $60\,kg$. Sucede de manera similar con los gatos, cada uno se pesó dos veces. La suma de los pesos dados para los gatos es $24\,kg$, en esta suma el peso de cada gato está contado dos veces, luego el peso total de los 3 gatos es $12\,kg$. La diferencia entre el peso total de los perros y el peso total de los gatos es $60 - 12 = 48\,kg$.*

Problema 2.

En una papelería hay lapiceros de tres colores: rojos, azules y morados. La dueña no sabe cuántos lapiceros hay de cada color pero sabe que en total hay 54. Sobre las ventas de tres días, se sabe lo siguiente:

- Cada día, la cantidad vendida entre lapiceros rojos y morados superó en 4 unidades a la cantidad de lapiceros azules vendidos.
- El segundo y tercer día le compraron el doble de lapiceros azules que el día anterior.

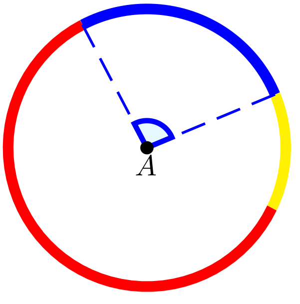
Si vendió todos los lapiceros, ¿cuántos lapiceros azules habían?

(a) 21 (b) 28 (c) 33 (d) 42 (e) No sé

Solución: *Si x es la cantidad de lapiceros azules vendidos el primer día, entonces el total de lapiceros azules es $x + 2x + 4x = 7x$, y el total de lapiceros rojos y* *morados es* $(x+4)+(2x+4)+(4x+4)=7x+12$. *Por lo tanto, el total de lapiceros es* $7x+7x+12=54$, *de ahí que* $14x+12=54$. *Luego* x *es un número que al multiplicarlo por* 14 *y sumarle* 12 *da* 54, *este número es* $x=3$. *Así, el total de lapiceros azules es* $7x=7\times 3=21$.

Problema 3.

La piscina del colegio es circular. Según la figura, Darío recorrió la parte de perímetro amarilla, José la azul y Manuel la roja. Darío recorrió $2\,m$, José $4\,m$ y Manuel $12\,m$. A es el centro de la piscina. ¿Cuál es la medida del ángulo destacado?

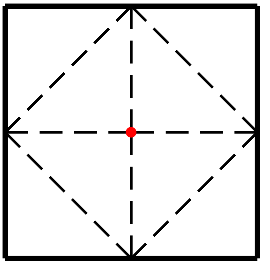


(a) 70° (b) 80° (c) 90° (d) 100° (e) No sé

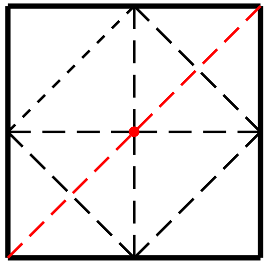
Solución: *El perímetro de la piscina es* $18\,m$, *que corresponde a los* 360° *de la circunferencia. Luego cada metro corresponde a* 20°. *Como la distancia recorrida por José fue* $4\,m$, *entonces el ángulo destacado mide* $4\times 20=80°$.

Problema 4.

La diagonal de la hoja de papel cuadrada mide $12\ cm$. Se quieren doblar las esquinas de la hoja de tal manera que los vértices del cuadrado inicial queden en el centro de la hoja, como lo muestra la figura. ¿Cuál sería el área del nuevo cuadrado?



(a) $24\,cm^2$ (b) $72\,cm^2$ (c) $36\,cm^2$ (d) $48\,cm^2$ (e) No sé



Solución: *A partir de la figura, note que el lado del nuevo cuadrado es igual la mitad de la diagonal cuya medida conocemos,* $12\,cm$*. Luego la longitud del lado de dicho lado es* $6\,cm$*, y por lo tanto el área del nuevo cuadrado es* $36\,cm^2$*.*

Problema 5.

Hay 8 asientos seguidos numerados del 1 al 8. Por normas de bioseguridad, entre cada dos personas sentadas debe haber al menos un asiento libre. Si ningún asiento está ocupado, ¿de cuántas formas pueden sentarse Carlos y Bertha?

(a) 28 (b) 56 (c) 21 (d) 42 (e) No sé

Solución: *Supongamos que Carlos toma un asiento de menor numeración al de Bertha. Si Carlos toma el asiento* 1*, hay* 6 *posibilidades para el asiento de Bertha:* 3, 4, 5, 6, 7 *o* 8*. Si Carlos toma el* 2*, hay* 5 *posibilidades. Si Carlos toma el* 3*, hay* 4*. Seguimos así, hasta que al Carlos tomar el asiento* 6*, solo hay* 1 *posibilidad, que Bertha tome el asiento* 8*. La cantidad de posibilidades, considerando que la numeración del asiento de Carlos es menor al de Bertha, es* $6+5+4+3+2+1=21$*. De igual manera, si la numeración del asiento de Bertha es menor al de Carlos, el número de posibilidades es* 21*. El total de posibilidades es entonces* 42*.*

Problema 6.

Diego borró un número de una lista de 10 números naturales consecutivos. Si la suma de los que quedaron es 2021, ¿cuál fue el número que borró?

(a) 224 (b) 124 (c) 356 (d) 479 (e) No sé

Solución: *Sea* n *el menor de los* 10 *números. Entonces la suma de los* 10 *números consecutivos es* $10n+45$*.*

A esta suma le quitamos el número que borró Diego, x, y se obtiene:

$$
\begin{aligned}
10n + 45 - x &= 2021, \\
10n &= 2021 - 45 + x \\
n &= \frac{1976 + x}{10}.
\end{aligned}
$$

Pero n es un número natural, entonces $1976 + x$ *debe ser múltiplo de* 10, *esto es, terminar en* 0. *De las opciones de respuesta las únicas que hacen que* $1976 + x$ *termine en* 0, *son* 224 *y* 124, *pero* 124 *no puede ser uno de los* 10 *números consecutivos, pues de ser serlo, la suma de los demás no alcanza a* 2021. *Por lo tanto, el número que borró Diego es el* 224. *De hecho, los* 10 *números eran:*

$$220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229.$$

3.3. Prueba Final

Problema 1.

Un granjero guarda 1300 semillas en 18 cajas enumeradas del 1 al 18. Si se sabe que al sumar la cantidad de semillas de 5 cajas consecutivas siempre se obtiene 370, ¿cuántas semillas suman las cajas $4, 5, 9, 10, 14$ y 15?

Solución: Sea y *la cantidad de semillas que hay en las cajas* $\boxed{4}$ *y* $\boxed{5}$, *y* x *la cantidad de semillas que hay en las cajas* $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ *y* $\boxed{3}$. *Dado que la cantidad de semillas de* 5 *cajas consecutivas siempre es* 370, *entonces*

$$x + y = 370,$$

y además, $4x + 3y = 1300$, *pues*

$$\text{Cantidad: } \underbrace{\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}}_{x}\underbrace{\boxed{4}\boxed{5}}_{y}\underbrace{\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}}_{x}\underbrace{\boxed{9}\boxed{10}}_{y}\underbrace{\boxed{11}\boxed{12}\boxed{13}}_{x}\underbrace{\boxed{14}\boxed{15}}_{y}\underbrace{\boxed{16}\boxed{17}\boxed{18}}_{x}$$

Multiplicando la primera ecuación por 4 *tenemos* $4x+4y = 1480$, *ahora restamos la segunda ecuación y obtenemos* $y = 180$. *Finalmente, la cantidad de semillas que hay en las cajas* $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$, $\boxed{14}$ *y* $\boxed{15}$ *es* $3 \times y = 3 \times 180 = 540$.

Problema 2.

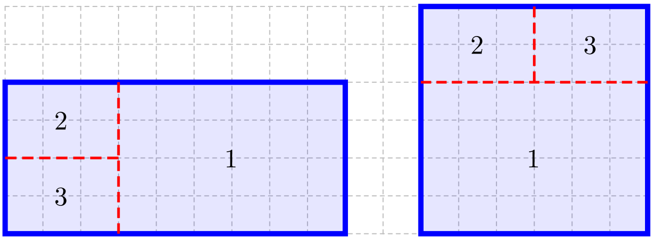
Lucía tiene un rectángulo de cartón de $9\,cm$ por $4\,cm$.

(a) ¿Es posible dividir el rectángulo en tres piezas rectangulares para formar un cuadrado con $36\,cm^2$ de área? De ser posible, muestre una forma de hacerlo. no es posible, justificar por qué.

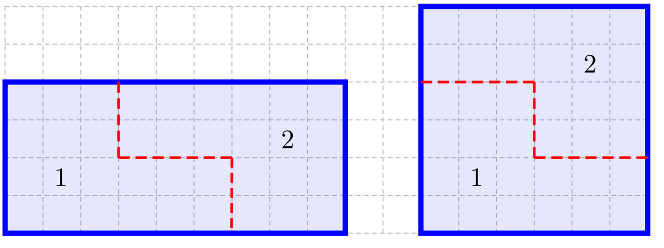
(b) ¿Es posible dividir el rectángulo en dos piezas para formar un cuadrado con $36\,cm^2$ de área? De ser posible, muestre una forma de hacerlo, si no es posible, justificar por qué.

Solución:

(a) *Sí es posible, a continuación una forma de hacerlo:*



(b) *Sí es posible, a continuación una forma de hacerlo:*



Problema 3.

En una floristería agrupan los girasoles por docenas y sobran 6, si lo hacen por decenas sobran 4, y si lo hacen de 15 en 15 y sobran 9. Si se vende cada girasol a 1000 pesos cada uno, se reciben entre 300000 y 400000 pesos. ¿Cuántos girasoles en total hay en la floristería?

Solución: Dado que cada girasol vale $\$1000$ *y el precio de todas los girasoles está entre* $\$300000$ *y* $\$400000$ *pesos, entonces hay entre* 300 *y* 400 *girasoles. Ahora, cuando los girasoles se agrupan por decenas sobran* 4*, es decir, la cantidad de girasoles excede en* 4 *a un múltiplo de* 10*, es decir la cantidad de girasoles es alguno de los siguientes números:*

$$304, 314, 324, 334, 344, 354, 364, 374, 384, 394$$

Pero si se agrupan por docenas, sobran 6 *es decir la cantidad de girasoles es un múltiplo de* 12 *más* 6*, y de los anteriores, el número que cumple es* 354.

Finalmente verificamos que $354 - 9 = 345$ *es múltiplo de* 15*, por lo tanto, si se agrupan de* 15 *en* 15*, sobran* 9.

Así que, en total hay 354 *girasoles en la floristería.*

Problema 4.

¿Cuántos números naturales menores que 1000 hay tales que el producto de sus cifras es mayor que 10 pero menor que 20?

Solución: Las posibilidades para el producto de las cifras son:

$$11,\ 12,\ 13\ ,14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18\ y\ 19,$$

pero 11, 13, 17 *y* 19 *son primos es decir no se pueden descomponer como producto de dígitos.*

Veamos los posibles números que cumplen las condiciones del enunciado, a partir de la descomposición de los números que quedan de la lista anterior como producto de a lo sumo tres dígitos:

$$\begin{aligned}
12 &= 2\times 6 && \longrightarrow 8 \textit{ números: } 26,\ 62,\ 126,\ 162,\ 216,\ 616,\ 261\ y\ 621.\\
&= 3\times 4 && \longrightarrow 8 \textit{ números}\\
&= 2\times 2\times 3 && \longrightarrow 3 \textit{ números: } 223,\ 232\ y\ 322.\\
14 &= 2\times 7 && \longrightarrow 8 \textit{ números}\\
15 &= 3\times 5 && \longrightarrow 8 \textit{ números}\\
16 &= 2\times 8 && \longrightarrow 8 \textit{ números}\\
&= 4\times 4 && \longrightarrow 4 \textit{ números: } 44,\ 144,\ 414,\ y\ 441.\\
&= 2\times 2\times 4 && \longrightarrow 3 \textit{ números}\\
18 &= 2\times 9 && \longrightarrow 8 \textit{ números}\\
&= 3\times 6 && \longrightarrow 8 \textit{ números}\\
&= 3\times 3\times 2 && \longrightarrow 3 \textit{ números}
\end{aligned}$$

En total, 69 *números naturales menores que* 1000 *cumplen que el producto de sus cifras es mayor que* 10 *pero menor que* 20.

Problema 5.

El producto de las edades de los hijos de Sonia es 3696. Si la edad del mayor es el triple de la edad del menor, ¿cuántos hijos tiene Sonia?

Solución: La descomposición en factores primos de 3696 *es*

$$3696 = 2^4 \times 3 \times 7 \times 11.$$

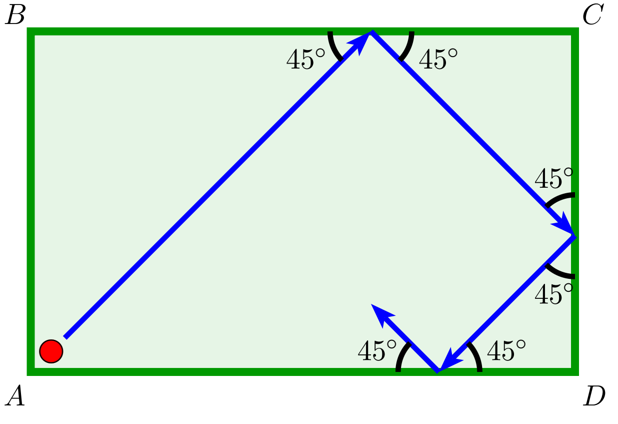
Ahora, teniendo en cuenta que 3696 *es el producto de las edades de los hijos de Sonia, y que la edad del mayor es el triple de la del menor, escribimos:*

$$3696 = 2^2 \times (3 \times 2^2) \times 7 \times 11 = 4 \times 12 \times 7 \times 11.$$

Luego Sonia tiene 4 *hijos, cuyas edades son:* 4, 7, 11 *y* 12 *años.*

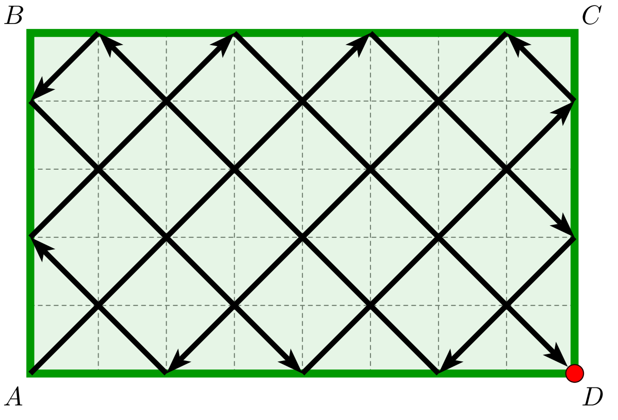
Problema 6.

Desde una esquina de una mesa rectangular $ABCD$, tal que $AB = 100\,cm$ y $AD = 160\,cm$; se dispara una bola, de modo que, siempre, al golpear uno de los bordes de la mesa, sigue su movimiento formando ángulos de $45°$ con dicho borde, como se muestra a continuación:



Si la bola se dispara desde la esquina A y se detiene al chocar con una esquina de la mesa, ¿en cuál esquina termina la trayectoria de la bola?

Solución: Subdividiendo la superficie de la mesa en cuadrados con $10\,cm$ *de lado, es fácil trazar la trayectoria de la bola, como se muestra a continuación:*



Por lo tanto la trayectoria de la bola termina en la esquina D.

Apéndice A

Cuadro de Honor

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la Décima versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Primaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 3743 participantes del certamen, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

NIVEL BÁSICO

Puesto	Medalla	Participante
1.^{o}		*Miguel Ángel Rodríguez García* *Colegio Bilingüe Divino Niño , Bucaramanga*
2.^{o}		*Samuel José Arias González* *I. E. Alfonso López Pumarejo, Río de Oro.*
3.^{o}		*Marcos Díaz Acevedo* *Jorge Ardila Duarte, Bucaramanga.*
4.^{o}		*Alejandro Díaz Vargas* *Jorge Ardila Duarte, Bucaramanga.*
5.^{o}		*Juan José Velásquez Rivera* *Escuela Normal Superior, Charalá*

NIVEL MEDIO

Puesto	Medalla	Participante
1.^{o}		*Isabela Torres Zuleta* *E. N. S. Francisco de Paula Santander, Málaga.*
2.^{o}		*Valeria Otálora Ramírez* *Colegio de Santander, Bucaramanga.*
3.^{o}		*Andrea Sofía Espitia Martínez* *Colegio de Las Américas, Barrancabermeja.*
4.^{o}		*Ángel Felipe Pérez Reyes* *Escuela Normal Superior Sady Tobón Calle, El Cerrito.*
5.^{o}		*Juan Camilo Téllez Jaimes* *Centro Educativo Cajasan Lagos, Floridablanca.*

NIVEL AVANZADO

Puesto	Medalla	Participante
1.^{o}		*Mildreyth Geraldine Rivero Niño* *Gimnasio Superior Empresarial Bilingüe, Bucaramanga*
2.^{o}		*Samuel Nicolás Pinzón Méndez* *Liceo San Fernando, Lebrija.*
3.^{o}		*Samuel Mora Parsons* *Colegio Luis López de Mesa, Barrancabermeja.*
4.^{o}		*Simón Quintero Prada* *Fundación Colegio UIS, Floridablanca.*
5.^{o}		*Samuel Camilo Santiago Silva* *Unidad Pedagógica Bilingüe Pierre de Fermat, B/bermeja.*

Bibliografía

[1] BOLAÑOS W. *Problemas y Soluciones Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas Universitaria 1998-2019.* Universidad Antonio Nariño y Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[2] BROCHERO F. Y RESTREPO J. *Un recorrido por la Teoría de Números.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[3] GÓMEZ J., VALDEZ R. Y VÁZQUEZ R. *Principio de las Casillas.* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2011.

[4] HEMMERLING E. *Geometría Elemental.* Bakersfield College. Limusa, México, 2009.

[5] JIMÉNEZ L., GORDILLO J. Y RUBIANO G. *Teoría de números para principiantes.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2004.

[6] MADROÑERO J Y CONTRERAS I. *Un recorrido por el Álgebra.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[7] SOBERÓN P. *Combinatoria para olimpiadas* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2010.

[8] RESTREPO P. *Un recorrido por la Combinatoria I.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2010.

[9] VALDERRAMA A. Y GONZÁLEZ E. *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Nivel Intermedio 2010* Universidad Antonio Nariño, 2010

[10] VALDERRAMA A. Y GONZÁLEZ E. *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Primer Nivel 2010* Universidad Antonio Nariño, 2010.

Enlaces de interés

1. Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS
   Pruebas anteriores:
   http://matematicas.uis.edu.co/?q=olimpiadas-primaria/pruebas_anteriores
   Página de facebook:
   https://web.facebook.com/OlimpiadasRegionalesDeMatematicasUis

2. Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño:
   https://orm.udenar.edu.co/?page_id=1612

3. Olimpiadas Matemáticas de la Universidad de Antioquia.
   https://www.olimpiadasudea.co/matematicas/talleres.html

4. Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
   https://www.acmven.org/pruebas/

5. Olimpiada Mexicana de Matemáticas
   https://www.ommenlinea.org/material-de-entrenamiento/introductorio/

6. Olimpiada Matemática Argentina,
   Problemas Semanales: https://www.oma.org.ar/problemas/index.php
   Archivo de enunciados: https://www.oma.org.ar/enunciados/index.htm#omn
   Simulacros en línea: https://www.oma.org.ar/canguro/problemas.html

7. Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico
   http://om.pr/

Vicerrectoría Administrativa
Vicerrectoría de Investigación y Extensión