

SEMINARIO DE ÁLGEBRA - GRUPO ALCOM

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS



Algunas observaciones en anillos de grupos clean (II)



ALEXANDER HOLGUÍN-VILLA^{a b}

28/08/2018 - SALA LEZAMA, CT 313; 2:00 p.m

^aÁreas de interés: 'Algebras de Grupos & Tópicos Relacionados

^bE-mail address: alexholguinvilla@gmail.com

Resumen:

Probablemente el concepto de anillo clean aparece por primera vez en el trabajo de W.K. Nicholson *Lifting Idempotents and Exchange Rings* [6]. Este estudio no finalizó ahí, sino que motivó a diversos autores a estudiar estos anillos desde diferentes perspectivas: **W. Wm. McGovern** [5], **D.D Anderson & V.P. Camillo** [1], donde por ejemplo es mostrado que para A anillo conmutativo, $A[x]$ (anillo de polinomios sobre A) nunca es un anillo clean, mientras que el anillo de series formales $A[[x]]$ es clean si y sólo si A es anillo clean.

Sin más preámbulos presentamos la definición dada por Nicholson:

Definición 1. Un elemento de un anillo es llamado clean si es la suma de una unidad y un idempotente y, el anillo es llamado clean si cada uno de sus elementos es clean.

Como es usual denotaremos por $\mathcal{J}(R)$ y $\mathcal{U}(R)$ al radical de Jacobson y al conjunto de unidades de R y, por C_n y D_n a los grupos cíclico y diedral de orden n y $2n$, respectivamente. Además, denotaremos el conjunto de elementos idempotentes de R por $\mathcal{Id}(R)$. Recordemos que un grupo G es llamado localmente finito si todo subgrupo finitamente generado H de G es finito; además dado p primo, G es llamado un p -grupo si el orden de cada uno de sus elementos es una potencia de p y, G es llamado p -grupo abeliano elemental si todo elemento

distinto de la identidad tiene orden p .

Dado un grupo G y un anillo R , consideramos el R -módulo RG dado por:

$$RG = \left\{ \sum_{\substack{g \in T \\ T \subset G \\ |T| < \infty}} \alpha_g g : \alpha_g \in R \right\} = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g : \alpha_g \in R \text{ y } \alpha_g = 0 \text{ a.e.} \right\}.$$

¿Cuándo es el anillo de grupo RG clean? Es una pregunta que se han hecho muchos autores como por ejemplo Han, Immormimo, McGovern, Nicholson, Zhou [2], [3], [4], [7], entre otros. En su artículo, *Extensions of clean rings*, Han y Nicholson demostraron los siguientes resultados: (1) Si R es un anillo semiperfecto, entonces RC_2 es clean; (2) Si R es un anillo Booleano y G es un grupo localmente finito, entonces RG es clean; (3) $\mathbb{Z}_{(7)}C_3$, donde $\mathbb{Z}_{(7)}$ denota la localización de \mathbb{Z} en 7, que es clean, no es clean. Este último ejemplo nos muestra la dificultad que se presenta en el estudio de los anillos de grupos clean:

No basta con que el anillo base R sea clean para que RG sea clean.

Para un anillo de grupo RG , el homomorfismo de anillos

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g \xrightarrow{\epsilon} \sum_{g \in G} \alpha_g,$$

de RG en R y su kernel denotado $\Delta(RG)$, son llamados aplicación e ideal de aumento, respectivamente, de RG . Es conocido que una R -base para $\Delta(RG)$ es $\{g - 1 : g \in G, g \neq 1\}$ y así,

$$\Delta(RG) = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g (g - 1) : g \neq 1, \alpha_g \in R \right\}.$$

Ahora bien, dado que la imagen homomorfa de un anillo clean es un anillo clean [3, Proposición 1.1], se sigue que una condición necesaria para que RG sea clean es que el anillo base R sea clean.

(I) Presentamos en la primera charla algunos resultados conocidos en la literatura de manera más simple y además mostramos que RG es clean en el caso de G ser un grupo de orden $2p$, p primo impar y cuando G es un 2-grupo Hamiltoniano.

(II) En esta presentación volveremos sobre algunos resultados dados en (I), además exploraremos un poco en detalle las clases de anillos Semiperfectos, Booleanos y Cero-dimensionales, viendo su conexión con la propiedad de ser clean en el contexto de los anillos de grupos RG .

Bibliografía

- [1] ANDERSON, D. D. ; CAMILLO, V. P.: *Commutative rings whose elements are a sum of a unit and idempotent.* (2002)
- [2] HAN, J. ; NICHOLSON, W. : *Extensions of clean rings.* In: *Communications in Algebra* 29 (2001), Nr. 6, S. 2589–2595
- [3] IMMORMINO, N. A.: *Clean Rings & Clean Group Rings*, Bowling Green State University, Diss., 2013
- [4] IMMORMINO, N. A. ; MCGOVERN, W. W.: *Examples of clean commutative group rings.* In: *Journal of Algebra* 405 (2014), S. 168–178
- [5] MCGOVERN, W. W.: *Neat rings.* In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 205 (2006), Nr. 2, S. 243–265
- [6] NICHOLSON, W. K.: *Lifting idempotents and exchange rings.* In: *Transactions of the American Mathematical Society* 229 (1977), S. 269–278
- [7] NICHOLSON, W. ; ZHOU, Y. : *Clean general rings.* In: *Journal of Algebra* 291 (2005), Nr. 1, S. 297–311