# Primera Capacitación

Olimpiadas Regionales de Matemáticas-Secundaria

Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Grupo Edumat

Bucaramanga, febrero 19 de 2022

***Informes:***
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
*Tel.:* 6344000 *ext.* 2316; 6450301.
*Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.*

# METODOLOGÍA

## NIVELES

Básico: para estudiantes de 6 y 7.

Medio: para estudiantes de 8 y 9.

Avanzado: para estudiantes de 10 y 11.

## FASES

1. Capacitaciones.
2. Prueba Clasificatoria.
3. Prueba Selectiva.
4. Prueba Final.
5. Entrenamientos.

# FASES

## Capacitaciones

- 3 talleres gratuitos de capacitación para docentes y estudiantes.
- Con el fin de programar las próximas capacitaciones, agradecemos diligenciar el siguiente formulario de Google.
  `https://forms.gle/9EqsDNUkS9ge2DMZ8`

## Prueba Clasificatoria

- Participan los estudiantes inscritos.
- **Modalidad virtual,** en la plataforma Moodle.
- Consta 9 problemas de selección múltiple con única respuesta.

# FASES

## Prueba Selectiva

- Participan los estudiantes clasificados por alguno de los siguientes criterios:

  Criterio 1. el estudiante pertenece al conjunto del 10% de los estudiantes que obtuvieron los mejores puntajes en la Prueba Clasificatoria.

  Criterio 2. si alguna institución participante no alcanzó la clasificación del 10% de los estudiantes participantes, el Comité Organizador clasifica a los restantes estudiantes, para completar el 10% de clasificación en cada nivel.

- **Modalidad presencial**, en las sedes regionales (Barbosa, Barrancabermeja, Bucaramanga, Málaga, Socorro, UFPS-Ocaña).

# FASES

## Prueba Final

- Participan los estudiantes clasificados por alguno de los siguientes criterios:

  Criterio 1. el estudiante pertenece al conjunto de los 20 estudiantes con los mejores puntajes en la prueba selectiva de cada nivel.

  Criterio 2. si un municipio no tiene representación por el criterio 1, el Comité otorga el título de Estudiante Finalista al participante del municipio con el mejor puntaje en la prueba de selectiva.

- **Modalidad presencial**, en las instalaciones de la UIS-Bucaramanga.

## Entrenamientos

A los estudiantes finalistas se les ofrecerá una preparación especial con el ánimo que participen en otras competencias de matemáticas.

# ESTÍMULOS

- MENCIÓN DE HONOR para los estudiantes clasificados de cada nivel en primera prueba.
- DIPLOMA DE FINALISTA
- PREMIOS para los 5 mejores puntajes de cada nivel en la prueba final.

# FECHAS IMPORTANTES

## INSCRIPCIONES

del 15 de febrero al 9 de abril de 2022.

## PRUEBAS

Prueba Clasificatoria: semana del 2 al 6 de mayo.

Prueba Selectiva: jueves, 26 de mayo.

Prueba Final: sábado, 16 de julio.

# PROCESO DE INSCRIPCIÓN

1. Diligenciar el formulario de Google del siguiente enlace:
   `https://forms.gle/1S6bwfBGVdDgJ5Fo9`
2. El número mínimo de estudiantes inscritos por institución debe ser 10.

## VALOR DE LA INSCRIPCIÓN POR ESTUDIANTE:

- 8.500 para grupos de 10 a menos de 40 estudiantes.
- 7.500 para grupos de 40 a 499 estudiantes.
- 7.000 para grupos de más de 499 estudiantes.

# CONTACTO


Correo electrónico: olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Teléfonos: 6344000, Ext: 2316

Página de Facebook: Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

# OTROS GRUPOS DE EDUMAT-UIS

## SEMILLERO MATEMÁTICO

Correo electrónico: semillero@matematicas.uis.edu.co

Teléfono: 6344000, Exts: 2316.

## CALENDARIO MATEMÁTICO

Correo electrónico: calendariomatematico2011@gmail.com

Teléfonos: 6344000, Exts: 2316. - 3125586597 (Daniel Moreno)

# Métodos de conteo

Los siguientes métodos de conteo se basan en la forma en que se seleccionan $k$ elementos de un conjunto dado con $n$ elementos. Al seleccionar un objeto del conjunto podemos tener en cuenta el orden de los elementos y el número de veces que puede aparecer cada elemento.
Cuando distinguimos o tenemos en cuenta las diferentes ordenaciones de los mismos elementos hablaremos de los casos como **Permutaciones**. Por el contrario, si no se tiene en cuenta ordenaciones diferentes de los mismos elementos hablaremos de **Combinaciones**. Además, si cada elemento puede aparecer solo una vez, diremos que son casos **sin repetición**, mientras que, si no importa las veces que un elemento pueda aparecer, diremos que son casos **con repetición**

# Métodos de conteo

## El factorial

El ***factorial*** de un entero positivo $n$, o $n$ ***factorial***, se define como el producto de todos los números naturales desde 1 hasta $n$ y se representa por $n!$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n.$$

Por definición, $0! = 1$.
**Ejemplo:**

$$\begin{aligned}
1! &= 1, \\
2! &= 1 \times 2 = 2, \\
3! &= 1 \times 2 \times 3 = 6, \\
4! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24, \\
5! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120, \\
10! &=
\end{aligned}$$

# Métodos de conteo

## Número Combinatorio

El ***número combinatorio*** o ***coeficiente binomial***, se define como el número de subconjuntos con $k$ elementos que se pueden tomar de un conjunto con $n$ elementos, siendo $n$ y $k$ dos números enteros positivos, tales que $n \geq k$. El número combinatorio se expresa como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!},$$

y se lee "$n$ combinado $k$".

**Ejemplo:** De un conjunto con 4 elementos podemos formar 6 subconjuntos con dos elementos esto es:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$$

# Métodos de conteo

Las siguientes preguntas son útiles para orientar la solución de ciertos problemas de conteo.

1. ¿Cuál es el conjunto del que se van a escoger los elementos? ¿cuántos elementos tiene este conjunto?
2. ¿Cuántos elementos debo escoger del conjunto?
3. ¿Importa el orden en que se escogen los elementos?
4. Al escoger, ¿se pueden repetir elementos?

Cuando importa el orden en que se escogen los elementos diremos que es una PERMUTACIÓN, mientras que si no importa el orden, diremos que es una COMBINACIÓN.

# Métodos de conteo

Las siguientes fórmulas nos dan el número de permutaciones y combinaciones de $k$ elementos en un conjunto de $n$ elementos.

| | |
|---|---|
| Permutaciones sin repetición: | $\dfrac{n!}{(n-k)!}$, |
| Permutaciones con repetición: | $n^k$ |
| Combinaciones sin repetición: | $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ |
| Combinaciones con repetición: | $\dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$. |

# Métodos de conteo

## Ejemplo

Consideremos el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. ¿Cuántos números de dos cifras tienen sus dígitos en el conjunto $X$?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 1 | 1 2 | 1 3 | 1 4 |
| 2 1 | 2 2 | 2 3 | 2 4 |
| 3 1 | 3 2 | 3 3 | 3 4 |
| 4 1 | 4 2 | 4 3 | 4 4 |

Respuesta: 16 números (permutaciones de dos elementos con repetición.)

2. ¿Cuántos números de dos cifras diferentes tienen sus dígitos en el conjunto $X$?

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 2 | 1 3 | 1 4 |
| 2 1 | | 2 3 | 2 4 |
| 3 1 | 3 2 | | 3 4 |
| 4 1 | 4 2 | 4 3 | |

Respuesta: 12 números (permutaciones de dos elementos sin repetición.)

# Métodos de conteo

## Ejemplo

1. ¿Cuántos números de dos cifras tienen sus dígitos en el conjunto $X$, y la cifra de las unidades es mayor o igual que las decenas?

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\underline{1}\ \underline{1}$ | $\underline{1}\ \underline{2}$ | $\underline{1}\ \underline{3}$ | $\underline{1}\ \underline{4}$ |
| | $\underline{2}\ \underline{2}$ | $\underline{2}\ \underline{3}$ | $\underline{2}\ \underline{4}$ |
| | | $\underline{3}\ \underline{3}$ | $\underline{3}\ \underline{4}$ |
| | | | $\underline{4}\ \underline{4}$ |

10 combinaciones de dos elementos con repetición.

2. ¿Cuántos subconjuntos de dos elementos tiene el conjunto $X$?

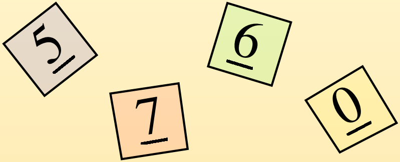
| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\underline{1}\ \underline{2}$ | $\underline{1}\ \underline{3}$ | $\underline{1}\ \underline{4}$ |
| | | $\underline{2}\ \underline{3}$ | $\underline{2}\ \underline{4}$ |
| | | | $\underline{3}\ \underline{4}$ |
| | | | |

Respuesta: 6 subconjuntos (combinaciones de dos elementos sin repetición.)

# Problemas

## Problema #1

Iván juega a formar números con las siguientes cuatro tarjetas:




$(a)$ ¿cuántos números diferentes puede formar Iván?

$(b)$ ¿cuál es el menor? ¿cuál es el mayor?

$(c)$ ¿cuál es el menor de cuatro cifras?

$(d)$ ¿cuál es el menor, usando las cuatro tarjetas?

$(e)$ ¿cuántos tienen 3 cifras y terminan en 5?

$(f)$ ¿cuántos son mayores que 6000?

# Solución

(*a*) ¿cuántos números diferentes puede formar Iván?

- De una cifra: 4, cada una de las tarjetas.
- De dos cifras: en este caso, el número no puede iniciar en cero, pues no sería de dos cifras y además no se pueden repetir cifras, pues solo hay 4 tarjetas cada una con diferente dígito. De modo que para las decenas solo se puede usar las tarjetas con los dígitos: 5, 7 y 6. Mientras que para las unidades, solo se pueden usar tres tarjetas, pues ya una se usó para las decenas.

  Así, por el principio multiplicativo se tiene que la cantidad de números con estas condiciones es:

$$\underbrace{3\ opciones}_{\text{decenas}} \times \underbrace{3\ opciones}_{\text{unidades}} = \underbrace{3 \times 3 = {\color{red}9.}}_{\text{cantidad de números}}$$

- De tres cifras: por el principio multiplicativo hay 18 números:

$$\underbrace{3\ opciones}_{\text{centenas}} \times \underbrace{3\ opciones}_{\text{decenas}} \times \underbrace{2\ opciones}_{\text{unidades}} = \underbrace{3 \times 3 \times 2 = {\color{red}18.}}_{\text{cantidad de números}}$$

- De cuatro cifras: hay 18.

$$\underbrace{3\ opciones}_{\text{Unidades de Mil}} \times \underbrace{3\ opciones}_{\text{centenas}} \times \underbrace{2\ opciones}_{\text{decenas}} \times \underbrace{1\ opcion}_{\text{unidades}} = \underbrace{3 \times 3 \times 2 \times 1 = {\color{red}18.}}_{\text{cantidad de números}}$$

Por lo tanto, Iván puede formar $4 + 9 + 18 + 18 = {\color{red}49}$ números con sus tarjetas.

# Solución

$(b)$ ¿cuál es el menor? ¿cuál es el mayor?
El menor es el 0. El mayor es el 7650.

$(c)$ ¿cuál es el menor de cuatro cifras? 5067.

$(d)$ ¿cuál es el menor, usando las cuatro tarjetas? 0567.

$(e)$ ¿cuántos tienen 3 cifras y terminan en 5?

$$\underbrace{2\ opciones}_{\text{centenas: 6 o 7}} \times \underbrace{2\ opciones}_{\text{decenas}} \times \underbrace{1\ opcion}_{\text{unidades: 5}} = \underbrace{2 \times 2 \times 1 = 4.}_{\text{cantidad de números}}$$

$(f)$ ¿cuántos son mayores que 6000?

$$\underbrace{2\ opciones}_{\text{Unidades de Mil: 6 o 7}} \times \underbrace{3\ opciones}_{\text{centenas}} \times \underbrace{2\ opciones}_{\text{decenas}} \times \underbrace{1\ opcion}_{\text{unidades}} = \underbrace{2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12.}_{\text{cantidad de números}}$$

# Problemas

## Problema #2

Un colegio de Santander está planeando retornar a clases presenciales de forma alternada. Para ello, a cada estudiante le ofrecen asignarle aleatoriamente 3 días de lunes a viernes para tomar sus clases en las instalaciones. ¿Cuál es el menor número de niños que deben aceptar la propuesta del colegio para que sea seguro que al menos dos de ellos vayan los mismos días a las instalaciones?

# Solución

Se trata de escoger 3 de 5 días posibles. No importa el orden y no se puede repetir COMBINACIONES SIN REPETICIÓN.

Tenemos 5 días en donde cada niño podrá ir 3 días, luego el total de posibilidades para que un estudiante asista al plantel es

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

Por el principio de casillas como tenemos 10 posibilidades basta con que 11 niños tomen el nuevo modelo, de esta manera al menos dos de ellos compartirán los días para ir al colegio.

# Problemas

## Problema #3

¿Cuántos números impares de cinco cifras hay tales que la cifra de las centenas excede en 2 a la cifra de las unidades de mil y la cifra de las decenas es la mitad la cifra de las decenas de mil?

# Solución

Sea *abcde* un número que satisface las condiciones del enunciado. Entonces $e$ debe ser impar, $c = b + 2$ y $d = \frac{a}{2}$. Además, $a, b, c, d, e$ son dígitos, con $a \neq 0$ pues el número es de cinco cifras, de modo que

$$\begin{aligned} a &\in \{2, 4, 6, 8\}, \\ b &\in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \\ e &\in \{1, 3, 5, 7, 9\}. \end{aligned}$$

Note que al escoger a $b$ queda determinado $c$ y al escoger a $a$ queda determinado $d$.
Por lo tanto hay $4 \times 8 \times 5 = 160$ de estos números.

# Problemas

## Problema #4

El curso de la profesora Mariela tiene 7 niñas y 5 niños. Para la celebración del cumpleaños del colegio cada curso enviará a un grupo de 6 estudiantes para participar en una obra de teatro. Si los integrantes del grupo del curso de la profesora Mariela son elegidos completamente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dicho grupo tenga más niños que niñas?

# Solución

Para que uno de los grupos tenga más niños que niñas, este debe tener 4 o 5 niños. Si el grupo tiene 4 niños, los grupos posibles con esta característica son:

$$\binom{5}{4} \times \binom{7}{2} = 5 \times 21 = 105.$$

Si el grupo tiene 5 niños, la cantidad de grupos posibles de este tipo es

$$\binom{5}{5} \times \binom{7}{1} = 1 \times 7 = 7.$$

De modo que el total de grupos donde hay más niños que niñas es $105 + 7 = 112$. Por otro lado, el total de grupos posibles es

$$\binom{12}{6} = \frac{12!}{6!6!} = 4 \times 3 \times 7 \times 11 = 924.$$

Así que la probabilidad de que un grupo tenga más niños que niñas es:

$$\frac{112}{924} = \frac{4}{33}.$$

# Problemas

## Problema #5

¿Cuántos números enteros positivos menores que 2021 tienen entre sus cifras al 0, al 1 o al 2?

# Solución

Hay 2020 enteros positivos menores 2021. Contaremos los que NO tienen entre sus cifras al 0, al 1 o al 2 y restaremos esta cantidad de 2020 para obtener los que cumplen la condición del enunciado.
En efecto, de una cifra hay 7 números enteros positivos menores que 2021 que NO tienen entre sus cifras al 0, al 1 o al 2. De dos cifras hay $7 \times 7 = 49$ de estos números, pues tanto la cifra de la unidades como la de las decenas tiene 7 posibilidades. De tres cifras hay $7 \times 7 \times 7 = 343$ de estos números; y de cuatro cifras no hay.
Por lo tanto, los números que cumplen la condición del enunciado son

$$2020 - 7 - 49 - 343 = 1621.$$

# Problemas

## Problema #6

¿Cuántos números capicúas positivos de 6 dígitos divisibles por 33 existen tales que la cifra de las decenas sea múltiplo de 3 y la cifra de las unidades deje residuo 1 al dividirse entre 4?
Nota: Un número es capicúa si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

# Solución

Si un número es divisible por 33, entonces es divisible por 11 y por 3. Todo número capicúa de 6 dígitos es divisible* por 11, pues la suma alternada de sus cifras es $0 = 11 \times 0$. Ahora, para que sea divisible en 3 la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 3, en nuestro caso, como el número es capicúa, se debe cumplir que el número formado por los 3 últimos dígitos sea múltiplo de 3, pues las 3 primeras cifras son iguales a las 3 últimas, y si la suma de los 3 últimos dígitos no es múltiplo de 3, entonces 2 veces dicho valor tampoco es lo es. La cifra de las decenas puede tomar valores del conjunto $\{0, 3, 6, 9\}$, 4 en total. La cifra de las unidades puede tomar valores del conjunto $\{1, 5, 9\}$, para el 1 la cifra de las centenas tiene 3 posibilidades en el conjunto $\{2, 5, 8\}$, para el 5 hay 3 posibilidades en $\{1, 4, 7\}$, y para el 9 hay 4 posibilidades en el conjunto $\{0, 3, 6, 9\}$. De modo que el total de números capicúas que cumplen lo dicho es:

$$(3 \times 4 \times 1) + (3 \times 4 \times 1) + (4 \times 4 \times 1) = 40.$$

*Un número es divisible por 11 si y solo si la suma alternada de sus cifras es múltiplo de 11.

# Problemas

## Problema #7

En un supermercado se etiquetan los productos con códigos que son números enteros de 10 dígitos. ¿Cuántos códigos $ABCDEFGHIJ$ cumplen que todos sus dígitos son diferentes y

$$A > B > C > D > E < F < G < H < I < J?$$

Por ejemplo, el código 8652013479 cumple.

# Solución

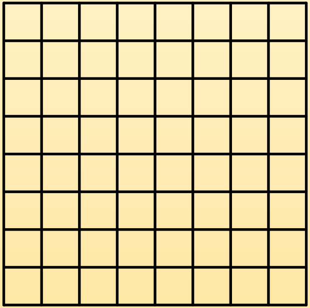
De las condiciones del enunciado se deduce que $E = 0$. Además, como los dígitos de cada código están ordenados, al escoger $A, B, C$ y $D$, los demás dígitos quedarán determinados. Ahora bien, los dígitos del código deben ser diferentes, entonces $A, B, C$ y $D$ se pueden escoger de $\binom{9}{4} = 126$ formas diferentes.

Por lo tanto, hay 126 códigos que cumplen las condiciones del enunciado.

# Problemas

## Problema #8

¿Cuántos rectángulos hay en la siguiente cuadrícula de $8 \times 8$?



Y si la cuadrícula es de $n \times n$, ¿cuántos rectángulos hay?

# Solución

Note que para formar un rectángulo se deben escoger dos rectas horizontales y dos rectas verticales.
Hay 9 rectas horizontales y 9 verticales. Por lo tanto hay

$$\binom{9}{2} \times \binom{9}{2} = 36^2 = 1296,$$

rectángulos en la cuadrícula.
Si la cuadrícula es $n \times n$, entonces habrán

$$\binom{n}{2} \times \binom{n}{2} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

# Problemas

## Problema #9

Daniela quiere elegir una clave para el candado de su bicicleta, de modo que la suma de los dígitos sea su edad. Si la clave debe tener 4 dígitos y su edad es 9 años, ¿de cuántas formas puede elegir la clave?
Por ejemplo, una clave posible es 0504.

# Solución

Se trata de contar de cuántas formas se puede escribir a 9 como suma de cuatro dígitos (no necesariamente diferentes).
Representamos al 9 con 9 puntitos:

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\;\bullet$$

y usaremos tres barras para separar los puntos quedando 4 grupos de puntos que representan cada uno un dígito.
Por ejemplo, la clave 0504 se representa por el siguiente arreglo:

$$|\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet||\bullet\bullet\bullet\bullet\;\bullet$$

Otras claves serían:

$$\bullet|\bullet\bullet\;\bullet|\bullet\bullet\bullet\;\bullet|\bullet \longrightarrow 1341,$$

$$\bullet\;\bullet|\bullet\;\bullet\bullet\;\bullet|\bullet\bullet\bullet| \longrightarrow 2430.$$

# Solución

Note que en total hay 12 objetos (9 puntos y 3 barras) y cada caso diferente está determinado por la posición de las barras, luego nuestro problema se reduce a contar de cuántas formas podemos ubicar las 3 barras en las 12 posiciones que determinan los objetos y esto se puede hacer de

$$\binom{12}{3} = 220$$

formas diferentes.
Por lo tanto Daniela puede elegir la clave de 220 formas diferentes.

# ¡GRACIAS!

Universidad
Industrial de
Santander