IV Encuentro Hablemos de Olimpiadas Matemáticas
INVERSIÓN como herramienta para resolver problemas Olímpicos en Matemáticas

Silvia Juliana Ballesteros
Wilson David Archila

Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander

8 de junio de 2018

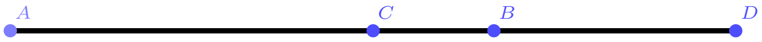
En esta ponencia trabajaremos con una de las transformaciones geométricas llamada **inversión** y presentaremos problemas de tipo olimpiadas matemáticas relacionados con este tema.

En esta propuesta trabajaremos con una de las transformaciones geométricas llamada **inversión** y presentaremos problemas de tipo olimpiadas matemáticas relacionados con esto.

Antes de definir una inversión es necesario introducir los conjugados armónicos.

Puntos conjugados armónicos

Sean A y B dos punto del plano:



Sobre el segmento AB tenemos un punto C tal que

$$\frac{AC}{BC} = k$$

donde k es cierta razón. Ahora, sobre la prolongación de AB hallamos un punto D, tal que

$$\frac{AD}{BD} = k$$

o sea

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$$

Es decir, los puntos C y D dividen interna y externamente al segmento AB en la razón k. Entonces, diremos que los puntos C y D son *armónicos conjugados* de los puntos A y B.

Teorema 1.1 Si C y D son *armónicos conjugados* de A y B, entonces A y B son *armónicos conjugados* de C y D.

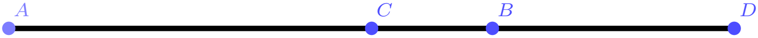
Teorema 1.1 Si C y D son *armónicos conjugados* de A y B, entonces A y B son *armónicos conjugados* de C y D.

Demostración:
Como C y D son armónicos conjugados de A y D se tiene que:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{CB}{DB} = \frac{CA}{DA}$$

así, A y B son armónicos conjugados de C y D.

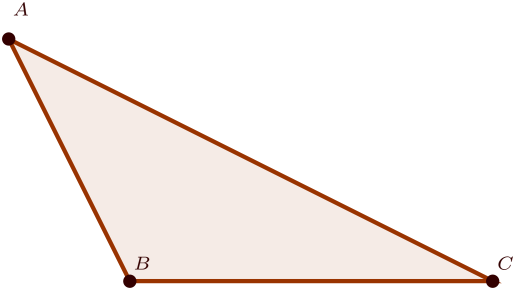
Luego el conjunto ordenado de puntos A, C, B y D son:
PUNTOS CONJUGADOS ARMÓNICOS o CUATERNA ARMÓNICA



Teorema 1.2 En un triángulo, los puntos de corte de las bisectrices interna y externa de un ángulo con el lado opuesto y los vértices que forman dicho lado son *armónicos conjugados*.

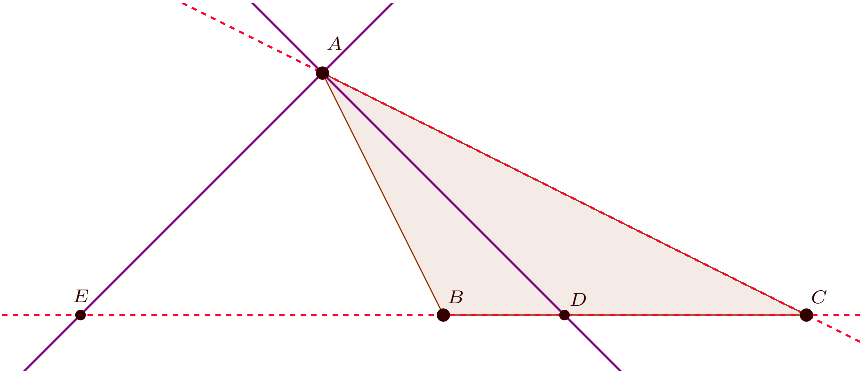
Teorema 1.2 En un triángulo, los puntos de corte de las bisectrices interna y externa de un ángulo con el lado opuesto y los vértices que forman dicho lado son *armónicos conjugados*.

Demostración:



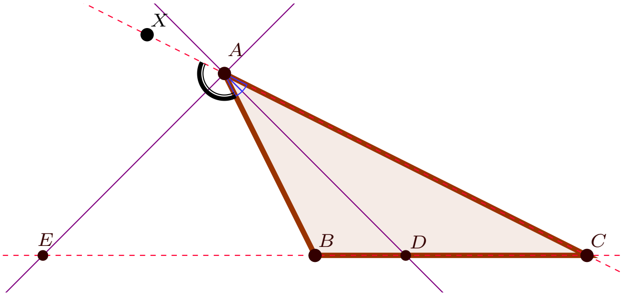
Teorema 1.2 En un triángulo, los puntos de corte de las bisectrices interna y externa de un ángulo con el lado opuesto y los vértices que forman dicho lado son *armónicos conjugados*.

Demostración:



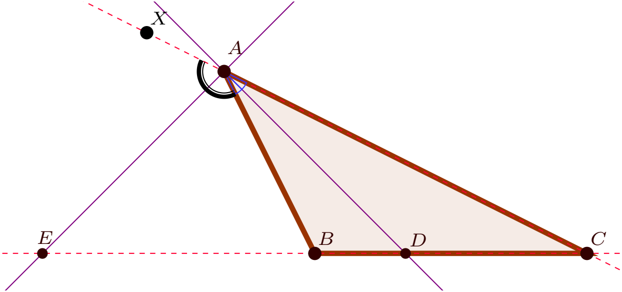
Teorema 1.2 En un triángulo, los puntos de corte de las bisectrices interna y externa de un ángulo con el lado opuesto y los vértices que forman dicho lado son *armónicos conjugados*.

Demostración:



Teorema 1.2 En un triángulo, los puntos de corte de las bisectrices interna y externa de un ángulo con el lado opuesto y los vértices que forman dicho lado son *armónicos conjugados*.

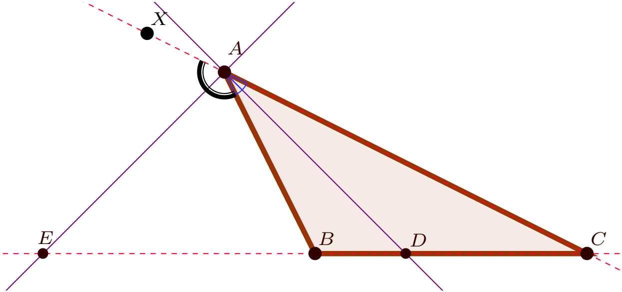
Demostración:



$$\angle DAB = \frac{\angle CAB}{2} \text{ y } \angle BAE = \frac{180^\circ - \angle CAB}{2} = 90^\circ - \frac{\angle CAB}{2}$$

Teorema 1.2 En un triángulo, los puntos de corte de las bisectrices interna y externa de un ángulo con el lado opuesto y los vértices que forman dicho lado son *armónicos conjugados*.

Demostración:

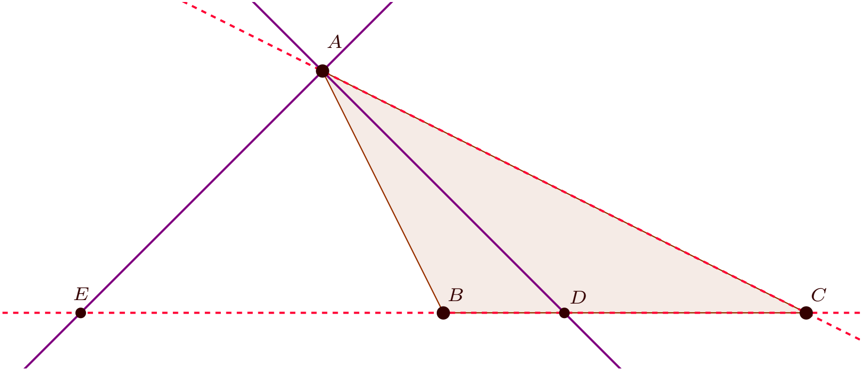


$$\angle DAB = \frac{\angle CAB}{2} \text{ y } \angle BAE = \frac{180^\circ - \angle CAB}{2} = 90^\circ - \frac{\angle CAB}{2} \text{ entonces}$$

$$\angle DAE = \angle DAB + \angle BAE = \frac{\angle CAB}{2} + 90^\circ - \frac{\angle CAB}{2} = 90^\circ$$

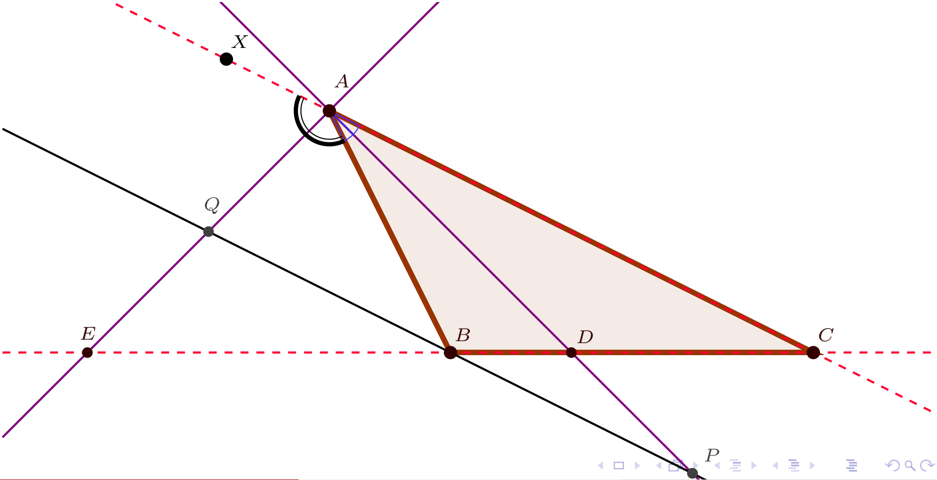
$\angle DAE = 90^{\circ}$

LA BISECTRIZ INTERNA Y EXTERNA DE UN MISMO ÁNGULO SON PERPENDICULARES



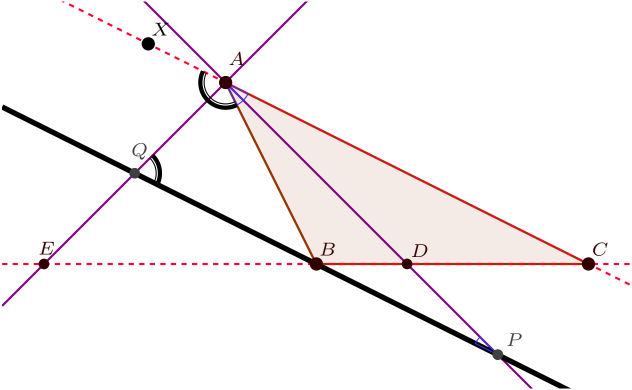
Teorema 1.2 En un triángulo, los puntos de corte de las bisectrices interna y externa de un ángulo con el lado opuesto y los vértices que forman dicho lado son *armónicos conjugados*.

Demostración:



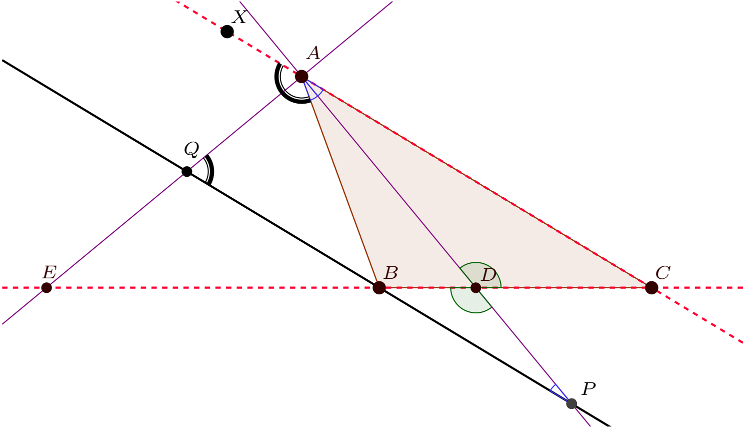
Teorema 1.2 En un triángulo, los puntos de corte de las bisectrices interna y externa de un ángulo con el lado opuesto y los vértices que forman dicho lado son *armónicos conjugados.*

Demostración:



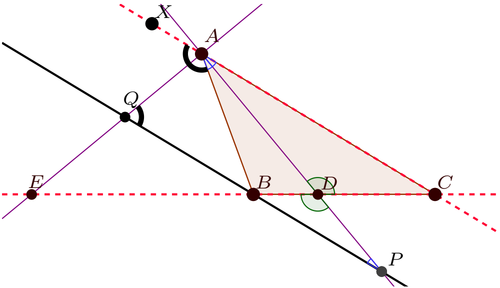
Teorema 1.2 En un triángulo, los puntos de corte de las bisectrices interna y externa de un ángulo con el lado opuesto y los vértices que forman dicho lado son *armónicos conjugados.*

Demostración:



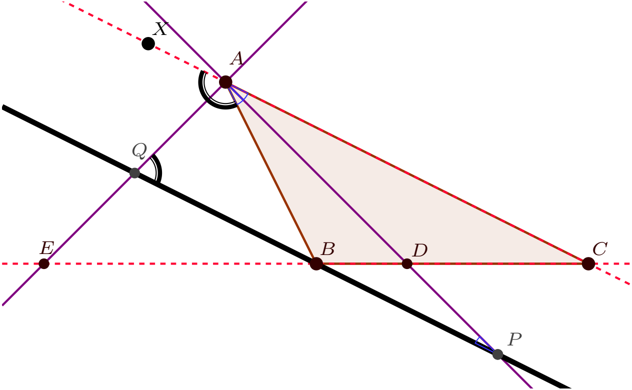
Teorema 1.2 En un triángulo, los puntos de corte de las bisectrices interna y externa de un ángulo con el lado opuesto y los vértices que forman dicho lado son *armónicos conjugados*.

Demostración:



$\triangle BDP \backsim \triangle CDA$ de donde

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BP}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

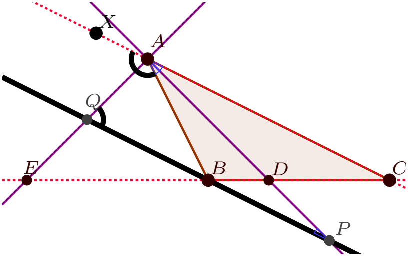


$\triangle BDP \backsim \triangle CDA$ de donde

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BP}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

Igualmente $\triangle BEQ \backsim \triangle CEA$, de donde

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BQ}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$



$\triangle BDP \backsim \triangle CEA$ de donde

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BP}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

Igualmente $\triangle BEQ \backsim \triangle CDA$, de donde

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BQ}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

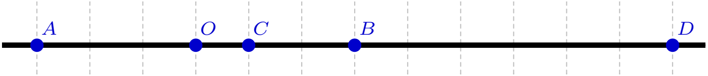
así

$$\frac{BD}{CD} = \frac{c}{b} = \frac{BE}{CE}$$

es decir B, D, C y E son conjugados armónicos.

Problemas propuesto...

1.Sean A, C, B y D cuatro puntos conjugados armónicos y sea O el punto medio de AB.



Demostrar que

$$OC \times OD = OA^2$$

Problemas propuesto...

2. Sean A, C, By D cuatro puntos conjugados armónicos y sea O un punto que no pertenece a la recta $ACBD$. La recta que pasa por B y es paralela a OA corta a OC y OD en X y Y respectivamente.

Demostrar que

$$XB = YB$$

Inversión

Diremos que dos puntos P y P' son *inversos* si son colineales con O (figura 2) y además se cumple que

$$OP \cdot OP' = r^2$$

Donde S es la circunferencia de inversión y r el radio de dicha circunferencia, que llamaremos radio de inversión y su centro O el centro de inversión.
Así, a cada punto P del plano, excepto el centro de inversión le corresponde un punto P' inverso con respecto a S. La inversión de una figura F es la figura F' formada por los puntos inversos de los puntos de F.

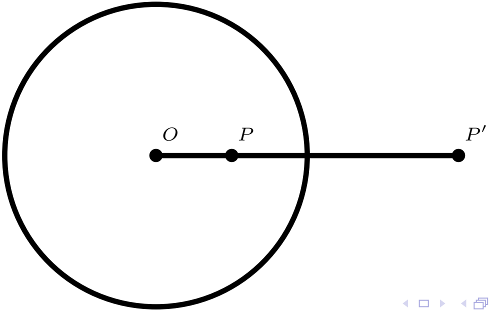


Figura 2

Teorema 2.1 Sean P y P' dos puntos inversos con respecto a una circunferencia S. La recta OPP' corta a la circunferencia en A y D entonces los puntos A, P, B y P son *conjugados armónicos*.

Teorema 2.2 La inversión de una recta es una circunferencia que pasa por el centro de inversión.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sean A, C, B,y D cuatro puntos conjugados armónicos y sea O un punto que no pertenece a la recta $ABCD$. La recta que pasa por B y es paralela a OA corta a OC y OD en X y Y respectivamente. Demostrar que $XB = BY$.
2. En un $\triangle ABC$ sea I el incentro. Demostrar que un circulo tangente a BC y IA en I es tangente al circuncírculo.

Referencias bibliográficas

Rincón, G., (1994), *Un recorrido por la geometría* , Santafé de Bogotá Colombia.