Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
XIV Olimpiadas Regionales de Matemáticas.
SECUNDARIA-2022.

"Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar."
- Hipatía de Alejandría.

PRIMERA CAPACITACIÓN
NIVEL AVANZADO
10° Y 11°

PROBLEMA 1.

Si las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6b = 0$ son: 2 y a, ¿cuál es el valor de $a + b$?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) No sé

PROBLEMA 2.

En un triángulo ABC se traza una recta paralela a $\overline{AC}$ que pasa por D, el punto medio de $\overline{BC}$, y corta a $\overline{AB}$ en un punto E. Se toma ahora un punto P sobre $\overline{BC}$ y se traza otra recta paralela a $\overline{AC}$ que pase por P; dicha recta corta a $\overline{AB}$ en el punto Q. Denotemos por $a(ABC)$ el área de un triángulo ABC. Si $\dfrac{a(BPQ)}{a(BDE)} = \dfrac{3}{2}$, ¿cuánto es $\dfrac{a(ABC)}{a(BPQ)}$?

(a) $\dfrac{8}{3}$ (b) 3 (c) $\dfrac{4}{3}$ (d) 6 (e) No sé

PROBLEMA 3.

La maestra de Juan escribe un número natural en el tablero cuyas cifras son: 2 doses, 3 treses, 4 cuatros, 5 cincos, 6 seises, 7 sietes, 8 ochos y 9 nueves, no necesariamente en ese orden. Juan debe ir borrando de a un dígito de modo que al borrarlo, el nuevo número que queda en el tablero sea múltiplo de 3. Por ejemplo, si en el tablero está el número 3927, Juan no puede borrar el 2, pues 397 no es múltiplo de 3. ¿Cuál es el mayor número de dígitos que puede borrar Juan?

(a) 13 (b) 15 (c) 19 (d) 26 (e) No sé

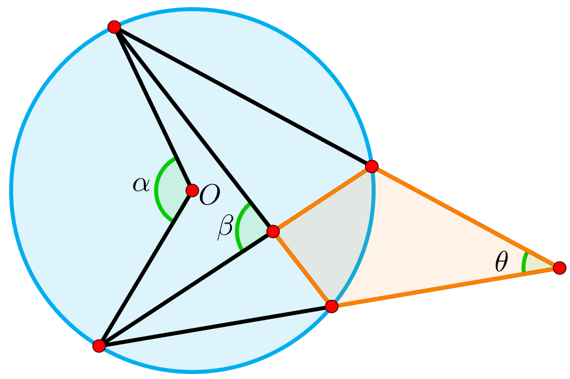
PROBLEMA 4.

Se tiene una sucesión de números enteros en la que cada término, después del primero, es la suma de su antecesor con su sucesor. Si el entero en la posición 70 es el 16 y el entero en la posición 75 es el -23, ¿cuál es el entero en la posición 2021?

(a) -16 (b) -7 (c) 23 (d) 39 (e) No sé

Problema 5.

En la siguiente figura O es el centro de la circunferencia. Si $\alpha = 94°$ y $\beta = 58°$, ¿cuál es el medida del ángulo θ?



(a) $38°$ (b) $36°$ (c) $29°$ (d) $18°$ (e) No sé

Problema 6.

Sobre los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ de un rectángulo $ABCD$ se marcan los puntos P y Q, respectivamente, de modo que $\measuredangle APQ = 90°$. Si $CD = 6\,cm$ y $CQ = 3 \times QD$, determinar el valor numérico de $BP \times PC$.

Problema 7.

En un supermercado se etiquetan los productos con códigos que son números enteros de 10 dígitos. ¿Cuántos códigos $ABCDEFGHIJ$ cumplen que todos sus dígitos son diferentes y

$$A > B > C > D > E < F < G < H < I < J?$$

Por ejemplo, el código 8652013479 cumple.

(a) 126 (b) 210 (c) 252 (d) 84 (e) No sé

Solucionario
Primera Capacitación
Nivel Avanzado
10° y 11°

Problema 1.

Solución 1: *Usando la fórmula cuadrática, tenemos que las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6b = 0$ están dadas por:*

$$\frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6b)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24b}}{2},$$

y dado que 2 *es una solución, entonces* $\frac{5 \pm \sqrt{25-24b}}{2} = 2$, *luego* $5 \pm \sqrt{25-24b} = 4$, *es decir* $\mp\sqrt{25-24b} = 1$, *de donde*

$$\begin{aligned} 25 - 24b &= 1, \\ -24b &= -24, \\ b &= 1. \end{aligned}$$

De modo que las soluciones de la ecuación original están dadas por:

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 24(1)}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2},$$

es decir, 2 *y* $a = 3$. *Por lo tanto,* $a + b = 3 + 1 = 4$.

Solución 2: *Por el Teorema Fundamental del Álgebra, se tiene que*

$$x^2 - 5x + 6b = (x-2)(x-a),$$

y al desarrollar la parte derecha de la igualdad se obtiene:

$$x^2 - 5x + 6b = x^2 - (a+2)x + 2a,$$

de modo que al iguar los coeficientes se llega a:

$$\begin{aligned} -5 &= -(a+2), \\ 6b &= 2a, \end{aligned}$$

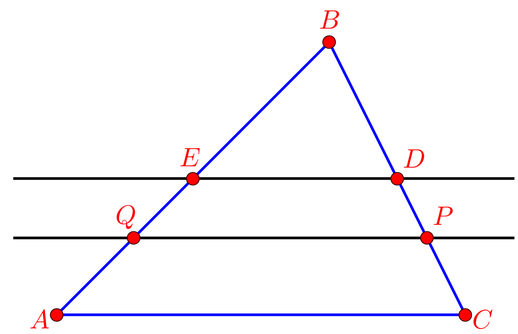
de donde $5 = a + 2$, *luego* $a = 3$ *y* $6b = 2(3)$, *así,* $b = 1$. *Por lo tanto,* $a + b = 4$.

Solución 3: *Para hallar las soluciones de la ecuación* $x^2 - 5x + 6b = 0$, *factorizamos la parte izquierda. Note que se trata de un polinomio de la forma* $x^2 + Bx + C$, *cuya factorización es:* $(x-2)(x-a)$, *pues* 2 *y* a *son las soluciones, y además* $-2-a = -5$ *y* $2a = 6b$, *de donde se sigue que* $a = 3$ *y* $b = 1$, *así que* $a+b = 4$.

Solución 4: *Usando las fórmulas de Vieta, se tiene que* $5 = 2 + a$ *y* $6b = 2a$, *luego* $a = 3$, $b = 1$. *De modo que* $a + b = 4$.

Problema 2.

Solución 1: Considere la siguiente figura:

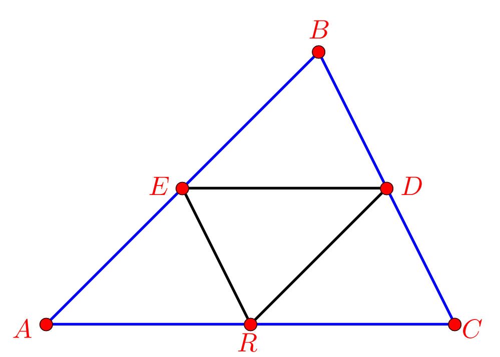


Note que los triángulos ABC, QBP y EBD son semejantes. Además, la razón de semejanza entre los triángulos ABC y EBD está dada por $\dfrac{BC}{BD} = 2$, pues D es el punto medio de $\overline{BC}$; de modo que la razón entre las áreas de estos triángulos[a] *es* $\dfrac{a(ABC)}{a(EBD)} = 4$.

Finalmente, dado que $a(BPQ) = \dfrac{3}{2}a(BDE)$, se concluye que

$$\frac{a(ABC)}{a(BPQ)} = \frac{a(ABC)}{\frac{3}{2}a(BDE)} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}.$$

Solución 2: Considere la siguiente figura en la que R es el punto medio de $\overline{AC}$.



Note que $\dfrac{a(BDE)}{a(ABC)} = \dfrac{1}{4}$, y dado que $\dfrac{a(BPQ)}{a(BDE)} = \dfrac{3}{2}$, entonces

$$\frac{\cancel{a(BDE)}}{a(ABC)} \times \frac{a(BPQ)}{\cancel{a(BDE)}} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8},$$

de ahí que

$$\frac{a(ABC)}{a(BPQ)} = \frac{8}{3}.$$

[a] Si la razón entre dos triángulos semejantes es r, la razón entre sus áreas es r^2.

Problema 3.

Solución: Un número es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3, por lo tanto el número escrito por la maestra de Juan no es divisible entre 3 pues la suma de sus cifras es 284. Pero este número deja residuo 2 al dividirlo entre 3, luego Juan puede quitar por ejemplo un 2 (o cualquier dígito que deje residuo 2 al dividirse entre 3). Note que al borrar un 2 del número original la suma de los dígitos daría como resultado 282, por lo tanto el nuevo número sería divisible entre 3.

En adelante, para que el siguiente número, luego de borrar un dígito, sea divisible entre 3, el dígito retirado debe ser un múltiplo de 3, por lo tanto se podría retirar uno de los 18 dígitos que son múltiplos de 3 (los 3 treses, 6 seises y 9 nueves). Así, el número máximo de dígitos que puede quitar Juan es 19.

Problema 4.

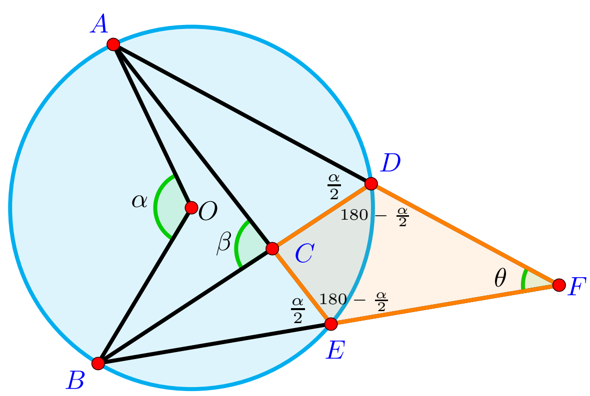
Solución: *Denotemos* a_n *como el término n-ésimo de la sucesión. Veamos que* $a_{n+3} = -a_n$, *en efecto:*

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} + a_{n+3}, \\ a_{n+2} &= a_n + a_{n+2} + a_{n+3}, \\ a_{n+3} &= -a_n. \end{aligned}$$

Así, $a_{n+6} = -a_{n+3} = a_n$. *Por otro lado, tenemos que* $2020 = 70 + 325 \times 6$ *y* $2019 = 75 + 324 \times 6$, *concluyendo así que* $a_{2020} = a_{70}$, $a_{2019} = a_{75}$ *y* $a_{2022} = -a_{2019}$.
Finalmente, $a_{2021} = a_{2020} + a_{2022} = a_{70} - a_{75} = 16 + 23 = 39$.

Problema 5.

Solución: *Considere la siguiente figura:*



Note que:

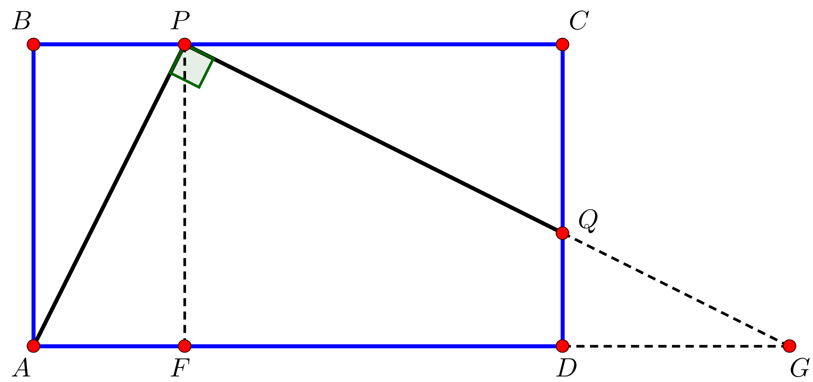
- AOB *es un ángulo central, mientras que* ADB *y* AEB *son ángulos inscritos que subtienden el mismo arco que* AOB, *de ahí que:*
$$\measuredangle ADB = \measuredangle AEB = \frac{\measuredangle AOB}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$
- *Los ángulos* ACB *y* ECD *son opuestos por el vértice, luego*
$$\measuredangle ECD = \beta.$$
- *Los ángulos* CDF *y* FEC *son suplementarios con los ángulos* ADB *y* AEB, *respectivamente, esto es:*
$$\measuredangle CDF = \measuredangle FEC = 180 - \frac{\alpha}{2}.$$

Finalmente, como las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero suman $360°$, *tenemos, para el cuadrilátero* $CDFE$:

$$\begin{aligned} \measuredangle ECD + \measuredangle CDF + \measuredangle DFE + \measuredangle FEC &= 360, \\ \beta + 180 - \frac{\alpha}{2} + \theta + 180 - \frac{\alpha}{2} &= 360, \\ \theta &= \alpha - \beta, \\ \theta &= 94° - 58°, \\ \theta &= 36°. \end{aligned}$$

Problema 6.

Solución: *Considere la siguiente figura en la que se ha hecho un bosquejo de la situación, se han prolongado los segmentos* $\overline{PQ}$ *y* $\overline{AD}$ *y se ha trazado* $\overline{PF}$ *perpendicular a* $\overline{AD}$.



Sea G *al punto de intersección entre* $\overleftrightarrow{PQ}$ *y* $\overleftrightarrow{AD}$. *Note que los triángulos* PCQ *y* GDQ *son semejantes, y dado que* $CQ = 3 \times QD$, *entonces* $PC = 3 \times GD$. *Además,* $PCDF$ *es un rectángulo luego* $FD = PC = 3 \times GD$. *Usando el Teorema de la Media Geométrica*[a] *aplicado al triángulo* APG, *tenemos que*

$$PF^2 = AF \times (FD + DG) = AF \times (3GD + GD) = AF \times 4GD$$

$$\frac{PF^2}{4} = AF \times GD.$$

Pero, $PF = CD = 6\,cm$, $AF = BP$ *y* $PC = 3GD$, *entonces*

$$\frac{6^2}{4} = BP \times \frac{PC}{3},$$

de donde el valor numérico de $BP \times PC$ *es* 27.

---

[a] *Si* h *denota la altura de un triángulo rectángulo perpendicular a la hipotenusa, y* p *y* q *las longitudes de los segmentos en los que divide a la hipotenusa, entonces* $h^2 = pq$.
Este resultado puede probarse usando semejanza de triángulos. Sea ABC un triángulo rectángulo en C y D el punto intersección entre la hipotenusa y la altura perpendicular a esta. Entonces los triángulos ACD y CBD son semejantes, de ahí que $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{DB}{CD}$, esto es $CD^2 = AD \times DB$.

Problema 7.

Solución: *De las condiciones del enunciado se deduce que* $E = 0$. *Además, como los dígitos de cada código están ordenados, al escoger* A, B, C *y* D, *los demás dígitos quedarán determinados. Ahora bien, los dígitos del código deben ser diferentes, entonces* A, B, C *y* D *se pueden escoger de* $\binom{9}{4} = 126$ *formas diferentes. Por lo tanto, hay* 126 *códigos que cumplen las condiciones del enunciado.*