10as

OLIMPIADAS REGIONALES DE MATEMÁTICAS

SECUNDARIA UIS 2018

"La belleza de las matemáticas solo se muestra a los seguidores más pacientes".

مریم میرزاخانی

Maryam Mirzakhani (1977 - 2017)

INFORMES

olimpiadas@matematicas.uis.edu.co

Tel.: 6450301, 6344000 Ext.: 2316, 2583, 2581

Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

Vicerrectoría Académica

Universidad Industrial de Santander

"VIGILADA MINEDUCACIÓN"

Olimpiadas Regionales de Matemáticas

EDUMAT

IPRED

EDUCACIÓN INTERACTIVA Y ABIERTA AL LIDERAZGO

2018

Décimas Olimpiadas Regionales de Matemáticas Secundaria

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga

2018

Elaboración y edición

Grupo Olimpiadas Regionales de Matemáticas - 2018.

Director

Jorge Eliécer Gómez Ríos

Coordinadora

Laura Milena Romero Parada

Monitores

Andrés Fabián Leal Archila

Cristhian Daniel Cáceres Garavito

Edwin David Valencia Oviedo

Esteban David Salcedo Niño

Gabriel Moncada Santos

Gerson Leonel Barajas Ávila

Jenifer Tatiana Puentes Correa

Jesús Fernando Carreño Díaz

Johan Sebastián Cortés Villamizar

José Camilo Rueda Niño

Juan Camilo Cala Barón

Silvia Juliana Ballesteros Gualdrón

Wilson David Archila Mojica

Yerly Vanesa Soler Porras

Yzel WIly Alay Gómez Espíndola

Presentación

Las Olimpiadas en Matemáticas son conocidas a nivel internacional por la influencia en la transformación del pensamiento matemático, y el crecimiento de las expectativas y el interés en aprender matemáticas por parte de los estudiantes. Generalmente, las situaciones problemáticas expuestas en las pruebas exponen al estudiante a temas que no se estudian en la escuela, y estos incluyen matemática que puede ser motivadora y sorprendente. Así las competencias no solamente prueban de manera directa el conocimiento o las destrezas matemáticas sino también la habilidad que tiene el estudiante de manejar situaciones más allá de experiencias reales.

Las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander para secundaria buscan recrear el pensamiento matemático de tal forma que todos los jóvenes atraídos por el deseo de enfrentar nuevos retos descubran caminos alternos y flexibilicen la exploración de ideas matemáticas de tal manera que su participación permita que tanto el estudiante como el docente puedan apreciar sus logros y juzgar su práctica desde una perspectiva nacional e internacional.

Con el objetivo de recopilar, compartir, difundir y divulgar los problemas trabajados en cada versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander para secundaria se ha elaborado el presente material dirigido a estudiantes de básica secundaria, media vocacional, docentes de matemáticas y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a través del enfoque de planteamiento y resolución de problemas.

Introducción

La Universidad Industrial de Santander como institución de educación superior en el ámbito regional tiene como misión esencial educar mediante la generación y difusión de las ciencias, la tecnología, las humanidades y el arte como una clara vocación de servicio a la sociedad, posibilitando la formación integral del ser humano dentro de un espíritu creativo que permita el mejoramiento personal y el desarrollo de una sociedad democrática, tolerante y comprometida con los deberes civiles y los derechos humanos.

Siguiendo este orden de ideas, la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander tiene como misión ofrecer a la sociedad y a la comunidad universitaria posibilidades para el cultivo de las matemáticas, donde se promueva una actitud creativa, rigurosa y formal, construyendo un ambiente académico basado en la sana competencia y la solidaridad. Es por esta razón que, desde sus inicios, la Escuela de Matemáticas se ha comprometido con la educación matemática en el entorno natural de la UIS, liderando en forma positiva la actividad matemática del nororiente del país, no solo por la calidad reconocida a nivel nacional e internacional de los egresados de sus programas académicos de pregrado y posgrado sino también por su participación en la formación de los estudiantes de la universidad.

Como parte de su responsabilidad académica y su proyección social frente a las diversas dificultades en los procesos de enseñanza-aprendizaje y desarrollo de las habilidades matemáticas en la región, la Escuela de Matemáticas ha definido un proyecto macro de fortalecimiento de las habilidades matemáticas de la comunidad estudiantil de la región, utilizando para este fin, diferentes actividades académicas entre las que se encuentran el proyecto de semilleros, la creación de diplomados y especializaciones para actualización y/o formación docente y el proyecto de Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (ORM-UIS) para secundaria que busca contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación secundaria en la región de incidencia de la UIS, a través del desarrollo de las habilidades matemáticas de los estudiantes y la capacitación docente.

Este proyecto es pieza clave para mejorar el nivel matemático de los estudiantes de la región, fortalecer la formación académica de los docentes de secundaria y muy posiblemente aumentar el número de licenciados en matemáticas y matemáticos en la región, a partir del conocimiento y puesta en práctica de estrategias que mejoren la efectividad del proceso de planteamiento y resolución de problemas.

Las ORM-UIS para secundaria tienen como ejes temáticos: teoría de números y combinatoria, álgebra y lógica, y geometría. Se realizan en cinco fases, a saber, Preparatoria, Clasificatoria, Selectiva, Final y Entrenamientos, en cada uno de los tres niveles de acuerdo al grado de escolaridad de los estudiantes. Los niveles son: Básico, para los estudiantes de los grados sexto y séptimo; Medio, para los estudiantes de los grados octavo y noveno, y Avanzado, para los estudiantes de los grados décimo y undécimo.

La Escuela de Matemáticas a través del grupo de Educación Matemática de la UIS, Edumat, reconoce la labor esencial del maestro en el proceso de formación de ciudadanos competentes; por ello brinda tanto a los docentes como a los estudiantes una forma de vincularse a este mundo y en esta oportunidad lo hace presentando esta cartilla.

Este documento consta de tres capítulos; en cada uno de estos se presentan los problemas correspondientes a la décima versión del proyecto ORM-UIS para secundaria en las fases Clasificatoria, Selectiva y Final con su respectiva solución y los nombres de los estudiantes con los mejores cinco puntajes en la prueba final, para cada uno de los tres niveles: Nivel Básico (Capítulo 1), Nivel Medio (Capítulo 2) y Nivel Avanzado (Capítulo 3).

Se espera que este material sea del agrado de estudiantes, docentes y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a través del enfoque de planteamiento y resolución de problemas y permita introducir, desarrollar y reflexionar algunas temáticas específicas de cada área en los diferentes sistemas como lo son el numérico-variacional, el geométrico-métrico y el aleatorio.

Índice general

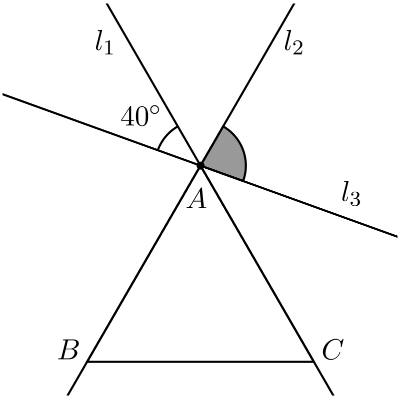
Capítulo 1

Nivel Básico

1.1. Prueba Clasificatoria

1.1.1. Prueba Clasificatoria: 13 de abril

1. En la siguiente figura el triángulo ABC es equilátero, las rectas l_1 y l_2 son las prolongaciones de dos de sus lados y la recta l_3 también pasa por el vértice A. ¿Cuál es la medida del ángulo sombreado, si la medida del otro ángulo marcado es $40°$?



(a) $50°$ (b) $80°$ (c) $90°$ (d) $120°$

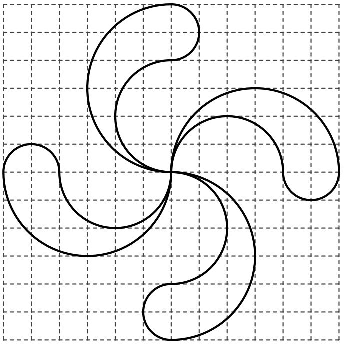
2. Willy, Jorge, Gerson y Camilo compiten en una carrera de motos. Si Willy llegó antes que Gerson y Jorge, y Camilo llegó después de Jorge y antes que Gerson, ¿cuál fue el orden de llegada?

(a) Willy, Gerson, Jorge, Camilo.
(b) Willy, Jorge, Gerson, Camilo.
(c) Camilo, Willy, Gerson, Jorge.
(d) Willy, Jorge, Camilo, Gerson.

3. Si m y n son enteros positivos tales que $61 = m^2 + n^2$, ¿cuál es el valor de la diferencia positiva entre m y n?

(a) 1 (b) 5 (c) 6 (d) 11

4. La siguiente figura está construida con semicircunferencias sobre una cuadrícula, en la que el lado de cada cuadrado mide $1\ cm$. ¿Cuál es el perímetro de la figura en cm?



(a) 12π (b) 24π (c) 48π (d) 96π

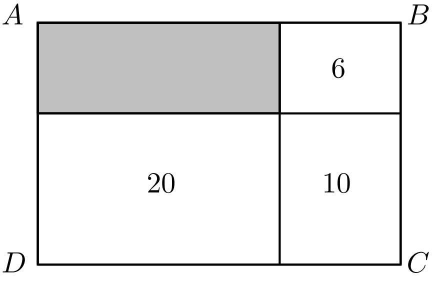
5. En la elección del representante de un grupo de sexto, cada uno de los 5 candidatos obtuvo diferente votación. Si el ganador obtuvo 10 votos y cada candidato obtuvo al menos un voto, ¿cuál es el **mínimo** número de estudiantes que puede tener este grupo?

(a) 16 (b) 20 (c) 35 (d) 40

6. ¿Cuántos números naturales mayores que 1 y menores que 100.000 son múltiplos de 6, y sus cifras son solo dígitos 0 o 1?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

7. El rectángulo $ABCD$ se divide en 4 subrectángulos. En algunos de estos subrectángulos se escribe su área en cm^2, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del rectángulo sombreado, en cm^2?



(a) 12 (b) 15 (c) 16 (d) 24

8. En una clase de salsa con 20 personas, hay 3 mujeres por cada hombre. Si para montar una coreografía el profesor invitó 18 bailarines más, quedando la misma cantidad de hombres que de mujeres, ¿cuántas mujeres invitó el profesor?

(a) 4 (b) 5 (c) 14 (d) 15

9. ¿Cuántos números naturales menores o iguales que 100 tienen exactamente tres divisores positivos?

(a) 10 (b) 9 (c) 5 (d) 4

1.1.2. Solución

1. Sean α el ángulo sombreado y β el ángulo opuesto por el vértice A del ángulo $\angle BAC$. Entonces

$$\alpha + \beta + 40^\circ = 180^\circ. \tag{1.1}$$

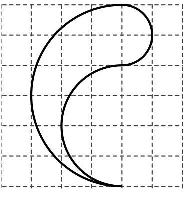
Además, como el triángulo ABC es equilátero, $\measuredangle BAC = 60^\circ$, por lo cual, $\beta = 60^\circ$.

Reemplazando el valor β en la ecuación (1.1) tenemos que $\alpha = 80^\circ$.

2. Observe que Willy llegó primero, ya que llegó antes que Gerson y Jorge, y Camilo llegó después de Jorge. Jorge fue el segundo, ya que llegó antes que Camilo y a su vez Camilo antes que Gerson. Esto último indica que Camilo fue el tercero y por consiguiente Gerson fue el cuarto. De modo que el orden de llegada fue: Willy, Jorge, Camilo, Gerson.

3. Sean m y n enteros positivos tales que $61 = m^2+n^2$. Entonces los valores posibles para m^2 son: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49. Para estos, los respectivos valores de n^2 serían: 60, 57, 52, 45, 36, 25, 12. Pero de esta última lista, los únicos que son cuadrados son 36 y 25. Luego, $m = 5$ y $n = 6$, o $m = 6$ y $n = 5$. Por tanto, la diferencia positiva entre m y n es 1.

4. Observe que el perímetro de la figura en cuestión es cuatro veces el perímetro de la siguiente figura:



Calculemos el perímetro de esta figura. En efecto, teniendo en cuenta que el lado de cada cuadradito mide $1\,cm$, tenemos que los radios de las semicircunferencias son $1\,cm$, $2\,cm$ y $3\,cm$. Por lo cual el perímetro de la figura anterior es:

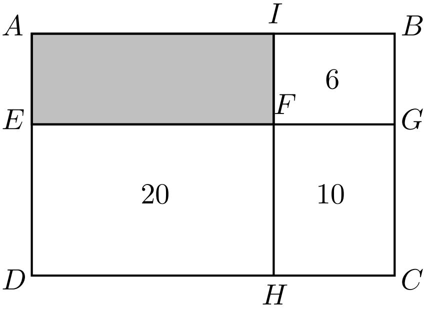
$$1 \times \pi + 2 \times \pi + 3 \times \pi = 6\pi.$$

Así, el perímetro pedido en cm de la figura en cuestión es: $4 \times 6\pi = 24\pi$.

5. Para hallar la menor cantidad de estudiantes que puede tener este grupo, se pensará en la menor cantidad de votos que pudo obtener cada candidato. El ganador obtuvo 10 votos y los demás candidatos como mínimo pudieron obtener 1, 2, 3 y 4 votos, ya que todos obtuvieron diferente votación con al menos un voto. En total la votación mínima pudo ser 20 votos, esto es, el número mínimo de estudiantes que puede tener el grupo es 20.

6. Digamos que n es un número mayor que 1 y menor que 100.000, que es múltiplo de 6 y sus cifras son solo los dígitos 0 o 1. Como n es múltiplo de 6, entonces es múltiplo de 2 y de 3. Por ser múltiplo de 2, el dígito de las unidades debe ser 0 y por ser múltiplo de 3, la suma de sus cifras es múltiplo de 3.; ya que el número es menor que 100.000 y sus cifras son solo ceros o unos, dicha suma debe ser 3, es decir tres de sus cifras son el dígito 1. Luego los números que cumplen tales condiciones son: **1110**, **10110**, **11010** y **11100**. Por lo tanto, hay cuatro números que cumplen las condiciones.

7. Consideremos la siguiente figura:



Como el área de $EFHD$ es $20 = EF \times FH$ y el área de $FGCH$ es $10 = FG \times FH$, tenemos que $EF = 2FG$.

Finalmente, como el área de $IBGF$ es $6 = FG \times FI$, se tiene que el área de $AIFE$ es

$$EF \times FI = 2FG \times FI = 2 \times (FG \times FI) = 2 \times 6 = 12.$$

8. En la clase de salsa hay 3 mujeres por cada hombre y se sabe que en total hay 20 personas, luego hay 15 mujeres y 5 hombres. El profesor invita 18 personas más de tal forma que quede la misma cantidad de mujeres que de hombres. Como ahora son en total 38 personas, deben ser 19 hombres y 19 mujeres, entonces los nuevos integrantes deben ser 14 hombres y 4 mujeres.

9. Los números naturales que tienen exactamente tres divisores positivos son los cuadrados de los números primos, es decir números que se obtienen al multiplicar un número primo por sí mismo, ya que estos números tienen la forma p^2, con p primo y en tal caso sus divisores son: 1, p y p^2.

Los cuadrados de números primos menores o iguales que 100 son: $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$, $7^2 = 49$. Por lo tanto hay 4 números que cumplen las condiciones del enunciado.

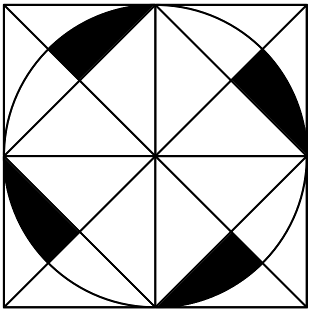
1.2. Prueba Selectiva

1.2.1. Prueba Selectiva: 11 de mayo

1. La suma de los divisores primos del número $\dfrac{2018}{0,2018}$ es:

(a) 7 (b) 8 (c) 10 (d) 25

2. ¿Cuál es el área de la región sombreada en la siguiente figura, si la circunferencia está inscrita en el cuadrado más grande, cuyo lado mide $1\,cm$?



(a) $\dfrac{\pi-1}{4}\,cm^2$ (b) $\dfrac{\pi-1}{16}\,cm^2$ (c) $\dfrac{\pi-2}{8}\,cm^2$ (d) $\dfrac{\pi-2}{32}\,cm^2$

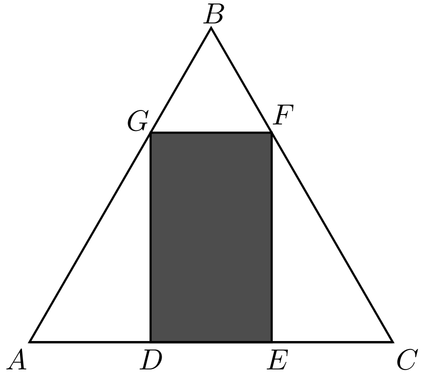
3. Para un proyecto de ingeniería un estudiante desea instalar 3 bombillos en línea recta. Si tiene disponibles 3 bombillos rojos, 2 verdes y 1 amarillo; ¿de cuántas maneras puede instalar los tres bombillos?

(a) 20 (b) 19 (c) 18 (d) 6

4. Carlos organizó una rifa con 100 boletas, numeradas del 1 al 100. El costo de cada boleta es igual al menor múltiplo de 50 mayor o igual al número de la boleta. Por ejemplo, la boleta 78 paga $\$100$. Si Carlos ha vendido hasta el momento todas las boletas que tienen al menos un 5, ¿cuánto dinero ha recibido?

(a) 1650 (b) 950 (c) 1900 (d) 1600

5. En la siguiente figura ABC es un triángulo equilátero y las longitudes de los segmentos $\overline{DE}, \overline{BF}$ y $\overline{BG}$ son un tercio de las longitudes de los segmentos $\overline{AC}, \overline{CB}$ y $\overline{BA}$ respectivamente. Si $AB = 9\ cm$, ¿cuál es la razón entre el área sombreada y el área del triángulo ABC ?



$(a)\ \frac{1}{9}$ $(b)\ \frac{3}{4}$ $(c)\ \frac{1}{3}$ $(d)\ \frac{4}{9}$

6. Javier escribió un número de tres cifras tal que la suma de sus cifras es 7 y la cifra de las centenas es el triple de la cifra de las unidades. ¿Cuál es el producto de las cifras del número que escribió Javier?

(a) 6 (b) 7 (c) 9 (d) 10

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

7. Un viejo mago matemático predice el número ganador de una lotería del país. El mago afirma que el ganador es el mayor número de cuatro cifras que cumple las siguientes condiciones:

- el dígito de las centenas es igual al producto del dígito de las unidades con el dígito de las decenas,
- es un múltiplo de 4 menor que 2018 y
- no tiene cifras repetidas.

¿Cuál es el número ganador según el mago?

8. El Tangram es un juego chino muy antiguo, que consiste en formar siluetas de figuras con las siete piezas dadas sin solaparlas. Las siete piezas o “tans” se obtienen cortando un cuadrado como se muestra en la *Figura* 1. Si la *Figura* 2 se obtiene con las 7 fichas del Tangram de la *Figura* 1, halle el área del triángulo ABC.

Tangram

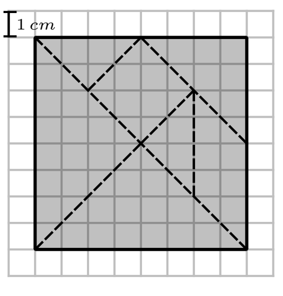


Figura 1

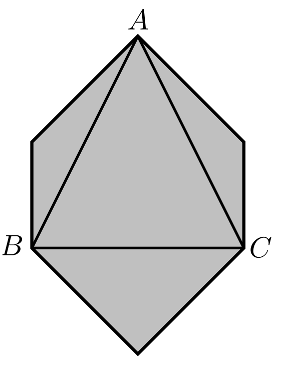


Figura 2

9. En un cuadrado se marcan sus vértices y los puntos medios de sus lados. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con sus tres vértices en los puntos marcados?

1.2.2. Solución

1. Observe que
$$\frac{2018}{0,2018}=\frac{\frac{2018}{1}}{\frac{2018}{10.000}}=\frac{2018\times 10.000}{2018}=10.000.$$
Así la descomposición en factores primos es $10.000=2^4\times 5^4$. Luego los únicos divisores primos de $\dfrac{2018}{0,2018}$ son 2 y 5, entonces la suma de ellos es $2+5=7$.

2. De la figura se deduce que el área de la circunferencia menos el área del cuadrado inscrito en la circunferencia, da como resultado dos veces el área de la región sombreada.

   Como la circunferencia se encuentra inscrita en el cuadrado de lado $1\,cm$, cada uno de sus diámetros mide $1\,cm$, luego su área es:
$$\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}\,cm^2.$$
   Por otro lado, el cuadrado inscrito en la circunferencia está formado por dos triángulos que comparten una de sus bases (lados) y la altura correspondiente a dicha base mide lo mismo en cada uno de ellos. Dicha base mide $1\,cm$ y la altura mide $\dfrac{1}{2}\,cm$. Entonces el área del cuadrado inscrito en la circunferencia es:
$$2\left(\frac{1\times\frac{1}{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\,cm^2.$$
   Finalmente el área sombreada está dada por:
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\,cm^2-\frac{1}{2}\,cm^2\right)=\frac{\pi-2}{8}\,cm^2.$$
   Nota: Otra forma de encontrar el área del cuadrado inscrito en la circunferencia es calculando la longitud de uno de sus lados. Para ello observe

que el lado del cuadrado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos lados son radios de la circunferencia. Así, por el Teorema de Pitágoras, el lado del cuadrado mide: $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, cm$, y por lo tanto su área es: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, cm\right)^2 = \frac{1}{2}\, cm^2$.

3. En la siguiente tabla se muestra las formas en que el estudiante puede elegir los tres colores de sus bombillos y las formas en que los puede instalar en línea recta para cada una de las posibles elecciones de colores.

Combinación de colores	**Formas de alinearlos**
3 rojos	RRR
2 rojos - 1 verde	RRV, RVR, VRR.
2 rojos - 1 amarillo	RRA, RAR, ARR.
1 rojo - 2 verdes	RVV, VRV, VVR.
1 rojo - 1 verde - 1 amarillo	RVA, RAV, VRA, VAR, ARV, AVR.
2 verdes - 1 amarillo	VVA, VAV, AVV.

Así, el estudiante tiene 19 maneras distintas de instalar los 3 bombillos.

4. Las boletas que Carlos ya vendió son: 5, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 65, 75, 85, 95. Es claro que, para los 6 primeros números el menor múltiplo de 50 mayor o igual que el número es precisamente 50, mientras que para los demás números es 100. De manera que Carlos ha recibido $6 \times 50 + 13 \times 100 = \$1600$.

5. Note que el cuadrilátero sombreado $DEFG$ es un paralelogramo; considerando el segmento $\overline{DE}$ como base de este paralelogramo, por el teorema de Pitágoras se puede deducir que su altura es $3\sqrt{3}\, cm$. Por lo tanto el área sombreada es: $3 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\, cm^2$.

Por otro lado, el área del triángulo equilátero ABC es $\frac{81\sqrt{3}}{4}\, cm^2$. Así la razón entre el área sombreada y el área del triángulo ABC está dada por $\frac{9\sqrt{3}}{\frac{81\sqrt{3}}{4}} = \frac{4}{9}$.

6. Sea abc el número de tres cifras que escribió Javier. La primera condición indica que la suma de sus cifras es 7, esto es, $a + b + c = 7$. La otra condición dice que la cifra de las centenas es el triple de la cifra de las unidades, es decir, $a = 3c$. Reemplazando a en la primera ecuación se tiene que

$$4c + b = 7.$$

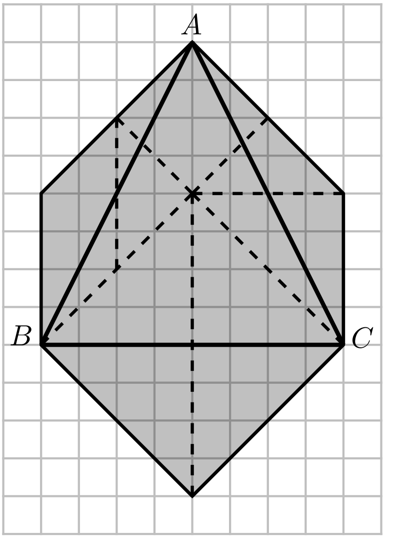
Note que los posibles valores para c son $1, 2$ o 3, ya que a es un dígito; pero si c toma los valores 2 o 3, entonces $4c+b > 7$. Luego $c = 1$, $a = 3$ y $b = 3$; concluyendo que el número escrito fue 331 y así el producto de sus cifras es 9.

7. Sea $abcd$ el número ganador de la lotería. Como el número no tiene cifras repetidas, entonces a, b, c y d son dígitos diferentes. Además, $b = d \times c$, pues el dígito de las centenas debe ser igual al producto del dígito de las unidades con el dígito de las decenas. Claramente b, c y d son dígitos diferentes de 1 y 0, ya que si alguno lo fuera se repetiría dígito. Entonces las posibilidades para esos dígitos son las siguientes

d	2	3	2	4
c	3	2	4	2
b	6	6	8	8

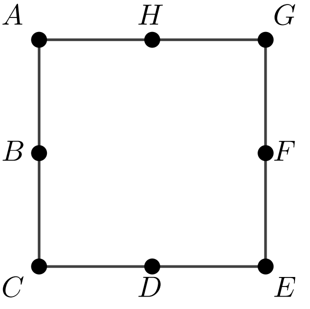
Como el número ganador es menor que 2018 entonces $a = 1$ o $a = 2$, pero ya se tiene que una de las cifras b, c o d es 2, por tal motivo $a = 1$. Conociendo el valor de a, existen 4 posibles números: 1623, 1842, 1632 y 1824.; de los cuales los dos últimos son múltiplos de 4 y el mayor de ellos es 1824. Por lo tanto el número ganador de la lotería según el mago es 1824.

8. Una manera de obtener la *Figura 2* con las 7 fichas del Tangram es la que se muestra a continuación



Observe que la base $\overline{BC}$ del triángulo ABC y su respectiva altura miden $8\,cm$. Luego el área del triángulo es $\dfrac{8\times 8}{2}=32\,cm^2$.

9. El total de los puntos marcados sobre el cuadrado son 8 (4 vértices y 4 puntos medios), como se muestra en la siguiente figura:



Observe que hay

$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\times 5!}=56$$

formas de escoger 3 de los 8 puntos marcados (sin importar el orden), sin embargo en este conteo se consideran algunas combinaciones de puntos que no pueden ser los vértices de un triángulo (pues los puntos son colineales), estas son: $\{A,B,C\}$, $\{C,D,E\}$, $\{E,F,G\}$ y $\{F,G,H\}$. Por lo tanto se pueden formar 52 triángulos con sus vértices en los puntos marcados.

1.3. Prueba Final

1.3.1. Resultados

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la décima versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Secundaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 1582 participantes del certamen en el nivel Avanzado, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

CUADRO DE HONOR

1^{er} Puesto, medalla de oro

MARÍA ALEJANDRA AMAYA NIÑO

Colegio San Pedro Claver, Bucaramanga.

2^{o} Puesto, medalla de plata

SANTIAGO MÉNDEZ MESA

Fundación Colegio UIS, Floridablanca.

3^{er} Puesto, medalla de bronce

IVÁN DAVID GÓMEZ SILVA

Colegio San Pedro Claver, Bucaramanga.

4^{o} Puesto

ANDRÉS JAVIER SEPÚLVEDA VESGA

Colegio La Quinta del Puente, Floridablanca.

5^{o} Puesto

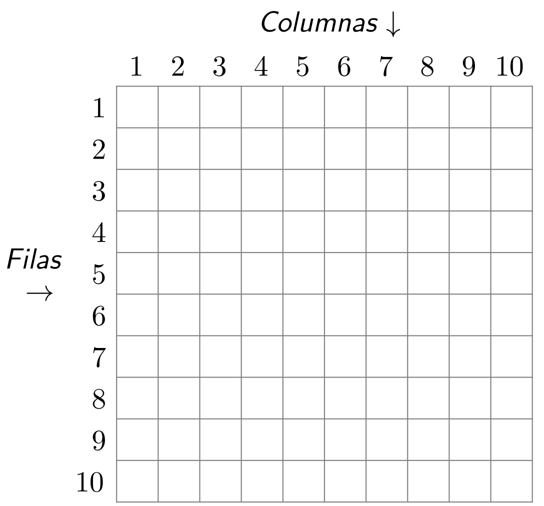
DAVID FERNANDO HERRÁN FONSECA

Colegio La Quinta del Puente, Floridablanca.

1.3.2. Prueba Final: 9 de junio

1. En cierto momento un auditorio con asientos enumerados desde 1 tiene los primeros 1770 puestos ocupados. A partir de ese momento no sale ninguna persona, en el siguiente minuto entra una persona y en cada uno de los siguientes minutos entra una persona más que en el minuto anterior. Si pasada una hora se ocupan todos los puestos y salen las personas que están en un puesto enumerado con un cuadrado perfecto, ¿cuántos puestos quedan libres?

2. Un tablero cuadrado del famoso juego de astucia naval cuenta con 100 casillas (ver la figura), cada una representada por una pareja de números (a, b), donde a representa el número de la columna, desde 1 hasta 10 y b representa el número de la fila, desde 1 hasta 10. Si Juanito quiere acomodar uno de sus barcos que ocupa 2 casillas adyacentes (con un lado en común) de tal forma que la suma de los 4 números que representan las 2 casillas que el barco ocuparía sea divisible por 3, ¿de cuántas formas Juanito podría acomodar su barco?



3. ¿Cuántos números de cuatro cifras satisfacen las siguientes condiciones?

- La suma de las cifras del número es igual a 14.
- El número sin las centenas ni las unidades de mil es un número primo menor que 50, de dos cifras y deja residuo 1 cuando se divide entre 4.

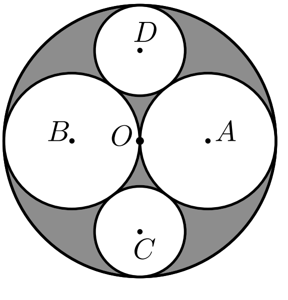
4. Se forma el número n de la siguiente manera: se escribe 2018 una vez, después dos veces, después tres veces y así sucesivamente hasta 2018 veces seguidas, es decir

$$n = 2018\underbrace{20182018}_{\text{2 veces}}\underbrace{201820182018}_{\text{3 veces}}\ldots\underbrace{2018\ldots2018}_{\text{2018 veces}}.$$

Determine si n es divisible entre 11.

5. Sea $ABCD$ un rectángulo y P la intersección entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Construya E sobre $\overline{AB}$ y defina a F como la intersección entre la extensión de $\overline{EP}$ y $\overline{CD}$. Demuestre que los cuadriláteros $AEFD$ y $CFEB$ tienen igual área.

6. En la siguiente figura la circunferencia de mayor tamaño tiene centro en O y es tangente a las demás circunferencias. Las circunferencias con centro en A y B son tangentes entre sí en el punto O. Las circunferencias con centro en C y D son tangentes a las circunferencias con centro en A y B. Si el radio de la circunferencia con centro en A mide $6\,cm$, halle el valor del área sombreada.



1.3.3. Solución

1. Se sabe que hay 1.770 puestos ocupados en cierto momento, que en el siguiente minuto entra una persona y que en cada uno de los siguientes minutos entra una persona más que en el minuto anterior. Por lo tanto, si en una hora se ocupan todos los asientos, entonces la capacidad del auditorio es:

$$1770 + (1 + 2 + \cdots + 60) = 3600,$$

donde la cantidad en el paréntesis corresponde a las personas que entraron en una hora.

Por otra parte, como $3600 = 60^2$, se establece que hay 60 cuadrados perfectos desde 1 hasta 3600, por lo tanto si salen las personas que están en un puesto enumerado con un cuadrado perfecto quedan 60 puestos libres en el auditorio.

2.

Propuesta por: Jose Daniel Vinazco Díaz;
Colegio Bilingüe Divino Niño, Bucaramanga.

Consideremos el siguiente cuadro en el cual en cada casilla aparece la suma del número de la fila con el número de la columna.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

En este arreglo aparecen sombreadas las casillas consecutivas (vertical u horizontalmente) que suman un múltiplo de 3, al contarlas todas se establece que en total hay 60 maneras posibles para acomodar el barco.

3.

Propuesta por: María Alejandra Amaya Niño;
Colegio San Pedro Claver, Bucaramanga.

Los números primos de dos cifras menores que 50 que dejan residuo 1 cuando se dividen entre 4; son: 13, 17, 29, 37 y 41. Ahora consideramos los siguientes casos:

Caso 1. *Los números que terminan en* 13. Como las dos últimas cifras suman 4, entonces las dos primeras cifras deben sumar 10. Por tanto las nueve parejas de dígitos que conforman las primeras dos cifras son: $(9,1),(8,2),(7,3),(6,4),(5,5),(4,6),(3,7),(2,8),(1,9)$.

Caso 2. *Los números que terminan en* 17. Como las dos últimas cifras suman 8, entonces las dos primeras cifras deben sumar 6. Por tanto las seis parejas de dígitos que conforman las primeras dos cifras son: $(6,0),(5,1),(4,2),(3,3),(2,4),(1,5)$.

Caso 3. *Los números que terminan en* 29. Como las dos últimas cifras suman 11, entonces las dos primeras cifras deben sumar 3. Por tanto las tres parejas de dígitos que conforman las primeras dos cifras son: $(3,0),(2,1),(1,2)$.

Caso 4. *Los números que terminan en* 37. Como las últimas dos cifras suman 10, entonces las dos primeras cifras deben sumar 4. Por tanto las cuatro parejas de dígitos que conforman las primeras dos cifras son: $(4,0),(3,1),(2,2),(1,3)$.

Caso 5. *Los números que terminan en* 41. Como las últimas dos cifras suman 5, entonces las dos primeras cifras deben sumar 9. Por tanto las nueve parejas de dígitos que conforman las primeras dos cifras son: $(9,0),(8,1),(7,2),(6,3),(5,4),(4,5),(3,6),(2,7),(1,8)$.

Por lo tanto hay 31 números que cumplen las condiciones del enunciado.

4. Observe que los dígitos 2, 0, 1 y 8 aparecen en el número n cada uno tantas veces como

$$\sum_{k=1}^{2018} k = 1009 \times 2019.$$

Ahora bien, recuerde el criterio de divisibilidad por 11 que permite concluir que un número es divisible por 11 siempre que la diferencia entre la suma de los dígitos que ocupan las posiciones impares y la suma de los dígitos que ocupan las posiciones pares sea un múltiplo de 11. Con esto en mente, los dígitos en las posiciones impares del número n son 0 y 8, cuya suma, según la cantidad de veces que aparecen, es $8 \times 1009 \times 2019$.

Por otro lado, los dígitos que ocupan las posiciones impares de número n son 2 y 1, y su suma es

$$(2+1) \times 1009 \times 2019 = 3 \times 1009 \times 2019.$$

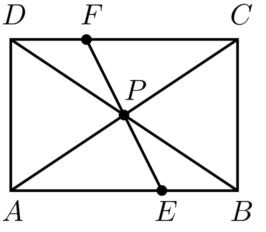
Con esto, la diferencia entre la suma de los dígitos que ocupan las posiciones impares y la suma de los dígitos que ocupan las posiciones pares es

$$D = (8 \times 1009 \times 2019) - (3 \times 1009 \times 2019) = 5 \times 1009 \times 2019;$$

cuya descomposición en factores primos es: $D = 3 \times 5 \times 673 \times 1009$.

Como 11 no aparece en la descomposición en factores primos de D, entonces 11 no puede dividir a D y por lo tanto no divide a n.

5. A partir de la descripción del enunciado se construye la siguiente figura.



Teniendo en cuenta la figura basta probar que los cuadriláteros $AEFD$ y $CFEB$ son congruentes. Se establecen las siguientes igualdades en las medidas de los ángulos por el hecho de ser opuestos por el vértice:

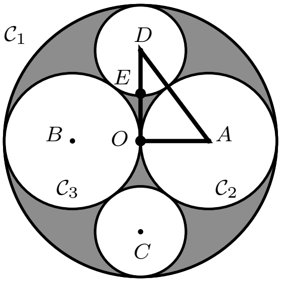
- $\measuredangle APE = \measuredangle CPF$
- $\measuredangle EPB = \measuredangle FPD$

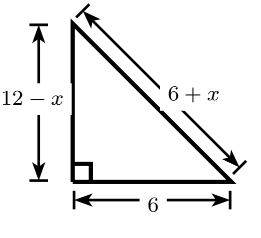
Como P es la intersección entre las diagonales del rectángulo se tiene que $AP = PC = DP = PB$. Además, dado que $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son paralelas y $\overline{AC}$ es una transversal a ellas, se tiene que $\measuredangle EAP = \measuredangle FCP$. De modo que, por las igualdades entre ángulos mostradas anteriormente y el criterio de congruencia ángulo-lado-ángulo (ALA) se deduce que los triángulos FPC y EPA son congruentes.

Por ángulos suplementarios se tiene que $\measuredangle DFP = \measuredangle BEP$, nuevamente usando el criterio de congruencia ALA se deduce que los triángulos DPF y BEP son congruentes.

Finalmente, de las congruencias de triángulos anteriores se establece que $AE = CF$, $BE = DF$, $\measuredangle DFE = \measuredangle BEF$ y $\measuredangle AEF = \measuredangle CFE$, y como $ABCD$ es rectángulo se tiene que $AD = BC$, $\measuredangle DAE = \measuredangle BCF$ y $\measuredangle ADF = \measuredangle CBE$; de esta forma se concluye que los cuadriláteros $AEFD$ y $CFEB$ son congruentes.

6. Considere la siguiente figura, en la que $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ son las circunferencias de centros en O, A y B, respectivamente; y E es el punto de intersección entre el segmento $\overline{OD}$ y la circunferencia de centro D.





Dado que $\mathcal{C}_1$ es tangente a $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$, y estas son tangentes entre sí, se deduce que el radio de $\mathcal{C}_2$ es igual al radio de $\mathcal{C}_3$ y el radio de $\mathcal{C}_1$ es el doble del radio de $\mathcal{C}_2$.

Como el radio de $\mathcal{C}_2$ es $6\,cm$, entonces el radio de $\mathcal{C}_1$ es $12\,cm$. Por lo tanto, el área de $\mathcal{C}_1$ es $144\pi\,cm^2$ y el área de $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ es $36\pi\,cm^2$.

Es claro que $\overline{DE}$ es radio de la circunferencia de centro D. Suponga que $DE = x$, entonces $AD = 6 + x$ y $x + DO = 12\,cm$, de ahí que $DO = 12-x$. Ahora, como el triángulo AOD es rectángulo en O, usando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\begin{aligned}
(6+x)^2 &= 36 + (12-x)^2,\\
36 + 12x + x^2 &= 36 + 144 - 24x + x^2,\\
36x &= 144,\\
x &= 4.
\end{aligned}$$

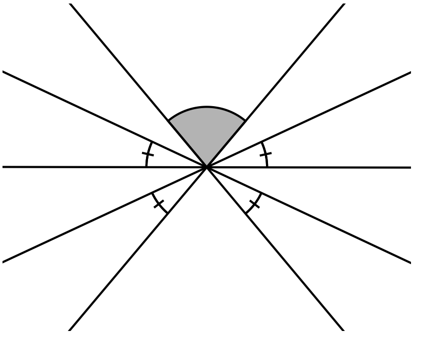
Así, los radios de las circunferencias con centros en C y D miden $4\,cm$. Luego el área de cada una de estas circunferencias es $16\pi\,cm^2$

De lo anterior se concluye que el área sombreada es:

$$144\pi - (2 \times 36\pi + 2 \times 16\pi) = 40\pi\,cm^2.$$

1.4. Ejercicios propuestos

1. Halle la medida del ángulo sombreado en la siguiente figura, sabiendo que los demás ángulos marcados miden cada uno $25°$.



2. ¿Cuál es el residuo de dividir $30 + 300 + 3000 + \cdots + 3 \times 10^{2018}$ entre 7?

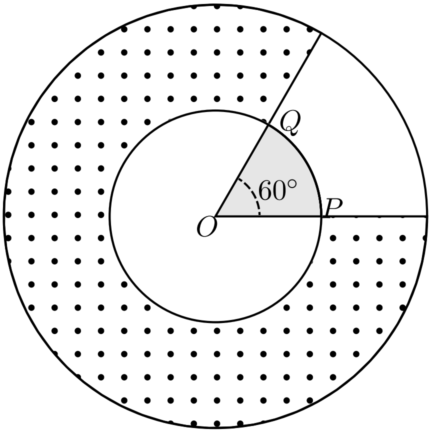
3. Javier tiene 15 chocolates y no los quiere compartir con su hermana. Su papá le propuso que si le regalaba algunos de sus chocolates a su hermana, él le compraría tantos chocolates como la suma de los divisores de la cantidad que le de. Si Javier quería la mayor cantidad de chocolates posibles, ¿cuántos chocolates debía regalarle a su hermana?

4. ¿De cuántas formas 5 personas pueden reaccionar a una publicación de Facebook con las opciones: me gusta, me encanta, me divierte, me asombra, me entristece o me enfada?

5. Sofía se tomó una foto y quiere compartirla en sus tres redes sociales: Instagram, Facebook y Twitter; pero antes quiere aplicarle un filtro de su celular. Si el celular tiene 9 filtros y quiere que en cada red social la foto tenga un filtro diferente, ¿de cuántas maneras puede compartir la foto Sofía?

6. Un cuadrado está inscrito en una circunferencia de radio r. Halle el área y el perímetro del cuadrado en términos de r.

7. En la siguiente figura se muestran dos círculos con centro en O. Se sabe que la longitud de cada radio del círculo grande es el doble de la longitud de cada radio del círculo pequeño. Si el ángulo POQ mide $60°$ y el área de la región sombreada es $1\,cm^2$, ¿cuál es el área de la región punteada?



8. ¿Cuántos números de tres cifras son múltiplos de 11 y dos de sus cifras son iguales?

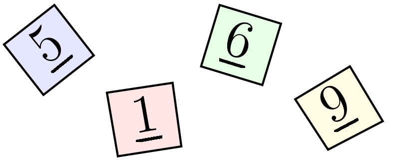
9. Camila compró una camisa con el $20\,\%$ de descuento y un pantalón que valía lo mismo que la camisa pero sin el descuento. Si en total pagó $\$36.000$, ¿cuánto valió el pantalón?

10. Las medidas (en grados) de los ángulos interiores de un triángulo son α, α y 2α. Clasifique el triángulo según la medida de sus ángulos y de sus lados.

11. En cada uno de los siguientes casos determine el valor de a de tal forma el que número dado tenga la propiedad que se indica.

   - $63a$ es primo.
   - $561a$ es múltiplo de 6.
   - $5a61a$ es múltiplo de 9.

12. Juan juega a formar números con las siguientes cuatro tarjetas:



De los números que Juan puede formar con sus tarjetas,

- ¿cuántos son divisibles por 4?
- ¿cuántos son divisibles por 3?
- ¿cuántos son divisibles por 15?
- ¿cuántos son divisibles por 7?
- ¿cuántos son múltiplos de 11?

13. Se forma el número n de la siguiente manera: se escribe 2018 una vez, después dos veces, después tres veces y así sucesivamente hasta 2018 veces seguidas, es decir

$$n = 2018\underbrace{20182018}_{\text{2 veces}}\underbrace{201820182018}_{\text{3 veces}}\ldots\underbrace{2018\ldots2018}_{\text{2018 veces}}.$$

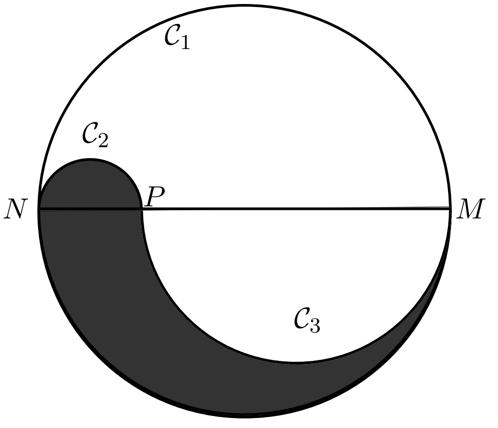
Determine si n es divisible por 42.

14. ¿Cuántas cifras tiene el número $4^{6.522} \times 25^{6.520}$?

15. En una urna se encuentran 1.000 balotas numeradas de 1 a 1.000. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una balota de forma aleatoria, su número sea múltiplo de 3, 5 y 7?

16. Determine el menor valor de n tal que $12 \times n$ es un cuadrado perfecto y $18 \times n$ es un cubo perfecto.

17. En la siguiente figura $\overline{NM}$ es un diámetro de la circunferencia $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ son semicircunferencias cuyos centros están sobre $\overline{NM}$. Si $MP = 4NP$, ¿qué fracción del círculo $\mathcal{C}_1$ está sombreada?



18. ¿Cuántos números entre 1 y 1000 son múltiplos de 3 y 5, pero no son múltiplos de 2?

Capítulo 2

Nivel Medio

2.1. Prueba Clasificatoria

2.1.1. Prueba Clasificatoria: 13 de abril

1. Si el triángulo ABC es isósceles en B, ¿cuál debe ser la medida de $\overline{AC}$ para que $\measuredangle ABC = 90°$?

(a) $2\sqrt{BC}$ (b) $AB\sqrt{2}$ (c) BC (d) $2\sqrt{AB^2 + AC^2}$

2. Danilo envió una cadena en WhatsApp a un grupo de amigos, la cual decía: *Elije un número entero, multiplícalo por* 3, *al resultado súmale* 3, *y finalmente multiplica este resultado otra vez por* 3. ¿Cuál de los siguientes procedimientos le permite a Danilo adivinar el número elegido por alguno de sus amigos a partir del resultado obtenido luego de hacer las operaciones indicadas en el mensaje?

(a) dividir entre 9 el resultado final y luego restar 1.

(b) dividir entre 9 el resultado final y luego restar 3.

(c) sumar las cifras del resultado final y ver si es múltiplo de 9.

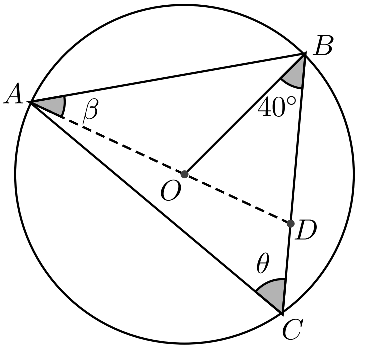
(d) restar 3 al resultado final y luego dividir entre 9.

3. ¿Cuántos divisores positivos tiene el resultado de la siguiente operación?

$$\frac{3^6 \times 4^3 \times 6^4}{18^4 \times 4^2}$$

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 9

4. En la siguiente figura el triángulo ABC tiene sus vértices sobre la circunferencia cuyo centro es O y el punto D es tal que $\measuredangle OBD = 40°$, $DB = OB$ y los puntos A, O y D son colineales. Si las letras β y θ representan las medidas de los correspondientes ángulos señalados, ¿cuál es el valor de $\beta + \theta$?



(a) 180° (b) 105° (c) 90° (d) 75°

5. Sean a y b dígitos. ¿Cuántos números n de la forma

$$n = 10^3 a + 10^2 b + 10a + b,$$

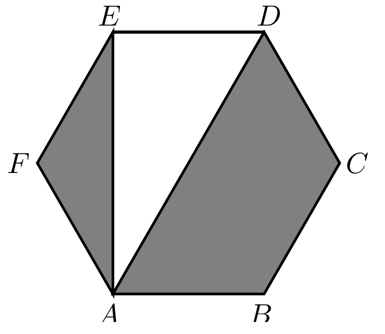
son múltiplos de 33?

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 4

6. Un cajero debe entregar \$10.000 de vueltos a un cliente, pero sólo dispone de billetes de \$1.000, \$2.000 y \$5.000. ¿De cuántas formas el cajero puede entregarle los \$10.000 a este cliente?

(a) 8 (b) 10 (c) 15 (d) 20

7. En la siguiente figura $ABCDEF$ es un hexágono regular de lado $2\ cm$ y área $6\sqrt{3}\ cm^2$. Determine el área sombreada.



(a) $2\ cm^2$ $\quad$ (b) $2\sqrt{3}\ cm^2$ $\quad$ (c) $3\sqrt{3}\ cm^2$ $\quad$ (d) $4\sqrt{3}\ cm^2$

8. ¿Cuántos enteros positivos menores o iguales que 100 tienen exactamente cuatro divisores positivos?

(a) 15 $\quad$ (b) 30 $\quad$ (c) 32 $\quad$ (d) 33

9. Sean a y b números reales tales que

$$a^{2018}b = 2-\sqrt{5} \quad \text{y} \quad ab^{2018} = 2+\sqrt{5}.$$

Determine el valor numérico de la siguiente expresión:

$$a^{2019}\left(\frac{b^{2019}+1}{a^{2019}-1}\right)+b^{2019}\left(\frac{a^{2019}+1}{b^{2019}-1}\right)$$

(a) 0 $\quad$ (b) 1 $\quad$ (c) 2 $\quad$ (d) 4

2.1.2. Solución

1. Sabiendo que el triángulo ABC es isósceles en B y suponiendo que $\measuredangle ABC = 90^\circ$, tenemos que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo con hipotenusa $\overline{AC}$ y sus catetos de igual longitud, esto es $AB = BC$, de modo que por el teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2}, \\ &= \sqrt{AB^2 + AB^2}, \\ &= \sqrt{2 \times AB^2}, \\ &= AB\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2. Sea n el número que eligió el amigo de Danilo. Luego de hacer las operaciones que se indican en la cadena de WhatsApp el resultado que debió obtener el amigo de Danilo es el siguiente:

$$3 \times (3n + 3).$$

Aprovechando el factor común 3 dentro del paréntesis, se tiene:

$$3 \times (3n + 3) = 3 \times 3(n + 1),$$

o equivalentemente

$$9 \times (n + 1).$$

De la última expresión se observa que para obtener el número n que eligió el amigo de Danilo, basta dividir entre 9 el resultado final y luego restar 1.

$$\begin{aligned} \frac{9 \times (n + 1)}{9} &= n + 1, \\ (n + 1) - 1 &= n. \end{aligned}$$

3. Utilizando propiedades de la potenciación se puede reescribir la expresión de la siguiente forma:

$$\frac{3^6 \times 4^3 \times 6^4}{18^4 \times 4^2} = \frac{3^6 \times \left(2^2\right)^3 \times (2\times 3)^4}{\left(2\times 3^2\right)^4 \times \left(2^2\right)^2} = \frac{3^{10}\times 2^{10}}{3^8 \times 2^8} = 2^2 \times 3^2.$$

Ahora, observe que los divisores de $2^2 \times 3^2$ son todos los números de la forma $2^m \times 3^n$, donde m y n pertenecen al conjunto $\{0,1,2\}$. Por lo tanto la cantidad de divisores de $2^2 \times 3^2$ es:[1] $3 \times 3 = 9$, tales divisores son:

$$\begin{array}{lll} 2^0 \times 3^0 = \mathbf{1}, & 2^0 \times 3^1 = \mathbf{3}, & 2^0 \times 3^2 = \mathbf{9}, \\ 2^1 \times 3^0 = \mathbf{2}, & 2^1 \times 3^1 = \mathbf{6}, & 2^1 \times 3^2 = \mathbf{18}, \\ 2^2 \times 3^0 = \mathbf{4}, & 2^2 \times 3^1 = \mathbf{12}, & 2^2 \times 3^2 = \mathbf{36}. \end{array}$$

4. Como $DB = OB$, el triángulo OBD es isósceles en B, luego $\measuredangle BOD = \measuredangle BDO = 70°$, de ahí que $\measuredangle AOB = \measuredangle CDO = 110°$ por ser ángulos suplementarios de ángulos de $70°$. Por otra parte, sabemos que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, luego $\beta + \measuredangle ABO = 70°$; además note que el triángulo AOB es isósceles en O, por lo tanto $\beta = 35°$. Finalmente por el teorema del ángulo central[2] tenemos que $\theta = \dfrac{\measuredangle BOA}{2} = \dfrac{110°}{2} = 50°$. Por lo tanto $\theta + \beta = 90°$.

5. Sean a y b dígitos tales que $n = 10^3 a + 10^2 b + 10a + b = abab$ es un múltiplo de 33, entonces n es divisible por 3 y por 11. Por criterios de divisibilidad del 3 y del 11 se tiene que:

$$a + b + a + b = 2(a+b) = 3 \times k, \tag{2.1}$$

$$a - b + a - b = 2(a-b) = 11 \times m, \tag{2.2}$$

donde k y m son números enteros. Note que $m \neq 1$ y $m \neq -1$, pues $2(a-b)$ es un número par.

[1] Ver Ejercicio Propuesto 5

[2] Teorema del ángulo central: El ángulo central subtendido por dos puntos de una circunferencia es el doble que cualquier ángulo inscrito en la circunferencia subtendido por los mismos dos puntos.

Además si $m > 1$ entonces $a - b \geq 11$, pero esto es imposible ya que a y b son dígitos, luego $m < 1$. Análogamente se deduce que $m > -1$. De modo que en la ecuación (2.2) $m = 0$ y por lo tanto $a = b$.

Reemplazando $a = b$ en la ecuación (2.1) se obtiene $4 \times a = 3 \times k$. Luego a es un dígito tal que $4 \times a$ es múltiplo de 3, es decir, $a \in \{0, 3, 6, 9\}$. Por tanto, los múltiplos de 33 de la forma $n = 10^3 a + 10^2 b + 10a + b$, con a y b dígitos, son en total 4, a saber: 0, 3333, 6666 y 9999.

6. En la siguiente tabla se muestran las formas en que se puede sumar $\$10.000$, con billetes de $\$1.000$, $\$2.000$ y $\$5.000$:

$\$5.000$	$\$2.000$	$\$1.000$	Total
1	2	1	$\$10.000$
1	1	3	$\$10.000$
1	0	5	$\$10.000$
2	0	0	$\$10.000$
0	0	10	$\$10.000$
0	1	8	$\$10.000$
0	2	6	$\$10.000$
0	3	4	$\$10.000$
0	4	2	$\$10.000$
0	5	0	$\$10.000$

Asi que el cajero puede entregar los vueltos de 10 maneras diferentes.

7. El área sombreada A_S es la diferencia entre el área del hexágono A_H y el área del triángulo EAD que llamaremos A_T. Note que $\overline{EA}$ es la altura del triángulo AED respecto a la base $\overline{ED}$ y $EA = 2a$, donde a es el apotema del hexágono.

Además el perímetro del hexágono es $6 \times 2\,cm = 12\,cm$ y su área es $6\sqrt{3}\,cm^2$ por lo tanto[3] $\dfrac{12 \times a}{2} = 6\sqrt{3}$, de ahí que $a = \sqrt{3}$.

[3] Recuerde que la fórmula para calcular el área de un polígono regular está dada por $\dfrac{P \times a}{2}$, donde P es el perímetro y a el apotema.

De modo que el área del triángulo AED es $\dfrac{2 \times 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\, cm^2$ y por lo tanto el área sombreada es:

$$A_s = A_H - A_T = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\, cm^2.$$

8. Se deja al lector justificar porque los únicos números enteros positivos que tienen exactamente cuatro divisores positivos son cubos perfectos de primos ó el producto de dos primos distintos. Ahora, los cubos perfectos de primos menores o iguales que 100 son: 8 y 27. Por otro lado, los números menores o iguales que 100 que se obtienen como el producto de dos primos distintos son:

$6 = 2 \times 3$	$10 = 2 \times 5$	$14 = 2 \times 7$	$22 = 2 \times 11$
$26 = 2 \times 13$	$34 = 2 \times 17$	$38 = 2 \times 19$	$46 = 2 \times 23$
$58 = 2 \times 29$	$62 = 2 \times 31$	$74 = 2 \times 37$	$82 = 2 \times 41$
$86 = 2 \times 43$	$94 = 2 \times 47$	$15 = 3 \times 5$	$21 = 3 \times 7$
$33 = 3 \times 11$	$39 = 3 \times 13$	$51 = 3 \times 17$	$57 = 3 \times 19$
$69 = 3 \times 23$	$87 = 3 \times 29$	$93 = 3 \times 31$	$35 = 5 \times 7$
$55 = 5 \times 11$	$80 = 5 \times 13$	$85 = 5 \times 17$	$95 = 5 \times 19$
$77 = 7 \times 11$	$91 = 7 \times 13$		

En total existen 32 números naturales que cumplen con las condiciones.

9. Note que

$$a^{2019}b^{2019} = \left(a^{2018}b\right)\left(ab^{2018}\right) = \left(2 - \sqrt{5}\right)\left(2 + \sqrt{5}\right) = -1.$$

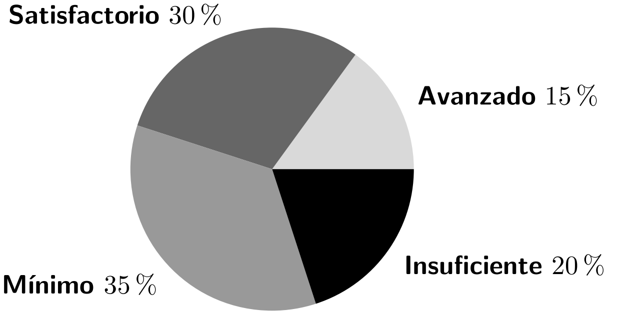
Luego,

$$\begin{aligned} a^{2019}\left(\frac{b^{2019}+1}{a^{2019}-1}\right) + b^{2019}\left(\frac{a^{2019}+1}{b^{2019}-1}\right) &= \frac{-1+a^{2019}}{a^{2019}-1} + \frac{-1+b^{2019}}{b^{2019}-1}, \\ &= 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

2.2. Prueba Selectiva

2.2.1. Prueba Selectiva: 11 de mayo

1. La siguiente gráfica muestra los resultados de n estudiantes de un colegio que presentaron las pruebas Saber. Si $78 \leq n \leq 82$ y n tiene 10 divisores. ¿Cuántos estudiantes se ubicaron en los niveles Satisfactorio y Avanzado?



(a) 36 (b) 40 (c) 45 (d) 80

2. Sean $ABCDE$ un pentágono regular y F el punto de intersección entre las diagonales $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. *Los triángulos ADE y CDE son isósceles.*

II. $\measuredangle AED = \measuredangle AFC$.

III. *Los triángulos AFC y EDC son congruentes.*

IV. *El triángulo ABC es equilátero.*

(a) I, II y III (b) I y IV (c) Solamente I y II (d) Solamente I

3. Los códigos para los estudiantes de la Universidad Industrial de Santander tienen 7 dígitos y empiezan por 218. ¿Cuál es la probabilidad de que a un estudiante le corresponda un código con todos sus dígitos diferentes?

(a) $\frac{1}{10^4}$ (b) $\frac{84}{10^3}$ (c) $\frac{504}{10^3}$ (d) $\frac{360}{10^4}$

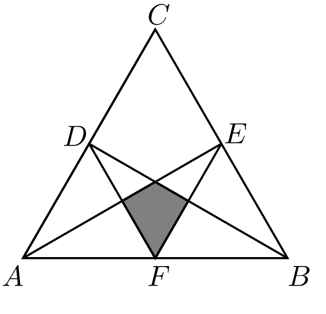
4. En una alcancía solo hay monedas de \$500 y \$1.000. Laura observa que la razón entre la cantidad de monedas de \$500 y monedas de \$1.000 es de $\frac{1}{5}$; luego incluye 20 monedas de \$500 y 20 monedas de \$1.000 y observa que la razón cambia a $\frac{3}{5}$. ¿Cuánto dinero queda finalmente en la alcancía?

(a) \$14.000 (b) \$22.000 (c) \$44.000 (d) \$52.000

5. La conjetura de Goldbach dice que *todo número par mayor que* 2 *puede escribirse como suma de dos números primos.* Por ejemplo: $24 = 19 + 5$ y $24 = 17 + 7$. Según esto 128 se podría expresar de la forma $128 = p + q$; con p y q primos. ¿Cuántas parejas ordenadas de primos (p, q) satisfacen que $128 = p + q$?

(a) 3 (b) 4 (c) 6 (d) infinitos

6. En la siguiente figura el triángulo ABC es equilátero de lado 12 cm. Si D, F y E son los puntos medios de los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ respectivamente, ¿cuál es el área de la región sombreada?



(a) $12\sqrt{3}\,cm^2$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}\,cm^2$ (c) $6\sqrt{3}\,cm^2$ (d) $3\sqrt{3}\,cm^2$

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

7. Juliana, Silvia y Milena tienen cierto número de caramelos cada una. Si se cuentan los caramelos que tienen cada dos de ellas se obtienen las siguientes cantidades: 69, 60 y 85. ¿Cuántos caramelos tienen entre las tres?

8. Sean $ABCDE$ un pentágono regular y P un punto tal que el triángulo APD es equilátero y contiene al vértice E. ¿Cuál es la medida del ángulo APC?

9. ¿Cuántos divisores positivos tiene el resultado de la siguiente expresión?

$$\frac{2018}{0,02018} - \frac{2018}{0,2018}$$

2.2.2. Solución

1. Considere la siguiente tabla, en la que se ha calculado el número de divisores[4] para cada uno de los posibles valores de n.

n	*Factorización prima*	*Número de divisores*
78	$2 \times 3 \times 13$	$2 \times 2 \times 2 = 6$
79	79	2
80	$2^4 \times 5$	$5 \times 2 = 10$
81	3^4	5
82	2×41	$2 \times 2 = 4$

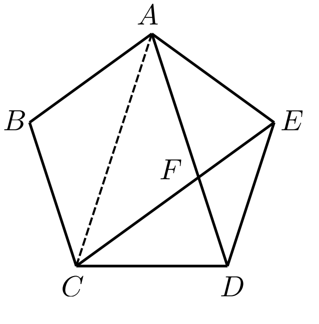
Según las condiciones del problema el número de estudiantes que presentaron las pruebas Saber en dicho colegio es $n = 80$.

Además, el $30\,\%$ de 80 es

$$\frac{80 \times 30}{100} = 80 \times 0{,}3 = 24.$$

Y el $15\,\%$ de 80 es $80 \times 0{,}15 = 12$. De lo anterior concluimos que 36 estudiantes se ubicaron en los niveles Satisfactorio y Avanzado.

2. La siguiente figura ilustra la situación del enunciado:



Analicemos cada una de las afirmaciones I. a IV.

[4]Ver Ejercicio Propuesto 5

I. Los triángulos ADE y CDE son isósceles, pues los segmentos $\overline{AE}$, $\overline{DE}$ y $\overline{DC}$ son lados del pentágono regular.

II. El ángulo $\measuredangle AED = 108^\circ$, pues es un ángulo interno del pentágono regular[5], luego $\measuredangle ADE + \measuredangle DAE = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$, pues la suma de la medida de los ángulos internos de todo triángulo (en particular del triángulo AED) es 180°, además como el triángulo AED es isósceles en E, entonces $\measuredangle ADE = \measuredangle DAE = \dfrac{72^\circ}{2} = 36^\circ$. Análogamente se deduce que $\measuredangle DEC = 36^\circ$. De modo que $\measuredangle EFD = 180^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 108^\circ$ y como los ángulos EFD y AFC son opuestos por el vértice se concluye que $\measuredangle AFC = 108^\circ = \measuredangle AED$.

III. Observe que las medidas de las diagonales del pentágono son iguales, por tanto $AC = CE$. Por otro lado, tenemos que las diagonales de un pentágono trisecan a sus ángulos internos, por tanto $\measuredangle ACF = \measuredangle FAC = \measuredangle ECD = \measuredangle DEC = 36^\circ$. Así, usando el criterio de congruencia de triángulos ángulo - lado - ángulo ALA, se concluye que los triángulos AFC y EDC son congruentes.

IV. Sabemos que los ángulos internos de un triángulo equilátero miden 60° cada uno. Pero $\measuredangle ABC = 108^\circ$, por lo tanto el triángulo ABC no puede ser equilátero.

En conclusión, las afirmaciones verdaderas son: I, II y III.

3. Observe que el total de códigos que se pueden hacer de 7 dígitos que empiecen por 218 son:

$$\underline{\;2\;}\quad \underline{\;1\;}\quad \underline{\;8\;}\quad \underset{10}{\underline{\qquad}} \times \underset{10}{\underline{\qquad}} \times \underset{10}{\underline{\qquad}} \times \underset{10}{\underline{\qquad}} = 10^4$$

[5]En un polígono regular de n lados, la medida en grados de cada uno de sus ángulos internos es

$$\frac{180^\circ(n-2)}{n}.$$

Ahora, los códigos de 7 dígitos que se pueden hacer con todos sus dígitos diferentes y que empiecen por 218 son:

$$\underline{2} \quad \underline{1} \quad \underline{8} \quad \underset{7}{\underline{\quad}} \times \underset{6}{\underline{\quad}} \times \underset{5}{\underline{\quad}} \times \underset{4}{\underline{\quad}} = 840$$

Luego la probabilidad de que a un estudiante le corresponda un código con todos sus dígitos diferentes es

$$\frac{840}{10^4} = \frac{84}{10^3}.$$

4. Sean q y m el número de monedas de \$500 y de \$1.000 respectivamente que hay inicialmente en la alcancía. Entonces

$$\frac{q}{m} = \frac{1}{5}.$$

Cuando Laura adiciona 20 monedas de cada valor observa que

$$\frac{q+20}{m+20} = \frac{3}{5}.$$

Esto genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$5q = m \tag{2.3}$$

$$5q + 100 = 3m + 60 \tag{2.4}$$

Reemplazando en la ecuación (2,4) el valor de m dado en la ecuación (2,3) se tiene que

$$5q + 100 = 3(5q) + 60,$$
$$q = 4.$$

y por lo tanto $m = 20$. Como se adicionan 20 monedas de cada valor, finalmente en la alcancía quedan 24 monedas de \$500 y 40 monedas de \$1.000, lo que equivale a \$52.000.

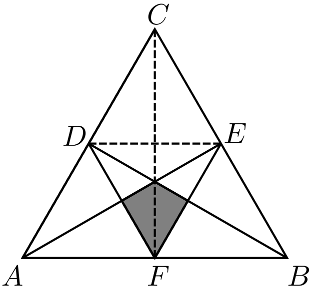
5. Los números primos menores que 128 son:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47,\ 53,\ 59,$$
$$61,\ 67,\ 71,\ 73,\ 79,\ 83,\ 89,\ 97,\ 101,\ 103,\ 107,\ 109,\ 113,\ 127.$$

El número 128 puede escribirse como la suma de dos números primos de la siguiente forma: $128 = 19 + 109 = 31 + 97 = 61 + 67$.

Se deja al lector verificar que no existen más formas de escribir a 128 como suma de dos números primos. Luego las parejas ordenadas (p, q) que satisfacen que $128 = p + q$ son 6, a saber: $(19, 109)$, $(109, 19)$, $(31, 97)$, $(97, 31)$, $(61, 67)$ y $(67, 61)$.

6. Considere la siguiente figura:



Como D, F y E son los puntos medios de los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$, se concluye que el triángulo DFE es equilátero y su área es la cuarta parte del área del triángulo ABC, esto es:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{12 \times 6\sqrt{3}}{2}\right) = 9\sqrt{3}\,cm^2.$$

Además, note que los segmentos $\overline{DB}$ y $\overline{AE}$ y $\overline{FC}$ dividen el triángulo DFE en seis triángulos de igual área[6], dos de los cuales forman la figura sombreada.

Por lo tanto, el área de la región sombreada es $\frac{2}{6}\left(9\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3}\,cm^2$.

[6] Al trazar las tres medianas de un triángulo, este queda dividido en seis triángulos de igual área.

7. Dadas las condiciones del enunciado se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

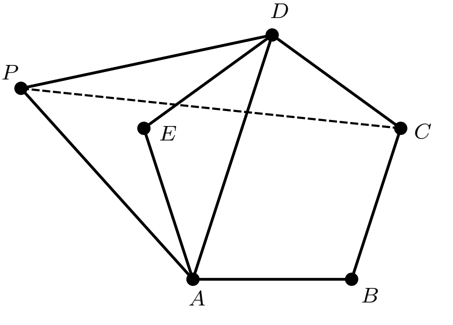
$$\begin{cases} x+y=69 \\ y+z=60 \\ x+z=85 \end{cases},$$

donde las variables x, y, y z representan, en algún orden, la cantidad de caramelos de Juliana, Silvia y Milena. Sumando las tres ecuaciones se obtiene

$$2(x+y+z)=214.$$

Puesto que el número de caramelos que poseen entre las tres es equivalente al valor de $x+y+z$; entonces las tres tienen 107 caramelos.

8. A partir del enunciado se construye la siguiente figura.



Se deja al lector mostrar que $AD = AC$, y que los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$ trisecan el ángulo EAB. Entonces el triángulo PAC es isósceles en A y el ángulo DAC mide $36°$. Así el ángulo PAC mide $60° + 36° = 96°$. Como el triángulo PAC es isósceles en A, se concluye que el ángulo APC mide $42°$.

9. Observe lo siguiente

$$\frac{2018}{0,02018} - \frac{2018}{0,2018} = 100.000 - 10.000 = 90.000.$$

Descomponiendo en factores primos $90.000 = 2^4 \times 3^2 \times 5^4$, se tiene que el número de divisores positivos es $5 \times 3 \times 5 = 75$.

2.3. Prueba Final

2.3.1. Resultados

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la décima versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Secundaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 1325 participantes del certamen en el nivel Avanzado, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

CUADRO DE HONOR

1^{er} Puesto, medalla de oro

DAYANA VALENTINA MOJICA BALLESTEROS

Colegio La Quinta del Puente, Floridablanca.

2^{o} Puesto, medalla de plata

ANDRÉS MAURICIO REYES MANTILLA

Fundación Colegio UIS, Floridablanca.

3^{er} Puesto, medalla de bronce

MANUEL JOSÉ GÓMEZ SEQUEDA

Instituto San José de La Salle, Bucaramanga.

4^{o} Puesto

MARÍA DANIELA DURÁN JULIO

Colegio La Quinta del Puente, Floridablanca.

5^{o} Puesto

NICOLE DANIELA VEGA MARQUEZ

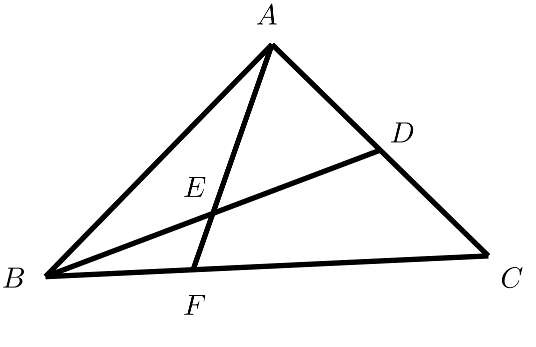
Colegio Cooperativo Comfenalco, Bucaramanga.

2.3.2. Prueba Final: 9 de junio

1. Jaime quiere llegar al piso 10 del apartamento donde viven sus abuelos. Para ello debe subir por las escaleras, pues el ascensor se encuentra en mantenimiento. El tiempo que tarda en subir el primer piso es t segundos. Si cada vez que sube un piso, demora el mismo tiempo más la quinta parte empleada para llegar al piso anterior. ¿Cuántos segundos demoró en llegar al piso 10?

2. Determine el valor de $a \neq 0$, de tal forma que la suma de todos los números de cuatro cifras diferentes que se pueden formar con los dígitos a, 1, 2, 3, y 4 sea divisible entre 2^7.

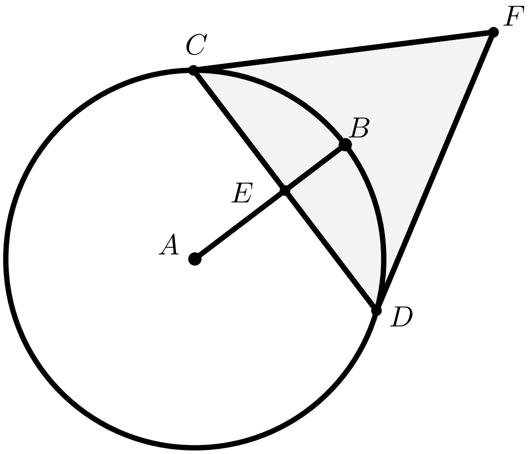
3. En la siguiente figura ABC es un triángulo rectángulo con hipotenusa $\overline{BC}$; D y E son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente, y F es la intersección de la prolongación del segmento $\overline{AE}$ con el lado $\overline{BC}$. Si $AD = 6\,cm$ y $BF = 5\,cm$, halle el perímetro del triángulo ABC.



4. Dados dos números reales a y b, determine dos números complejos (en términos de a y b) tales que su producto es a y su suma es b.

5. Sean p y q primos impares con $p > q$. Muestre que $(p-q)^{2p} - (p+q)^{2p}$ es divisible por p y por q.

6. En la siguiente figura la circunferencia con centro en A tiene radio $5\,cm$, $BE = 2\,cm$, E es el punto medio de $\overline{CD}$ y el triángulo CDF es equilátero.



(a) Halle el perímetro del triángulo CDF.

(b) Demuestre que la prolongación del segmento $\overline{FD}$ no es tangente a la circunferencia.

2.3.3. Solución

1.

Propuesta por: Dayana Valentina Mojica Ballesteros;
Colegio La Quinta del Puente, Floridablanca.

Si Jaime se demora t_n segundos en subir el piso n, entonces se demora $t_n + \frac{t_n}{5} = \frac{6t_n}{5}$ segundos en subir el piso $n+1$. Por lo anterior, el tiempo que se demora en subir cada piso en términos de t es:

$$t_1 = t, \qquad t_2 = \frac{6t}{5}, \qquad t_3 = \frac{6^2 t}{5^2}, \quad t_4 = \frac{6^3 t}{5^3}, \quad t_5 = \frac{6^4 t}{5^4}, \quad t_6 = \frac{6^5 t}{5^5},$$

$$t_7 = \frac{6^6 t}{5^6}, \quad t_8 = \frac{6^7 t}{5^7}, \quad t_9 = \frac{6^8 t}{5^8}.$$

Ahora debemos sumar $t_1 + t_2 + \cdots + t_9$, porque al subir el noveno piso Jaime llega al décimo. De esta manera tenemos que Jaime se demoró

$$t\left(\frac{5^8 + 5^7 \cdot 6 + 5^6 \cdot 6^2 + 5^5 \cdot 6^3 + 5^4 \cdot 6^4 + 5^3 \cdot 6^5 + 5^2 \cdot 6^6 + 5 \cdot 6^7 \cdot 6^8}{5^8}\right)$$

segundos en llegar al décimo piso.

2. **Solución** 1. Para un número de cuatro cifras $abcd$ se tiene que

$$abcd = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d,$$

donde a, b, c, y d representan los dígitos de las unidades de mil, centenas, decenas y unidades respectivamente.

Teniendo en cuenta lo anterior, para calcular la suma S de todos los números de cuatro cifras diferentes que se pueden formar con los dígitos a, 1, 2, 3 y 4, basta ver cuántas veces aparece cada uno de estos dígitos en cada posición, multiplicar por la respectiva potencia de 10 y sumar estos productos.

En consecuencia, al listar los sumandos de S en una columna, se nota que el número 1 aparece $4 \times 3 \times 2 = 24$ veces en cada una de las posiciones (unidades de mil, centenas, decenas y unidades). Por lo tanto, el número 1 aporta a S

$$24 \times 1 \times \left(10^3 + 10^2 + 10 + 1\right).$$

Análogamente, cada uno de los dígitos 2, 3, 4 y a aporta respectivamente a S:

$$\begin{aligned}
&24 \times 2 \times \left(10^3 + 10^2 + 10 + 1\right), \\
&24 \times 3 \times \left(10^3 + 10^2 + 10 + 1\right), \\
&24 \times 4 \times \left(10^3 + 10^2 + 10 + 1\right), \\
&24 \times a \times \left(10^3 + 10^2 + 10 + 1\right).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
S &= 24 \times (1 + 2 + 3 + 4 + a) \times \left(10^3 + 10^2 + 10 + 1\right) \\
&= 24 \times (10 + a) \times 1.111 \\
&= 2^3 \times 3 \times (10 + a) \times 11 \times 101.
\end{aligned}$$

De esta manera, para que S sea divisible entre 2^7, el factor $10 + a$ debe tener $2^4 = 16$ en su descomposición en factores primos. Pero a es un dígito, entonces $10 + a = 16.$; de ahí que $a = 6$.

Solución 2.

Propuesta por: Dayana Valentina Mojica Ballesteros;
Colegio La Quinta del Puente, Floridablanca.

Con los dígitos $a, 1, 2, 3, 4$ se pueden formar $5!$ números de cuatro cifras diferentes. Cada dígito estará en el dígito de las unidades $4!$ veces; en el dígito de las decenas, $4!$ veces, y lo mismo en los otros dos puestos.

Entonces, cada dígito se debe multiplicar por

$$4!(1.000) + 4!(100) + 4!(10) + 4! = 4!(1.111) = 26.664.$$

Como queremos encontrar un a talque 2^7 divida a

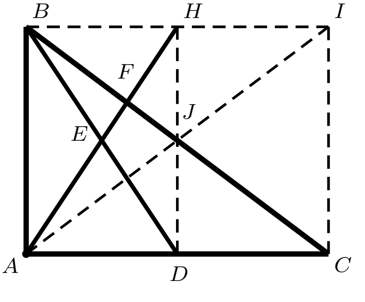
$$1(26.664)+2(26.664)+3(26.664)+4(26.664)+a(26.664) = (10+a)(26.664),$$

miremos factorización prima de 26.664.

$$26.664 = 2^3 \times 3 \times 11 \times 101,$$

luego 2^3 divide a 26.664; por lo cual, también divide a $(10+a)(26.664)$. Entonces, para que $(10+a)(26.664)$ sea divisible entre 2^7 necesitamos que $2^4 = 16$ divida a $10+a$. De esta manera se concluye que $a = 6$.

3. Considere la siguiente construcción auxiliar en la cual se construye el rectángulo $ACIB$ donde $AC = BI$.



Sea H el punto medio $\overline{BI}$, note que $ADHB$ es un rectángulo y $\overline{AH}$ es una de sus diagonales. Adicionalmente E es el punto de intersección de $\overline{AH}$ y $\overline{BD}$, puesto que E es el punto medio de $\overline{BD}$. Por lo anterior, A, E, F y H son colineales.

Ahora, defina a J como la intersección de las diagonales del rectángulo $ACIB$, considerando el triángulo ABI se tiene que F es su baricentro, ya que es intersección de las medianas $\overline{BJ}$ y $\overline{AH}$. De aquí, por las propiedades de las medianas,[7] puede concluirse que la longitud de $\overline{FC}$ es $10\ cm$ porque $BF = 5\ cm$.

Por último, usando el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC, se tiene que $BC^2 = AC^2 + BA^2$, es decir, $15^2 = 12^2 + BA^2$. Haciendo los cálculos, $BA = 9\ cm$; por lo tanto, el perímetro del triángulo ABC es $36\ cm$.

4.

Propuesta por: Dayana Valentina Mojica Ballesteros;
Colegio La Quinta del Puente, Floridablanca.

Sean a y b dos números reales. Suponga que x y y son dos números complejos tales que $xy = a$ y $x + y = b$. Entonces $y = b - x$, lo que implica que $x^2 - bx + a = 0$. Así,

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2}.$$

Análogamente, para y se tiene que

$$y = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - 4a}}{2}.$$

Otra manera de verlo es considerar que x, y son las raíces del polinomio

$$p(n) = n^2 - bn + a = (n - x)(n - y).$$

5.

Propuesta por: Dayana Valentina Mojica Ballesteros;
Colegio La Quinta del Puente, Floridablanca.

Usando el Teorema del binomio expandamos $(p-q)^{2p}$ y $(p+q)^{2p}$, teniendo en cuenta que $p - q > 0$ y $2p$ es par:

[7] Dos tercios de la longitud de cada mediana están entre el vértice y el baricentro, mientras que el tercio restante está entre el baricentro y el punto medio del lado opuesto.

$$\begin{aligned}(p-q)^{2p} =&\binom{0}{2p}p^{2p}-\binom{1}{2p}p^{2p-1}q+\binom{2}{2p}p^{2p-2}q2-\cdots\\&+\binom{2p-2}{2p}p^2q^{2p-2}-\binom{2p-1}{2p}pq^{2p-1}+\binom{2p}{2p}q^{2p},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(p+q)^{2p} =&\binom{0}{2p}p^{2p}+\binom{1}{2p}p^{2p-1}q+\binom{2}{2p}p^{2p-2}q2+\cdots\\&+\binom{2p-2}{2p}p^2q^{2p-2}+\binom{2p-1}{2p}pq^{2p-1}+\binom{2p}{2p}q^{2p};\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}(p-q)^{2p}-(p+q)^{2p} &= -2\binom{1}{2p}p^{2p-1}q-2\binom{3}{2p}p^{2p-3}q^3-\cdots\\&\quad-2\binom{2p-3}{2p}p^3q^{2p-3}-2\binom{2p-1}{2p}pq^{2p-1}\\&= -2pq\left[\binom{1}{2p}p^{2p-2}-\binom{3}{2p}p^{2p-4}q^2-\cdots\right.\\&\quad\left.-\binom{2p-3}{2p}p^2q^{2p-4}-\binom{2p-1}{2p}q^{2p-2}\right].\end{aligned}$$

Observe que pq es factor de $(p-q)^{2p}-(p+q)^{2p}$, con esto se concluye la prueba.

6. (a) Sea G el punto de intersección entre la prolongación del segmento $\overline{AB}$ y la circunferencia de centro A. Usando potencia de un punto con respecto al punto E se tiene que $GE\times EB=CE\times ED$. Luego, como E es el punto medio de $\overline{CD}$ se sigue que $CE^2=8\times 2=16$, de modo que $CE=4\,cm$ y así se concluye que el perímetro del triángulo CDF es $24\,cm$.

(b) Para demostrar que la prolongación del segmento $\overline{FD}$ no es tangente a la circunferencia se razonará por absurdo. Suponga que $\overline{FD}$ sí es tangente. Usando potencia de un punto con respecto al punto F debe ocurrir que $FD^2 = FB \times FG$. Por un lado se obtiene que $FD^2 = 64$. Por otro lado como $\overline{FE}$ es la altura del triángulo equilátero de lado $8\,cm$, se tiene que $FE = 4\sqrt{3}$. De esta forma $FB = 4\sqrt{3} - 2$, luego

$$FB \times FG = (4\sqrt{3} - 2)(8 + 4\sqrt{3}) = 32 + 24\sqrt{3}.$$

De aquí se concluye que $\overline{FD}$ no es tangente a la circunferencia.

2.4. Ejercicios propuestos

1. Sean A y B dos puntos en el plano. Se realiza la siguiente construcción:

   - Sea Q el punto medio de $\overline{AB}$.
   - Se define P como el punto de intersección entre la mediatriz de $\overline{AB}$ y la semicircunferencia C_1 cuyo diámetro es $\overline{AB}$.
   - C_2 es la circunferencia con centro en P que pasa por Q.
   - Se construyen las rectas tangentes a C_2 que pasan por A y B definiendo a F y H como los puntos de tangencia entre la circunferencia C_2 y las rectas que pasan por A y B respectivamente.

   Si la longitud del segmento $\overline{AB}$ es 2, ¿cuál es la razón entre el área de la semicircunferencia C_1 y la del cuadrilátero $AFHB$?

2. Considere un triángulo con área $1\,cm^2$, tal que dos de sus lados miden 4 y 5 centímetros. Halle la magnitud del tercer lado.

3. Demuestre que en un polígono simple de n lados la suma de las medidas en grados de sus ángulos internos es $180°(n-2)$ y use este hecho para concluir que en un polígono regular de n lados la medida, en grados, de cada uno de sus ángulos internos es
$$\frac{180°(n-2)}{n}.$$

4. Demuestre que en un pentágono regular las dos diagonales que concurren en un vértice trisecan al ángulo interno correspondiente a dicho vértice.

5. Sea n un número natural tal que su factorización prima es $n = p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times \cdots \times p_k^{n_k}$, esto es los p_i son números primos distintos y los n_i son números enteros positivos. Pruebe que la cantidad de divisores de n está dada por $(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_k+1)$.

6. Decimos que dos números primos p y q son *números primos gemelos* si $|p-q|=2$. Sean p y q dos números primos gemelos tales que $p<q$, demuestre que la suma de los divisores positivos de $p \times q$ es p^2+4p+3.

7. Encuentre todos los números primos de la forma n^2-1.

8. Encuentre todos los números primos de la forma n^3-1.

9. Pruebe que $1+n^2+n^4$ es compuesto para cualquier n en los enteros mayores que 1

10. Encuentre todos los números n de dos cifras tales que n^{2019} deja residuo 3, cuando se divide entre 10.

11. Encuentre todos los números n de dos cifras tales que $\left(n^{2018}\right)^{2019}$ deja residuo 9, cuando se divide entre 10. ¿Cuáles de estos números son primos?

12. Encuentre todos los enteros positivos n de tres cifras tales que si a n se le suma el número formado al escribir las cifras de n en orden inverso, el resultado es 1372.

13. Encuentre todos los números de máximo cuatro cifras que son divisibles por 8, tales que la suma de sus dígitos es 7 y el producto de sus dígitos es 6.

14. ¿Cuántos números palíndromos de seis cifras son múltiplos de 3?

15. Si $x^4+y^4=12x^2y^2$, determine el valor de $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

16. Demuestre que al trazar una de las medianas de un triángulo, éste queda dividido en dos triángulos de igual área.

17. Pruebe que al trazar las tres medianas de un triángulo, éste queda dividido en seis triángulos de igual área.

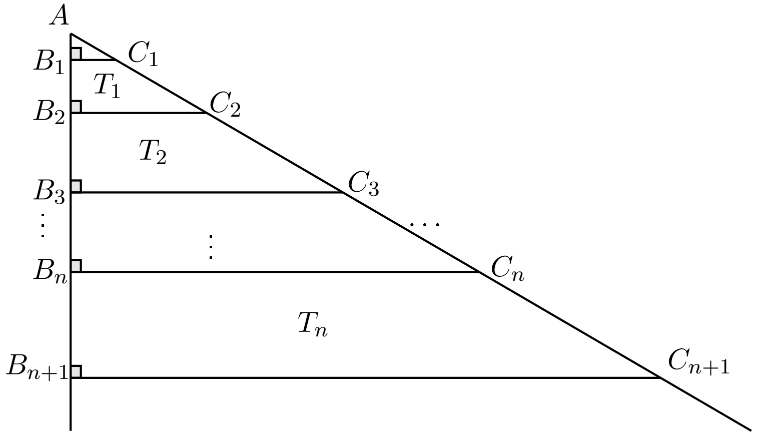
18. En el rectángulo $ABCD$, los segmentos $\overline{ED}$ y $\overline{BC}$ trisecan al angúlo ADC. Halle el área del triángulo DCB, dado que $AD=2$ y $DC=4$.

19. De la siguiente figura se conoce que

    I. $B_1C_1 = 2$.

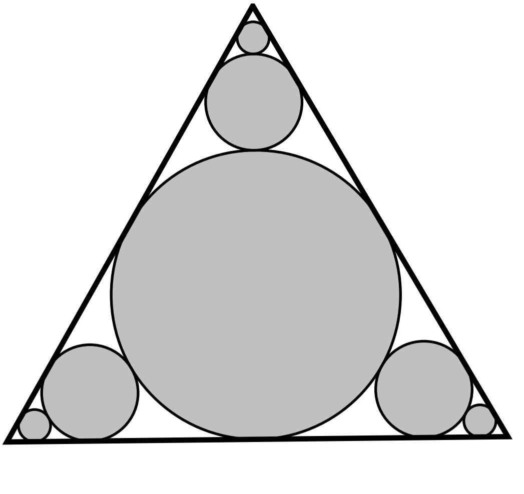
    II. El triángulo AB_nC_n es rectángulo en B_n, para cada $n \in \mathbb{N}$.

    III. $AB_1 = 1$ y $AB_n = AB_{n-1} + n$, para cada $n > 1$.



Determine una fórmula para hallar el área y el perímetro del trapecio $T_n = B_nC_nC_{n+1}B_{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$.

20. En la siguiente figura el triángulo es equilátero, la circunferencia grande está inscrita en el triángulo y es tangente a las tres circunferencias medianas; cada circunferencia mediana y pequeña son tangentes entre sí y son tangentes a dos lados del triángulo. Halle el área de la región sombreada en la figura, en términos de la longitud l del lado del triángulo.



21. Sean A, E y C tres puntos no colineales exteriores a una circunferencia, de modo que los segmentos $\overline{AE}$, $\overline{EC}$ y $\overline{AC}$ son tangentes a la circunferencia en los puntos F, D y B respectivamente. Si $AC + DC = 10$, $AE + AB = 10$ y $FE + EC + BC = 20$, determine el valor de AB, BC y FD.

22. De un tetraedo regular se extrae su esquina superior, en forma de tetraedro regular. Si el volumen de la pieza retirada representa $\frac{1}{8}$ del volumen del tetraedo original, ¿cuál es la razón entre la altura del tetraedro original y el tetraedro extraído?

Capítulo 3

Nivel Avanzado

3.1. Prueba Clasificatoria

3.1.1. Prueba Clasificatoria: 13 de abril

1. ¿Cuántos números racionales hay entre $0,1$ y $0,3$?

(a) 1 (b) $0,2$ (c) ninguno (d) infinitos

2. El conjunto de puntos en el plano que equidistan de los puntos $(1,3)$ y $(5,1)$ corresponde a la recta con ecuación

(a) $y = 2x - 4$

(b) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

(c) $y = 2x + 1$

(d) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

3. Se desea construir una caja rectangular cuyas aristas pueden medir $2\ cm$, $3\ cm$, $5\ cm$, $7\ cm$ u $11\ cm$. Si el largo, ancho y alto de la caja son diferentes, ¿cuántos son los posibles valores del volumen de la caja?

(a) 5 (b) 8 (c) 10 (d) 28

4. Suponga que $f(x) = x^2 + 1$. Si $g\left(\sqrt{x} - 1\right) = f\left(f\left(f\left(x-1\right)+1\right)\right)$, entonces g corta al eje y en el punto

(a) $(0, 26)$ (b) $(0, 101)$ (c) $(0, 1)$ (d) $(-1, 101)$

5. Dado un número primo p, ¿cuál es la probabilidad de que el número entero positivo a sea divisible por p?

(a) $\dfrac{1}{p-1}$ (b) $\dfrac{1}{a}$ (c) $\dfrac{1}{a+p}$ (d) $\dfrac{1}{p}$

6. Si a y b son enteros positivos tales que

$$20 \times a = 18 \times b,$$

NO es correcto afirmar que

(a) $a + b$ es divisible entre 19.

(b) $a \times b$ es un múltiplo de 90.

(c) $a + b$ es impar.

(d) $\dfrac{a \times b}{10}$ es un cuadrado perfecto.

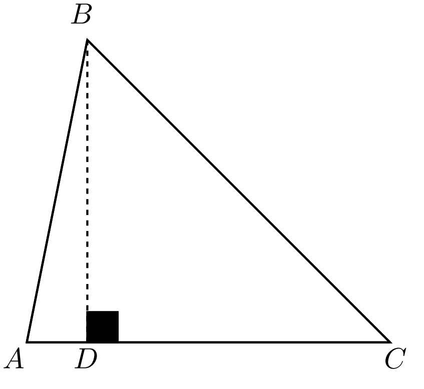
7. Sean a, b y c las raíces del polinomio $x^3 - 5x^2 + 3x - 8$. Determine el valor de la expresión $a \times b \times c \times (a + b + c)$.

(a) 0 (b) 40 (c) 13 (d) 120

8. Sea $\overline{AB}$ un diámetro de la circunferencia $\mathcal{S}$, cuyo radio mide 5 cm; D y C puntos colineales con A tales que D está sobre $\mathcal{S}$ y $AD = DC$. Si $AD = 8$ cm, ¿cuál es el perímetro del triángulo ABC en centímetros?

(a) 26 (b) 28 (c) 32 (d) 36

9. En la siguiente figura las medidas, en unidades de longitud $[u]$, de los tres lados del triángulo ABC son tres enteros consecutivos tales que $AB < AC < BC$ y $\overline{BD}$ es altura de este triángulo. Si a y b son las medidas (en unidades de longitud $[u]$) de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$, ¿cuál es el valor de $|a - b|$?



(a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 16

3.1.2. Solución

1. La cantidad de números racionales que hay entre $0,1$ y $0,3$ son infinitos. Una manera de ilustrar esa afirmación consiste en construir la siguiente sucesión cuyo primer término es $0{,}1$ y los demás se construyen agregando un 1 a la parte decimal del término anterior, así:

$$\begin{array}{l} 0{,}1 \\ 0{,}11 \\ 0{,}111 \\ 0{,}1111 \\ 0{,}1111\ldots \end{array}$$

   Note que cada uno de los infinitos términos de esta sucesión es un número racional mayor que $0,1$ y menor que $0,3$.

2. Note que el conjunto de puntos en el plano que equidistan de los puntos $A=(1,3)$ y $B=(5,1)$ corresponde precisamente a la recta mediatriz del segmento $\overline{AB}$, esto es, la recta perpendicular a dicho segmento que se traza por su punto medio. Como la pendiente del segmento $\overline{AB}$ es

$$m=\frac{1-3}{5-1}=-\frac{1}{2},$$

   entonces la pendiente de la recta en cuestión es $-\dfrac{1}{m}=2$. Además el punto medio de $\overline{AB}$ es

$$\left(\frac{1+5}{2},\frac{3+1}{2}\right)=(3,2)\,.$$

   Con esta información podemos construir la ecuación de la recta que pasa por $(3,2)$ cuya pendiente es 2, a saber, $y-2=2\,(x-3)$ o equivalentemente $y=2x-4$.

3. **Solución** 1. Los posibles valores de volúmenes de la caja son los siguientes:

$2 \times 3 \times 5 = 30$	$2 \times 3 \times 7 = 42$
$2 \times 3 \times 11 = 66$	$2 \times 5 \times 7 = 70$
$2 \times 5 \times 11 = 110$	$2 \times 7 \times 11 = 154$
$3 \times 5 \times 7 = 105$	$3 \times 5 \times 11 = 165$
$3 \times 7 \times 11 = 231$	$5 \times 7 \times 11 = 385$

Por lo tanto, hay 10 valores de volúmenes de la caja.

Solución 2. Calcular la cantidad de los posibles volúmenes de la caja es equivalente a calcular el número de subconjuntos conteniendo 3 elementos de un conjunto con 5 elementos, esto es

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10.$$

4. Note que g corta al eje y en el punto $(0, g(0))$, es decir cuando

$$\sqrt{x} - 1 = 0,$$
$$x = 1.$$

Por tanto,

$$g(0) = g(\sqrt{1}-1) = f(f(f(0)+1)) = f(f(1+1)) = f(f(2)) = f(5) = 26.$$

Luego g corta al eje y en el punto $(0, 26)$.

5. Basta ver que los posibles residuos al dividir a entre p son:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-1,$$

es decir p posibilidades, y únicamente cuando el residuo es 0 se tiene que a es divisible por p. Por lo tanto la probabilidad en cuestión es $\dfrac{1}{p}$.

6. Se puede escribir la ecuación en la forma

$$2 \times 2 \times 5 \times a = 2 \times 3 \times 3 \times b.$$

Dado que los factores primos que aparecen en la igualdad deben ser los mismos tanto a derecha como a izquierda, los valores que cumplen la igualdad son $a = 9k$ y $b = 10k$, para algún entero k. Note que

$$a \times b = 9k \times 10k = 90k^2,$$

luego $a \times b$ es múltiplo de 90 y $\dfrac{a \times b}{10} = 9k^2 = (3k)^2$ es un cuadrado perfecto. Ahora,

$$a + b = 9k + 10k = 19k,$$

en consecuencia $a + b$ es divisible por 19. Finalmente, observe que si k es par, entonces $19k$ es par, de ahí que no es correcto asegurar que $a + b$ sea impar en todos los casos.

7. Las condiciones del problema establecen que a, b y c son raíces del polinomio cúbico $x^3 - 5x^2 + 3x - 8$ cuyo coeficiente líder es 1, entonces por el teorema fundamental del álgebra se tiene que

$$x^3 - 5x^2 + 3x - 8 = (x - a)(x - b)(x - c).$$

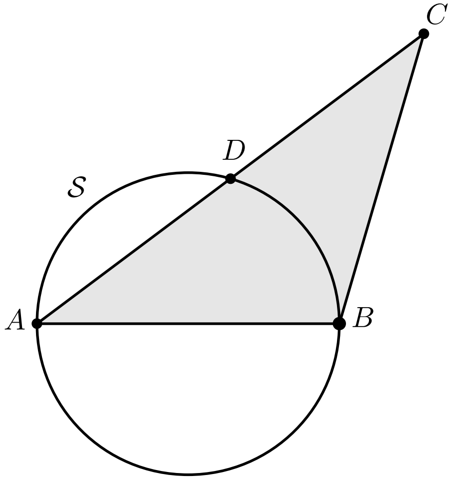
Al resolver el producto del lado derecho de la igualdad o usando directamente las fórmulas de Vieta, se obtiene que

$$x^3 - 5x^2 + 3x - 8 = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc.$$

Así, $a + b + c = 5$ y $a \times b \times c = 8$, por tanto

$$a \times b \times c \times (a + b + c) = 8 \times 5 = 40.$$

8. Considere la siguiente figura:



Por hipótesis D es el punto medio del segmento $\overline{AC}$ y por construcción el triángulo ADB está inscrito en una semicircunferencia, luego el ángulo $\angle ADB$ es recto. En consecuencia el punto B está sobre la mediatriz del segmento $\overline{AC}$ y así el triángulo ABC es isósceles en B. Dado que $AB = BC = 10\,cm$ y $AC = 16\,cm$, el perímetro del triángulo ABC es $36\ cm$.

9. Sean $x = AB$ y $h = BD$. Note que por las condiciones del enunciado se tienen las relaciones $AC = x + 1 = a + b$ y $BC = x + 2$. Por el teorema de Pitágoras, se tienen las ecuaciones

$$\begin{cases} (1) \quad x^2 = a^2 + h^2 \\ (2) \quad (x+2)^2 = b^2 + h^2 \end{cases}$$

Restando la ecuación (2) de la ecuación (1) se tiene que

$$\begin{aligned} x^2 - (x+2)^2 &= a^2 - b^2, \\ -4(x+1) &= (a-b)(a+b). \end{aligned}$$

Puesto que $AC = x + 1 = a + b$, de la igualdad de arriba se concluye que $a - b = -4$. Luego, $|a - b| = 4$.

3.2. Prueba Selectiva

3.2.1. Prueba Selectiva: 11 de mayo

1. Se escriben los números primos menores que 100 cada uno en una balota y se ponen las balotas en una urna. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar 3 balotas de la urna, el producto de los números escritos en las 3 balotas sea múltiplo de 10?

(a) $\frac{1}{50}$ (b) $\frac{2}{25}$ (c) $\frac{1}{100}$ (d) $\frac{1}{92}$

2. ¿Cuál es la suma de las cifras del resultado de la siguiente suma?

$$\frac{2018}{0,2018}+\frac{2018}{0,02018}+\frac{2018}{0,002018}+\cdots+\frac{2018}{0,\underbrace{000\cdots0}_{2018\ ceros}2018}$$

(a) 2018 (b) 2019 (c) 2022 (d) 2023

3. José escribió dos números y Camilo observó que al dividir el mayor entre el menor se obtiene 13 de cociente y 12 de residuo y al dividir 45 veces el menor entre el mayor se obtiene 3 de cociente y 6 de residuo. ¿Cuál es el producto de los dos números que escribió José?

(a) 110 (b) 721 (c) 791 (d) 103

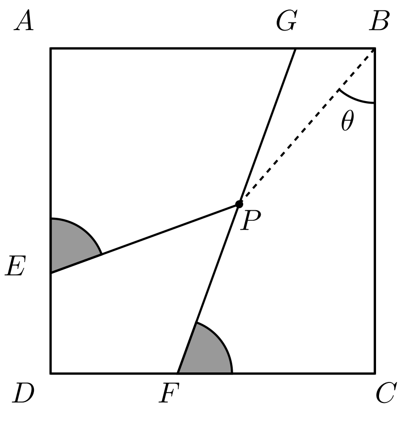
4. ¿Cuántos divisores positivos tiene el mayor entero tal que su cubo divide a $20!$?

(a) 42 (b) 30 (c) 64 (d) 12

5. Sea ABC un triángulo isósceles y rectángulo en B, con $AB = 2\,cm$. Si O es el punto de intersección de las medianas del triángulo, ¿cuál es la longitud del segmento $\overline{OB}$?

(a) $\sqrt{2}\,cm$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{3}\,cm$ (c) $2\sqrt{2}\,cm$ (d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\,cm$

6. En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado, P es el punto medio del segmento $\overline{FG}$ y los ángulos sombreados son congruentes. Si $EP = x$ y $FP = y$, ¿cuál es el valor de $\tan\theta$?



$(a)\ \dfrac{x}{y}$ $(b)\ 1-\dfrac{x}{y}$ $(c)\ \dfrac{2x}{y}$ $(d)\ 2-\dfrac{x}{y}$

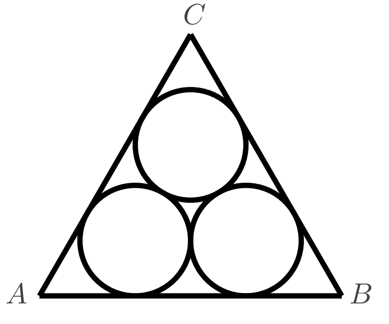
PROBLEMAS TIPO ENSAYO

7. Si f es una función tal que

$$2f(x) - f(1-x) = x^2 - 1,$$

¿cuál es la suma de las raíces de f ?

8. En la siguiente figura las 3 circunferencias tienen radio r, son tangentes entre sí y al triángulo equilátero ABC. Determine el perímetro del triángulo en función de r.



9. Se han ocultado 3 dígitos de una clave con 6 dígitos como se muestra a continuación:

$$4\ 2 * 1 * *$$

Halle la suma de las cifras del número que forma la clave, sabiendo que este número:

- deja residuo 1 al dividirse por 5,
- es divisible entre 6 y
- deja residuo 8 al dividirse por 11.

3.2.2. Solución

1. Los números primos entre 1 y 100 en total son 25. Como todos los números escritos en las balotas son primos, para que el producto de los números escritos en las tres balotas extraídas sea múltiplo de 10, necesariamente deben haberse extraído las balotas con los números 2 y 5. Dicho esto, observe que el número de casos posibles, es decir, el número de formas de extraer 3 balotas de un conjunto con 25 balotas, sin importar el orden (el orden de los factores no altera el producto), está dado por:

$$\binom{25}{3} = \frac{25!}{3!(25-3)!} = 2300.$$

Y los casos favorables son 23, ya que estos son los casos en los cuales se tienen fijas las balotas con los números 2 y 5, así que la escogencia de la tercera balota puede ser cualquiera de las restantes 23. Por tanto, la probabilidad es

$$\frac{23}{2300} = \frac{1}{100}.$$

2. Observe que:

$$\begin{aligned}
&\frac{2018}{0,2018} + \frac{2018}{0,02018} + \frac{2018}{0,002018} + \cdots + \frac{2018}{0,\underbrace{000\cdots0}_{2018\ ceros}2018} \\
&= \frac{2018}{2018\times10^{-4}} + \frac{2018}{2018\times10^{-5}} + \frac{2018}{2018\times10^{-6}} + \cdots + \frac{2018}{2018\times10^{-2022}} \\
&= \frac{1}{10^{-4}} + \frac{1}{10^{-5}} + \frac{1}{10^{-6}} + \cdots + \frac{1}{10^{-2022}} \\
&= 10^4 + 10^5 + 10^6 + \cdots + 10^{2022} \\
&= \underbrace{1\cdots111}_{2019\ unos}0000.
\end{aligned}$$

Por tanto, la suma de sus dígitos es 2019.

3. Sea X el número menor y Z el número mayor, de la observación de Camilo, por el algoritmo de la división se establece el siguiente sistema de ecuaciones:

$$13X + 12 = Z,$$
$$3Z + 6 = 45X;$$

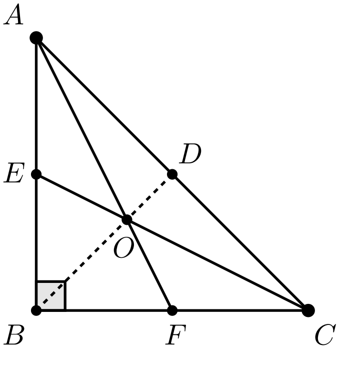
cuya solución es $X = 7$ y $Z = 103$. Luego el producto de los números que escribió José es $7 \times 103 = 721$.

4. Note que

$$\begin{aligned} 20! &= 1 \times 2^{18} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \\ &= \left(2^6 \times 3^2 \times 5\right)^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19. \end{aligned}$$

Por lo tanto $2^6 \times 3^2 \times 5$ es el mayor entero tal que su cubo divide a $20!$, que tiene $7 \times 3 \times 2 = 42$ divisores[1]

5. Consideremos la siguiente figura:



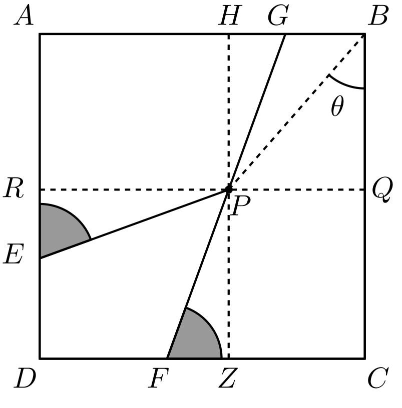
Como ABC es rectángulo e isósceles en B y $AB = 2\,cm$, entonces por el teorema de Pitágoras $AC = 2\sqrt{2}\,cm$. Note que como el triángulo ABC es isósceles en B, entonces $AD = DC = \sqrt{2}\,cm$ y $\measuredangle BDC = 90°$,

[1]Ver Ejercicio Propuesto de Nivel Medio 5

de modo que por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo BDC, tenemos que $BD = \sqrt{2}\,cm$.

Así, por propiedad de las medianas [2] tenemos que $BO = \frac{2}{3}BD$, por lo cual $BO = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,cm$.

6. Considere la siguiente figura auxiliar, en la por construcción los segmentos punteados $\overline{RQ}$ y $\overline{ZH}$ contienen a P y son perpendiculares a los lados $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$ respectivamente.



Sea α la medida de los ángulos sombreados. Como P es el punto medio de $\overline{FG}$, de la figura se establece que $PZ = HP = y \operatorname{sen} \alpha$, luego $HZ = RQ = 2y \operatorname{sen} \alpha$. Además, $RP = x \operatorname{sen} \alpha$, entonces

$$PQ = 2y \operatorname{sen} \alpha - x \operatorname{sen} \alpha.$$

Por lo tanto,

$$\tan \theta = \frac{PQ}{HP} = \frac{2y \operatorname{sen} \alpha - x \operatorname{sen} \alpha}{y \operatorname{sen} \alpha} = 2 - \frac{x}{y}.$$

[2]Dos tercios de la longitud de cada mediana están entre el vértice y el baricentro, mientras que el tercio restante está entre el baricentro y el punto medio del lado opuesto.

7. Considere el cambio de variable $t = 1 - x$, de modo que $x = 1 - t$ y t recorre los números reales a medida que x lo hace, y viceversa. Entonces, en términos de la nueva variable, f es una función tal que para todo número real t,

$$2f(1-t) - f(t) = (t-1)^2 - 1 = t^2 - 2t.$$

En consecuencia, f es una función que para cada número real y satisface las ecuaciones

$$2f(y) - f(1-y) = y^2 - 1 \tag{3.1}$$

$$2f(1-y) - f(y) = y^2 - 2y \tag{3.2}$$

Multiplicando por 2 la ecuación (3.1) y sumando con la ecuación (3.2), resulta $3f(y) = 3y^2 - 2y - 2$. Por tanto,

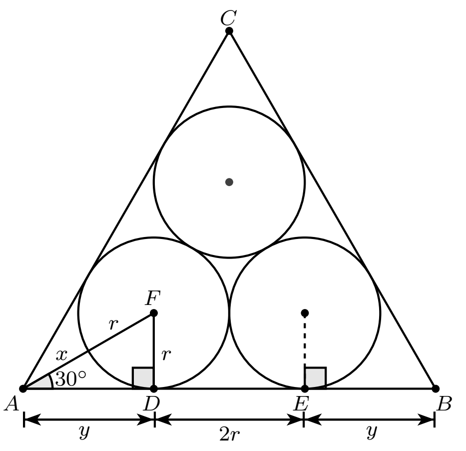
$$f(y) = y^2 - \frac{2y}{3} - \frac{2}{3}.$$

Las raíces de este polinomio son:

$$y_1 = \frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{7}\right), \quad y_2 = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{7}\right),$$

y su suma es $\frac{2}{3}$.

8. **Solución** 1. Considere la siguiente figura en la que D y E son los puntos de tangencia de las respectivas circunferencias con el triángulo ABC.



Sean $y = AD$ y x la longitud del segmento cuyos extremos son A y el punto de intersección del segmento $\overline{AF}$ con la circunferencia de centro en F. Note que, como el triángulo ABC es equilátero, su perímetro está dado por $6(r+y)$. Hallemos y en términos de r.

Observe que el triángulo ADF es rectángulo en D, $DF = r$, $AF = x+r$ y $\measuredangle FAD = 30°$; luego

$$\operatorname{sen}(30°) = \frac{1}{2} = \frac{r}{x+r},$$
$$x + r = 2r,$$
$$x = r.$$

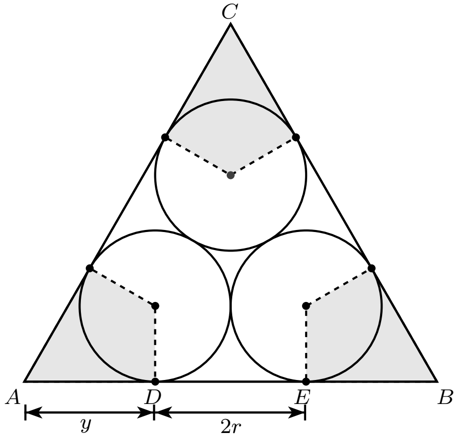
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ADF se tiene que

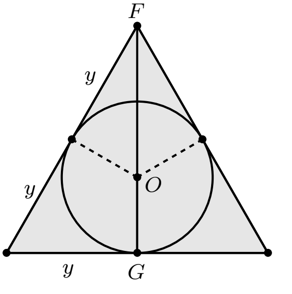
$$y = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = r\sqrt{3}.$$

Por lo tanto el perímetro del triángulo ABC está dado por:

$$6\left(r + r\sqrt{3}\right) = 6r\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

Solución 2. Considere la siguiente gráfica en la que las regiones sombreadas de la figura de la izquierda se han juntado para formar la figura de la derecha.





Note que el triángulo que se forma a la derecha es equilátero con lado $2y$, $\overline{FG}$ es una de sus medianas y O es su baricentro. De modo que por el teorema de medianas citado en la solución del ejercicio **6**. se tiene que $FO = 2OG = 2r$, luego $FG = 3r$ Así, por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$\begin{aligned}(2y)^2 - y^2 &= (3r)^2,\\ 3y^2 &= 9r^2,\\ y &= r\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Por lo tanto el perímetro del triángulo ABC está dado por

$$6\left(r + r\sqrt{3}\right) = 6r\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

9. Sea $42a1bc$ el número de la clave, donde a, b y c son dígitos. Como este número deja residuo 1 al dividirse por 5, entonces c es 1 o 6; pero como es par, por ser divisible entre 6, entonces $c = 6$.

Por otra parte, como el número que forma la clave deja residuo 8 al dividirse por 11, entonces al sumar 3 a este número el resultado será divisible por 11, esto es, el número $42a1b9$ es divisible por 11, luego $(4 + a + b) - (2 + 1 + 9) = a + b - 8$ es múltiplo de 11, pero como a y b son dígitos, se tiene que $a + b = 8$. En consecuencia, la suma de las cifras de la clave es $a + b + 4 + 2 + 1 + 6 = 21$.

3.3. Prueba Final

3.3.1. Resultados

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la décima versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Secundaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 1351 participantes del certamen en el nivel Avanzado, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

CUADRO DE HONOR

1^{er} Puesto, medalla de oro

CRISTHIAN ALEJANDRO GONZÁLEZ DUARTE

Colegio Cooperativo Comfenalco, Bucaramanga.

2^{o} Puesto, medalla de plata

GABRIEL JOSÉ ROMERO REYES

Fundación Colegio UIS, Floridablanca.

3^{er} Puesto, medalla de bronce

JUAN DAVID RUEDA CENTENO

Colegio Cooperativo Comfenalco, Bucaramanga.

4^{o} Puesto

JHOAN SEBASTIAN NIÑO VELASCO

Escuela Normal Superior Francisco de Paula Santander, Málaga.

5^{o} Puesto

JOSÉ MARIO ROMERO RINCÓN

Colegio La Quinta del Puente, Floridablanca.

3.3.2. Prueba Final: 9 de junio

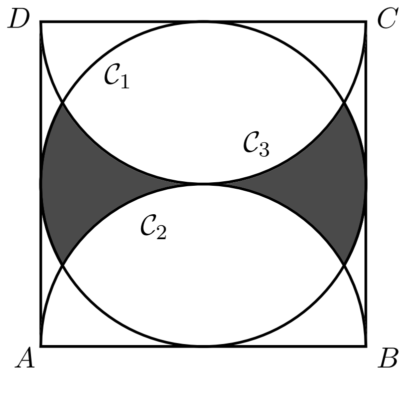
1. Dado que

$$\left(x^2+2x+1\right)^{50}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{99}x^{99}+a_{100}x^{100},$$

calcule el valor de la suma

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{99}+a_{100}.$$

2. En la siguiente figura la circunferencia $\mathcal{C}_1$ es tangente a todos los lados del cuadrado $ABCD$ y las semicircunferencias $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ son tangentes entre sí y tienen un diámetro en $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ respectivamente. Si un lado del cuadrado $ABCD$ mide l, halle el valor del área sombreada.



3. Encuentre el residuo que deja al dividirse entre 7 la suma de todos los divisores positivos del número

$$2^{12}\left(2^{13}-1\right).$$

Nota: *Tenga en cuenta que $2^{13}-1$ es un número primo.*

4. Para cada entero positivo n considere la suma

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

Pruebe que:

(a) $\sqrt{S_n} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$

(b) Si n es par entonces S_n es divisible por $(n+1)^2$ y $\left(\dfrac{n}{2}\right)^2$.

5. Sean $\mathcal{C}$ una circunferencia de radio r, con centro O y P un punto fuera de $\mathcal{C}$ tal que $OP = 2r$. Construya las tangentes a $\mathcal{C}$ que pasan por P y defina a N y M como los puntos de tangencia. Defina a Q como el punto de intersección entre la extensión de $\overline{OP}$ y $\mathcal{C}$ tal que O pertenece al segmento $\overline{PQ}$. Demuestre que el triángulo MQN es equilátero.

6. Muestre que si p y q son primos impares, entonces $2\left(q^p - p^q\right) - (q - p)$ deja el mismo residuo que q al dividirse entre p.

3.3.3. Solución

1. **Solución** 1.

Propuesta por: Cristhian Alejandro González Duarte;
Colegio Cooperativo Comfenalco, Bucaramanga.

Observe que la suma pedida se puede calcular reemplazado $x = 1$ en la expansión polinomial de la derecha en la igualdad dada

$$\left(x^2 + 2x + 1\right)^{50} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{99} x^{99} + a_{100} x^{100},$$

lo que equivale a reemplazar $x = 1$ en la expresión de la izquierda de la igualdad, esto es

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100} = \left((1)^2 + 2(1) + 1\right)^{50} = 4^{50}.$$

Solución 2.

Propuesta por: Jhoan Sebastián Niño Velasco;
Escuela Normal Superior Francisco de Paula Santander, Málaga; y
Gabriel José Romero Reyes;
Fundación Colegio UIS, Floridablanca.

Dado que el polinomio se puede factorizar de la forma

$$\left(x^2 + 2x + 1\right)^{50} = (x+1)^{100},$$

el problema se reduce a resolver este binomio y sumar todos los coeficientes de cada uno de sus monomios. Esto se hace mediante el triángulo de Pascal. Puesto que los coeficientes del binomio son ambos iguales a 1, hay que hallar la suma de todos los números que se encuentran en el escalón del triángulo correspondiente a $(x+1)^{100}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Note la siguiente relación de la suma de los coeficientes de cada escalón:

Escalón 1: $1 = 2^0$.

Escalón 2: $1 + 1 = 2 = 2^1$.

Escalón 3: $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$.

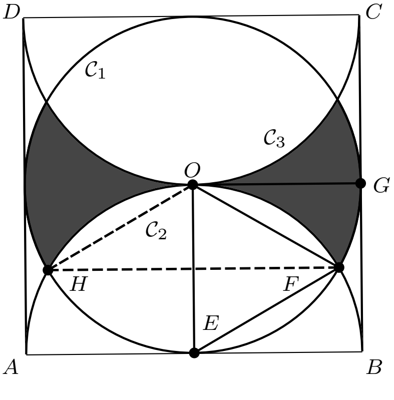
Escalón 4: $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$.

Escalón 5: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$.

Escalón 6: $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$.

Entonces, dado que los coeficientes de $(x + 1)^{100}$ se encuentran en el escalón 101, se ve que su suma según esta característica del triángulo es igual que $2^{100} = 4^{50}$.

2. Considere la siguiente figura en la que O es el punto de tangencia de las semicircunferencias $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$; G y E son los puntos de tangencia de la circunferencia $\mathcal{C}_1$ con los segmentos $\overline{CB}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, y F, H son los puntos de intersección de la semicircunferencia $\mathcal{C}_2$ y la circunferencia $\mathcal{C}_1$



Solución 1. Observe que por la simetría de la figura se tiene que el área sombreada es la diferencia entre el área de la circunferencia $\mathcal{C}_1$ y dos veces el área de la región encerrada por la circunferencia $\mathcal{C}_1$ y la semicircunferencia $\mathcal{C}_2$. Note que $\overline{HF}$ mide el doble de la altura del triángulo equilátero OHE, cuyo lado mide $\frac{l}{2}$, luego $HF = \frac{\sqrt{3}}{2}l$. De modo que el área del triángulo HOF está dada por

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l \times \frac{l}{4}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{16}$$

Además, el área del sector circular OHF cuyo radio es $\frac{l}{2}$ y ángulo barrido es $\frac{\pi}{3}$; es $\frac{\pi}{3} \times \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{\pi l^2}{12}$. Así, se concluye que el área de la región encerrada por la circunferencia $\mathcal{C}_1$ y la semicircunferencia está dada por $\mathcal{C}_2$

$$2\left(\frac{\pi l^2}{12} - \frac{l^2\sqrt{3}}{16}\right) = \frac{l^2}{24}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right).$$

Por lo tanto el área de la región sombreada es:

$$\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{l^2}{24}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)\right) = \frac{l^2}{12}\left(3\sqrt{3} - \pi\right).$$

Solución 2: Note que O es el centro de la circunferencia $\mathcal{C}_1$; el triángulo OFE es equilátero de lado $\frac{l}{2}$, luego su área es $\frac{l^2\sqrt{3}}{16}$ y $OEBG$ es un cuadrado de lado $\frac{l}{2}$. Por otro lado se tiene que cada uno de los sectores circulares BEF y FOG cuyo radio es $\frac{l}{2}$ y ángulo barrido es $\frac{\pi}{6}$, tienen $\frac{\pi}{48}l^2$ de área; luego el área de la figura encerrada entre $\overline{BG}$ y las curvas $\widehat{GF}$, $\widehat{FB}$; está dada por

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{l^2\sqrt{3}}{16} - 2\left(\frac{\pi}{48}l^2\right) = \frac{l^2}{48}\left(12 - 3\sqrt{3} - 2\pi\right).$$

Por lo tanto el área de la región sombreada es:

$$l^2 - 4\left(\frac{l^2}{48}\left(12 - 3\sqrt{3} - 2\pi\right)\right) - 2\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\right) = \frac{l^2}{12}\left(3\sqrt{3} - \pi\right).$$

3. **Solución** 1. Observe que la suma de todos los divisores positivos de 2^{12} es

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{12} = 2^{13} - 1.$$

Dado que $2^{13} - 1$ es un número primo, entonces la suma de todos sus divisores positivos es

$$2^{13} - 1 + 1 = 2^{13}.$$

Luego la suma de todos los divisores positivos de $2^{12}\left(2^{13} - 1\right)$ es

$$2^{13}\left(2^{13} - 1\right) = 67.100.672.$$

Así que el residuo de dividir 67.100.672 entre 7 es 2.

Solución 2.

Propuesta por: Cristhian Alejandro González Duarte;
Colegio Cooperativo Comfenalco, Bucaramanga.

Sea $N = 2^{12}(2^{13}-1)$ y denote por $S(N)$ la suma de los divisores positivos de N. Como $p = 2^{13} - 1$ es primo, N es de la forma $N = 2^{12}p$ y así N tiene $(12+1)(1+1) = 26$ divisores. Estos divisores son de la forma $2^k(2^{13} - 1)^j$, con $0 \leqslant k \leqslant 12$ y $0 \leqslant j \leqslant 1$. Sabiendo esto, se tiene que

$$S(N) = \sum_{k=0}^{12}\left(2^k(1 + 2^{13} - 1)\right) = 2^{13}\sum_{k=0}^{12} 2^k = 2^{13}(2^{13} - 1).$$

Ahora, como $\operatorname{mcd}(2, 7) = 1$, mediante el Pequeño Teorema de Fermat[3] se tiene que $2^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

[3] Si p es un número primo y a es un número entero positivo tal que $\operatorname{mcd}(p, a) = 1$, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Luego, $2^{12} = \left(2^6\right)^2 \equiv 1 \pmod{7}$ y también $2^{13} = 2 \cdot 2^{12} \equiv 2 \pmod{7}$. De esto sigue que

$$S(N) = 2^{13}(2^{13} - 1) \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2 \pmod{7}.$$

Es decir, el residuo de la división de $S(N)$ por 7 es 2.

4. **Solución** 1. Sea S la suma de los primeros n números naturales. Entonces podemos escribir S de dos formas:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n.$$
$$S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1.$$

Sumando término a término ambas igualdades tenemos:

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ sumandos}} = n(n+1).$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Por otra parte, note que:

$$\begin{aligned}
1^4 &= (1+0)^4 = 1, \\
2^4 &= (1+1)^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1^3 + 1^4, \\
3^4 &= (1+2)^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot 2 + 6 \cdot 1^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2^3 + 2^4, \\
4^4 &= (1+3)^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot 3 + 6 \cdot 1^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 1 \cdot 3^3 + 3^4, \\
&\cdots \\
(n+1)^4 &= (1+n)^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot n + 6 \cdot 1^2 \cdot n^2 + 4 \cdot 1 \cdot n^3 + n^4.
\end{aligned}$$

Sumando cada columna tanto del primer miembro como del último de cada una de las igualdades anteriores se tiene:

$$\begin{aligned}1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4+(n+1)^4 &= (n+1)+4(1+2+3+\cdots+n)\\&+6(1^1+2^2+3^2+\cdots+n^2)\\&+4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)\\&+1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4.\end{aligned}$$

Como ejercicio para el lector se deja probar que

$$1^1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Así, simplificando y sustituyendo algunos términos en la ecuación anterior se obtiene:

$$(n+1)^4=(n+1)+4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+6\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)+4S_n,$$

siendo $S_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$. De modo que,

$$S_n=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{S_n}=\frac{n(n+1)}{2}=1+2+3+\cdots+n.$$

Finalmente, si n es par, entonces $n=2k$, para algún número natural k. En este caso se tiene reemplazando en la fórmula encontrada arriba que:

$$\begin{aligned}S_n=S_{2k}&=\frac{(2k)^2(2k+1)^2}{4},\\&=k^2(4k^2+4k+1),\\&=\left(\frac{n}{2}\right)^2(n+1)^2\end{aligned}$$

De esto se sigue que $(n+1)^2$ y $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ dividen a S_n.

Solución 2.

Propuesta por: Gabriel José Romero Reyes;
Fundación Colegio UIS, Floridablanca.

Observe que los términos pueden reescribirse del siguiente modo:

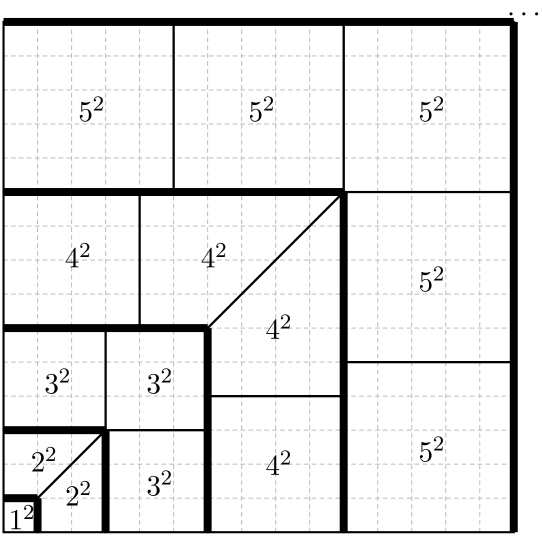
$$S_1 = 1^3.$$
$$S_2 = 2^3 + (2-1)^3.$$
$$S_3 = 3^3 + (3-1)^3 + (3-2)^3.$$
$$S_4 = 4^3 + (4-1)^3 + (4-2)^3 + (4-3)^3.$$

Continuando así, en general se tiene que

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} (n-j)^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2.$$

Por tanto, $\sqrt{S_n} = \dfrac{n^2+n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Note que esta última expresión es igual a la suma de todos los primeros n números naturales, es decir, $\sqrt{S_n} = 1 + 2 + \cdots + n$.

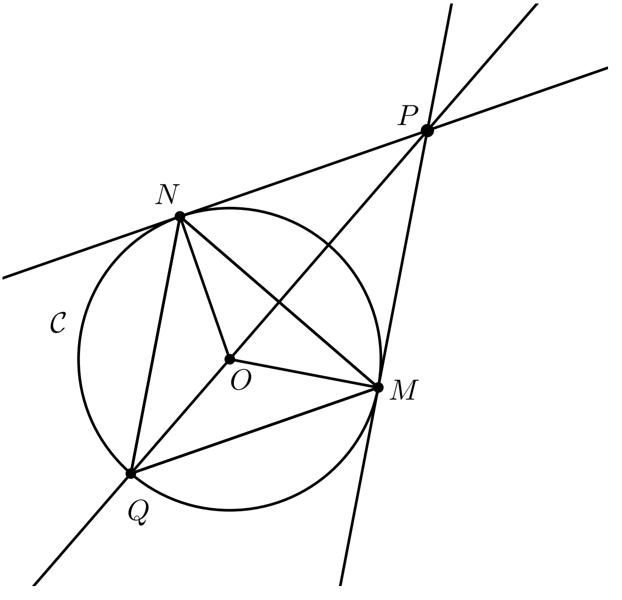
Solución 3. Observe la siguiente figura



En ella se ve que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 .$$

5. Considere la siguiente figura



Para probar que el triángulo MNQ es equilátero veamos que sus tres ángulos internos miden $60°$.

Por construcción note que los triángulos NOP y MOP son rectángulos en N y M respectivamente. Además $OP = 2r$ y $ON = OM = r$, entonces

$$\measuredangle MOP = \cos^{-1}\left(\frac{r}{2r}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°,$$

y análogamente $\measuredangle NOP = 60°$; de ahí que $\measuredangle NOM = 120°$ y por el teorema del ángulo central se tiene que $\measuredangle NQM = 60°$.

Por otro lado, como los ángulos $\angle MOQ$ y $\angle NOQ$ son suplementarios respecto a los ángulos $\angle MOP$ y $\angle NOP$ respectivamente, entonces su medida es $180° - 60° = 120°$, y usando el mismo argumento del teorema del ángulo central se tiene que $\measuredangle MNQ = \measuredangle NMQ = 60°$ con lo que se obtiene el resultado buscado.

6. **Solución** 1. En notación de congruencias[4], se debe probar que

$$2(q^p - p^q) - (q - p) \equiv q \pmod{p}.$$

En efecto, por el Pequeño Teorema de Fermat [5] se tiene que:

$$q^p \equiv q \pmod{p}$$

de ahí que

$$\begin{aligned} 2q^p &\equiv 2q \pmod{p} \\ 2q^p - q &\equiv q \pmod{p}. \end{aligned}$$

Pero $-2p^q \equiv 0 \pmod{p}$ y $p \equiv 0 \pmod{p}$ de modo que por propiedades de las congruencias se tiene que:

$$2q^p - q + 2p^q + p \equiv q \pmod{p}.$$

Agrupando convenientemente, se llega a:

$$2(q^p - p^q) - (q - p) \equiv q \pmod{p},$$

lo que se quería probar.

Solución 2. Por el algoritmo de la división se establece que existen números enteros no negativos n y r tales que $q = np + r$, donde r es el residuo al dividir q entre p.

Por otro lado,

$$2\left(q^p - p^q\right) - (q - p) = 2q^p - q + p\left(1 - 2p^{q-1}\right).$$

[4]Recuerde que si $a, b, n \in \mathbb{Z}$, con $n \neq 0$, entonces $a \equiv b \pmod{n}$ significa que a deja el mismo residuo que b cuando se dividen entre n.

[5]Si p es un número primo, entonces, para cada número natural a, con $a > 0$, $a^p \equiv a \pmod{p}$

Dado que $p\left(1-2p^{q-1}\right)$ es múltiplo de p, este sumando deja residuo cero al dividirse por p, de ahí que $2q^p - q$ deja el mismo residuo que $2(q^p - p^q) - (q - p)$ al dividirse por p. Ahora,

$$\begin{aligned} 2q^p - q &= 2(np+r)^p - (np+r) \\ &= 2\left((np)^p + \binom{p}{1}(np)^{p-1}r + \cdots + \binom{p}{p-1}npr^{p-1} + r^p\right) - np - r \end{aligned}$$

Se eliminan los múltiplos de p de la expresión anterior, ya que estos dejan residuo 0 al dividirse entre p, obteniendo que $2r^p - r$ deja el mismo residuo que $2(q^p - p^q) - (q - p)$ al dividirse por p. Usando el Pequeño Teorema de Fermat se establece que $2r(r^{p-1} - 1)$ es divisible en p, pero $2r(r^{p-1} - 1)$ se obtiene al restar r a $2r^p - r$, es decir, $2r^p - r$ deja residuo r al dividirse por p.

3.4. Ejercicios propuestos

1. Encuentre la suma de las cifras del resultado de la siguiente expresión que tiene 100 sumandos

$$\frac{2018}{0,2018} + 2 \times \frac{2018}{0,02018} + 3 \times \frac{2018}{0,002018} + \cdots + 100 \times \frac{2018}{0,\underbrace{000\cdots0}_{99\ ceros}2018}$$

2. Suponga que

$$\left(x^2+2x+1\right)^{50} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{99}x^{99} + a_{100}x^{100}.$$

Calcule

(a) la suma de los coeficientes que están en las posiciones pares en la expresión del lado derecho de la igualdad

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{98} + a_{100}.$$

(b) la suma de los coeficientes que están en las posiciones impares en la expresión del lado derecho de la igualdad

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{97} + a_{99}.$$

3. El número φ, conocido como *razón áurea*, es definido por

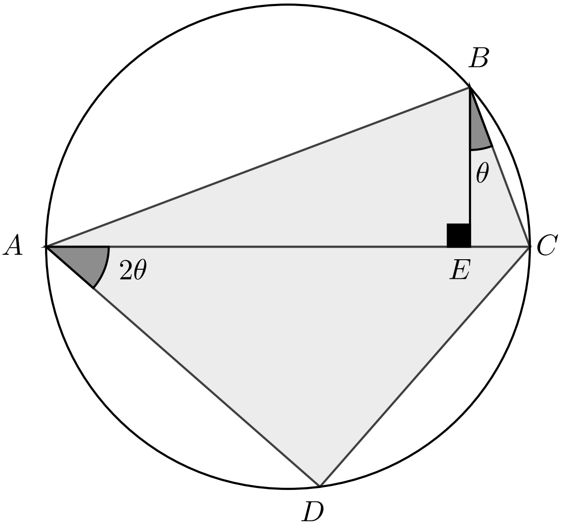
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Demuestre que para todo número natural n se tiene que

$$\varphi^n + \varphi^{n+1} = \varphi^{n+2}.$$

4. Pruebe que $1+n^2+n^4$ es compuesto para cualquier n en los enteros mayores que 1

5. En la siguiente gráfica el cuadrilátero $ABCD$ tiene sus vértices sobre la circunferencia de diámetro $\overline{AC}$. Si la altura $\overline{BE}$ del triángulo ABC mide 1 cm, ¿cuál es la longitud, en cm, del segmento $\overline{DC}$?



(a) 2 (b) $2\sqrt{2}$ (c) $2\csc(2\theta)$ (d) $\sin(2\theta)$

6. Decimos que un número natural n es un número de **Edding** si la suma de sus divisores positivos es divisible entre 6. Dado cualquier número natural N, ¿cuántas potencias de 6 menores que N son números de **Edding**?

7. Demuestre que la suma de los cuadrados de los primeros n números naturales es:
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
Sugerencia: Use la identidad $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ y el método empleado en la solución del ejercicio 4 de prueba final para hallar la suma de los cubos de los primeros n números naturales.

8. Sean $x_1, x_2, \cdots, x_{2018}$ reales positivos. Demuestre que
$$\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{2018}^2\right) \geq 2018\left(x_1\cdot x_2\cdots x_{2018}\right)^{\frac{1}{1009}}.$$

9. La sucesión $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ \ldots$ es conocida como la sucesión de Fibonacci, la cual puede construirse recursivamente, así: $f_1 = f_2 = 1$ y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n \geq 2$. Se construye una sucesión de hexágonos regulares, tal que la longitud del lado del $n-$ésimo hexágono H_n es f_n. Demuestre que la sucesión cuyo $n-$ésimo término a_n es la medida del área del hexágono H_n está dada por: $a_1 = a_2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ y
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}, \quad \text{para } n \geq 2.$$

10. [Pierre Varignon, 1731.] Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Construya el cuadrilátero $EFGH$ cuyos vértices son los puntos medios de los lados de $ABCD$. Demuestre que:

    (a) $EFGH$ es un paralelogramo.

    (b) El área de $EFGH$ es la mitad de $ABCD$.

11. [Vincenzo Viviani, 1659.] Sea ABC un triángulo equilátero. Pruebe que cualquiera que sea P un punto en el interior de ABC, la suma de las distancias desde P hasta los lados de ABC es siempre la misma, esto es, no depende de la manera en que sea escogido P.

12. En los siguientes numerales use el principio de inducción matemática para demostrar que la fórmula o afirmación dada se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

    - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$
    - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$
    - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$
    - $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n(n+1).$
    - $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$
    - $1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$, con $a \neq 1$.

- $2^n \geq 2n$.
- $n! > 3^{n-2}$, para $n \geq 3$.
- $2n + n^3$ es divisible entre 3.
- $3^{2n} + 7$ es divisible entre 8.
- **Fórmula de Moivre** $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.
- Pruebe que el número total de diagonales de un polígono convexo de n $(n \geq 3)$ lados es $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Bibliografía

[1] BOLAÑOS W. *Problemas y Soluciones Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas Universitaria 1998-2019.* Universidad Antonio Nariño y Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[2] BROCHERO F. Y RESTREPO J. *Un recorrido por la Teoría de Números.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[3] GÓMEZ J., VALDEZ R. Y VÁZQUEZ R. *Principio de las Casillas.* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2011.

[4] HEMMERLING E. *Geometría Elemental.* Bakersfield College. Limusa, México, 2009.

[5] JIMÉNEZ L., GORDILLO J. Y RUBIANO G. *Teoría de números para principiantes.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2004.

[6] MADROÑERO J Y CONTRERAS I. *Un recorrido por el Álgebra.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[7] SOBERÓN P. *Combinatoria para olimpiadas* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2010.

[8] RESTREPO P. *Un recorrido por la Combinatoria I.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2010.

[9] VALDERRAMA A. Y GONZÁLEZ E. *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Nivel Intermedio 2010* Universidad Antonio Nariño, 2010

[10] VALDERRAMA A. Y GONZÁLEZ E. *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Primer Nivel 2010* Universidad Antonio Nariño, 2010.

10as OLIMPIADAS REGIONALES DE MATEMÁTICAS

SECUNDARIA UIS 2018

Vicerrectoría Administrativa

Vicerrectoría de Investigación y Extensión

Diseño e Impresión: DIVISIÓN DE PUBLICACIONES UIS • TEL 6344000, ext. 2196

Universidad Industrial de Santander

"VIGILADA MINEDUCACIÓN"

ORM Olimpiadas Regionales de Matemáticas

EDUMAT

IPRED

EDUCACIÓN INTERACTIVA Y ABIERTA AL LIDERAZGO