Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
XIV Olimpiadas Regionales de Matemáticas.
SECUNDARIA-2022.

"la encantadora belleza de este sublime estudio se manifiesta en su completo hechizo solamente a aquellos que tienen el valor de adentrarse en él"
- Carl Friedrich Gauss a Sophie Germain.

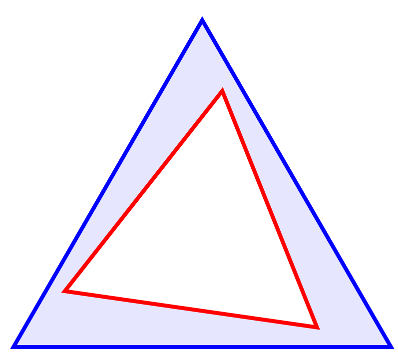
PRIMERA CAPACITACIÓN

NIVEL MEDIO

8° Y 9°

PROBLEMA 1.

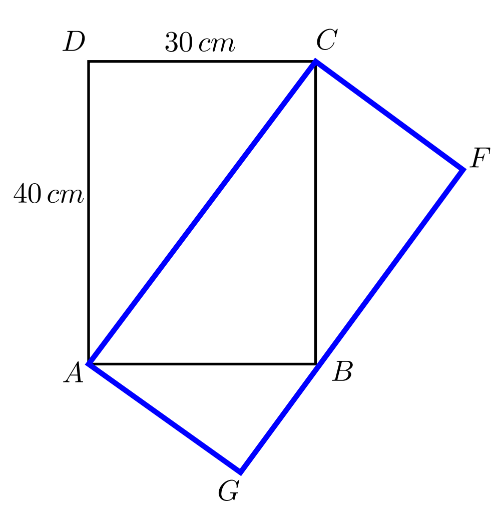
En la siguiente figura se muestran dos triángulos equiláteros. Si un lado del triángulo más pequeño mide $\sqrt{2}\,cm$ y el área entre los dos triángulos es igual al área del triángulo pequeño, ¿cuál es el perímetro del triángulo grande?



(a) $6\,cm$ (b) $6\sqrt{2}\,cm$ (c) $12\,cm$ (d) $9\sqrt{2}/2\,cm$ (e) No sé

PROBLEMA 2.

Si las dimensiones del rectángulo $ABCD$ son las que se muestran en la figura, ¿cuál es el perímetro del rectángulo $AGFC$?



(a) $140\,cm$ (b) $148\,cm$ (c) $174\,cm$ (d) $1200\,cm$ (e) No sé

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316; 6450301.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.
@edumat.uis

PROBLEMA 3.

Sea S el cuadrilátero en el plano, cuyos vértices son los puntos (a, b), (b, a), $(-a, -b)$, $(-b, -a)$; con $0 < b < a$. Si el área de S es 16, ¿cuál es el valor de $a^2 - b^2$?

(a) 4 (b) 8 (c) 12 (d) 16 (e) No sé

PROBLEMA 4.

Antonia obtuvo el mismo residuo r al dividir los números 1186, 1520 y 2021 entre cierto entero positivo $n > 1$. ¿Cuál es valor de $n + r$?

(a) 211 (b) 291 (c) 177 (d) 184 (e) No sé

PROBLEMA 5.

Si a, b y c son las soluciones de la ecuación $x^3 - 2x^2 - 3x + 8 = 0$, ¿cuál es el valor de $a^2 + b^2 + c^2$?

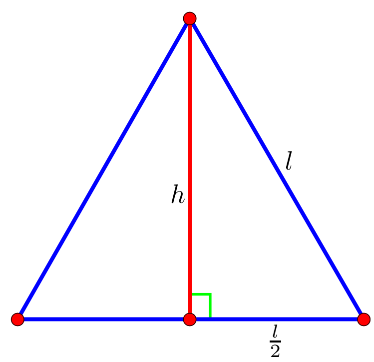
PROBLEMA 6.

Juan y Marcos son dos amigos a los que les apasiona las matemáticas. Cierto día, Juan le dice a su amigo que ha descubierto que, para cada número entero n se cumple que $n^2(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ es múltiplo de 360. Marcos no está seguro de esta afirmación. ¿Cómo podría Marcos probar o contradecir la afirmación de Juan?

Solucionario
Primera Capacitación
Nivel Medio
8° y 9°

Problema 1.

Solución: Primero hallemos el área del un triángulo equilátero en términos de la longitud l de uno de sus lados. Para ello, considere la siguiente figura, en la que se ha trazado una de las alturas del triángulo equilátero.



Por ser un triángulo equilátero, dicha altura es mediatriz, así, del teorema de Pitágoras se tiene que:

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2,$$
$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4},$$
$$h^2 = \frac{3l^2}{l},$$
$$h = \frac{\sqrt{3}l}{2}.$$

Luego el área de dicho triángulo está dada por

$$A = \frac{l \times h}{2} = \frac{l \times \frac{\sqrt{3}l}{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}. \tag{1}$$

Volviendo al enunciado, la longitud de cada lado del triángulo equilátero más pequeño es $\sqrt{2}\,cm$, luego su área es $\frac{(\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,cm^2$. Así, el área entre los dos triángulos está dada por:

$$\frac{L^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

donde L es la longitud del lado del triángulo más grande. De la última ecuación se deduce que $L = 2\,cm$. Por lo tanto, el perímetro del triángulo más grande es $3 \times 2\,cm = 6\,cm$.

Problema 2.

Solución 1: *Del teorema de Pitágoras se tiene que* $AC^2 = 40^2 + 30^2$, *luego* $AC = 50\,cm$. *Ahora, note los rectángulos* $AGFC$ *y* $ABCD$ *tienen igual área, a saber:* $40 \times 30 = 1200\,cm^2$.
Pero el área del rectángulo $AGFC$ *también está dada por* $AG \times AC$, *de ahí que*

$$AG \times AC = 1200$$
$$AG = \frac{1200}{AC} = \frac{1200}{50} = 24\,cm.$$

Por lo tanto, el perímetro del rectángulo $AGFC$ *es* $2 \times (50 + 24) = 148\,cm$.

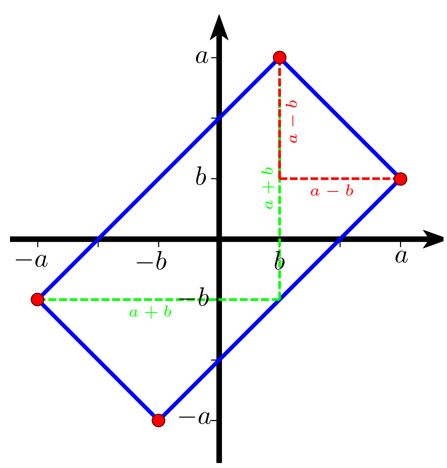
Solución 2: *Por un lado el área del triángulo* ABC *es la mitad del área del rectángulo* $ABCD$, *esto es* $\frac{30 \times 40}{2} = 600\,cm^2$. *Además, del teorema de Pitágoras se tiene que* $AC = 50\,cm$, *luego el área del triángulo* ABC *también está dada por:*

$$\frac{AG \times AC}{2} = 600$$
$$AG = \frac{1200}{AC} = \frac{1200}{50} = 24\,cm.$$

Por lo tanto, el perímetro del rectángulo $AGFC$ *es* $2 \times (50 + 24) = 148\,cm$.

Problema 3.

Solución: *Considere la siguiente ilustración:*



Note que el cuadrilátero es un rectángulo y por el teorema de Pitágoras dos de sus lados adyacentes miden

$$\sqrt{(a-b)^2 + (a-b)^2} = \sqrt{2}(a-b),$$
$$\sqrt{(a+b)^2 + (a+b)^2} = \sqrt{2}(a+b).$$

Así que su área está dada por:

$$16 = \sqrt{2}(a-b) \times \sqrt{2}(a+b),$$
$$16 = 2(a-b)(a+b),$$
$$16 = 2(a^2 - b^2);$$

de ahí que $a^2 - b^2 = 8$.

Problema 4.

Solución: *Antonia obtuvo el mismo residuo r al dividir 1186, 1520 y 2021 entre n, esto quiere decir que,*

$$\begin{aligned} 1186 &= n \times a + r, \\ 1520 &= n \times b + r, \\ 2021 &= n \times c + r, \end{aligned}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. Luego,

$$\begin{aligned} 2021 - 1520 &= n(c-b) = 501 = 3 \times 167, \\ 2021 - 1186 &= n(c-a) = 835 = 5 \times 167, \\ 1520 - 1186 &= n(b-a) = 334 = 2 \times 167. \end{aligned}$$

De donde se deduce que $n = 167$ es el número que se repite en las tres igualdades anteriores. Para hallar r efectuamos la división $1186 \div 167$, donde obtenemos $a = 7$ de cociente y $r = 17$ de residuo. Por lo tanto, $n + r = 167 + 17 = 184$.

Problema 5.

Solución: *Note que*

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc).$$

Además, por el Teorema Fundamental del Álgebra, se tiene que

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 3x + 8 &= (x-a)(x-b)(x-c), \\ &= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{aligned} -2 &= -(a+b+c), \\ -3 &= ab + ac + bc. \end{aligned}$$

Luego,

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = 2^2 - 2(-3) = 10.$$

Problema 6.

Solución: *Note que:*

$$\begin{aligned} P = n^2(n^2-1)(n^2-4) &= n^2(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)n, \end{aligned}$$

Pero $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ es el producto de 5 enteros consecutivos, por lo tanto es múltiplo de 5. Además, $(n-2)(n-1)n$ y $n(n+1)(n+2)$ son productos de tres enteros consecutivos, por lo que cada uno es múltiplo de 3, así el producto $P = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)n$, es múltiplo de 9. Finalmente, si n es par, entonces P es múltiplo de 8 pues en tal caso n, $n-2$ y $n+2$ son múltiplos de 2, y si n es impar, entonces $n+1$ y $n-1$ son pares, siendo uno de ellos múltiplo de 4, y por lo tanto P también sería múltiplo de 8. De modo que, P es múltiplo de 5, 8 y 9, por lo tanto es múltiplo de $5 \times 8 \times 9 = 360$.