MEMORIA

4to Seminario Taller en Educación Matemática:

La enseñanza del cálculo y las componentes de su investigación

Bucaramanga, Noviembre 22, 23 y 24 de 2012

Universidad Industrial de Santander

UIS

CONSTRUIMOS FUTURO

ISBN: 978-958-57843-4-5
Publicaciones UIS (958-57843)
Junio de 2013
Bucaramanga, Santander
Colombia

MEMORIA

4to Seminario Taller en Educación Matemática: La enseñanza del cálculo y las componentes de su investigación

Editores

Solange Roa Fuentes
Sandra Evely Parada
Jorge Fiallo Leal

Coordinadores Académicos

Sandra Evely Parada; Jorge Fiallo Leal; Solange Roa Fuentes

Organización local

Claudia Garavito, Yazmín Barajas, Marcela Jaimes, Ana Milena Santamaria Bueno, Daniel Forero Rodríguez, Marilyn Lizeth Antonio Osma, Mónica Adriana Pineda Ballesteros, Sonia Peñuela Mendez, Sonia Rocío Suárez Cáliz, Wilson David Peñaloza Castro, Edwin López Velandia, Jairo Humberto Villamil, Jenifer Tatiana Puentes Correa, Laura Milena Romero Parada, Luis Carlos Bueno Almeida, Daniel Moreno Caicedo.

Grupo de Investigación en Educación Matemática EDUMAT-UIS

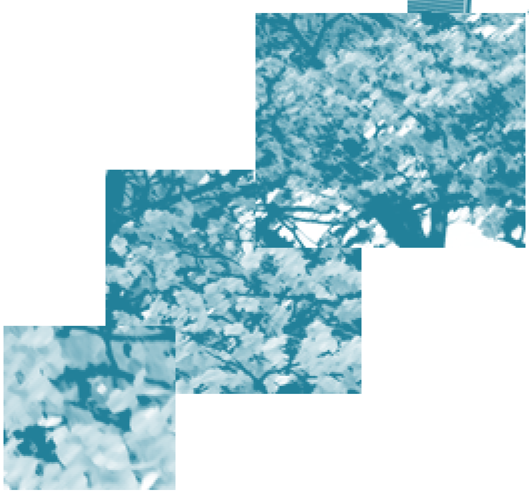
El primer *Seminario Taller en Educación Matemática* se realizó en 2006 gracias a la iniciativa de la profesora Diana Jaramillo. Este Seminario buscaba generar un espacio para que los estudiantes del programa de *Especialización en Educación Matemática* presentaran sus proyectos de grado. El *4to Seminario Taller* tuvo una intensión similar, en cuanto buscamos generar espacios de reflexión entre especialistas de la disciplina y los estudiantes de la primera cohorte de nuestro programa de *Maestría en Educación Matemática*.

En esta dirección contamos con diferentes espacios de interacción entre los asistentes y los especialistas: Conferencias, Talleres, Ponencias Cortas y Mesas Temáticas, que giraron entorno a los ejes centrales del evento: *el cálculo y las componentes de investigación en Educación Matemática*. En este documento hemos recopilado los artículos en donde cada ponente expone los principales aspectos de su presentación.

Este documento lo concebimos como una herramienta de consulta y un recordatorio sobre los alcances del evento que desarrollamos y los retos que supone su continuidad. La consolidación del Grupo de Investigación en Educación Matemática EDUMAT-UIS, el espacio para publicar artículos en la revista INTEGRACIÓN de la Escuela de Matemáticas y la formación de nuestro programa de Maestría en Educación Matemática son señales claras sobre el momento histórico que vivimos: La consolidación de una comunidad que busca contribuir de manera contundente en el desarrollo de la educación matemática como disciplina científica.

Solange Roa Fuentes
Bucaramanga, febrero 18 de 2013

Índice general



Conferencias

EXPERIMENTANDO LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO CON EL USO DE LAS TÉCNICAS DE INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN

François Pluvinage
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México
IREM, Université de Strasbourg, Francia
pluvin@math.unistra.fr

Resumen: En este artículo sostenemos primero que el cálculo se sitúa en un estrato de competencia específico con respecto al álgebra: el estrato funcional. Apoyándonos en la observación de deficiencias en el manejo de funciones y conceptos relacionados, edificamos y experimentamos una propuesta didáctica que produjo resultados alentadores. Una característica esencial de la propuesta es el uso de proyectos de acción prácticos, como por ejemplo el proyecto de "las poleas". Otra es el diseño de actividades controlables que solicitan los diferentes registros en los que se pueden expresar las funciones. En muchas actividades se utiliza el recurso de la computación, que en si mismo es también un objetivo de formación.

Palabras clave: cálculo, estratos de competencia, proyectos, registros, software.

1. Antecedentes

En la historia, el estudio de funciones tiene un lugar de suma importancia no sólo en matemáticas, sino en todas las ramas científicas. Así algunas funciones, como el logaritmo y la exponencial, se impusieron en calidad de recursos imprescindibles en matemática, física, economía, etc. Y la historia de los siglos XVIII y XIX nos enseña que el estudio de los números reales se formalizó y completó, cuando se relacionó de manera estrecha con la resolución de problemas generados por el estudio de funciones, en particular la aproximación por series (p. ej. Fourier).

En contraste con el uso social extendido del cálculo diferencial e integral, los resultados de aprobación que se obtienen tradicionalmente en el curso de Cálculo, cuya enseñanza se imparte en los primeros semestres del nivel superior, son muy bajos. Por eso, de forma repetida en muchos países, la institución intenta introducir cambios que generen su mejora. Por ejemplo, se llevó a cabo durante los años noventa en los Estados Unidos una reforma del curso llamado Calculus 101, pero el análisis de los efectos no reveló resultados convincentes (Darken, Wynegar & Kuhn, 2000).

Un intento de solución que se implementa en diferentes lugares del mundo es la organización de cursos remediales. Resulta sin embargo de poco éxito esta forma de enseñanza, por parte en nuestra opinión porque se presenta nuevamente a los estudiantes conceptos y métodos que antes no entendieron; no hay razón que la repetición genere mejor entendimiento, si no se han producido cambios la mente de los estudiantes desde entonces. Más adelante veremos la aplicación de otra postura didáctica frente a deficiencias que se observan en el público estudiantil.

Nuestra hipótesis sobre estas deficiencias es que se relacionan con una adquisición limitada del pensamiento funcional. En efecto, un importante factor de fracaso, que observamos en los resultados obtenidos por los estudiantes en pruebas diagnósticas, consiste en deficiencias en el conocimiento del concepto general de función y conceptos relacionados (variable independiente, variable dependiente, parámetro, fórmula).

2. El estrato funcional

Las matemáticas dan lugar en las evaluaciones internacionales PISA a la consideración de una competencia que sería el equivalente de la competencia lingüística y que se conoce como "*mathematical literacy*[1]". Tal postura se opone a una visión fragmentada, atomista de las competencias matemáticas que se expresa frecuentemente en planes y programas de estudio. Pero sostenemos que ni la primera, ni la segunda postura representan la realidad de manera correcta (Adjiage & Pluvinage, 2008; 2012). Al contrario, nos parece que las competencias se agrupan en bloques, bastante estables en el tiempo, que se caracterizan por la resolución de un campo de problemas, matemáticos y del mundo físico, y el uso de formas de expresión específicas. Llamamos estos bloques "estratos". Sin entrar en el caso de la geometría, que corresponde a otras consideraciones (por ejemplo los espacios de trabajo geométrico definidos por Houdement y Kuzniak), distinguimos cuatro estratos escalonados: el aritmético, el racional, el algebraico y el funcional.

Un individuo que domina un estrato, pero no el siguiente, viene impotente frente a una situación cuya resolución exige tratamientos del segundo. Es clásico por ejemplo escuchar a una persona que se declara incapaz de encontrar el precio de 18 objetos si se sabe que 15 de los mismos cuestan \$ 48. Este caso es de dificultad con el estrato racional. Aquí, lo que nos interesa es la diferencia entre el saber manejar álgebra y la habilidad en resolver problemas que exigen un buen manejo de funciones.

Un ejemplo de problema de este tipo es el siguiente:

Encontrar una función f tal que, para todo x real,

$$3f(x) - f(1-x) = 2x^2 \qquad (1)$$

Aun cuando un estudiante conoce álgebra, por ejemplo si sabe resolver ecuaciones de grado dos, podrá declararse impotente frente a este problema. No tiene a su disposición métodos que le permitan avanzar en la resolución.

Hace falta observar que problemas de enunciado de apariencia vecina, tal como:

$$f(x+1) - f(x) = 2$$

Conducen a funciones bien diferentes: Se puede verificar que la función $f(x)+Entero(x)$, donde $Entero(x)$ es la parte entera de x, o la función $f(x) = 2x + sen(2\pi x)$, son soluciones, la segunda siendo continua.

Estudiemos ahora la ecuación (1). Una primera idea funcional es plantearse la pregunta de la naturaleza de la transformación de la recta numérica que a x asocia $1-x$. Es fácil representar la situación sobre la recta con un software de geometría dinámica (Figura 1). Al mover A, uno se da cuenta de que cuando A se encuentra en el punto I de abscisa 1/2, el punto A' se confunde con A. Entonces es obvio que la transformación es la simetría de centro I. Esta transformación es involutiva: la imagen de A' es A.

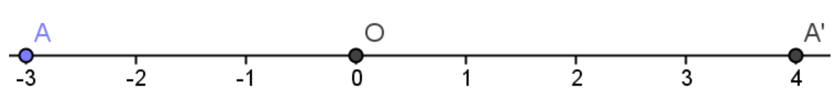


Figura 1. Punto A de abscisa x y punto A' de abscisa $1-x$.

[1] *The notion of mathematical literacy is "the counterpart in mathematics" of mastering a language. (Niss, 2003, p.6)*

De donde la segunda idea *funcional* de hacer la substitución $x \to 1-x$ en (1). De esta manera, obtenemos:

$$(2) \qquad 3f\,(1-x) - f\,(x) = 2\,(1-x)^2$$

Lo que sigue es álgebra usual: Se elimina $f(1-x)$ al multiplicar (1) por 3 y sumarla a (2), y así llegamos a la única solución que es $8f\,(x) = 8x^2 - 4x + 2$, o sea $f\,(x) = x^2 - x/2 + 1/4$

Características del estrato funcional

Con respecto al álgebra, el cálculo introduce a la vez nuevos modos de pensamiento y nuevas escrituras. Estas son las causas que precisamente hacen del cálculo un estrato distinto del álgebra, y que aclaran que estudiantes que saben álgebra pueden sentirse perdidos frente al manejo de los conceptos del cálculo.

¿Por qué se introducen en el cálculo estas novedades con respecto al álgebra? Se deben a tratamientos específicos. La interpolación y la extrapolación, fundamentales en modelización, condujeron a aproximaciones de funciones por otras, más sencillas (por ejemplo funciones lineales). Y de las combinaciones surgieron ideas de dotar de estructuras conjuntos de funciones. De donde,

- nuevas nociones: véase la palabra "procept" (Gray & Tall, 1994), que expresa que una función es por un lado un proceso, una herramienta, y por otro lado un concepto, un objeto matemático;
- nuevas escrituras: $g \circ f\,(x)$, $f^{-1}\,(x)$

Tratamientos específicos del estrato funcional provienen de dos tipos de consideraciones sobre funciones: las variaciones, que dan lugar a la derivada y la diferencial, y la acumulación o el promedio, que dan lugar a la integral.

3. Una propuesta didáctica

Nuestra propuesta didáctica (Cuevas & Pluvinage, 2003; Cuevas, Martínez & Pluvinage, 2012) combina la práctica de una enseñanza basada en proyectos (Project based learning o PjBL en inglés) con el recurso de la computación y un uso sistematizado de los registros de expresión en los problemas propuestos a los estudiantes.

Los proyectos de acción concretos son actividades didácticas que permitan a los alumnos que no cuentan con los prerrequisitos de un curso de cálculo solventar sus deficiencias, sin necesidad de un curso remedial. La referencia teórica subyacente la constituyen los principios que fundamentan la práctica de enseñanza presentada con el calificativo "exemplarisch" por Wagenschein (1968). Los proyectos se escogen con el propósito de introducir los fundamentos necesarios para el estudio del tópico considerado.

Después se trata de promover la actividad matemática relacionada con el tema, y con este objetivo, organizar una progresión en el estudio de problemas, para que los estudiantes siempre estén desarrollando una acción. Esta acción debe dar lugar a un posible control por los estudiantes de los resultados obtenidos. En fases de confrontaciones colectivas y de síntesis, una perspectiva importante es la consideración de resoluciones alternativas.

En el diseño de las actividades se pone énfasis en el uso sistematizado de los registros de expresión: tratamientos en cada uno de los registros, conversiones en ambos sentidos entre registros. Por otro lado, el uso de la computadora es hoy en día imprescindible. Es interesante que con los aprendizajes matemáticos se considere el aprendizaje del trabajo con los computadores, esto a la vez como herramienta local y como instrumento para usar los recursos de la red Internet.

Un proyecto de acción concreto:poleas

Para la primer parte del curso experimental de cálculo se diseñó un proyecto de acción concreta, llamado proyecto "poleas". Los estudiantes pueden manipular material concreto (pequeña polea y cuerda) y encontrar figuras de poleas en la enciclopedia multilingüe Wikipedia <http://es.wikipedia .org/wiki/Polea>. Luego se les proporciona la página interactiva representada, acompañada de una hoja de trabajo.

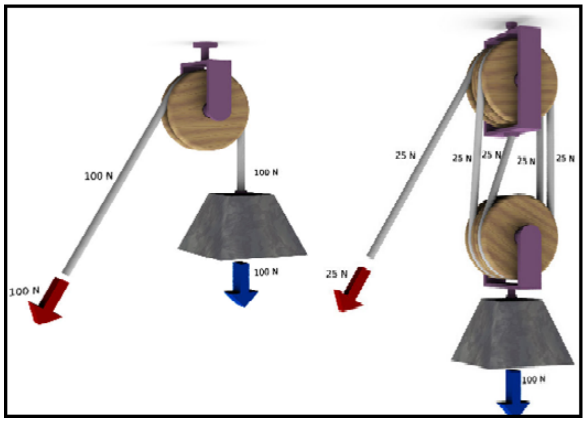
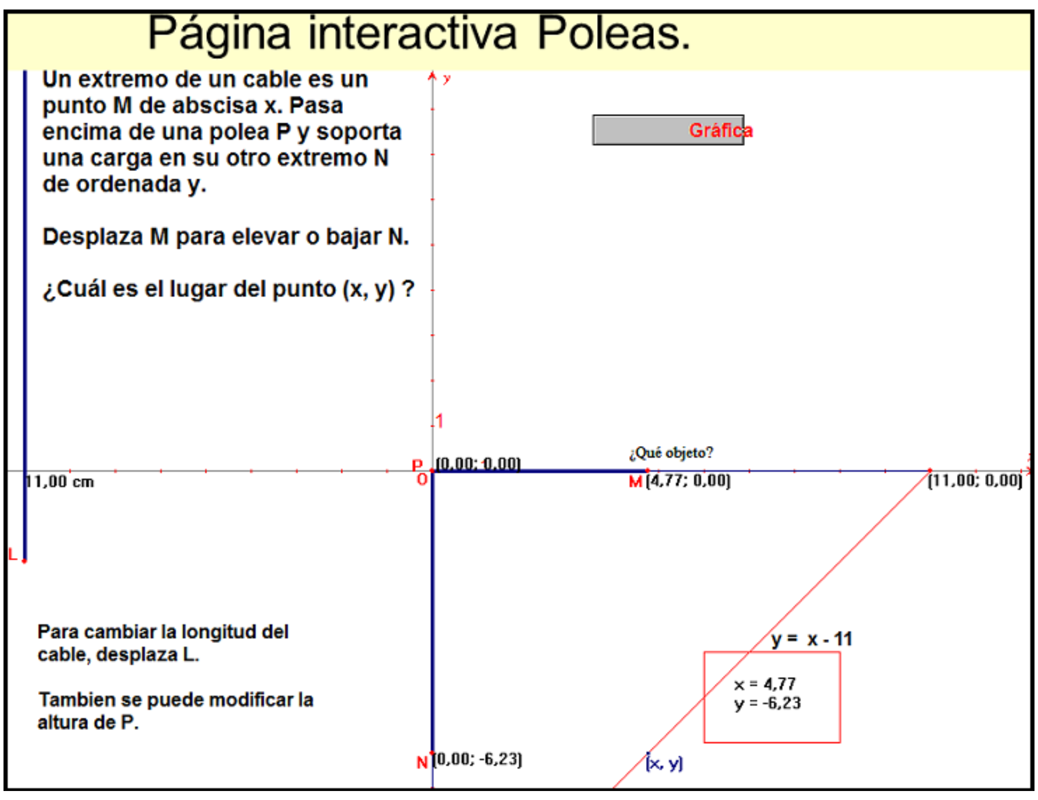


Figura 1. Poleas representadas en la encyclopedia Wikipedia



4. Uso de registros de expresión

Las funciones se representan mediante cuatro registros usuales:

- el registro verbal (e. g. "*una función cuadrática*", "*la función parte entera*").
- el registro simbólico (e. g. $f(x) = X^2$, $f(x) = sen(x)$, ...).
- el registro tabular, que en particular se usa en software tipo Excel o hoja de cálculo de Open Office.
- el registro gráfico.

Al usar la didáctica que presentamos (Cuevas &Pluvinage, 2003) se diseñarán cuatro tipos de ejercicios de tratamiento (uno en cada registro) y doce tipos de ejercicios de conversión (uno por pareja ordenada de registros).

A continuación damos algunos ejemplos para ilustrar este propósito.

Ejemplos de tareas de tratamiento:

- *Tratamiento en el registro verbal.*

  Simplificar la descripción siguiente de una función: "la raíz cuadrada del cuadrado de x". Misma cosa con "el cuadrado del valor absoluto de x" y "el cuadrado de la raíz cuadrada de x". En cada caso, determinar el dominio correspondiente.

- *Tratamiento en el registro simbólico.*

  Entrar una fórmula en Derive o GeoGebra.

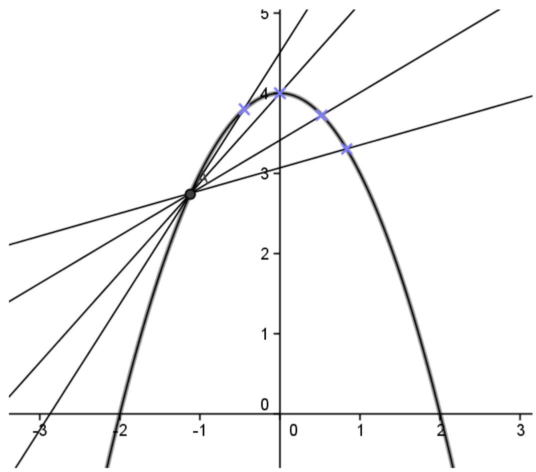
- *Tratamiento en el registro tabular.*

  Completar la tabla siguiente.

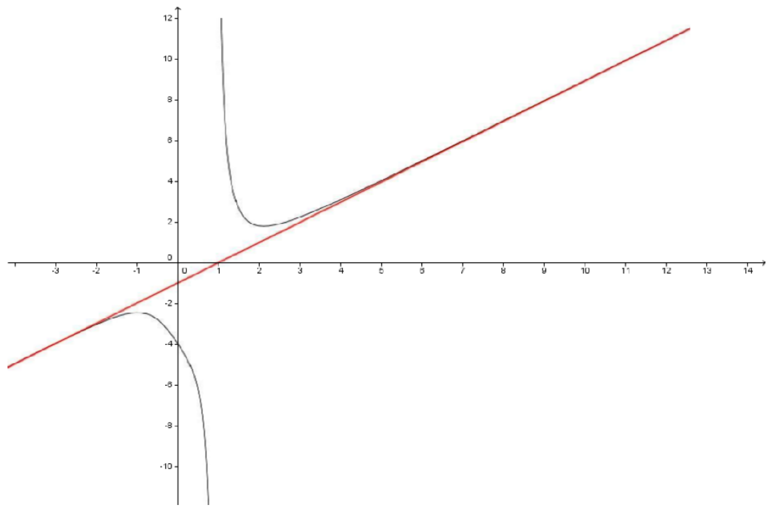
x	$f(x)$	Df	$D^2f = D(Df)$	D^3f	D^4f
0	-2				
1	1	1			
2	6	5	6		
3	-23	-17	-12	-6	
4	?	?	-18	-6	0
5	?	?	?	6	0
6	?	?	?	?	0

- *Tratamiento en el registro gráfico.*

  Por un punto A de una curva, trazar secantes con un incremento que se reduce



Ejemplos de tarea de conversión (escasamente solicitada): del registro gráfico al simbólico.



Intenta indroducir una función racional cuya gráfica se superponga con la curva trazada.

5. Consideraciones sobre un experimento

En un experimento global que llevamos a cabo Cuevas, Martínez y Pluvinage (2012) el material de trabajo con modelos se compone de:

- Instrucciones dirigidas a los docentes, con la descripción de los objetivos del estudio, la previsión del tiempo necesario e indicaciones de organización.
- Instrucciones de trabajo para los estudiantes.
- Cuestionarios, para dirigir la actividad de los estudiantes.
- Programas interactivos (laboratorio matemático), con inserción de programas que corren con el motor Java, en cualquier navegador.

Los cuestionarios de preguntas-respuestas sirven tanto al profesor, para controlar las actividades de sus alumnos, como a los estudiantes que ven las direcciones a donde orientar sus experimentos con los archivos interactivos. Por ejemplo, la actividad que hemos ilustrado en la figura anterior conduce a los estudiantes a considerar las ideas fundamentales de variable independiente, variable dependiente y parámetro, así como los conceptos de dominio y rango de una función.

Cuevas y Mejía (2003) proponen una nueva clase de ambiente de aprendizaje CalcVisual. Cuatro grandes componentes integran su arquitectura básica:

1. El módulo experto: contiene el dominio de conocimiento de los problemas a resolver;

2. La componente tutorial, que se nutre del módulo experto, y básicamente contiene una estructura didáctica, con la cual regula prepositivamente la dosificación y presentación de los temas y problemas en cuestión;

3. El módulo modelo estadístico de error: Banco estratificado de errores frecuentes;

4. El ambiente instruccional, que cuenta con una interface inteligente y un editor amigable.

El uso de este sistema permite el diseño de actividades sin la presencia del profesor.

Resultados observados

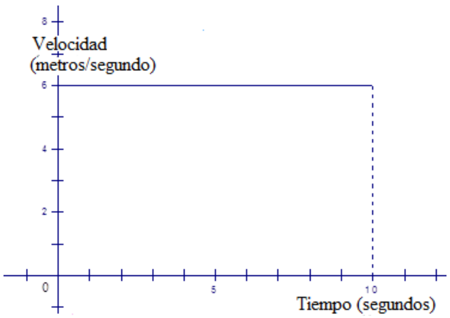
Experimentamos en la Universidad Autónoma del Estado de México. Antes del uso de la tecnología, los índices de reprobación eran del 80 %, gradualmente a lo largo de los años ha disminuido hasta el 25 %. A partir de los resultados obtenidos, el simple hecho de mantener con CalcVisual un nivel de aprovechamiento similar al de un curso desarrollado en forma tradicional, representa un importante logro, dado que se redujo la clase presencial al 50 % y se modificó el contrato didáctico, al incluir la tecnología con los participantes naturales, profesor y alumno. Sin embargo, el hecho de que los porcentajes de aciertos muestren avances resulta muy alentador. Las lecciones adicionales propuestas mediante Applets (como poleas) y el uso de CalcVisual en clase motivó el interés de los alumnos por una matemática experimental y facilitó las actividades en parejas y en grupo.

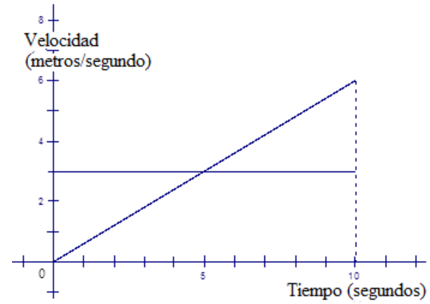
Sin embargo existe cierta resistencia a modificar la forma de trabajo ya que se alteran los roles del profesor y del alumno, no se evalúa el curso de la misma forma, y se requieren "*habilidades de trabajo personal*" que en su mayoría los alumnos no poseen. Además esta forma de enseñanza contrasta con el resto de las materias correspondientes al área de matemáticas que se imparten de manera tradicional en el primer semestre de la carrera.

No pretendemos proponer una enseñanza acabada, sino sugerir ideas que introducir en programas de experimentación en matemática educativa.

6. Modelización y magnitudes

Unas corrientes, como es el caso de la RME (*Real Mathematics Education*), presentan la modelación o modelización como la puerta de acceso a los aprendizajes matemáticos. Si la modelización es eficiente cuando se toman precauciones, sin embargo hace falta cuidar posibles dificultades. Los objetos geométricos que surgen de gráficas: ángulos, pendientes, áreas, introducen magnitudes que pueden generar conflictos con las magnitudes que aparecen en las representaciones. Por ejemplo, en las figuras que siguen, tomadas de un capítulo de Flores (2013), la distancia recorrida se representa por un área. Y ver una longitud como un área puede generar dificultades conceptuales.

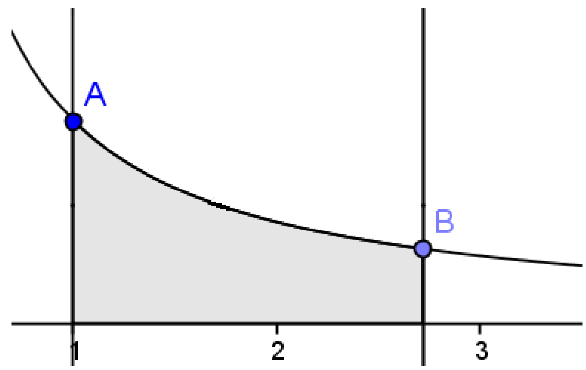


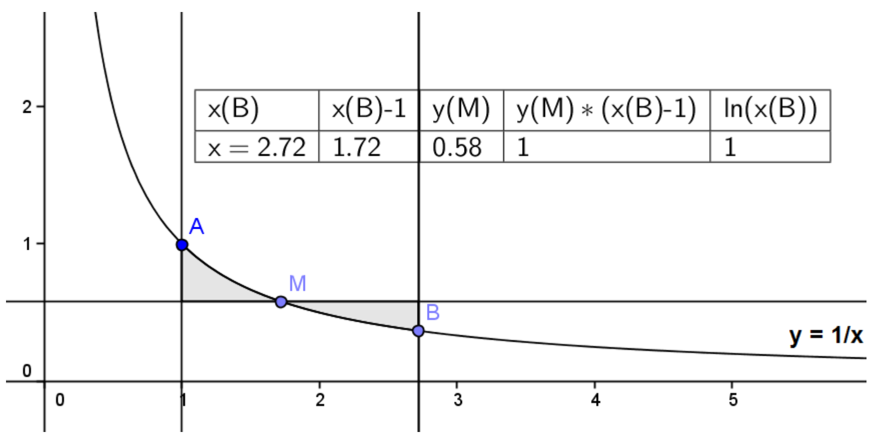


Gráfica de una velocidad constante y distancia como área ($d = vt$)

Distancia recorrida a la velocidad media

Una situación de dificultades frecuentes se observa con la integral, usualmente considerada como área. Por ejemplo, la figura corresponde a una presentación usual de la función logaritmo. La dificultad es doble: Por un lado se plantea el problema de magnitudes señalado. Por otro lado la estimación de área no es una habilidad frecuentemente solicitada, excepto en unas profesiones especializadas. En este caso, la introducción de la idea de promediar puede cambiar mucho la visión.





En la figura arriba, la altura de la recta horizontal es el promedio de la función ($y = 1/x$ en nuestro caso). Es decir que las áreas encima y debajo de la recta son iguales. Es mucho más fácil tener una idea intuitiva de este promedio que del área, y con este no surge problema con magnitudes. Luego el producto $y(M) * (x(B) - 1)$(ver la tabla en la figura) del promedio por la longitud del segmento proyectado de AB sobre el eje de las x nos da la integral (el logaritmo de $x(B)$) en nuestro caso). Otro interés de la consideración del promedio es que abarca las situaciones de funciones con valores posiblemente negativos.

7. Cálculo y computación

En este párrafo nos limitamos en presentar brevemente algunos aspectos del uso de la computación, dado que en los apartados anteriores presentamos ejemplos de este uso.

1. La computación y la socio-epistemología se unen para conducir a la idea de construir el cálculo a considerar los números decimales más bien que los reales. Estos últimos van a ser necesarios cuando se deberán introducir nociones de topología.

2. Es importante la introducción y el uso de las funciones definidas a trozos, en particular el valor absoluto y la parte entera de las funciones probabilísticas.

3. El trabajo con las funciones en la computación se apoya sobre una visión euleriana: funciones obtenidas a partir de un catalogo de funciones elementales, más bien que sobre una definición general de "*función real de variable real*".

4. Tres tipos de software a-didácticos (y sus implementaciones sobre calculadoras) conducen al usuario a aproximaciones conceptuales diferentes:

    - La hoja de cálculo (e. g. Excel o la hoja de cálculo de Open Office),
    - El cálculo formal (e. g. Derive o Maple),
    - La geometría dinámica analítica (e. g. GeoGebra o Cabri)

El aprendizaje del uso de los tres tipos de software en la enseñanza merecería ser considerado como un objetivo esencial de la formación.

Referencias

Adjiage, R. & Pluvinage, F. (2008). A numerical landscape (chapter). In Calvin L. Petroselli (Eds), R. *Science Education Issues and Developments* (pp. 5-57). New-York : Nova publishers.

Adjiage, R. & Pluvinage, F. (2012). Strates de compétence en mathématiques.*Repères IREM* 88, 43-72.

Anderson, R. D. & Loftsgaarden, D. O. (1987). A special calculus survey: Preliminary report. In L. A. Steen (Ed.),*Calculus for a new century* (pp. 215-216), Washington, DC: The Mathematical Association of America

Cuevas A. y Mejía H. (2003) Cálculo Visual. Edit. Oxford University Press.

Cuevas, A. & Pluvinage, F. (2003) Les projets d'action pratique, éléments d'une ingénierie d'enseigne ment des mathématiques, *Annales de didactique et des ciences cognitives*, 8,IREM de Strasbourg Francia.

Cuevas, A., Martinez, M. & Pluvinage, F. (2012) Promoviendo el pensamiento funcional en laenseñanza del cálculo: un experimento con el uso de tecnologías digitales y sus resultados. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 17, 137- 168IREM de Strasbourg Francia.

Darken, B., Wynegar, R. & Kuhn, S. (2000) Evaluating Calculus Reform: A Review and a Longitudinal Study,in Dubinsky, E., Schoenfeld, A. H. & Kaput, J. (Eds.). *CBMS Issues in Mathematics Education. Vol. 8*, 16-40. American Mathematical Society.

Flores Peñafiel, A. (aceptado, publicación prevista: 2013), Ayudando a futuros profesores a mejorar la comprensión conceptual del cálculo (capítulo), en *Cálculo diferencial e integral para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa; estudios didácticos y reflexiones sobre su enseñanza* (Cuevas, A. & Pluvinage. F., eds.), México, Pearson.

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic,*The Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 115-1
41. http://www.tallfamily.co.uk/eddiegray/94a-gray-tall-jrme.pdf

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36

Tall, D. (1996) Advanced Mathematical Thinking and the Computer. Proceedings of the 20th University Mathematics Teaching Conference, Shell Centre, Nottingham, 8, 1-8

Vigotsky, L. (1988) El Desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores, Edit. Grijalbo, México.

Wagenschein, M. (1968). Verstehen lehren: genetisch, sokratisch, exemplarisch. Beltz Verlag, Weinheim & Basel.

SOBRE LOS ROLES DE LA TEORÍA EN UNA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Mario Sánchez Aguilar
Instituto Politécnico Nacional, México
mosanchez@ipn.mx

1. Introducción

El tema de la teoría y sus funciones en la investigación en didáctica de las matemáticas me parece sumamente interesante, sin embargo mi relación personal con ese tópico no siempre ha sido armoniosa.

Cuando era estudiante de maestría tuve mis primeros encuentros con ese componente fundamental de la investigación educativa. Nadie me lo dijo explícitamente, pero aún así, yo me formé la idea de que una investigación en didáctica de las matemáticas debería contener teoría, de lo contrario el trabajo no podría considerarse como una investigación. Es probable que esta concepción me la haya formado después de haber escuchado a mis profesores hablar de "aproximaciones teóricas" o incluso al hojear tesis de maestría y doctorado que invariablemente incluían secciones con nombres como "marco teórico", "elementos teóricos", o "marco conceptual". Para mí era claro: cuando escribiera mi propia tesis, ésta debería incluir una sección sobre teoría.

Pero había otros aspectos relacionados con el uso de la teoría que no eran nada claros para mí. Por ejemplo: ¿cómo debería llamar a esa sección de mi tesis donde se habla de la teoría? ¿marco teórico? ¿marco conceptual? ¿aproximación teórica? Más aún, ¿cómo seleccionar la teoría que debería utilizar en mi investigación? ¿sería válido tomar elementos de una teoría y mezclarla con elementos de otra? Y como si esas dudas no fueran suficientes, adicionalmente me preguntaba: ¿y cómo usar la teoría? ¿para qué puede servir dentro de mi investigación?

Logré graduarme de mis estudios de maestría e incluso comencé a trabajar como profesor de didáctica de las matemáticas, pero muchas de esas dudas no desaparecieron. Tiempo después me di cuenta de que ese tipo de dudas acerca de la naturaleza y el rol de la teoría no eran exclusivas de mi persona. Descubrí que había estudiantes de didáctica de las matemáticas de otras regiones del mundo que experimentaban dudas similares. Noté incluso cómo investigadores más experimentados debatían —y siguen debatiendo— sobre el tipo de teorías que debemos construir como comunidad; o sobre las limitaciones, similitudes y alcances de las teorías que utilizamos. Estas son dos de las principales razones que me motivan a realizar este tipo de escritos sobre el rol y la naturaleza de la teoría en didáctica de las matemáticas[1]: Primero, la certeza de que muchos estudiantes pueden tener dificultades para clarificar qué es la teoría en didáctica de las matemáticas y para qué sirve dentro de una investigación; y segundo, la convicción de que la comunidad internacional de investigadores en educación matemática se encuentra en un momento en el que se está analizando y discutiendo sobre la diversidad teórica que como disciplina poseemos, y que la comunidad Latinoamericana debería estar atenta, informada y participativa en el desarrollo de dicha discusión[2].

[1] Otras reflexiones personales sobre este tema pueden encontrarse en Aguilar y Castañeda (2011), y Aguilar (2011)

[2] Ver por ejemplo el libro Sriraman y English (2010) que reúne a investigadores de distintas regiones del mundo para discutir sobre la naturaleza, rol y estado de desarrollo de la teoría en didáctica de las matemáticas. Asimismo, los grupos de discusión y de trabajo organizados en congresos como el CERME y el ICME y cuyo foco de estudio es la teoría misma, dan evidencia del momento que está viviendo nuestra disciplina.

Así, un propósito de este escrito es motivar a los estudiantes a reflexionar sobre la naturaleza y los roles que la teoría puede tomar en sus propias investigaciones, pero también fomentar la discusión sobre este tipo de tópicos en la comunidad Latinoamericana de investigadores en educación matemática.

El foco principal de este manuscrito son los roles que la teoría puede jugar en una investigación en didáctica de las matemáticas. La estructura del escrito tiene dos secciones principales: En la primera retomo algunas definiciones que se encuentran en la literatura especializada, asociadas a lo que es teoría en didáctica de las matemáticas y lo que es un marco de investigación. En la segunda sección menciono e ilustro algunos de los roles que la teoría puede jugar en la investigación. Para ilustrar esos roles hago uso de dos artículos de investigación recientemente publicados.

2. ¿Qué es teoría en didáctica de las matemáticas?

No es común encontrar en la literatura especializada definiciones explícitas sobre lo que es teoría en didáctica de las matemáticas; esto quizás se deba a que, como afirman Prediger, Bikner-Ahsbahs y Arzarello (2008), no existe todavía una única definición que sea compartida por los educadores matemáticos. Una de las definiciones explícitas sobre lo que es teoría, es la siguiente enunciada por Mogens Niss: "The theory consists of an *organised network of concepts* (including ideas, notions, distinctions, terms etc.) and claims about some extensive domain, or a class of domains, of objects situations and phenomena." (Niss, 2007, p. 98)

En lo personal, esta postura sobre lo que es teoría me ha resultado muy clarificadora, ya que señala que la teoría puede estar integrada no solo de "conceptos" en el sentido clásico —como podrían ser el *contrato didáctico* o la *imagen del concepto*—, sino que también puede contener afirmaciones sobre un dominio. Un ejemplo de este tipo de afirmaciones sobre un dominio pueden ser los conocimientos o resultados que se han generado con base en observaciones empíricas, por ejemplo: "cuando se trabaja con el concepto de función, los estudiantes tienen más dificultades para transitar de un modo de representación gráfico a un algebraico, que de un algebraico a un gráfico". Así, la teoría no debe imaginarse únicamente como un conjunto de conceptos o definiciones; también puede ser concebida como un conjunto de ideas, distinciones o afirmaciones asociadas a una situación o fenómeno didáctico.

3. ¿Qué forma puede tomar la teoría dentro de una investigación?

Creo que es importante tener una visión flexible y abierta sobre las *formas* que la teoría puede tomar dentro de una investigación. La teoría no es siempre un gran aparato conformado por varios conceptos y definiciones. Podemos encontrar investigaciones que solo utilizan un concepto o dos, o incluso investigaciones donde pareciera no haber teoría. En otras palabras, dentro de una investigación la teoría puede tomar distintas formas.

Un artículo que ha sido clave en mi formación es el de Lester (2005). Este artículo me enseñó dos cosas: por un lado, me introdujo a la idea de *marco de investigación*, que puede entenderse como la estructura teórica que utilizas en una investigación[3]; y por otro lado me mostró que pueden existir al menos tres diferentes tipo de marcos de investigación.

Lester (2005) define un marco de investigación como: "a basic structure of the ideas (i.e., abstractions and relationships) that serve as the basis for a phenomenon that is to be investigated." (p. 458). En su artículo, Frank Lester (2005) retoma el trabajo de Margaret A. Eisenhart (1991) para

[3]Es importante notar que cuando me refiero a "la teoría dentro de una investigación" y al "marco de investigación", me estoy refiriendo a la misma idea.

referirse a tres distintos tipos de marcos de investigación: marco teórico, marco práctico y marco conceptual. Enseguida se proporciona una breve caracterización de cada uno de ellos, la cual está basada en el trabajo de Eisenhart (1991):

Marco teórico: Es una estructura que guía la investigación y que se basa en teoría formal; esto es, el marco es construido mediante el uso de explicaciones establecidas y coherentes de ciertos fenómenos y relaciones.

Eisenhart (1991) propone como ejemplos de marcos teóricos a la teoría de la conservación de Piaget y a la teoría de constructivismo socio-histórico de Vigotsky. Dos ejemplos adicionales de marcos teóricos son la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau y la teoría de los campos conceptuales de Gérard Vergnaud.

Marco práctico: Un marco práctico guía la investigación mediante el uso de "lo que funciona" de acuerdo a la experiencia de aquellos que están directamente involucrados en la práctica. Este tipo de marco no está informado por una teoría formal, sino por el conocimiento práctico acumulado por los profesores y administrativos, los hallazgos de investigaciones previas, y frecuentemente los puntos de vista de políticos y de la opinión pública.

Para ilustrar lo que es un marco práctico consideremos como ejemplo el caso de un profesor que durante veinte años a dictado la misma asignatura de matemáticas. Este profesor, sin hacer uso de teoría formal, podría detectar errores comunes de los estudiantes e incluso predecir el tipo de problemas matemáticos que más confusión o errores generan entre los estudiantes. También podría formular preguntas de investigación estrechamente ligadas a su curiosidad práctica. Este tipo de conocimiento es el que sustenta a los marcos prácticos.

Marco conceptual: De acuerdo a Eisehart (1991), un marco conceptual es una estructura de justificación más que una estructura de explicación basada en lógica formal (i.e. teoría formal) o experiencia acumulada (i.e. conocimiento práctico). Un marco conceptual es un argumento que incluye diferentes puntos de vista y culmina en una serie de razones para adoptar algunos puntos (i. e. algunas ideas o conceptos) y no otros. Un marco conceptual es un argumento de que los conceptos seleccionados para la investigación o la interpretación, y cualquier relación anticipada entre ellos son apropiados y útiles dado el problema que se está investigando. Como los marcos teóricos, los marcos comceptuales están basados en la literatura y en investigaciones previas, pero los marcos conceptuales están construidos a partir de diferentes fuentes que pueden variar desde diferentes teorías, hasta diferentes aspectos del conocimientos práctico.

Después de enunciar las distintas formas que la teoría —o marco de investigación— puede tomar dentro de una investigación, en la siguiente sección me enfocaré en mencionar e ilustrar algunos de los roles que la teoría puede jugar en la investigación en didáctica de las matemáticas.

4. Algunos roles de la teoría en la didáctica de las matemáticas

Una de las metáforas más antiguas y diseminadas para referirse al rol de la teoría es aquella de los "lentes" enunciada por Alan Bishop (1977):

> Theories and constructs are a bit like spectacles—some help you to see more clearly the object you are concerned with, while others merely give you a foggy, blurred image. Change the object of your concern, however, and the second pair of spectacles might be more useful. (p. 4)

La metáfora de la teoría como lentes la interpreto como una manera de decir que, cuando estás observando un fenómeno complejo en el que intervienen muchas variables, la teoría puede servir para *enfocarte sólo en algunos aspectos* del fenómeno, ignorando intencionalmente otros aspectos.

Para ilustrar el rol de la teoría que acabo de mencionar y otros aspectos más sobre la naturaleza y rol de la teoría en una investigación, me referiré a dos artículos de investigación recientemente publicados: van de Sande (2011) y McCulloch (2011). Comenzaré discutiendo la investigación de Carla van de Sande (2011).

En ese trabajo, la investigadora se dedica a estudiar un foro de ayuda basado en Internet y que es de libre acceso para cualquier persona. Un foro de ayuda es un foro de discusión donde los estudiantes pueden plantear preguntas sobre matemáticas escolares, y recibir comentarios y respuestas de los miembros de la comunidad que participa en dicho foro.

Hace algún tiempo, le pedí a una estudiante que está investigando sobre el uso del Internet entre estudiantes de matemáticas que leyera ese artículo; cuando nos reunimos a discutir el manuscrito ella destacó sorprendida dos aspectos de él: (1) que el artículo no contiene una pregunta de investigación, y (2) que el artículo no usa un marco teórico (o al menos no lo hace explícito).

En efecto, el artículo no contiene una pregunta de investigación explícita, sin embargo tiene un objetivo doble bien definido: primero, introducir este tipo de foros a la comunidad internacional de investigadores, ya que es un espacio importante de estudiar debido a la cantidad de estudiantes de todo el mundo que recurren a ellos en busca de ayuda matemática; segundo, describir y caracterizar el tipo de actividades que los estudiantes desarrollan en el foro. Algo que de debe notar aquí es que no todos los artículos de investigación en didáctica de las matemáticas tienen una pregunta de investigación clara y explícita; algunos en su lugar tienen un propósito o un objetivo.

Sobre el marco teórico, efectivamente el trabajo de van de Sande (2011) no utiliza algún marco teórico particular, pero sí utiliza un marco conceptual —un conjunto de definiciones y conceptos—. Sin embargo el trabajo no incluye una sección donde explícitamente se enuncie dicho marco conceptual; las definiciones y conceptos utilizados en el trabajo se distribuyen a lo largo del manuscrito. Enseguida menciono cuáles son esas definiciones y conceptos, a la vez que indico el rol que juegan en la investigación.

Rol 1. Servir de vocabulario que facilite la comunicación

Al inicio del artículo, la autora comienza a hablar de los foros basados en Internet dedicados a proporcionar ayuda académica a estudiantes. Ahí introduce un conjunto de definiciones, por ejemplo lo que es un foro, un post, o una discusión (ver figura 1).

Term	Definition
Forum (sub-forum)	Web application for holding discussions and posting user-generated content
Post(ing)	Contribution or message that is published on the site, either to initiate a discussion or in response to another's contribution
Topic, thread, exchange, or discussion	The set of contributions pertaining to a single request for help

Figura 1. Definiciones de términos asociados a los foros de discusión en línea. Tomadas de van de Sande (2011, p. 54)

Estas definiciones son un componente del marco conceptual. Su rol es establecer un vocabulario común que facilite la comunicación de las ideas y objetos abordados en la investigación. Esta es una de las funciones básicas de los conceptos y definiciones en didáctica de las matemáticas.

Rol 2. Servir como una herramienta para caracterizar los datos u observaciones

En una siguiente sección de artículo, la autora comienza a discutir tres distintos modelos de foros ayuda; los denomina AOH, SOH y BOH (ver figura 2).

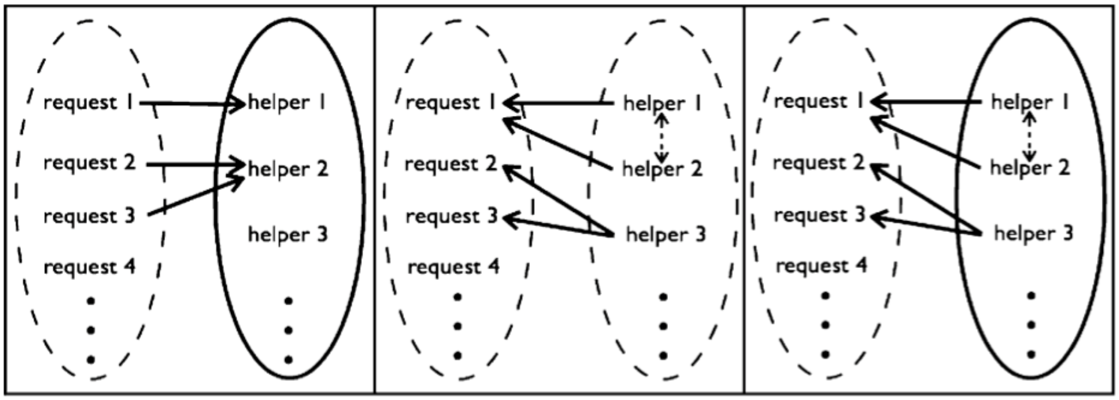


Figura 2. Tres modelos de foros de ayuda: AOH (izquierda), SOH (centro) y BOH (derecha). Tomados de van de Sande (2011, p. 55)

En un foro AOH, cada solicitud de ayuda es asignada a un ayudante específico. Esta asignación puede ser hecha por el administrador del sitio con base en la especialidad o disponibilidad del ayudante. Este tipo de foros favorecen las interacciones uno a uno entre estudiantes y ayudantes.

Los foros SOH permiten que cualquier miembro del foro, sin importar su pericia, responda a cualquier solicitud de ayuda. Debido a que cualquier miembro de estos foros puede participar en cualquier discusión, este tipo de foros favorecen las interacciones donde todos pueden interactuar con todos.

Finalmente los BOH son foros que mezclan características de los dos foros anteriormente descritos; esto es, el conjunto de ayudantes que responderá a determinadas solicitudes de ayuda es seleccionado, pero se permite que varios ayudantes contribuyan a una sola solicitud.

Estos tres modelos de foros también forman parte del marco conceptual de la investigación, sin embargo su rol es el de funcionar como una herramienta que va a permitir a la investigadora caracterizar el tipo de foro que ella está estudiando. La caracterización de datos u observaciones es otro de los roles de la teoría.

Rol 3. Dar orden a las observaciones o datos recolectados

Como se mencionó anteriormente, uno de los objetivos de la investigación de van de Sande (2011) es describir y caracterizar el tipo de actividades que los estudiantes desarrollan en el foro de ayuda. Para lograr esto, la autora introduce una serie de categorías que se refieren al tipo de comportamientos que los estudiantes pueden manifestar en los foros; estos comportamientos son: *coasting, slacking, sustaining y ramping* (figura 3).

Se denomina *coasting* cuando el estudiante tiene actividad en el post inicial de una discusión, pero no vuelve a aparecer en el foro después de que el ayudante interviene. A la ausencia absoluta de actividad del estudiante en un foro se le llama *slacking*. Cuando el estudiante participa tanto en el post inicial como después de que el ayudante haya intervenido, se le llama *sustaining*. Finalmente, *ramping* es utilizado para referirse a la ausencia de actividad del estudiante en el post inicial, pero presencia de actividad después de que el ayudante ha intervenido.

La función de estos términos en la investigación no es sólo caracterizar la actividad de los estudiantes en el foro, también ayudan a dar orden a los datos que se están analizando. Si uno entra

Characterization	Activity in initial post	Activity following help
Coasting	Yes	No
Slacking	No	No
Sustaining	Yes	Yes
Ramping	No	Yes

Figura 3. Tipos de comportamientos que los estudiantes pueden manifestar en un foro de ayuda. Tomados de van de Sande (2011, p. 61)

a un foro de discusión como el estudiado por Carla van de Sande, a simple vista se puede percibir como un montón de comentarios y respuestas sin orden aparente; al aplicar las categorías de posibles comportamientos de los estudiantes, pueden comenzar a surgir caracterizaciones ordenadas de entre ese aparente caos. Así, la teoría también puede ser muy útil para dar orden a las observaciones empíricas que recolectamos en una investigación.

Para ilustrar otros de los posibles roles que la teoría puede desempeñar en una investigación, hablaré ahora del trabajo de Allison W. McCulloch (2011) sobre afecto y uso de calculadoras. Este es un estudio que me parece muy interesante, no sólo por el tópico que aborda, sino también por las herramientas teóricas y metodológicas que emplea. El artículo plantea de manera explícita dos preguntas que se busca contestar:

i. ¿De qué manera el afecto impacta el uso que uno hace de la calculadora graficadora?

ii. ¿De qué manera el uso de la calculadora graficadora impacta nuestro afecto?

Aquí es importante notar cómo las preguntas contienen un término que es muy general y que requiere de mayor precisión. Me refiero al término “afecto”. ¿Qué se quiere decir con el término afecto? ¿qué aspecto(s) del afecto se desea investigar?

En el manuscrito de McCulloch (2011) se declara de manera explícita el uso de un marco teórico. De manera particular se usan dos conceptos teóricos: *ruta afectiva* (DeBellis y Goldin, 2006) y *génesis instrumental* (ver por ejemplo Artigue, 2002). Si se utilizara la terminología de Eisenhart (1991) veremos que lo que se está empleando es un marco conceptual, el cual está constituido por conceptos teóricos provenientes de aproximaciones teóricas distintas; una dirigida a estudiar los aspectos afectivos del estudio de las matemáticas, y otra enfocada en estudiar el uso de tecnología en el aprendizaje de las matemáticas. En lo que sigue me enfocaré en definir el concepto de ruta afectiva, para posteriormente ilustrar dos de los roles que este concepto teórico juega en la investigación.

Rol 4. Ayudar a formular de manera más precisa las preguntas de investigación

El concepto de ruta afectiva se refiere a los estados de ánimo y sentimientos que experimentamos al intentar resolver un problema de matemáticas; desde la frustración que podemos sentir al no saber cómo iniciar a abordarlo, hasta el júbilo que se experimenta cuando logramos resolverlo.

Después de introducir el concepto de ruta afectiva, la investigadora aclara que su interés se centrará en mirar cómo el uso de la calculadora afecta las rutas afectivas de los estudiantes, pero también en cómo las rutas afectivas influyen en el uso que los estudiantes hacen de sus calculadoras. Nótese cómo ahora el foco de la investigación es mucho más preciso; ahora no se habla sólo de afecto, sino que se especifica qué elementos afectivos se quieren estudiar. Justo ese es otro de los roles que la teoría puede tomar dentro de una investigación: puede ayudar a formular de manera más precisa las inquietudes o preguntas que uno quiere investigar.

Rol 5. Ayuda a simplificar el estudio de fenómenos complejos

Un reto metodológico que plantea la investigación de McCulloch (2011) es el de identificar las rutas afectivas de los estudiantes, ¿cómo determinar los estados de ánimo por los que transitan los estudiantes al resolver un problema con ayuda de su calculadora? La metodología aplicada para superar este reto es muy interesante. Primero, se pide a seis estudiantes que resuelvan algunos problemas matemáticos en los que tienen la libertad de usar su calculadora si así lo desean; el proceso de solución de los estudiantes es grabado en video. Después, el investigador analiza las grabaciones tratando de identificar los momentos en los que se puedan estar manifestando emociones o estados afectivos, por ejemplo: si el estudiante aparenta preocupación y comienza a mover su pie, si empieza a morderse las uñas, si se queda pensativo mirando el problema, etc. Posteriormente, el investigador vuelve a mirar uno a uno los videos, pero ahora en compañía del estudiante que fue video grabado. Ahí le hace preguntas como: ¿cómo te sentías ahí cuando mirabas el problema pensativo? ¿por qué comenzaste a mover tu pie? De esta manera el investigador comienza a trazar las rutas afectivas por las que transitan los estudiantes. La figura 4 ilustra una ruta afectiva identificada en uno de los estudiantes que participa en el estudio.

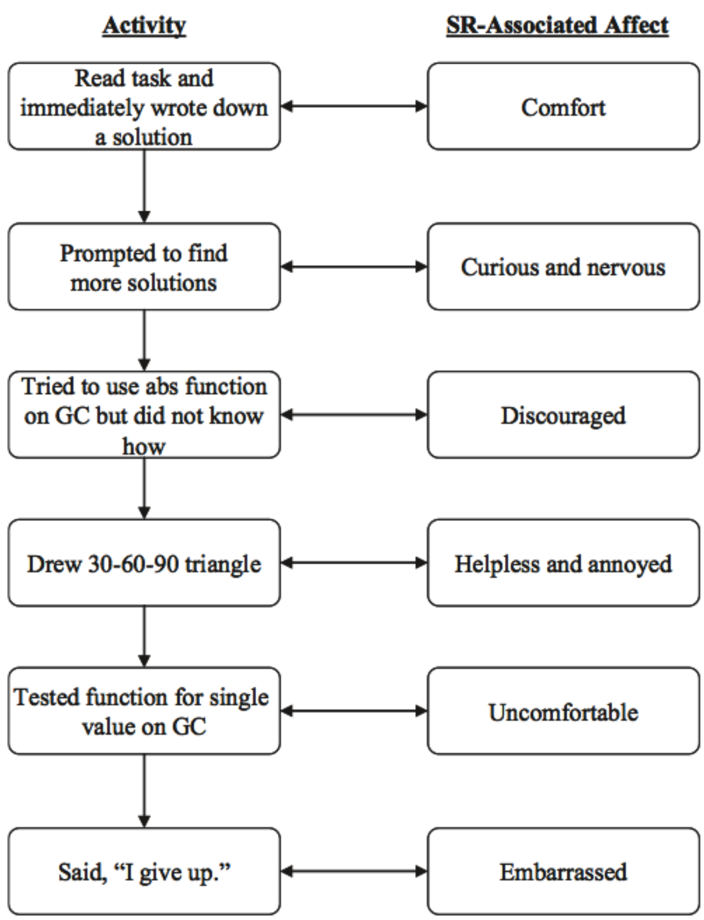


Figura 4. Ruta afectiva identificada en uno de los estudiantes que participa en el estudio sobre afecto y uso de calculadoras graficadoras. Tomada de McCulloch (2011, p. 175)

El punto que quiero señalar aquí es que en este caso la teoría está sirviendo de "lentes" como menciona Bishop (1977). Si observáramos al estudiante resolver el problema pero sin usar algún marco teórico, lo único que veríamos es justo eso: un estudiante resolviendo un problema de matemáticas. En cambio, al tener en mente el concepto de ruta afectiva, lo que hacemos es enfocarnos en sólo un aspecto del fenómeno observado, esto es, en los sentimientos que experimenta el estudiante al resolver el problema.

Supongamos que usamos otro tipo de "lentes", por ejemplo el concepto de *método de trabajo* introducido por Guin y Trouche (1998). Estos investigadores han identificado cinco distintos modos de trabajo que los estudiantes manifiestan cuando tratan de resolver tareas matemáticas usando calculadoras; por ejemplo, el *método de trabajo aleatorio* que sucede cuando el estudiante utiliza su calculadora con base en procedimientos de prueba y error; también existe el *método de trabajo racional* donde el estudiante usa poco la calculadora en la resolución del problema, y se apoya más en técnicas tradicionales de lápiz y papel de donde obtiene inferencias. Si miráramos al estudiante resolver el problema con estos lentes teóricos, ya no centraríamos nuestra atención en las emociones del estudiante, ahora observaríamos el mismo fenómeno, pero enfocándonos en las maneras en que el estudiante usa la calculadora para resolver el problema. Así, la teoría nos ayuda a simplificar el estudio de fenómenos que son complejos por todas las variables que intervienen en él. Lo simplifica al enfocar nuestra atención en sólo alguna(s) de las variables que intervienen en el fenómeno.

5. Conclusión

Los roles que la teoría puede jugar en una investigación en didáctica de las matemáticas son muy variados. En este escrito sólo he abordado algunos de ellos, sin embargo mi intención no ha sido ser exhaustivo. Mi contribución a esta discusión sobre los roles de la teoría en la investigación, ha sido la de ilustrar qué formas toma y qué roles juega la teoría en investigaciones publicadas recientemente. Para aquellos lectores interesados en profundizar en el tema de los roles que la teoría puede jugar en una investigación en didáctica de las matemáticas, recomiendo estudiar los escritos de Silver y Herbst (2007) y Niss (2007).

Referencias

Aguilar, M.S. (2011, Noviembre 7). ¿Pueden ser generalizables las teorías en matemática educativa? Mensaje colocado en http://wp.me/p1Vcke-7V

Aguilar, M.S. y Castañeda, A. (2011). ¿Qué es teoría en matemática educativa y para qué sirve? En L. S. Moguel, R.R. Gallegos y E. A. Landa (Eds.), *Memoria de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 468-474). Zacatecas, México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa. Obtenido de http://goo.gl/2oyBx

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245–274. doi: 10.1023/A:1022103903080

Bishop, A. (1977). On loosening the contents. En L. Murray (Ed.), *Meaningful Mathematics* (pp. 1-4). Melbourne: Mathematics Association of Victoria.

DeBellis, V. A. y Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 131–147. doi: 10.1007 /s10649-006-9026-4

Eisenhart, M. A. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education researchers. En R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 202 – 219). Blacksburg, VA. Obtenido de http://goo.gl/2TTNk

Guin, D. y Trouche, L. (1998). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(3), 195–227. doi: 10.1023/A:1009892720043

Lester, F.K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education, ZDM, 37(6), 457-467. doi: 10.1007/BF02655854. Obtenido de http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm056a2.pdf

McCulloch, A.W. (2011). Affect and graphing calculator use. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30(2), 166-179. doi: 10.1016/j.jmathb.2011.02.002

Niss, M. (2007). The concept and role of theory in mathematics education. En C. Bergsten, B. Grevholm, H. Måsøval y F. Rønning (Eds.), *Relating Practice and Research in Mathematics Education.Proceedings of Norma 05* (pp. 97-110). Trondheim, Noruega: Tapir. Versión preliminar obtenida de http://mennta.hi.is/vefir/staerdfraedi/malstofa_A_04/Niss%20theory.pdf

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A. y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework, ZDM, 40(2), 165-178. doi: 10.1007/s11858-008-0086-z. Versión preliminar obtenida de http://goo.gl/uptUO

Silver, E. y Herbst, P. (2007). Theory in mathematics education scholarship. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 39-67). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Sriraman, B. y English, L. (Eds.) (2010). Theories of mathematics education: Seeking new frontiers. Berlin/Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-00742-2

Van de Sande, C. (2011). A description and characterization of student activity in an open, online, mathematics help forum. *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 53-78. doi: 10.1007/s10649-011-9300-y

LA DIDÁCTICA DEL INFINITO MATEMÁTICO

Bruno D'Amore
Mescud – Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia
NRD – Università di Bologna, Italia

1. Prefacio

Este texto resume una extensa investigación realizada con estudiantes y maestros sobre la construcción del conocimiento en relación con el infinito matemático; el trabajo lleva a este punto más de 20 años. El título general de la línea de investigación es: *Lo veo, pero no lo creo*. La bibliografía siguiente enumera algunos textos producidos en esta dirección; después de 5-6 años de investigación, en el julio 1996 el ICME dio a mi mismo la responsabilidad de chief organizer de un grupo temático, el XIV: *El infinito*, en el VIII ICME de Sevilla, con Raymond Duval como colaborador.

Dada la brevedad del tiempo y del espacio disponible, en esta ocasión voy a presentar sólo unos pocos puntos de la investigación, que sigue aún.

Por lo general, las investigaciones al interno del NRD de Italia, activo en el Departamento de Matemática de la Universidad de Bologna (NRD: www.dm.unibo.it/rsddm) se organizan según un esquema clásico y fijo:

1. Referencias historias y epistemológicas.
2. Descripción del cuadro teórico de referencia.
3. Descripción de los problemas de investigación
4. Hipótesis de la investigación.
5. Metodología.
6. Resultados de la investigación.
7. Discusión de los resultados.
8. Verificación de las hipótesis.
9. Respuestas a las preguntas formuladas en 4.
10. Referencias bibliográficas.

En esta ocasión me limitaré sólo a algunos de estos puntos.

2. Origen histórico del título de la investigación

Cuando nos acercamos a la historia de la matemática, una de las cuestiones que más sorprende, es el contenido de una célebre y extraordinaria carta de Georg Cantor (1845-1918) a Richard Dedekind (1831-1916), enviada desde Halle el 29 de junio de 1877. Dado que Dedekind se retrasaba (!) en dar respuesta a un problema que le había propuesto el 25 de junio, Cantor, después de sólo 4 días, y pidiendo disculpas por el proprio celo, propone con fuerza, en la carta del 29 de junio, una nueva interrogación, declarando tener *necesidad* de recibir el parecer de Dedekind.

Casi al inicio de esta nueva carta (en alemán), Cantor escribe (en francés) la famosa frase:"*Mientras que usted no lo apruebe, yo no puedo más que decir: lo veo pero no lo creo* [1]". Espontáneamente surge la siguiente pregunta, ¿cuál sería el argumento sobre el que Cantor solicitaba,

[1] Sobre este punto véase Arrigo y D'Amore (1993) y Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011). Para conocer los textos completos de las cartas intercambiadas entre los dos formidables matemáticos alemanes, se puede ver (Noether, Cavaillès, 1937) y (Cavaillés, 1962).

decidido, una rápida respuesta de Dedekind? Nos lo dice el mismo Cantor en su carta del 25 de junio:

> Una variedad continúa de p dimensiones, con $p > 1$, ¿se puede poner en relación unívoca con una variedad continua de una dimensión, de manera tal que a un punto de una corresponda uno y sólo un punto de la otra?

Debemos decir inmediatamente que, en aquella época, se entendía por "relación univoca" lo que hoy llamamos "correspondencia biunívoca". Para favorecer a un eventual lector no experto en matemática, nos podemos concretar al siguiente caso, particular, pero igualmente significativo: ¿es posible hallar una correspondencia biunívoca entre los puntos de un cuadrado[2] y los puntos de un segmento[3]?

Se puede intuir la importancia de la pregunta a partir del siguiente comentario del mismo Cantor:

La mayor parte de aquéllos a los que les he puesto esta pregunta se han sorprendido mucho del hecho mismo de que yo la planteara, ya que es evidente que, para la determinación de un punto sobre una extensión de p dimensiones, se necesitan siempre p coordenadas independientes.

Después, Cantor confesó que había intentado demostrar este hecho, suponiendo que era verdadero, pero sólo porque ya no estaba satisfecho de la supuesta y tan difundida *evidencia*! Confiesa por lo tanto haber formado parte *siempre* de aquéllos que no ponían en duda tal hecho; *siempre*, hasta que demostró que las cosas no eran así...

La demostración hallada por Cantor es de una simplicidad genial; para verla, basta consultar un buen libro de texto de Análisis de nivel universitario, por ejemplo Bourbaki 1970, p. 47-49. Nosotros aquí nos inspiramos en una célebre vulgarización de la demostración de Cantor que se halla en Courant y Robbins (1941) relativa sólo al ejemplo visto arriba, propuesto a nuestro hipotético lector no matemático.[4]

Pongamos el cuadrado en un sistema de ejes cartesianos ortogonales de origen O, de manera tal que dos lados consecutivos se "apoyen" sobre los ejes (obviamente uno de los vértices coincide entonces con el origen). Considerando el lado del cuadrado como unidad de medida, se tiene inmediatamente que cada punto P interno a la superficie cuadrada tiene coordenadas reales x_P y y_P del tipo , $0 < xP < 1$,$0 < yP < 1$ por lo tanto, explícitamente:$xP = 0.a1a2...an...$, y $yP = 0.b1b2...bn...$. A *cada pareja ordenada de números reales* (xP, yP) hacemos corresponder *el número real* xP' definido de la siguiente manera: $xP' = 0.a1b1a2b2...anbn...$, obtenido anteponiendo 0 y el punto decimal, y alternando después las cifras decimales singulares de cada coordenada. Se puede fácilmente constatar que $0 < xP' < 1$ y, como tal, xP' se define de manera univoca a partir de xP y yP; como xP se puede considerar como abscisa de un punto P', en el eje $x[P'\,(xP', 0)]$, se puede pensar, por lo tanto P', como el correspondiente de P en la correspondencia definida.

Viceversa: se puede partir de P'y de su abscisa y, con el método inverso de distribución de las cifras, llegar unívocamente a P. Por lo tanto, hemos probado este teorema de Cantor, al menos en el caso en el que la dimensión p de la variedad vale 2: a los puntos internos del cuadrado unitario corresponden de manera biunívoca los puntos internos del segmento unitario.

Dado que esta demostración se basa en la escritura decimal de los números, es obvio que se debe dar por descontado una *unicidad* de tal escritura como, por otra parte, objetó el mismo Dedekind a

[2]Por "cuadrado" entendemos de ahora en adelante una superficie plana con forma cuadrada *abierta*, es decir sin borde.

[3]De ahora en adelante, hablaremos de segmento *abierto*, es decir sin extremos.

[4]En realidad, en lo que sigue de nuestro trabajo, es sólo a este ejemplo al que haremos referencia.

Cantor en una carta posterior (no obstante aceptando la demostración y admitiendo que su objeción no la descalificaba en lo más mínimo). Se trata por lo tanto de eliminar por convención, antes del enunciado del teorema, la única ambigüedad posible, que se halla sólo en el caso en el que aparece un 9 periódico en la expansión decimal. Por ejemplo, es bien conocido que $0{,}35\overline{9} = 0{,}36$ basta entonces *prohibir* las escrituras del primer tipo y, en el momento en que aparezca, se sustituye con escrituras del segundo tipo[5].

Nuestra investigación tiene motivaciones puramente didácticas y los párrafos precedentes tienen sólo el objetivo de situarla en el ámbito histórico. Quisimos recordar lo anterior, sólo para justificar nuestro título: «Lo veo, pero no lo creo», la célebre frase de Cantor, que vuelve tan humana y fatigosa toda la historia de esta demostración; para nosotros será emblemática de aquello que podría decir también un joven estudiante de la escuela secundaria superior que tuviera que ver con la demostración tratada por Courant y Robbins (1941), e ilustrada por nosotros.

Pero todo esto nos lleva también a poner en evidencia, aunque sea brevemente, los obstáculos que se han tenido en el desarrollo histórico de este difícil y controvertido argumento, hasta la demostración de Cantor que, por cuanto genial y simple, no fue acogida de manera inmediata. Aunque ya no lo diremos más de manera explícita, es obvio que cuando hablemos de obstáculos epistemológicos al respecto, la misma historia rápidamente delineada aquí debe considerarse como un apoyo poderoso a su evidencia.

3. Cuadro teórico de referencia

En ocasión del VIII ICME (Sevilla 1996), redacté una bibliografía de más de 300 títulos, con la contribución de muchos investigadores de todo el mundo; tal bibliografía se escribió en italiano, español e inglés y se puso a consideración (precisamente en Sevilla) de los participantes en el GT XIV y redacté también un panorama razonado de tales investigaciones (D'Amore, 1996).

Partiendo de estos antecedentes, delineamos brevemente el cuadro teórico de referencia, en el que nos queremos insertar.

3.1. Entre las tantas investigaciones presentes sobre el panorama mundial, muchas se dedican a la falta de aceptación, por parte del estudiante, de las diversas cardinalidades transfinitas [entre los muchos ejemplos, véanse los trabajos clásicos de Tsamir y Tirosh (1994), de Waldegg (1993), de Fischbein, Jehiam y Cohen (1994,1995), para tener una primera idea]. Normalmente, para los estudiantes, la cardinalidad de $\mathbb{Z}$ es, en un primer momento, superior a la de $\mathbb{N}$ (hay quien incluso dice que es el *doble*). Pero, una vez que se acepta la demostración de que estos dos conjuntos tienen la misma cardinalidad, muchos estudiantes creen que pueden concluir que esto depende del hecho de que ambos son conjuntos infinitos y que por lo tanto "todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad": *infinita*. Por lo que, por ejemplo,$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ deberían simplemente de tener la misma cardinalidad.

Esta aceptación intuitiva (que representa una *misconcepción* bastante difundida) la llamaremos de ahora en adelante: ***aplastamiento*** de los cardinales transfinitos.

3.2. Ponemos en evidencia otra convicción estudiada muchas veces en las investigaciones; por ejemplo, en Tall (1980)[6] se muestra cómo los procesos mentales y las convicciones intuitivas llevan

[5] En realidad, existen otros detalles que hay que cuidar, así como precauciones que se deben tomar; pero, dado que nuestro objetivo aquí no es el de entrar en cuestiones finas sobre este argumento (por lo demás bien conocidas) si no exponer una de nuestras investigaciones, eludimos la cuestión. Se puede ver al respecto Carruccio (1964).

[6] Pero sobre este argumento la literatura es vasta en todo el panorama internacional; véase D'Amore (1996).

a los estudiantes a pensar que en un segmento *largo* existan más puntos que en un segmento más *corto*[7].

Esta aceptación intuitiva (que representa una misconcepción bastante difundida) la llamaremos de ahora en adelante: ***dependencia*** de los cardinales transfinitos de hechos relativos a medidas.

3.3. Las aceptaciones intuitivas (*misconcepciones*) de *aplastamiento* y de *dependencia* se hallan en contradicción entre ellas; pero parece que los estudiantes no se sienten interesados por volver coherentes sus creencias, como muestran, en modos y ámbitos diferentes, Stavy y Berkovitz (1980), Hart (1981), Schoenfeld (1985), Tirosh (1990), Tsamir y Tirosh (1997) y D'Amore y Martini (1997, 1999).

3.4. Duval (1983) analiza la dificultad que tienen los estudiantes para aceptar la correspondencia biunívoca llamada "de Galileo" entre $\mathbb{N}$ y el subconjunto de los números cuadrados. Él la explica (incluso) gracias a un obstáculo que llama de ***deslizamiento***: en su caso se trata del deslizamiento del verbo *Tener* al verbo *Ser* en el curso de la demostración (es decir: en el curso de la demostración, se pasa de propiedades de ciertos números recurriendo al verbo *Tener*, a la descripción de una peculiaridad de estos mismos números expresada mediante el verbo *Ser*). Pero nosotros podemos tomar esto como prototipo y hablar de *deslizamiento* más en general; en el curso de una demostración: nuestra acepción de *deslizamiento* (un poco más amplia que la de Duval) se tiene cuando se está hablando de alguna cosa (o en un cierto modo, o en el ámbito de un cierto lenguaje) y, de improviso, nos hallamos hablando de otra cosa (o en otro modo o en otro lenguaje). Es evidente que este pasaje del contexto geométrico al aritmético y viceversa se inserta en el "*jeu de cadres*"de Douady (1984-86). Característica de nuestro caso específico es el doble pasaje y el hecho de que es relativo a una demostración. Se debe también hacer referencia a la dificultad de parte de los estudiantes en el pasaje entre diversos sistemas de representación Duval (1995).

3.5. El clásico debate filosófico de origen aristotélico sobre el infinito en sentido *actual* y en sentido *potencial* (Arrigo, D'Amore, 1993; Arrigo, D'Amore, Sbaragli, 2011) ha inspirado diferentes investigaciones, por ejemplo las de Moreno y Waldegg (1991), de Tsamir y Tirosh (1992), de Shama y Movshovitz Badar (1994) y de Bagni (1998). Se han hallado, en verdad, resultados a veces contradictorios; pero está probado que la evolución de la concepción *actual* del infinito matemático es más lenta y se da en modo contradictorio a lo largo del curso del currículo escolar y gracias a un proceso de maduración y sistematización cognitiva de los aprendizajes. Ahora, la demostración descrita por nosotros en el apartado 1. es claramente de tipo *actual* por el modo mismo en el que se manipulan algunos conjuntos infinitos (los puntos del cuadrado y del segmento, las cifras después del punto). Este hecho podría constituir uno de los puntos de dificultad para la aceptación de la demostración misma.

[Naturalmente tuvimos en cuenta los numerosos estudios sobre la demostración matemática en clase. Pero, en realidad, aquí no se trataba de "dar una demostración" sino de "seguir una demostración dada por otros" y después discutir el grado de aceptación para estudiar los motivos de un eventual rechazo: nos parece que la especificidad de la demostración y el hecho de que ella involucre al infinito cobran mayor relevancia con respecto a la actividad del demostrar en sí].

4. Resultados

La demostración del teorema de Cantor se revela por encima de las capacidades normales de

[7]Esta creencia de carácter *monádico* (y por lo tanto de factura *pitagórica*), no obstante variados pero esporádicos antecedentes, fue definitivamente descubierta solo en el siglo XX, es decir, mas bien recientemente. Véase Arrigo y D'Amore (1993). Ella, como sea, forma parte de la mentalidad común, más allá del mundo matemático. Se halla incluso entre los profesores

aprendizaje de los estudiantes de las escuelas superiores que no han aún seguido un curso del Análisis. Esto se debe sobre todo a obstáculos de naturaleza epistemológica y didáctica, como hemos mostrado, y a dos pasajes en la demostración (deslizamiento y manipulación de las cifras). El éxito obtenido por el 19,2 % cae en los valores normales del estrato de alto rendimiento de una población escolar y por lo tanto no parece significativo para nuestra investigación.

Las demostraciones de los otros dos teoremas (“segmentito-segmentote” y “formas periódicas”) resultaron más accesibles, pero también pusieron en evidencia la existencia de obstáculos de diversa naturaleza, por ejemplo de tipo curricular y cognitivo general.

El examen de los cuestionarios nos lleva a intuir que los obstáculos se podrían superar en al menos dos modos: mediante una especie de eludir (véanse las demostraciones de “segmentito-segmentote” y de “formas periódicas”); la operación puede lograrse también plenamente, pero no tiene efecto duradero: a la fase “lo veo”, es decir a la comprensión técnica de la demostración, puede seguir una reacción del tipo “pero no lo creo” causada por el regreso en superficie de los obstáculos; mediante remoción y superación de los mismos.

Para superar un obstáculo epistemológico se necesita hacer atravesar al estudiante la frontera de sus conocimientos, aumentándolos de manera directa y oportuna. Por ejemplo, en el caso de “segmentito-segmentote” se necesita ayudar al estudiante a separarse del modelo del segmento como “collar” cuyas “perlas” se hallan estrechamente ordenadas. Se necesita hacerle tornar conciencia, por ejemplo, del hecho que, en un segmento, dado un punto, no tiene ya sentido pensar ni en el punto anterior ni en el sucesivo, buscando imágenes oportunas.

Referencias

Especifica:

Arrigo G., D’Amore B., Sbaragli S. (2011). *Infinitos infinitos.* Bogotá: Magisterio.

Otros:

Arrigo, G., and D’Amore, B. (1993). *Infiniti.* Milano: Angeli.

Arrigo, G., and D’Amore, B. (1999). “Lo veo, pero no lo creo”. Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. *Educación matemática, 11*, 1, 5-24.

Arrigo, G., and D’Amore, B. (2002). “Lo vedo ma non ci credo…”, seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La Matematica e la sua didattica, 1*, 4-57.

Arrigo, G., and D’Amore, B. (2004). Otros allazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática, 16*, 2, 5-20.

Arrigo, G., D’Amore, B., and Sbaragli, S. (2011). *Infiniti infiniti.* Trento: Erickson. [En curso de traducción en idioma español: Bogotá: Magisterio].

Bachelard, G. (1938). *La formation de l’ésprit scientifique.* Paris: Vrin.

Bagni, G.T. (1998). L’infinitesimo nelle concezioni degli studenti prima e dopo lo studio dell’Analisi. *L’educazi*
one matematica, 3, 2, 110-121.

Bourbaki, N. (1970). *Éléments de Mathématiques - Théorie des ensembles* - E III. Paris: Hermann.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistemologiques et les problèmes des mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 4*, 2, 165-198.

Carruccio, E. (1964). *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought.* London: Faber and Faber.

Cavaillès, J. (1962). *Philosophie mathématique*. Paris: Hermann.

Courant, R., and Robbins, H. (1941). *What is mathematics*? New York: Oxford Univ. Press.

D'Amore, B. (1996). El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. *Epsilon*, 36, 341-360.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Edición en español, 2006: *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio].

D'Amore, B., Arrigo, G., Bonilla Estévez, M., Fandiño Pinilla, M.I., Piatti, A., Rojas Garzón, P.J., Rodríguez Bejarano, J., Romero Cruz, J. H., and Sbaragli, S. (2004). Il "senso dell'infinito". *La matematica e la sua didattica4*, 46-83.

D'Amore, B., Arrigo, G., Bonilla Estévez, M., Fandiño Pinilla, M.I., Piatti, A., Rodríguez Bejarano, J., Rojas Garzón, P.J., Romero Cruz, J.H. y Sbaragli S. (2006). El "sentido del infinito". *Epsilon*, 22(2), 65, 187-216.

D'Amore, B., and Fandiño Pinilla, M.I. (2001). La "matemática de la cotidianidad". *Paradigma, 1*, 59-72.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., and Sarrazy, B. (2011). *Didattica della matematica, Alcuni effetti del contratto*. Prefacio y postfacio de Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri. [En curso de traducción en idioma español: Bogotá: Magisterio].

D'Amore, B., and Martini, B. (1997). Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos. *Números, 32*, 26-32.

D'Amore, B., and Martini, B. (1999). El "contesto natural". Influencia de la lengua natural en las respuestas a test de matemática. *Suma*, 30, 77-87.

D'Amore, B., and Sandri, P. (1996). "Fa' finta di essere...". Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 19A*, 3, 223-246.

Douady, R. (1984). Jeux de cadres et dialectique outil-object dans l'enseignement des mathématiques. Thèse d'État, Univ. De Paris. (1986) *Recherches en didactique des mathématiques*, 7, 2, 5-31.

Duval, R. (1983). L'obstacle de dedoublement des objects mathématiques. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 385-414.

Duval, R. (1995). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Actes de l'École d'été* 1995.

Fischbein, E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. En Chini Artusi L. (ed.). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-UMI. 122-132.

Fischbein, E., Jehiam, R., and Cohen, D. (1994). The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles.*Proceedings of the* XV1I1 PME. 2. Lisboa. 352-359.

Fischbein, E., Jehiam, R., and Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers en high-school students and prospective teachers.*Educational Studies in Mathematics, 29*. 29-44.

Hart K. (ed.) (1981). *Children's understanding of mathematics*. London: Murray.

Moreno, L., and Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics,22*, 211-231.

Noether, Y., and Cavaillès, J. (eds.) (1937). *Briefwechsed Cantor-Dedekind.*

Sbaragli, S. (2006).Primary School Teachers' beliefs and change of beliefs on Mathematical Infinity. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education,5*, 2, 49-76.

Sbaragli, S. (2007). Le "proposte" degli insegnanti di scuola primaria concernenti l'infinito matematico. En Giacardi, L., Mosca, M., and Robutti, O. (eds.) (2007). *Conferenze e seminari 2006-2007*.73-87.

Schoenfeld, A. H. (1985).*Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Shama, G., and Movshovitz Hadar, N. (1994). Is intinity a wholer number? *Proecedings of the* XVIII PME, 2, Lisboa. 265-272.

Stavy, R., and Berkovitz, B. (1980). Cognitive conflict as a basic for teaching qualitative aspecis of the concept of temperature.*Science Education, 28*, 305-313.

Tall, D. (1980).The notion of intinity measuring number and its relevance in the intuition of infmity.*Educational Studies in Mathematics, 11*, 271 -284.

Tirosh, D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. Focus on *Learning Problems on Mathematics, 12*, 111-129.

Tsamir, P. (2000). La comprensione dell'infinito attuale nei futuri insegnanti. *La matematica e la sua didattica, 2*, 167-207.

Tsamir, P., and Tirosh, D. (1992). Students' awareness of inconsistent ideas about actual inlinity.*Proceedings of the* XVI PME, Durham NH, 90-97.

Tsamir, P., and Tirosh, D. (1994). Comparing infinite sets: intuition and representation. *Proceedings of the* XVI PME, 2, Lisboa. 345-352.

Tsamir, P., and Tirosh, D. (1997). Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito. *La matematica e la sua didattica, 2*.122-131.

Waldegg, G. (1993). La comparaison des ensembles infinis: un cas de resistance à l'instruction. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 5*,19-36.

EL ESTUDIO DE LA TASA DE VARIACIÓN COMO UNA APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE DERIVADA

Jhony Alexander Villa Ochoa
Universidad de Antioquia, Colombia.
javo@une.net.co

Resumen: En este artículo describo un estudio de casos en el cual un conjunto de cuatro estudiantes se aproximaron al concepto de derivada a partir de la comprensión de la tasa de variación. Particularmente presento algunos episodios en los cuales a través del uso de los software dinámicos GeoGebra y Modellus las estudiantes observaron la tasa de variación media y produjeron algunas ideas asociadas a la derivada como una tasa de instantánea. Los resultados de este investigación resaltan la importancia del estudio de las derivada a través de contextos en los cuales observen la necesidad de correlacionar variables y la manera como ellas covarían. Finalmente presento una valoración sobre la pertinencia de abordar dicho estudio a través de la interacción de diferentes contextos y medios, y exhibo algunas reflexiones relativas algunos aspectos que intervienen en comprensión de la derivada desde una aproximación variacional.

Palabras clave: Tasa de variación, derivada, tecnología.

1. La variación para el estudio de la derivada

Desde la literatura internacional puede observarse un llamado para abordar el estudio de la tasa de variación como una componente trascendental en la interpretación de la derivada (Dall'anese, 2006; Tall, 2009; Dolores, 2007). De la misma manera, a pesar de existir una amplia gama de investigaciones y perspectivas en torno a la enseñanza y aprendizaje de conceptos del cálculo; también se muestra que todos estos esfuerzos son insuficientes para dar cuenta de la complejidad del fenómeno de comprensión de tales conceptos (Sánchez-Matamorros, Garcia y Llinares, 2008).

Artigue (1995, citada por Sánchez-Matamoros et al., 2008) afirma que aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de manera más o menos mecánica algunos cálculos de la derivada y a resolver algunos problemas estándar, hay dificultades para que los jóvenes de estas edades logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro de análisis matemático. Dichas dificultades se manifiestan en el significado de la noción de derivada como límite de un cociente incremental (representación analítica; $\lim\limits_{\triangle x \to a} \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$ ó $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$) o en su interpretación geométrica como pendiente de la recta tangente.

Para Sánchez-Matamoros et al. (2008), la construcción de un significado parcial de la derivada puede conducir a dificultades para su desempeño en los cursos de cálculo. Ello genera la necesidad de conocer los procesos mediante los cuales, los estudiantes dotan de significado al concepto de derivada; por tanto, la investigación en este campo se hace bastante pertinente.

Otras de las dificultades, en lo relativo a la comprensión de la derivada, están asociadas con la representación de algunos de los aspectos variacionales que emergen en situaciones, en las cuales, conceptos como la velocidad o la rapidez tienen lugar. En este aspecto, Dolores, Chi, Canul, Cantú y Pastor (2009) presentan los resultados de una investigación que explora las representaciones gráficas que hacen los estudiantes sobre la rapidez. Estos autores afirman que, convencionalmente, la rapidez está asociada a la razón de dos magnitudes y vinculada, gráficamente, a la pendiente de la recta tangente a una curva que representa la función de dichas magnitudes; sin embargo, estos investigadores pudieron encontrar otro tipo de representaciones que son usadas por los estudiantes, en las cuales se presentaron características de cinco tipos: rectas, columnas, puntos, pictóricas y curvas.

De otro modo, Sanchez-Matamorros y colaboradores. (2008) puntualiza uno de los enfoques relativos al estudio de la derivada, es la comprensión de la tasa de variación, en ese sentido señala que:

> Si se considera que la derivada en un punto indica la velocidad de cambio, la comprensión de tal idea se apoya en el saber previo de la noción de la razón entre el incremento de x en relación al de y (p.272).

Sánchez-Matamoros y sus colaboradores observaron en los trabajos de Orton (1983) y Hart (1981) cómo la comprensión de la razón de cambio dependía del tipo de función utilizada. Así mismo, señalan que Orton indicó que las dificultades con la idea de razón de cambio y su vinculación al tipo de función, sea ésta lineal o cuadrática, podían tener su origen en una comprensión débil del concepto de función.

En este artículo presento algunos resultados de una investigación más amplia que abordó la pregunta *¿Cómo se desarrolla el proceso de comprensión de la tasa de variación como una manera de ofrecer una interpretación variacional de la derivada en estudiantes participantes de un curso de pre-cálculo?* La investigación se desarrolló en el programa de Doctorado en Educación de la Universidad de Antioquia en Colombia.

2. El estudio de casos como método de investigación

Abordar una investigación que dé cuenta de "*cómo se desarrolla un proceso...*" demandó por parte del investigador una inmersión detallada y profunda en el estudio del fenómeno de comprensión. De ese modo, seleccioné el *estudio de casos* como método de investigación, ya que en palabras de Goldenberd, a través de una inmersión profunda y exhaustiva de un objeto delimitado, el estudio de caso posibilita la penetración en la realidad social no necesariamente lograda con un análisis estadístico.

De otro modo, Yin puntualiza que aunque no existe una fórmula que permita elegir el estudio de casos como método de investigación; dicha elección está en coherencia con la(s) pregunta(s) de investigación. Este investigador agrega que las preguntas que se enfocan en el "cómo" o el "por qué" de un fenómeno social son especialmente un indicador para optar por el estudio de casos como método de investigación.

2.1 El contexto

En un estudio de casos las *unidades de análisis* son una componente que está estrechamente imbricada con el problema fundamental de establecer el caso a estudiar (Yin, 2009). Con base en estas ideas se seleccionó como *unidades de análisis* las comprensiones de cuatro estudiantes de primer año de un programa de ingeniería quienes estaban cursando una asignatura de pre cálculo. Las cuatro estudiantes fueron designadas con los seudónimos de Cristina, Marcela, Estefanía y Alexandra las cuales decidieron participar voluntariamente del estudio. Las estudiantes se implicaron, durante ocho sesiones de dos horas cada una, en el estudio de algunas situaciones que involucraron fenómenos de covariación entre algunas cantidades; tales situaciones les exigía observar la función matemática abordada en el contexto, pero también la manera en cómo se describía la tasa de variación y el cambio de esta misma. Las situaciones usadas en este estudio se describen en el siguiente apartado.

2.2 Las situaciones

A continuación presento una descripción general de cada una de las cuatro situaciones diseñadas para este estudio.

Situación 1. Rectángulo inscrito: En esta situación usé el software GeoGebra para presentar una nueva versión del trabajo: "Rectángulo Inscrito" presentado en Villa-Ochoa (2012). Para analizar la tasa de variación de las cantidades que se incluían en la situación, usé la opción "herramienta" para construir una que permitiera la visualización dinámica de la tasa de variación media, y en la que simultáneamente intervinieran sus registros gráficos, numéricos y algebraicos. La "herramienta" construida, permitió una aproximación desde la tasa de variación media a la tasa de variación instantánea mediante la determinación de intervalos de variación cada vez más pequeños. En la figura 1, se recrea el ambiente en el que se desarrolló la situación "rectángulo inscrito".

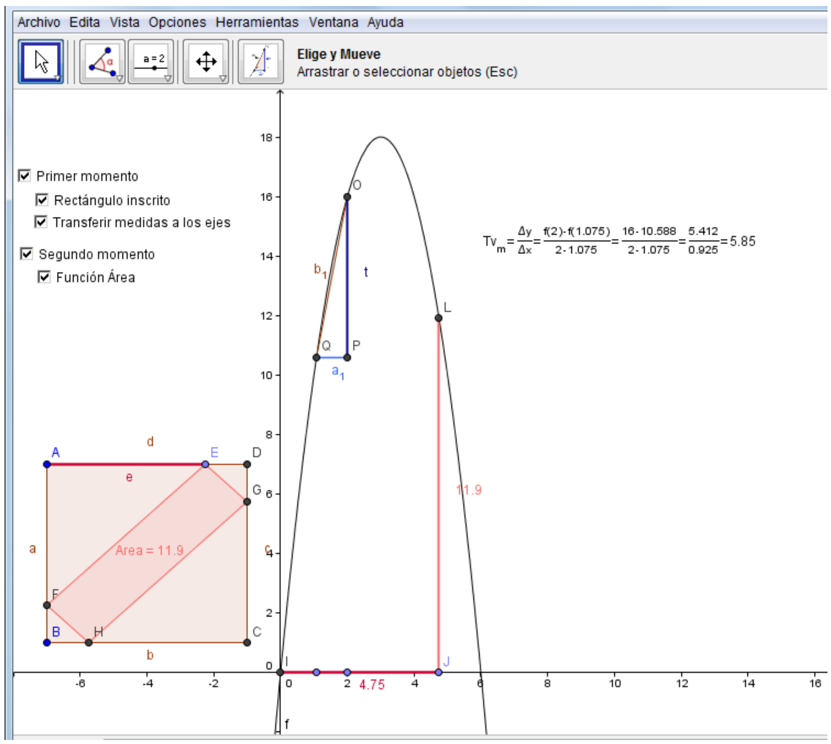


Figura 1. Ambiente de la situación 1.

Situación 2. La velocidad y la aceleración: Fueron un conjunto de actividades que surgieron desde la necesidad que se hizo explícita en la situación 1, en la cual las estudiantes se aproximaron a la noción de tasa de variación instantánea como el límite de la tasa de variación media, pero consideraban dicho valor como una "suposición" o inferencia y no aceptaban su existencia. Las actividades diseñadas para esta situación estuvieron basadas en la simulación de movimiento uniforme y acelerado a través del software "Modellus" versión 4.01. En la situación usé las opciones gráfico, tabla y modelo, para establecer relaciones entre la simulación del movimiento y las representaciones matemáticas de la misma. Otras gráficas se construyeron en el desarrollo la situación para validar las inferencias de las estudiantes con respecto a la aceleración. En la figura 2, se muestra el ambiente de la simulación.

Figura 2. Simulación de un movimiento con el software Modellus.

Situación 3. Análisis de la función tasa de variación: En esta situación desarrollé una "herramienta" en el software GeoGebra; con dicha herramienta es posible observar múltiples triángulos que permiten dar la idea de la tasa de variación como una función. La herramienta fue usada para analizar el comportamiento de la tasa de variación de varias funciones. En la figura 3, se muestra una de ellas.

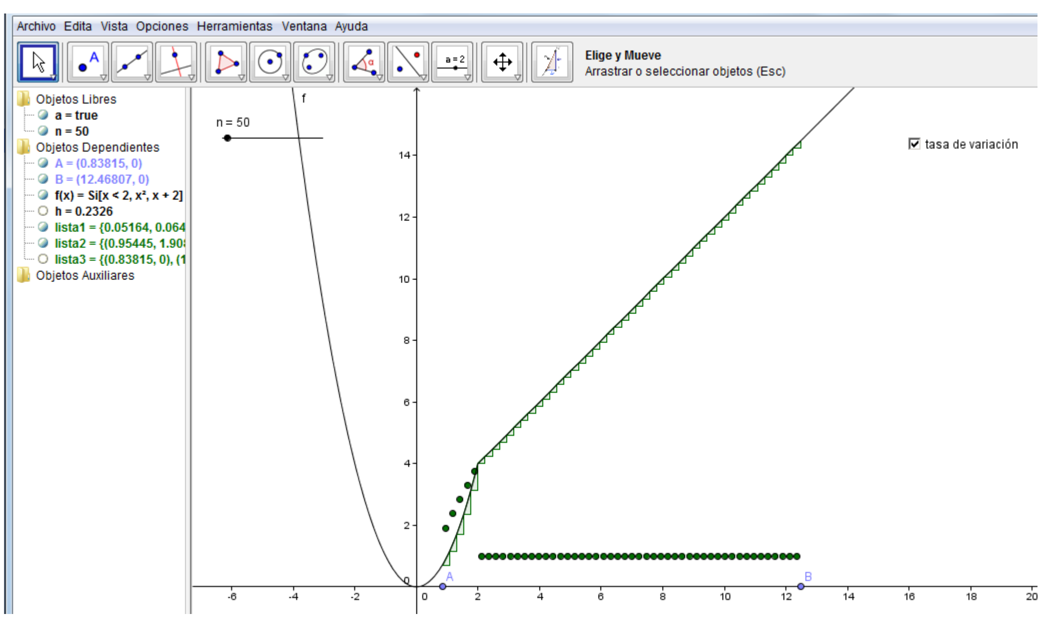


Figura 3. Ambiente de la herramienta para estudiar la función tasa de variación.

La figura 3, presenta una función definida en dos tramos y los triángulos que se muestran se forman en el intervalo definido por los puntos A y B de acuerdo al valor del deslizador n. Los puntos que se muestran en dicha ilustración representan los valores de la tasa de variación de cada uno de los triángulos.

Situación 4. Descarga de un archivo: En esta situación se usa la grabación de la manera en que se descarga un archivo, para indagar por la forma como las estudiantes comprenden las tasas de variación que se involucran en ella. La grabación se hizo con el software Camtasia cuando se estaba descargando un archivo de internet con el software VDownloader cuyo fin fue identificar y estudiar la “tasa de transferencia” o velocidad con la cual se descarga el archivo, así como los cambios de ésta misma (aceleración). En la figura 4, se presenta el ambiente de la situación.

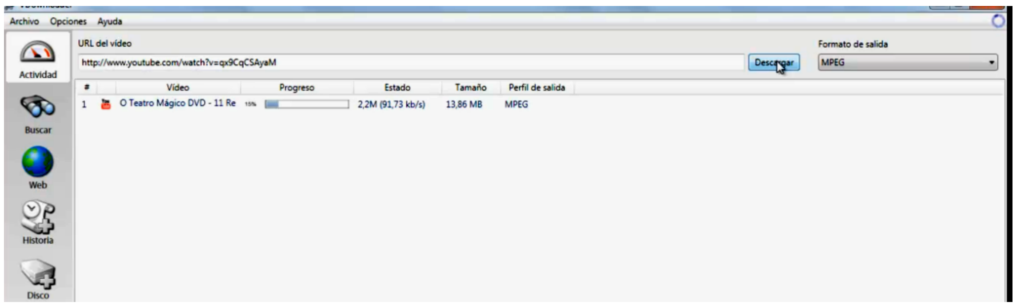


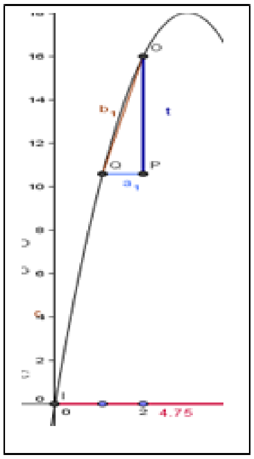
Figura 4. Ambiente de la situación: descarga de un archivo.

3. La tasa de variación como producto de la interacción entre diversos contextos y medios

Es este artículo me centraré en algunos resultados relativos a la aproximación a la derivada a través del estudio de la tasa de variación. Las ideas que produjeron las estudiantes estuvieron en relación con las situaciones 1 y 2 descritas en el apartado anterior.

En el primer contacto que las estudiantes tuvieron con la situación 1 se comprometieron con el reconocimiento de las cantidades que intervenía en ese contexto (ie. Área del rectángulo, área del cuadrado, longitudes de los lados, etc.) y cuáles de ellas eran variables y cuáles no. Seguidamente se propone hacer una descripción de las variables que covarían y la manera como lo están haciendo. Las descripciones que las estudiantes hacían de esta tarea evidencian el reconocimiento de algunas características de la covariación de manera cualitativa, (i.e. él área aumenta y luego disminuye).

El trabajo posterior se centró no sólo en la manera en que covarían las cantidades sino en la manera como podrían cuantificarse tal cambio. Para ello, se construyó una herramienta de Geogebra que permitiera simplificar algunos cálculos aritméticos para dar cuenta de la tasa de variación según el intervalo deseado (ver figura 5).



$$Tv_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(1.075)}{2-1.075} = \frac{16-10.588}{2-1.075} = \frac{5.412}{0.925} = 5.85$$

Figura 5.Herramienta construida para dar cuenta de la tasa de variación aritmética y gráficamente.

Con el apoyo del texto dinámico del GeoGebra, el investigador cuestiona a las estudiantes frente a los valores de la tasa de variación que se presenta entre el área del rectángulo inscrito y la longitud del segmento AE (ver figura 1). Algunos de los intervalos que propusieron fueron [1.5, 2], [1.7, 2], [1.9, 2], [1.99, 2], de allí surgió el siguiente diálogo entre Marcela y Cristina quienes expresaron que la tasa de variación en cada intervalo decrecía:

Investigador : *¿Cómo se está comportando ese resultado?*
Cristina : *Baja*
Marcela : *Decrece, ¿no?* [Simultáneamente]
Investigador : *¿Hasta dónde decrece?*
Estefanía : *Hasta uno*
Investigador : *¿Seguras?*

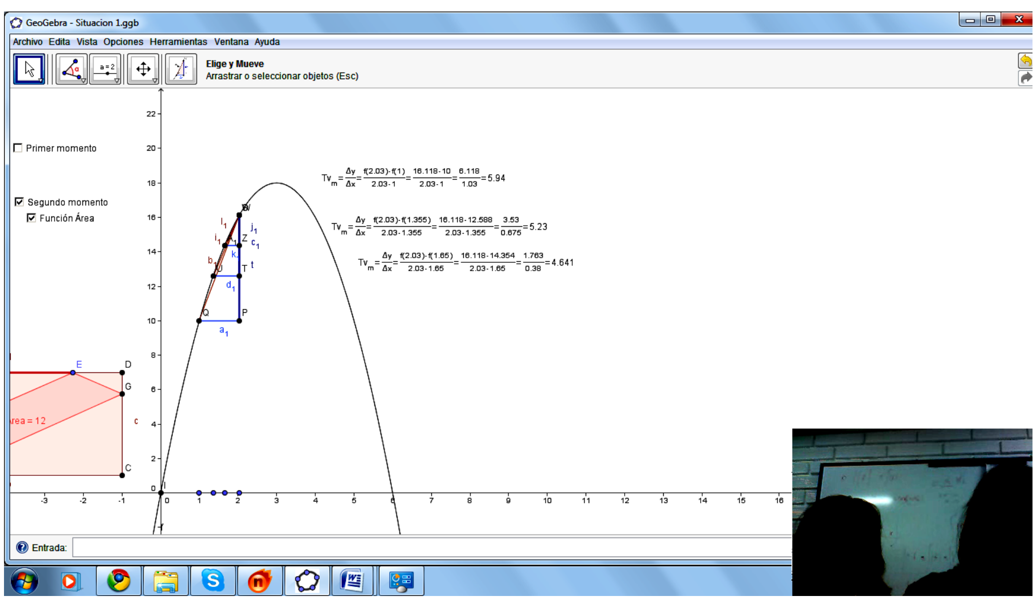


Figura 6. Tasa de variación media en la situación N.1.

Las estudiantes continúan usando la herramienta "*tasa de variación en intervalo*" para calcular los valores de la tasa en intervalos cada vez más pequeños (con el valor $x = 2$ en el extremo derecho del intervalo). El investigador preguntó de nuevo: ¿seguras que decrece hasta uno? A lo que las Cristina y Estefanía respondieron con gestos que indicaban su respuesta negativa. Seguidamente el profesor preguntó: ¿*Entonces, cuál es el valor al que nos acercamos cuando el punto se acerca a 2*? Simultáneamente las cuatro estudiantes respondieron "*cuatro*". Este hecho se convierte en evidencia de la presencia de una imagen del concepto de límite, el cual fue observado como "tendencia". Hasta este punto las estudiantes habían conjeturado el valor del límite apoyándose en los valores que el software presentaba; sin embargo, continuando con el movimiento del punto en el software ocurrió el caso en el cual los dos puntos se superpusieron generando que la expresión en el *texto dinámico* generara $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{0}{0} =$? (ver figura 7). Este hecho propició en Marcela la creación de una idea de límite como "*una tendencia*", de ese modo el límite adquirió un estatus de "*supuesto*" pero no de "*existencia*". Para ilustrar este hecho, transcribo el siguiente diálogo:

Investigador	:	*Entones, ¿cuál es la tasa de tasa de variación en 2?*
Marcela	:	*No existe!*
Investigador	:	*¿Por qué no existe?*
Marcela	:	*Porque cero sobre cero no existe!*
Estefanía	:	*Es indeterminado!*
Investigador	:	*Y entonces, ¿qué significa ese cuatro que encontraron?* [refiriéndose al valor del límite inferido por medio de la aproximación].
Marcela	:	*Pero dijimos que daba cuatro porque nos aproximábamos, pero no es cuatro, porque en dos se anula.*

Las demás compañeras se limitaron a escuchar y observar la pantalla del computador evidenciado una actitud de extrañeza.

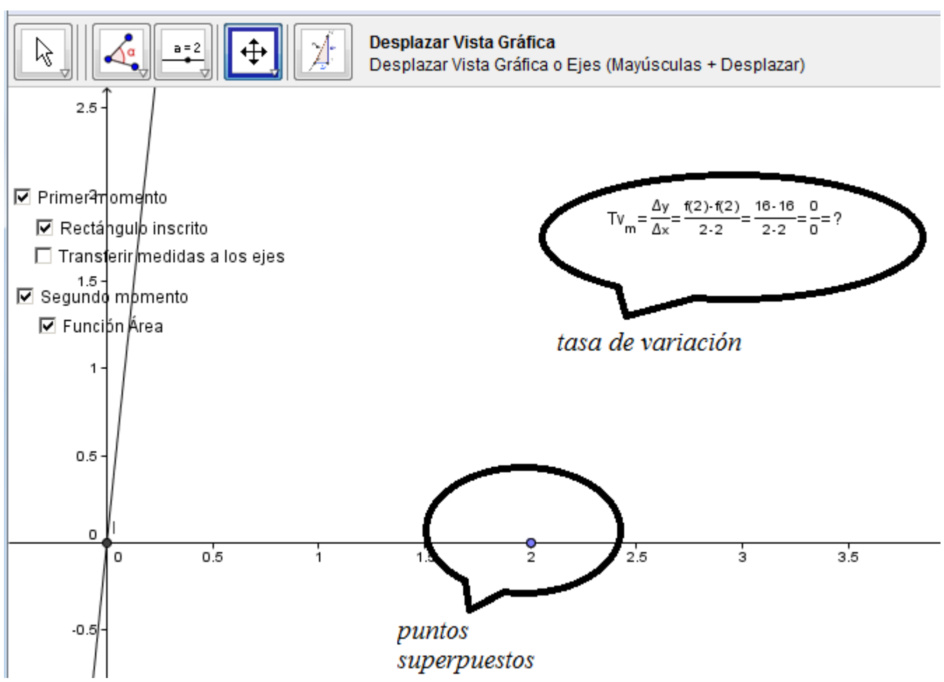


Figura 7. Estrategia para el cálculo de la tasa de variación instantánea realizada por Marcela.

Del diálogo se observa que la idea de límite parece haber sido producto de la interacción de las estudiantes con el software y del hecho que ellas estaban "descansando su razonamiento" en los resultados que se mostraba el texto dinámico, por tanto, al software no indicar un resultado de la expresión en $x = 2$, las estudiantes asumieron el valor del límite como "supuesto" pero no como un valor a alcanzar.

Para profundizar en esta observación, me propuse realizar una entrevista individual con cada una de las participantes. En dicha entrevista, el investigador retoma la experiencia de cálculo del límite de la situación "*rectángulo inscrito*"; en el caso de Marcela se presenta el siguiente diálogo:

Investigador	:	*Entonces vamos nuevamente a mirar aquí la pregunta que de la situación de la clase pasada. ¿Cuánto fue que nos dio en 2?*
Marcela	:	*¿En dos?. . .*
Investigador	:	*La variable en 2, exactamente en 2*
[*]Marcela	:	*De 2 a. . .* [evocó nuevamente la imagen de la tasa de variación media]
Investigador	:	*No, en 2!*
Marcela		*Ahhhhh*, en 2!
Investigador	:	*Esa fue la pregunta que...* [Marcela de inmediato respondió dejando el comentario del investigador inconcluso]
Marcela	:	*Ahh, en 2 daba infinito, daba indeterminado*
Investigador	:	*¿Daba indeterminado?*
Marcela	:	*Pues, cuando yo lo pongo directo,. . . Los dos puntos en 2.*
Investigador	:	*ujum. . . Daba indeterminado ¿ por qué era que te daba indeterminado?*
[**] Marcela	:	*Porque. . . . Porque por estas restas daba 0 sobre 0. Porque cuando el área está,. . . , el área es,. . . , porque cuando el segmento está en 2, el área es 16 y si lo vamos a comparar, pues, si...no me acuerdo!* [silencio] *Daba indeterminada, porque este segmento. . .* [señalando el segmento variable del cuadrado. Hay un momento de silencio]

Se observa en la línea marcada con [*] en el diálogo anterior cómo Marcela, a pesar de haber usado la noción de límite como tendencia, evoca nuevamente la idea de la tasa de variación en intervalo tal y como fue usada en el software. En la línea marcada con [**] Marcela evidencia a través de sus dos momentos de silencio, que no alcanza a determinar argumentos para justificar, desde el contexto del rectángulo inscrito, por qué la tasa de variación en dicho punto es "indeterminada".

Continuando con el diálogo, el investigador le dice a la estudiante "*O sea que yo no puedo decir ¿cómo cambió el área cuando cambió el segmento*?", a lo cual la estudiante responde: "*Noooo pues el área es 16, puede decir eso, pero no lo puedo comparar con otro punto*"

Las respuestas de Marcela crean la necesidad generar experiencias en las estudiantes que posibilite una transición de la tasa de variación media a la tasa de variación instantánea y para ello, se hace necesario superar la imagen de asociada a los extremos de un intervalo así como avanzar en las ideas de límite como "*tendencia*", "*valor supuesto*" o "*tendencia sin llegar*". Ante la necesidad de generar otras experiencias para trascender en las ideas construidas, se diseñó y aplicó la *situación 2* haciendo uso del software Modellus. Al igual que en la situación 1, el estudio comenzó con el reconocimiento de las cantidades que intervenían en el movimiento del vehículo, a través de un diálogo se promueve el reconocimiento de la velocidad y hacer la descripción gráfica de la misma. En trabajo posterior el investigador promovió una comparación de los elementos de las situaciones: "*rectángulo inscrito*" y "*movimiento de un vehículo*". Los hallazgos en este aspecto muestran que, a pesar de que en ambos casos se abordó la misma función matemática y se hizo un análisis de la tasa de variación de forma semejantes, las estudiantes no hicieron una "correspondencia automática" de las características de una situación a otra; así por ejemplo, al preguntarles por lo que significaba la cantidad A (área del rectángulo inscrito) en la situación Nº 1 y X en la simulación del movimiento del vehículo, ellas no conseguían identificar la misma variables para ambos contextos. Intentando hacer una analogía entre ambos contexto, Estefanía afirma que: "*en el problema, mientras crece el segmento el área crecía o disminuía*" y estuvo de acuerdo cuando el investigador señaló que el comportamiento de las cantidades era semejante en ambos casos.

Investigador	:	*Lo que allá era el segmento* [refiriéndose a la situación Nº1] ¿qué es aquí?
Estefanía	:	*La distancia*
Alexandra	:	*El...* [interrumpe Marcela y dice que el movimiento del carro] movimiento del carro
Cristina	:	*El movimiento del carro*
Investigador	:	*El movimiento del carro... ¿Seguras?*
Estefanía y Alexandra	:	*Si!*
Investigador	:	*Y lo que allá era el área, ¿qué es aquí?*
Estefanía y Alexandra	:	*La velocidad*
Investigador	:	*Seguras*
Cristina	:	*La distancia*
Investigador	:	*ujum... Daba indeterminado ¿ por qué era que te daba indeterminado?*
Alexandra	:	*A mí me parece que es la velocidad, ¿no?*

En vista que la respuesta de Cristina estaba en coherencia con los dos valores, se le cuestionó sobre el porqué de su respuesta; pero no dio justificación alguna. Ante este panorama, el investigador escribió en el tablero las ecuaciones:

$A = 2x\,(6-x)$	$X = 2t\,(6-t)$
para la situación Nº1. Rectángulo	para la situación de movimiento del vehículo

El investigador cuestionó de nuevo, *¿Son iguales estas ecuaciones*? A lo que simultáneamente las estudiantes respondieron: "*sí*". Y partiendo de la comparación entre A y X; x y t, ellas, con excepción de Cristina, lograron concluir que:

> *El incremento de A sobre incremento de x*, [en la situación "rectángulo inscrito"] *es análoga a "triangulito* [incremento] *de x sobre incremento de t"*. Simultáneamente el investigador escribió en el tablero la ecuación $\frac{\triangle x}{\triangle t}$.

Ante esta respuesta, mientras el investigador señalaba el cociente incremental escrito en el tablero, preguntó: *¿qué sería el cambio de la distancia con respecto al cambio del tiempo?* A lo que simultáneamente, Alexandra y Marcela respondieron: *"la velocidad"*. Nuevamente el investigador replica *¿Qué es la velocidad?* Y Marcela responde: "la relación entre la velocidad y el tiempo"; Alexandra complementa diciendo *"la variación de la distancia con respecto a la variación del tiempo"*. Las evidencias presentadas en este apartado muestran que tanto Estefanía, como Alexandra y Marcela establecieron conexiones entre las *imágenes* construidas en las dos situaciones. Así mismo, tal y como había mencionado en los apartados anteriores, aunque en la situación: "rectángulo inscrito" las estudiantes reconocieron la noción de límite como una tendencia, ellas no consiguieron aceptar su existencia, en parte, por el valor de 0/0 que se presenta en el momento. En este aspecto, la simulación del movimiento de un vehículo, a través del software *Modellus*, se mostró como un elemento fundamental para la que las estudiantes consiguieran aceptar la existencia de dicho límite. Para iniciar en el reconocimiento de la tasa variación instantánea, el investigador formula la pregunta: *¿Cuál es la velocidad en dos?* Y, aunque se esperaba que las estudiantes respondiera de inmediato “cuatro”, fueron diversas las aproximaciones en cada una de ellas, por ejemplo: Estefanía se mostró pensativa y respondió “16” mostrando así que estaba focalizada en la posición y no en la velocidad. Por su parte, Alexandra señaló que era necesario hacer los cálculos nuevamente con los triangulitos o sacar el límite; después de unos segundos, la estudiante dice con sorpresa, *“ey, no sería también cuatro”*; ante esto el investigador pregunta: *¿Porqué cuatro?* Y de inmediato, Estefanía y Marcela argumentaron que porque era la misma ecuación y la misma tendencia. Esto se convierte en evidencia de un movimiento en las ideas construidas en el cual las estudiantes establecen ciertas conclusiones como:

> *En la situación Nº 1, cuando x (el segmento) se acercaba a dos, cociente incremental del área con respecto al segmento se acercaba a cuatro. Es análogo a que, en la situación actual, cuando el tiempo se acerca a dos, la velocidad se acerca a cuatro.*

En este momento, el profesor les recordó a las estudiantes que en una sesión anterior, ellas afirmaban que la tasa de variación cerca de dos era cuatro, pero que exactamente en dos, ellas decían que no existía porque les daba cero sobre cero. En este momento, el investigador retoma la analogía del problema del movimiento del vehículo y genera el siguiente diálogo:

Investigador	:	*Yo puedo preguntar: ¿cuál es la velocidad que lleva el carro en dos?*
Alexandra	:	*Si.*

Ante el silencio de las otras tres compañeras, el investigador simula con su cuerpo el movimiento del vehículo, cuenta el tiempo y para cuando dice “dos”. Luego pregunta:

Investigador	:	*Exactamente en dos, ¿Cuál es la velocidad?*
Simultáneamente		
Marcela y Alexandra responde	:	*Ocho* [mientras sus compañeras responden, Estefanía se muestra preocupada, y pensando]
Investigador	:	*¿Por qué ocho?*
Marcela	:	*Porque son 16 centímetros digamos, en 2 segundos!* [Estefanía sigue en la actitud pensativa]
Investigador	:	*¿Pero ahí no tendríamos un supuesto?*
Marcela	:	*Pero, ¿usted no nos lo está preguntando en ese punto?*
Investigador	:	*Sí, les estoy preguntando por la velocidad exactamente en dos!*
Estefanía	:	*¡Cuatro!* [La estudiante rompió su silencio y ofreció esta respuesta con ahínco]
Alexandra	:	*¿Si sería cuatro?*
Investigador	:	*¿Por qué cuatro?*
Estefanía	:	*No sé.*

Se observa que tanto en Marcela como en Alexandra evocaron imágenes de la relación de proporcionalidad directa entre la posición y el tiempo, la cual fue revisada una vez que el investigador afirmó que eso implicaba un supuesto. Unos segundos después de diálogo anterior, Alexandra tuvo ciertos insightque fueron evidenciados en el tono enérgico con el que verbalizó “*si, es que es la tendencia*”. Y argumentó en el acercamiento por medio de intervalos.Sin embargo, Marcela no alcanzó a entender lo que Alexandra afirmó y replicó: *¿O sea que es cuatro? ¿Siempre va a ser cuatro?* A lo que Alexandra le contestó: *"Cuando se acerca a dos, es cuatro; ya en otro punto sería otro valor"*.

Para apoyar las conclusiones de Alexandra, el investigador propuso que analizar la el cociente incremental a través del software y registrar su comportamiento en la tabla (ver figura 6).

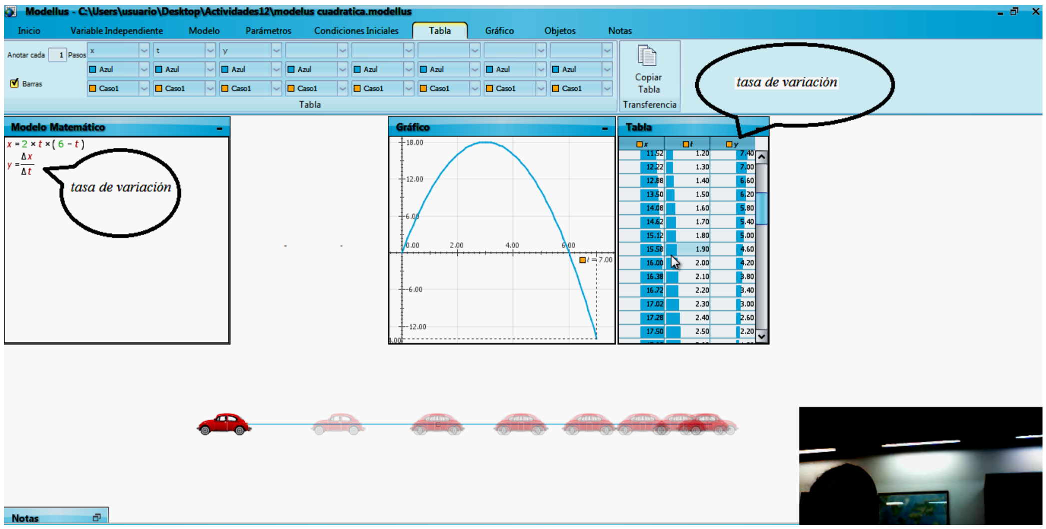


Figura 8. Tasa de variación en el software Modellus.

Esta experiencia con el software, fue determinante para que las estudiantes, en particular Marcela y Cristina, pudieran visualizar nuevamente la tendencia de la velocidad en el tiempo: 2 segundos (ver figura 7).

Tabla

x	t	y
14.62	1.70	5.40
15.12	1.80	5.00
15.58	1.90	4.60
16.00	2.00	4.20
16.38	2.10	3.80
16.72	2.20	3.40
17.02	2.30	3.00
17.28	2.40	2.60
17.50	2.50	2.20
17.68	2.60	1.80
17.82	2.70	1.40
17.92	2.80	1.00
17.98	2.90	0.60
18.00	3.00	0.20

Figura 9. Tabla de la tasa de variación en el software *Modellus*.

En el trabajo a seguir, se verifican algunos valores cercanos a $t = 2$ y cómo la tasa de variación está cada vez más cerca de cuatro, confirmando así lo que se presenta en la tabla de valores.

Nuevamente, la imagen del límite como una tendencia apareció cuando las estudiantes verbalizaron: "*mientras más me acerco a dos, la velocidad está más cerca de cuatro*". Pero en esta oportunidad, la pregunta por la velocidad en dos, ofrecía como respuesta cuatro, contrario a lo que acontecía en el mismo caso, en la situación "rectángulo inscrito" cuando ante la misma pregunta, las estudiantes respondía: "no existe". El siguiente diálogo se convierte en evidencia de este hecho:

Investigador	:	*Cuando el tiempo está cerquita de dos, la velocidad va estar cerquita de:*
Estudiantes	:	*Cuatro.*
Investigador	:	*Y exactamente en dos, ¿Cuál va a ser la velocidad?*
Alexandra, *Marcela, y Estefanía*	:	*Cuatro.*
Investigador	:	*¿Tiene sentido hablar de cuatro?*
Estefanía y Alexandra	:	*Sí.*
Investigador	:	*Hay algún problema si yo, con GeoGebra montara* [superpusiera] *el punto y me diera cero sobre cero?*
Estefanía	:	*No!*
Alexandra	:	*No, porque se puede calcular por límites!*
Estefanía	:	*¡Cuatro!* [La estudiante rompió su silencio y ofreció esta respuesta con ahínco]
Alexandra	:	*¿Si sería cuatro?*
Estefanía	:	*Se pueda hallar por límites.*
Estefanía	:	*No sé.*

En este punto, el investigador hace la reflexión con las estudiantes sobre "su resistencia a aceptar la existencia del límite, y que para ellas solo era una suposición". Ante lo cual las estudiantes señalaron que "*sería como decir que en dos, el carro no tendría velocidad*" y es claro que sí la tiene.

Es evidente en estos episodios que las estudiantes Alexandra, Estefanía y Marcela consiguieron abstraer la existencia del límite, a partir de la abstracción de diferentes imágenes de la tasa de variación media. Este tipo de abstracciones les permitió a las estudiantes reconocer la propiedad:

$$Tv_{instantánea} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

4. Discusión y conclusiones

En la evolución de la idea de límite como "supuesto" por parte de algunas de las estudiantes hubo al menos dos aspectos que vale la pena reconocer y discutir, a saber:

- El uso de una cantidad de magnitud como la velocidad para interpretar la tasa de variación (desde el contexto de la física) mostró un factor que potenció la existencia del límite. Verbalizaciones como "*sería como decir que en dos, el carro no tendría velocidad*" se convierten en evidencia de la necesidad de involucrar ciertos contextos en el estudio de conceptos matemáticos. La tasa de variación instantánea en la situación del rectángulo inscrito, no se mostró natural, ni fácil de entender para los estudiantes, quizás porque la cantidad que se obtenía por medio de la tasa de variación " $\frac{cm^2}{cm}$" no es una magnitud físicamente tangible, ni cotidianamente perceptible, contrario a ello, es un poco artificiosa, más aun, cuando en la muchos casos, los contextos de área y perímetro, son usados para determinar máximos y mínimos, pero pocas veces, para determinar tasas de variación.

- El papel del software *Modellus* fue fundamental, no sólo para recrear el ambiente de un movimiento uniforme y acelerado, sino también porque mediante su manipulación, las estudiantes pudieron observar diferentes registros de representación de manera simultánea y así poder aproximarse a una comprensión de la tasa de variación instantánea.

Durante toda la investigación pudo observarse diferentes momentos conceptuales por los cuales atravesó la tasa de variación, a saber:

- *Momento 1. La tasa de variación y tasa de variación media.* En este momento otros conceptos como los de proporcionalidad, variable, función estuvieron presente, de igual manera, la noción de tasa de variación se observó como la "comparación de dos estados" en cuya representación bajo el mecanismo de triángulo jogó un papel fundamental en su compresión. Así mismo, pudo observarse que el uso de descripciones cualitativas, comparación aritmética de dos estados, cantidad magnitud que describe el cambio promedio de una cantidad por unidad de cambio de la otra unidad.

- *Momento 2. La tasa de variación instantánea.* Para desarrollar la idea de tasa de variación instantánea se observó que la situación 1 no fue suficiente; sin embargo, en la comparación de los contextos, el estudio de un "fenómeno cotidiano" como el movimiento se hizo que las ideas sobre el concepto no se produjeran solo desde las acciones del software sino también que se lograra hacer ciertas abstraciones sobre tales acciones. Desde este estudio puede observarse la comprensión de la tasa de variación instantánea demanda por parte del estudiante:

  - Superar la idea de limite como supuesto.
  - "Comparación o "transferencia" entre contextos.
  - Tasa de variación como una cantidad asociada a una magnitud en "contexto".

Hubo un tercer momento denominado de la *función tasa de variación a la función derivada*, sin embargo su analisis escapa al proposito de este documento. El lector interesado puede remitirse al documento Villa-Ochoa (2011b) para ampliar en este aspecto.

Agradecimientos

Al Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación-Colciencias por el apoyo a la realización de la investigación "*La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren*"a través de la convocatoria Créditos Condonables 2007. También agradezco a los doctores Carlos Mario Jaramillo y Pedro Vicente Esteban por sus continuas revisiones y valoraciones a este trabajo.

Referencias

Dall'anese, C. (2006). Argumentos e Metáforas conceituais para a taxa de variação. Tese de doutorado nãopublicada, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Dolores, C. (2007). Elementos para una aproximación variacional a la derivada. México D.F: Ediciones Dias de Santos - Universidad Autónoma de Guerrero.

Dolores, C., Chi, A. G., Canul, E. R., Cantú, C. A., & Pastor, C. G. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñazan de la matemática. UNON. Revista iberoamericana de Educación Matemática (18), 41-57.

Goldenberd, M. (2007). A arte de pesquisar.Como fazer pesquisa qualitativa en Ciências Sociais. Rio de Janeiro: Record.

Sánchez-Matamorros, G., Garcia, M., & Llinares, S. (2008). La compresión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. RELIME. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 11 (2), 267-296.

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. ZDM. Mathematics Education, 41 (4), 481-492.

Villa-Ochoa, J. A. (2011b). La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, Medellín.

Villa-Ochoa, J. A. (2011a). Raciocínio "covariacional": O caso da função quadrática. Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife: Comité Interamercano de Educação Matemática.

Yin, R. (2009). Case study research, Design and methods. Thounsand Oaks, California: Sage Publications, Inc.

MÚLTIPLES ASPECTOS DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Martha Isabel Fandiño Pinilla
Universidad de Bologna y de Bolzano, Italia.

1. Unicidad y multiplicidad de factores

El aprendizaje de la matemática, tal vez, el más estudiado entre los aprendizajes disciplinares, se presenta como un factor múltiple, rico de miles de aspectos: salta a la vista de todos los docentes el hecho que un aprendizaje concluso con éxito en matemática es de considerarse una óptima combinación de aprendizajes específicos y diferentes. En matemática, de hecho, no basta haber *construido* un concepto, sino que es necesario saberlo *usar* para efectuar cálculos o dar respuesta a ejercicios; combinarlo con otros o con estrategias oportunas para *resolver* problemas; es necesario saber *explicar* a sí mismo y a los otros el concepto construido o la estrategia seguida; se requiere un uso sapiente de las transformaciones semióticas que permiten *pasar* de una representación a otra.

Incluso estas primeras palabras, confirmadas por la práctica sea en la didáctica como en el proceso de evaluación, muestran tanto la absoluta complejidad como la especificidad del tema. Para evitar equívocos, lo hemos dicho y volveremos a decirlo, estas "componentes" del aprendizaje no son ni independientes, ni separables, ni con intersección vacía: el resultado positivo en el aprendizaje se logra sólo gracias a una serie de concausas, a un conjunto holístico de componentes.

Sin embargo, en este escrito, gracias a la práctica concreta que se encuentra a la base de la acción didáctica de los docentes, y respaldada por la experiencia ya sea como docente, como investigadora y como formadora (inicial y en servicio) de docentes, propondré un análisis detallado y específico de estos aprendizajes, como si fueran independientes, conciente de que no lo son del todo.

¿Cuál es el objetivo? Sucede, en más de una ocasión, que un estudiante manifiesta no haber logrado el aprendizaje en matemática, en forma confusa y no muy bien delineada. Es más, el *mismo* error, de dos estudiantes diversos, no dice cuál fue la *causa* que indujo dicho error, cuál fue el malestar cognitivo, qué no funcionó en el proceso de enseñanza - aprendizaje. Lo que parece ser "el mismo error", puede tener causas diversas; un docente, no debe intervenir sobre el error, si desea poner remedio a una situación negativa, debe intervenir sobre la *causa* que lo generó.

Si el alumno no alcanza el éxito en una prueba de matemática, sería oportuno entender a cual de las precedentes componentes se debe adscribir el fracaso; ¿el estudiante no entendió el concepto que habría debido usar?, ¿no entendió el proceso algorítmico que se auspiciaba de él?, etcétera. Por tanto, consideramos que un análisis detallado de las componentes del aprendizaje en matemática puede ser de gran ayuda para encontrar las causas del error y remediar en forma específica.

Pero no nos limitaremos a esto únicamente. ¿Cómo se puede evaluar en matemática?, ¿Tiene sentido hacerlo en forma burda y no específica?, ¿Qué significa: «Bruno no entiende la matemática»?, ¿Ha fracasado en matemática, no tiene conocimiento matemático? Imposible que Bruno sea absolutamente... privo de *todo* aspecto del aprendizaje matemático.

Si entendió el concepto y no lo sabe usar, es inútil insistir en el aprendizaje del concepto: si no lo entendió, pero de cualquier forma logra manejar las fórmulas, en la primera ocasión, diferente de aquella rutinaria, cederá; se vuelve entonces necesario ayudarle en la construcción del concepto; y así sucesivamente.

Por tanto, para cada uno de los cinco apartados de esta conferencia, no sólo se presentarán cada una de las componentes del aprendizaje de la matemática, sino que se propondrán, además, algunas actividades centradas en esta componente y en su evaluación de forma específica, separándola de la evaluación de las otras componentes.

No obstante los límites de esta división, consideramos que dicha propuesta podrá ayudar a los docentes en su acción cotidiana de formación de futuros ciudadanos en matemática.

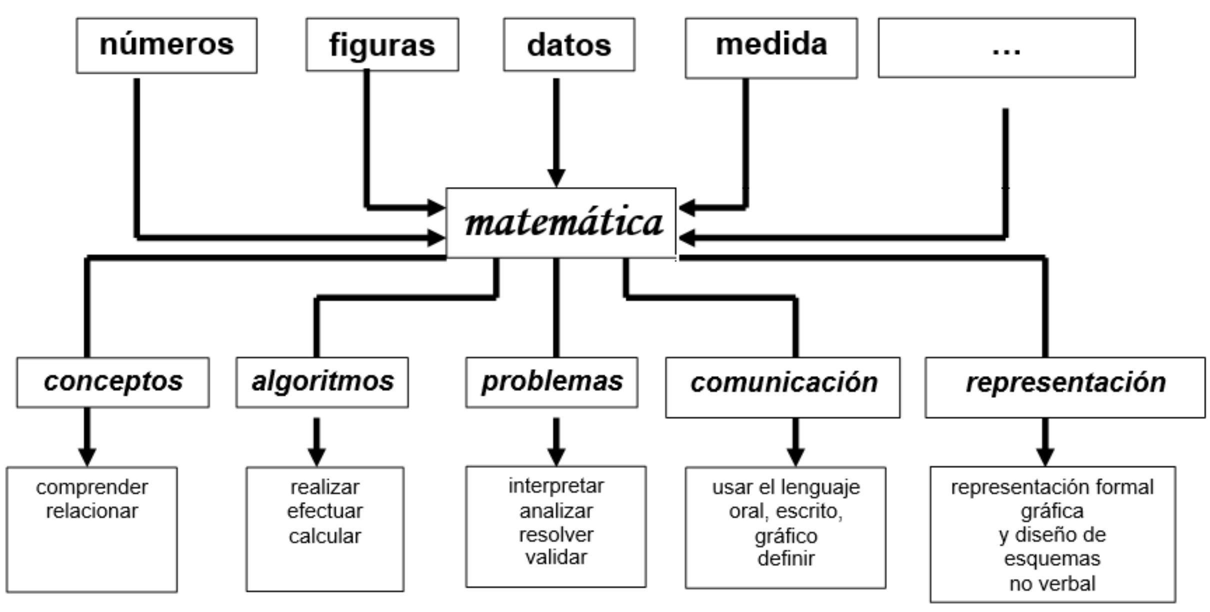
2. Diversas componentes en el aprendizaje de la matemática

El aprendizaje de la matemática comprende como mínimo 5 tipologías de aprendizajes diferentes, aunque no libre de superposiciones:

- Aprendizaje conceptual (noética);
- Aprendizaje algorítmico (calcular, operar, efectuar, solucionar,...)
- Aprendizaje de estrategias (resolver, conjeturar, deducir, inducir,...)
- Aprendizaje comunicativo (definir, argumentar, demostrar, validar, enunciar,...)
- Aprendizaje y gestión de las representaciones semióticas (tratar, convertir, traducir, representar, interpretar,...)

Esta división no debe ser tomada literalmente, dado que, como ya lo hemos dicho, estas componentes se entrelazan reforzándose la una con la otra; sin embargo, dicha división ofrece una indudable comodidad de análisis y de lectura interpretativa de los errores, es decir, de aquellas manifestaciones de malestar cognitivo a las cuales sería bueno remediar positivamente, de forma eficaz. No es ni menos garantizado que su unión logre abarcar todas las componentes del aprendizaje matemático y que, por lo tanto, un análisis mucho más profundo no evidencie otras componente necesarias.

Sólo como ejemplo; junto a docentes de la escuela primaria hicimos una lectura específica de cada una de las componentes de la matemática de dicho nivel escolar, dado que se usaba identificar, hace algunos años, la matemática con el conjunto de componentes disciplinarios como números, figuras, medidas, datos y pensamiento racional (transversal). Entonces cada una de dichas componentes disciplinarias puede ser analizada a través de las cinco componentes enunciadas líneas arriba y de proporcionar útiles indicaciones sobre cómo actuar didácticamente y cómo remediar a situaciones de fracaso en el aprendizaje.



3. Saber y saber hacer: unicidad y diferencias

Iniciamos haciendo una distinción terminológica, muy discutida, sobre la cual es necesario aún reflexionar.

Saber. Hoy todos concordamos, por lo menos genéricamente, en el carácter "constructivo" del aprendizaje: aprender un concepto matemático, aprender a hacer uso de un algoritmo, a comportarse en modo estratégico, a comunicar *la* matemática y *con la* matemática,... son todos comportamientos a través de los cuales se *construye* un objeto matemático. El primer interprete de la construcción de un aprendizaje es quien lo construye; por tanto, una de las primeras acciones didácticas consiste en enseñar, en promover, en reflexionar sobre las propias estrategias personales, para percibirlas como propias, para evaluarlas. Quien está aprendiendo es el autor principal de su (propia) construcción de aprendizaje.

Saber hacer. Pero, consideramos que el saber por sí sólo, extrapolado de su contexto de uso, no llega a ser considerado saber, y esto vale no sólo para la matemática. Parece absolutamente necesario saber usar en contextos oportunos el concepto construido. *El saber hacer* sin el *saber* no es un saber, dado que carece del componente fundamental del saber, que es aplicativo y constructivo. Así, viceversa, el *saber* sin el *saber hacer* es vacío y estéril.

Para mayor claridad recurrimos a un ejemplo. Aún admitiendo que existan sutiles diferencias entre un objeto como "recta" y uno como "demostración" y uno como "operación de división", consideramos que en la fase de aprendizaje no haya, o no requiera, demasiadas distinciones; creemos que la operatividad (el llamado "saber hacer") exija tanto del uso de conceptos, como de estrategias (el "saber resolver",...) como de actividades algorítmicas (el "saber calcular", el "saber operar",...) etc.

Por tanto, el "saber" se mezcla con el "saber hacer" y sólo una sabia mezcla de estos tiene el derecho de ser llamado: aprendizaje consciente, *saber*. Una antigua distinción que separaba el "saber" del "saber hacer" tiene el sabor de cosa superada, al menos en el campo específico del aprendizaje matemático en el cual el concepto no es nunca el concepto únicamente sino que incluye el uso que de este se hace a cualquier nivel. A partir de este momento no se harán más distinciones entre "*saber*" y "*saber hacer*" pues estos dos aspectos se engloban en el *saber* mismo sin hacer diferencias.

4. Evaluar: un proceso

Una de las funciones que caracterizan con mayor fuerza la acción del docente en el aula es la constante "evaluación"; para decirlo brevemente, este proceso consta de por lo menos tres componentes distintas pero, aún una vez más, estrechamente relacionadas entre ellas (Fandiño Pinilla, 2002) evaluación:

- De la propia acción didáctica,
- Del segmento curricular elegido y
- Del proceso de aprendizaje de sus propios estudiantes.

Con relación con este último aspecto, el término "evaluación" se entiende aquí como el conjunto de las acciones mediante las cuales se reconocen las características del aprendizaje de los estudiantes y se determinan los aspectos en los cuales se debe centrar la ayuda que permite garantizar mejor este aprendizaje.

Obviamente dichas "acciones" conllevan un juicio sobre la eficacia de la propia acción didáctica y sobre el segmento curricular sobre el cual se está construyendo el aprendizaje. En este marco de acción, el docente debe prestar atención a los instrumentos a través de los cuales mide el juicio de cada uno de los estudiantes, en relación con el aprendizaje de la matemática. No se puede y no se debe pensar en un único instrumento para esta evaluación; la investigación ha evidenciado la *necesidad* de hacer uso de varios y diversificados instrumentos.

Entrando con profundidad, analizamos adjetivos que, generalmente, se asocian al sustantivo "evaluación". Una distinción pedagógica que tuvo fortuna es aquella que concierne a la distinción entre evaluación "formativa", "sumativa" y "evaluativa"; y que internacionalmente están definidas así (DES, 1987):

- La "evaluación formativa" toma en examen el desempeño de un estudiante en relación con sus objetivos cognitivos, en modo de favorecerla sobre la base de los resultados; se incluye en esta, por lo general, la "evaluación diagnóstica" en la cual se identifican las dificultades del estudiante, sea en lo relacionado con el aprendizaje, sea por lo que respecta la falta de comprensión.

- La "evaluación sumativa" mide y sintetiza las realizaciones del estudiante de forma sistemática; esta se reduce generalmente a un adjetivo, un número, una letra, y está destinada no sólo al estudiante y al docente, sino también al externo, a la familia, a la institución escolar.

- La "evaluación evaluativa" (que en español parece una repetición, pero que en inglés es llamada "*evaluative assessment*") comprende una evaluación en relación con el trabajo del docente, sobre la escuela, sobre el currículo o sobre un parte de este,..., históricamente esta última tiene como mínimo las siguientes cuatro funciones (Cardinet, 1983):

    - Efectuar un balance sobre aquello que el estudiante está en grado de realizar en un determinado momento del proceso de enseñanza y aprendizaje.
    - Guiar la sucesiva fase del aprendizaje sobre la base del balance precedente (sea en relación con los contenidos, sea en relación con las metodologías).
    - Descubrir las causas de las dificultades del estudiante.
    - Estimular el éxito del estudiante, con el objetivo de encontrar la forma de favorecer el aprendizaje.

Una terna con significados deferentes del término "evaluación" aparece también en Frabboni (1999) quien distingue entre "predictiva", "formativa" y "sumativa"; pero, a estas tres acepciones, que se refieren al estudiante, él agrega explícitamente una «evaluación de la escuela como sistema».

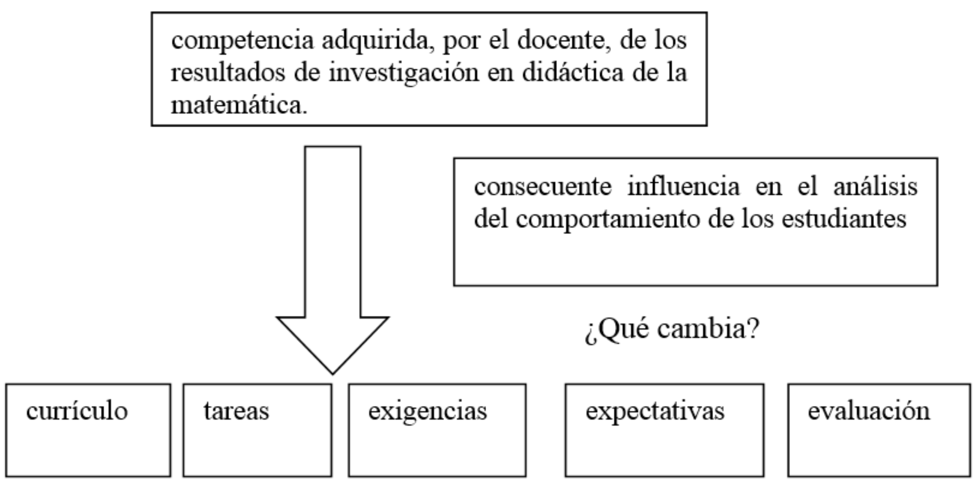
Respecto a estas tendencias "clásicas" de interpretar la idea misma de evaluación, el momento actual exige, cada vez con mayor fuerza, tener presente la didáctica de la matemática en la formación docente dado que ya son muchos los jóvenes docentes que entran en el mundo de la educación y docentes en servicio que han frecuentado cursos específicos de esta disciplina.

La disciplina "didáctica de la matemática" tiene por lo menos tres decenios de historia, un gran número de investigadores activos en el mundo, un lenguaje compartido, revista propias (tanto de investigación, como de divulgación, como "mixtas"), seminarios de investigación y de divulgación propios, congresos,..., lo cual hace que su difusión real sea cada vez más amplia.

¿Qué sucede, desde un punto de vista profesional, al docente que hace investigación o al docente que, simplemente, viene a saber de los resultados de la investigación? Gracias a la llamada difusión, la comunidad de estudiosos de didáctica de la matemática tiene finalmente la posibilidad de responder a esta pregunta; aquí lo presentaremos de la forma menos complicada posible: el docente y/o investigador, una vez conocidos los resultados de la investigación, *cambian* (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2004; Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori y Sbaragli, 2006). Cambian radicalmente su comportamiento, el cual se hace mucho más atento, más crítico, menos disponible a dar por descontado que ciertas actividades garantizan el aprendizaje sólo por que fueron sugeridas por alguien de alto nivel (o así considerado) o porque dicha actividad es ya una práctica consolidada por la tradición.

Por ejemplo, veamos cómo la "teoría ingenua de conjuntos", fuertemente cuestionada por serios estudios en el ámbito de la investigación en epistemología del aprendizaje (Pellerey, 1989), fue lentamente abandonada de la práctica didáctica, posición sostenida incluso por algunos de sus más aguerridos sostenedores; o, por lo menos, fue redimensionada la fe ciega de la cual gozaba en los años '70 y '80: de disciplina - panacea se transformó en un lenguaje que se usa sólo cuando es estrictamente necesario; como el uso de instrumentos didácticos pre-confeccionados, cuya utilidad didáctica era incondicionalmente aceptada por muchos docentes; hoy, este uso es menos a-crítico (D'Amore, 2002); como se han modificado las expectativas de los docentes de la escuela secundaria después de los estudios sobre el aprendizaje de la demostración: mientras que hasta hace algunos años se daba por descontada la competencia lingüística - lógica de los estudiantes de 14 años y como consecuencia la idea de demostración, por lo menos para la geometría; hoy se considera que dicha idea necesita de una práctica didáctica explícita (y no es a los 14 años precisamente, sino mucho más tarde) (Duval, 1991, 1992-93; Hoyles, 1997).

Cambian, decíamos, la actitud: fatalmente, el docente que entra en contacto con ciertos resultados de investigación no los puede ignorar después; ve, reconoce en el comportamiento de sus estudiantes en aula y en el propio actuar profesional, la confirmación de aquellos resultados y de consecuencia la propia interpretación de las conductas debe ser modificada:



Examinaremos en detalle estos "cambios" de actitud.

*Este cambio afecta el currículo.*El docente se vuelve más atento a la congruencia de las propias elecciones didácticas; consciente que existen, por ejemplo, obstáculos didácticos y epistemológicos, o reconoce la influencia del contrato didáctico; no acepta la aparente congruencia, en el sentido de consecutividad de los argumentos, que antes lo satisfacía y lo tranquilizaba, sino que comienza a ponerse el problema del análisis del currículo sobre la base de los resultados cognitivos de sus estudiantes, de su propia acción didáctica, aceptando de consecuencia una revisión crítica y metodológica simultáneamente (Fandiño Pinilla, 2002).

Este cambio afecta la definición de las tareas del docente y del estudiante.

El docente que entra en contacto con los resultados de la investigación, pone en discusión, eficaz y significativamente:

- Sus tareas, sus expectativas;
- Las tareas del estudiante, sus expectativas, las imágenes que se hace de la disciplina y de su enseñanza.

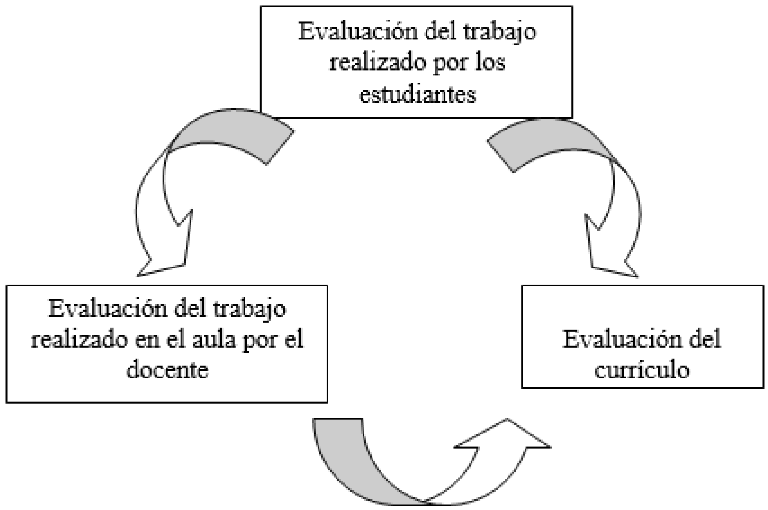
Se vuelve por lo tanto, más en general y en todo momento, atento a lo que sucede en el frente de quien podríamos definir el actor empeñado en la acción de construir conocimiento, su estudiante (muchas veces, en precedencia, ignorado como actor).

Este cambio afecta las nuevas exigencias que el docente pide a su preparación profesional. Tenemos la prueba en los siguientes hechos:

- El docente en servicio pide a la universidad siempre menos actividades de actualización y formación cuyo foco sea el contenido matemático y se dirige siempre más a especialistas de la didáctica, conciente del hecho que entre más conozca los resultados de la investigación didáctica mayor será, en primer lugar su capacidad crítica de análisis de la situación de aula, y en segundo lugar su propia profesionalidad;
- El docente en formación inicial no lo sabe, precisamente porque está en formación inicial, pero la elección ganadora de la sociedad contemporánea de todos los países es centrar la formación de los docentes de matemática en la didáctica de la matemática, obviamente después de una salda preparación disciplinar la cual resta de todas formas la base de toda la preparación cultural y profesional.

Este cambio afecta las expectativas que la práctica docente tiene de la sociedad y viceversa. Parece inútil que la sociedad exprese sus expectativas generales con respecto a la escuela, si estas expectativas no están en relación con los resultados de la investigación en didáctica. La profesionalidad nueva y atenta del docente informado lo lleva a redefinir esta relación y, en particular, a rediseñar su papel como eficiente ejecutor de los planes educativos que la sociedad le ha asignado. *Este cambio afecta la evaluación* (y es sobre este aspecto que pretendemos hacer una mayor reflexión):

- La evaluación del trabajo realizado por el estudiante:el docente, informado de los resultados de la investigación en didáctica mira con diferente óptica, más analítico, crítico, observador, el trabajo de construcción del conocimiento de cada uno de sus estudiantes; incluso, la más banal de las evaluaciones, entendida como medida del conocimiento, como "nota" de asignar al estudiante sobre la base del resultado de su empeño, cambia notablemente.
- La evaluación del propio trabajo hecho en aula:de acuerdo con los resultados de aprendizaje obtenidos por sus estudiantes, el docente informado de los resultados de la investigación en didáctica está en grado de analizar críticamente su actuar al interno del aula, rediseñando sus estrategias metodológicas y sus elecciones.
- La evaluación del currículo:el docente informado de la investigación en didáctica está en grado de re-pensar al desarrollo curricular en cada uno de sus aspectos, asumiéndose en primera persona la crítica a dicho desarrollo y creando condiciones constructivas oportuna para una seria y en ocasiones profunda transformación.



Debemos hacernos preguntas de base: ¿*Por qué* se evalúa y *qué* se evalúa?, no obstante las respuestas parezcan obvias; dicha obviedad es muchas veces el resultado de una forma ingenua de afrontar el problema.

Se evalúa para tomar decisiones sobre el contenido (transposición didáctica) y *sobre la metodología de trabajo en aula* (ingeniería didáctica). A partir de los datos recogidos gracias a observaciones en el aula (hechos que describen los alumnos durante el trabajo matemático) y gracias al análisis de los resultados de las tareas (entendidas en general: tanto las "clásicas" escritas u orales, como las menos tradicionales), se pueden identificar puntos fuertes y puntos débiles de cada uno de los estudiantes (esto depende en gran parte del tipo de instrumento de evaluación que se adopta) y así decidir de consecuencia por las elecciones relativas a la transposición didáctica y por una determinada ingeniería didáctica, adecuadas a las necesidades de cada uno de los componentes del grupo clase.

Se evalúa para tomar decisiones sobre el ambiente clase. En una hipótesis constructivista, es dado por cierto que la implicación personal es el primer paso hacia la construcción de un conocimiento, hacia el aprendizaje; por tanto, evaluar si esta fue alcanzada es un paso de extraordinaria importancia. De esto deriva, como consecuencia, que el ambiente dominante en aula es fundamental. Esto significa que es de vital importancia que haya, por así decirlo, en una primera instancia, confianza en la acción del docente. Preguntas como: ¿Los alumnos se dan cuenta si al docente le gusta enseñar matemática?, ¿La resolución de los problemas y el descubrimiento son aspectos habituales en la hora de matemática?, ¿Los alumnos tienen la oportunidad de explorar y de experimentar sin sentir la presión de estar bajo juicio? ¿En el momento de dar una nota, se tiene en cuenta algo más que la respuesta correcta a un ejercicio?,... asumen importancia estratégica en la formación del ambiente de clase adecuado.

Se evalúa para comunicar a los alumnos lo que es importante. Los alumnos son capaces (es más, son habilísimos) de reconocer aquello que implícitamente el docente considera importante; por ejemplo, si frente a un trabajo escrito el docente revisa el proceso seguido por el estudiante, sólo cuando la respuesta final no es la correcta, con el fin de encontrar el error, implícitamente está enseñando que el proceso no es importante, que es secundario respecto al resultado (es decir al producto).

Se evalúa para dar una calificación. En esta enumeración, es la última de las razones por las cuales se debe evaluar, pero ciertamente la de mayor difusión. Los alumnos deben por el contrario tener bien claro que *evaluar* no es sinónimo de *dar una nota*. Cuando se da una nota, se debe tener presente que:es necesario el uso de diversos instrumentos y técnicas, como lo veremos más adelante;

es posible que el trabajo del estudiante sea diferente del trabajo usual cuando sabe que su trabajo será objeto de una calificación; y sin embargo los estudiantes deben saber con anticipación cuando un determinado trabajo que están por realizar será sometido a juicio;se requiere usar siempre un sistema de evaluación que tenga en cuenta tanto el proceso como el producto.

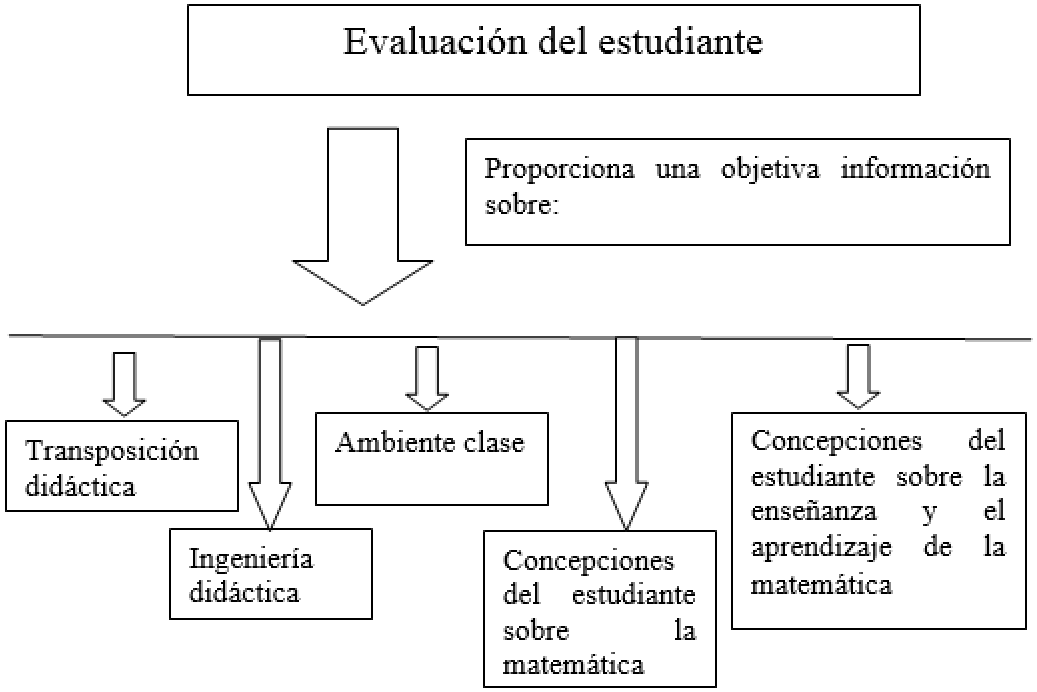
Las discusiones sobre los métodos y criterios de evaluación en matemática tienen raíces antiguas (en Giménez Rodríguez, 1997 se ofrece una panorámica diacrónica y sincrónica de gran eficacia; véase también Fandiño Pinilla, 2002).

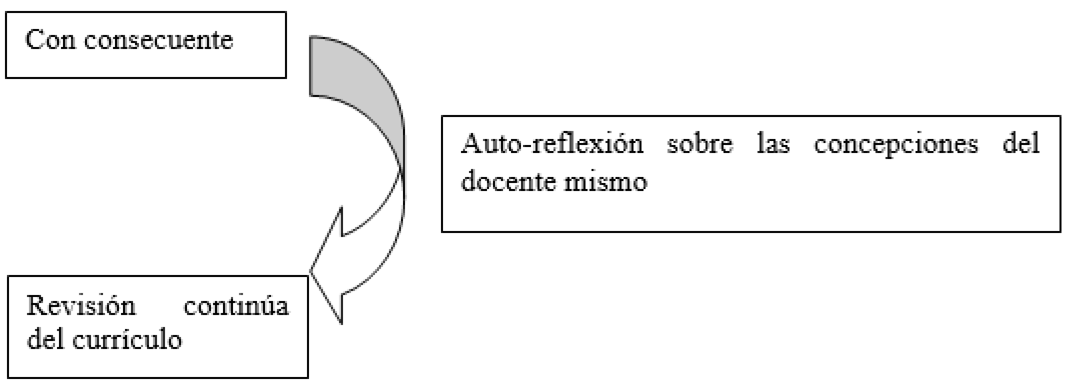
Consideramos necesario que sea claro que las modalidades concretas para realizar evaluaciones serias son muchísimas, no existen únicamente los cuestionarios o la solución de ejercicios o la resolución de problemas: hoy la investigación ha elaborado formas de evaluación sofisticadas, mucho más atendibles y significativas. Cuando llegue el momento, en el desarrollo de este libro, explicitaremos algunos de estos instrumentos.

En los apartados precedentes, privilegiemos la "evaluación para medir, para dar una calificación". Pero no olvidemos que, como ya lo dijimos:

- Se evalúa para tomar decisiones sobre el contenido (transposición didáctica) y sobre la metodología del trabajo en aula (ingeniería didáctica)
- Se evalúa para tomar decisiones sobre el ambiente de clase
- Se evalúa para comunicar a los alumnos lo que es importante, como lo analizamos líneas arriba.

A través de oportunas técnicas de evaluación, el docente recibe informaciones claras sobre la eficacia de su acción didáctica en aula y por tanto de los contenidos tratados, de la metodología; obtiene además informaciones sobre el ambiente de clase; tiene la posibilidad, particularmente con pruebas que podemos llamar no tradicionales, de comunicar incluso explícitamente que es importante y que no lo es.





El análisis histórico de la evaluación, del sentido y de la función que le ha asignado la historia, de sus aspectos sociales etcétera, sería de gran interés, pero no es este el propósito de este libro; por lo tanto reenviamos a los textos enunciados precedentemente.

Así, existen varias teorías sobre la evaluación, teorías llamadas científicas, en sentido estricto, curricular, sobre las cuales invitamos a leer en los mismos textos citados precedentemente.

Precisamente, estas profundas reflexiones llevaron en el tiempo a establecer los criterios de tener presente en la evaluación, los métodos generales y específicos más adecuados, los instrumentos y sus funciones, que significa validar los resultados que se obtienen con esta actividad.

Uno de los temas más interesantes es aquel de la relación entre convicciones de los docentes y evaluación; es obvio que diferentes convicciones impliquen diferentes evaluaciones. Pero, sobre todo esto, ya se hizo un profundo análisis por lo cual consideramos no sea necesario reportarlo aquí (Fandiño Pinilla, 2002).

Pero, una lectura como la que sigue, tiene sentido y es eficaz sólo si el docente que lee quiere hacer uso de los resultados reportados y si ya posee una buena capacidad crítica; deseamos aquí subrayar que, para nosotros, estas son las características de una innovación en la evaluación en matemática. La forma más eficaz es la de hacer una breve lista de las condiciones que parecen determinar actualmente el sentido que tiene la innovación en la evaluación; lo haremos por puntos, buscando reutilizar algunos términos técnicos, evitando en lo posible largas explicaciones.

Las características principales de una innovación en la evaluación de un proceso sistemático de enseñanza - aprendizaje de la matemática, extrapoladas de los trabajos de investigación, son las siguientes:

- Una cuidadosa elección y descripción explícita de criterios y objetivos, con referencia a contenidos, en un modelo crítico - orientativo. Es así como la matemática debe ser considerada como una construcción significativa; la lista de los contenidos no es estática, por el contrario, ampliamente dinámica; debe ser incluida la valoración de los progresos locales de cada uno de los estudiantes; la elaboración de las actividades debe ser consecuencia del proceso o por lo menos relacionarse con este y no viceversa es decir fijada a priori de forma definitiva.

- La evaluación es vista como compleja y multidimensional, así como lo es el complejo proceso sistémico de enseñanza - aprendizaje.

- La evaluación no se restringe a un punto o a una cierta acción, por el contrario, debe ser realizada a lo largo de todo el arco del proceso de enseñanza - aprendizaje, dado que esta se considera una parte integrante de dicho proceso. La evaluación, por tanto, es continua y global.

- La evaluación debe ser adapta al estudiante evaluado y debe tener presente la diversidad. Evaluar significa también reconocer y aceptar las características individuales. La atención por la diversidad se extiende a la evaluación del currículo y del trabajo del docente.

- La evaluación implica el desarrollo de habilidades de tipo comunicativo. Esta favorece la adquisición de competencias incluso de tipo instrumental. El estudiante podrá desarrollar conceptos, procedimientos, actitudes y mejores estructuras, siempre que se mueva en esquemas no fijos, de forma tal que todo sea aplicable de forma independiente en las situaciones particulares; desde esta interpretación hablamos de "competencias estructurales". El proceso de aprendizaje, entendido en un este vasto sentido, debe ser autorregulado; es decir favorecido de momentos de análisis crítico del proceso, replanteamientos y evaluaciones de carácter meta-cognitivo. En todo esto juega un papel esencial la explicitación, por parte del docente, de todo aquello que él piensa que deba suceder en el aula, en el proceso de enseñanza - aprendizaje y en el proceso de evaluación. Por último, se debe agregar la solicitud de claridad, con el objetivo de evitar ambigüedades sea en la asignación de las tareas, sea en la explicitación de las expectativas. Esto no debe entrar en contraposición con la idea de situación a-didáctica: no se debe confundir el contexto de enseñanza, es decir la elección de "buenas situaciones" de proponer para lograr los objetivos cognitivos, con las reflexiones sucesivas, o con la explicitación de los momentos de evaluación.

- El conocimiento adquirido debe tener un alto grado de aplicabilidad no sólo endógena, sino, básicamente, de carácter exógeno. Pero no basta: el estudiante debe reconocer este hecho y saberlo expresar a través oportunas situaciones: debe tener la sensación que el conocimiento adquirido influencia su competencia que resulta útil y evaluable.

- ¿Qué sucede en el proceso, cómo viene analizado antes y registrado después el nivel de calidad de la evolución cognitiva? De este punto se ocupa el "control". El control interviene, incluso si parece paradójico, en vía preliminar, en el momento de proyectar el currículo o, por lo menos, la parte específica del proyecto de la evaluación; pero está siempre presente para alcanzar una re-proyectación constante, para articular formas de regulación y de autorregulación. Precisamente estas son las características que determinan un sistema abierto respecto a uno cerrado. Esto implica una actividad de tipo diverso de las pruebas de evaluación "usuales", recurriendo a la formulación de conjeturas, su verifica y su defensa, a la verificación del dominio de situaciones diversas que caen bajo el mismo conocimiento, a la redacción de textos, diseños, gráficos,.. Pero ¿cómo reconocer si las técnicas de control (entendido en este sentido) son adecuadas? Podemos decir que un control es adecuado sí ese mismo produce informaciones adecuadas para ser usadas a fin de mejorar las competencias de cada uno de los estudiantes y el proceso individual de construcción de conocimiento.

- La investigación actual sobre la evaluación, reflejando una dirección general que podemos pensar común a toda la didáctica de la matemática, está dando mucha importancia a la motivación y a los aspectos afectivos. Sobre estos aspectos debemos centrarnos, para ayudar al estudiante a crecer también en el gusto de tomar decisiones. Por ejemplo, si el estudiante hace preguntas sobre el procedimiento que debe seguir en una actividad, es contraproducente, desde este punto de vista, sugerir como proseguir; por el contrario, es aún más productivo motivar, responder con otra pregunta que lleve a reflexionar sobre la situación, sugerir un análisis, una analogía, una estrategia que el estudiante no había visto o pensado; es inútil dar indicaciones que aumenten el nivel de la propuesta, dirigiéndola a un nivel mayor (de un ejemplo a la generalización; de un ejercicio a la comparación estructural; de la defensa de una conjetura a la demostración; sólo para dar algún ejemplo concreto). Siempre en este ámbito, queremos subrayar la importancia que tiene el hecho que el estudiante entienda que el docente decidió aceptar su situación personal, ya sea en términos de elecciones, ya sea en lo que respecta una eventual condición de objetiva diversidad.

- Una moderna idea de evaluación, que tenga en cuenta de los resultados de la investigación, debe plantearse el problema de la formación. De una parte, la formación de los estudiantes sobre el tema: explicitar las problemática, hacerlas evidentes y contribuir a hacer sí que incluso la evaluación sea elemento vivo y presente en la vida de aula. Por otra parte, no siempre obvio en la formación inicial o en servicio de los docentes.

- Una moderna idea de evaluación, que se proponga como innovadora, no puede prescindir de la exigencia que esta sea coherente y ecuánime, de forma tal, que se gane la confianza de todos, de los estudiantes, de sus familias, de los docentes, de la noosfera. La coherencia más compleja de obtener parece ser aquella entre lo que se hace en matemática y cómo este hacer viene evaluado; este punto debería ser desarrollado dando valoraciones explícitas. En cuanto a la equidad, esto implica que cada estudiante deba sentirse parte no sólo del proceso de enseñanza - aprendizaje, sino también del proceso de evaluación. La coherencia implica un desarrollo eficaz, el reconocimiento de valores diversos, la profesionalidad del docente. Por último, es importante que todos tengan confianza en el proceso de evaluación, porque este pueda ser reconocido como el producto externo en el cual se configura la ética de las intenciones didácticas.

Es en todo esto que se reconoce un tentativo de fundar una moderna visión de la evaluación sobre la base de los actuales resultados; lejos de ser, como podría pensarse, sólo un conjunto de palabras vacías, lo descrito hasta aquí es, por el contrario, un instrumento preciso y concreto que aporta un fundamento nuevo, riguroso y ágil, a la profesionalidad del docente.

5. Intervenir y evaluar la especificidad de un fracaso

Como ya lo habíamos dicho, seguirán los cinco capítulos del 2 al 6, en cada uno de los cuales se presenta uno de las cinco componentes del aprendizaje de la matemática; en cada uno de ellos, se harán propuestas de actividades centradas en la evaluación específica. ¿Por qué? Porque el fracaso de un estudiante en matemática puede ser, en más: la mayor parte de las veces lo es, *específico*. Es un hecho conocido y confirmado por muchos docentes.

Un estudiante pudo haber construido en concepto auspiciado, pero no sabe usarlo para realizar un algoritmo, o para revolver un problema; no lo sabe comunicar o sólo aprendió a representarlo semióticamente.

Otro estudiante pudo no haber construido el concepto deseado, sin embargo sabe operar algorítmicamente sobre aspectos relacionados con este concepto; por ejemplo, el estudiante de la escuela media no ha entendido el sentido conceptual de la proporción $a : b = c : d$, pero sabe que el producto de los medios es igual al producto de los extremos: $b \times c = d \times a$ y lo usa para efectuar algoritmos; pero, no sabe usar las proporciones cuando se trata de resolver problemas, no sabe comunicar el sentido de lo que está haciendo, sabe representar la proporción sólo si la reconoce en la forma algebraica. Un caso que se tiene con mucha frecuencia en la escuela superior o en al universidad: estudiantes que saben calcular límites o derivadas, pero que no han elaborado el concepto ni del uno ni de la otra.

Ahora que el sentido de lo que aquí proponemos ha sido clarificado, podemos ir un poco más rápido, con ejemplos aún más específicos, formulados de forma mucho más cercana a la cotidianidad: estudiantes que saben transformar semióticamente ecuaciones, pero que no saben conceptualmente que están haciendo;estudiantes que...

La lista podría continuar, con ejemplos fácilmente evidenciados a cualquier nivel escolástico. Esta es la respuesta a la pregunta: el análisis detallado de cada una de las componentes no es y no pretende ser la declaración falsa e ingenua que estos aprendizajes actúan de forma separada; este análisis es sólo un proyecto discursivo por comodidad para ayudar en la evaluación específica, en la recuperación, actuando directamente sobre las causas y no sobre los errores.

Bibliografía

Referencia especifica:

Fandiño Pinilla M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática.* Prólogo de Giorgio Bolondi. Bogotá: Magisterio. [Primera edición en idioma italiano: 2008, Trento: Erickson].

Otras:

Campolucci L., Fandiño Pinilla M.I., Maori D., Sbaragli S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica.* 3, 353-400.

Cardinet, J. (1983). *L'évaluation des connaissances.* Neuchâtel: IRDP.

D'Amore, B. (2002). Basta. *La Vita Scolastica.* 8, 14-18.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica.* 3, 27-50.

DES (1987) [Department of Education and Science].*Curriculum, task group on assessment and testing. A report.* Londres: HMSO.

Duval R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational studies in mathematics*, 22, 233-261.

Duval R. (1992-1993). Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*. 31, 37-61.

Fandiño Pinilla M. I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Prefacio de Salvador Llinares. Presentación de Franco Frabboni. Pitagora: Bologna. Fandiño Pinilla M.I. (2006). *Currículo, evaluación y formación docente en matemática*. Bogotá: Magisterio.

Frabboni F. (1999). *La didattica, motore della formazione*. Bologna: Pitagora.

Giménez Rodríguez J. (1997). *Evaluación en matemáticas. Una integración de perspectivas*. Madrid: Editorial Sintesis.

Hoyles C. (1997). The curricolar shaping of student's approaches to proof. *For the learning of mathematics*. 17, 1, 7-15.

Pellerey M. (1989). *Oltre gli insiemi*.Nápoles: Tecnodid.

PRESENTACIÓN SINTÁCTICA DE LOS REALES

Rafael Fernando Isaacs Giraldo
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
risaacs@uis.edu.co

Resumen: Se presenta el espacio de códigos sobre una alfabeto finito que es topológicamente el espacio de Cantor. El intervalo es un cociente del Espacio de Cantor, la descripción como tal es sencilla y familiar: los números reales son sucesiones infinitas de dígitos y un punto (o una coma), teniendo en cuenta que ciertas sucesiones deben ser consideradas iguales. Se discuten ventajas y desventajas de esta presentación para ser eventualmente utilizada en cursos de calculo.

1. Introducción

El espacio de Cantor nace del llamado conjunto ternario de Cantor. Se encuentran muchas referencias del conjunto ternario de Cantor por ejemplo en internet, citamos a [1]. Que podamos hablar de "EL Espacio de Cantor" se debe a un resultado muy importante que dice "Todo espacio métrico totalmente disconexo compacto y perfecto es homeomorfo al conjunto ternario de Cantor". Esto indica someramente, que podemos encontrar dicho espacio en muy diferentes contextos y no es exagerado decir que se encuentra en todas partes. El otro resultado relevante es que "cualquier espacio métrico compacto es imagen del conjunto de Cantor", esto se puede interpretar como que el espacio de Cantor es la génesis de los espacios métricos. Y este es el fundamento teórico de la propuesta pedagógica que se mostrará para presentar los números reales. Estos dos resultados el lector los puede consultar por ejemplo en [2]. Nos basamos en que el intervalo real es compacto y por lo tanto es imagen del conjunto de Cantor. Pero lo que nos permite ver esta "representación" se debe a el sistema de numeración que utilizamos introducido por los árabes a partir del renacimiento. Por esta razón iniciamos con la presentación del espacio de los "códigos" que son las sucesiones infinitas de símbolos visto como espacio ordenado lo cual implica una topología.

2. Las palabras Σ^* y los códigos $\Sigma^{\mathbb{N}}$

Partimos de un conjunto finito Σ que será considerado nuestro alfabeto de dígitos. Utilizaremos específicamente $\Sigma = \{0,1\}$, que es como base 2. Σ^* son las palabras (o cadenas) sobre el alfabeto Σ. Más formalmente $\Sigma^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} 2^k$ donde Σ^k son las palabras de k letras y $\Sigma^0 = \{\lambda\}$ siendo λ la palabra sin letras. Las palabras también se pueden ver como funciones. Siendo n un natural una palabra de n letras de Σ es una función con dominio $\{0, 1, \ldots n-1\}$ y recorrido Σ es decir

$$u \in \Sigma^* \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}(u : \{0, 1, \ldots n-1\}) \longrightarrow \Sigma)$$

Así, λ representa el vacío que es la única función que se puede existe entre el vacío y cualquier conjunto.

Ahora definimos $\Sigma^{\mathbb{N}}$ como las sucesiones de elementos de Σ

$$x \in \Sigma^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow (x : \mathbb{N} \longrightarrow \Sigma)$$

Si $x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ la imagen de n se notará x_n así es natural tambien la notación: $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$.

Cuando una palabra se repite indefinidamente en un código conviene utilizar una notación especial: el código $u\overline{v}$ inicia con la palabra u y luego la palabra v se repite indefinidamente. Por ejemplo: $110101010\ldots = 11\overline{01} = 1\overline{10}$.

De manera natural se tiene una *acción* de Σ^* (que es un semigrupo) sobre $\Sigma^{\mathbb{N}}$, si u es una palabra y x un código entonces ux es el código que se obtiene anteponiendo a x la palabra u.

Una observación importante es que mientras Σ^* se puede enumerar $\Sigma^{\mathbb{N}}$ no es numerable.

Orden para $\Sigma^{\mathbb{N}}$

Además consideraremos el conjunto Σ ordenado totalmente; para $\Sigma = \{0, 1\}$ entenderemos naturalmente que $0 < 1$. Siempre se puede dar tal orden y se puede usar el orden usual; si $\Sigma = \{0, 1, \ldots 9\}$ se entiende que $0 < 1 < 2 \ldots < 9$.

Ahora $\Sigma^{\mathbb{N}}$ hereda el orden de Σ cuando a las sucesiones se les otorga el orden lexicográfico o de diccionario: para determinar de dos sucesiones diferentes cuál es la menor se busca el primer lugar con símbolo diferente, la que tenga en dicho lugar el menor dígito, es menor. Mas formalmente diremos que $x \leq y$ si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < y_n$ y si $j < n$ entonces $x_j = y_j$.

Como ejemplo, si $\Sigma = \{0, 1\}$ se tiene que $x < y$, si y sólo si, existen una palabra u y dos códigos x' y y' tal que $x = u0x'$ mientras $y = u1y'$.

Propiedades de $\Sigma^{\mathbb{N}}$ como conjunto ordenado

Las siguientes propiedades se expecifican cuando $\Sigma = \{0, 1\}$ pero son válidas con las modificaciones pertinentes para cualquier $\Sigma = \{0, 1, \ldots N - 1\}$.

- $\Sigma^{\mathbb{N}}$ tiene primer elemento que es $\overline{0}$ mientras $\overline{1}$ es el último elemento.
- $\Sigma^{\mathbb{N}}$ queda totalmente ordenado pero no bien ordenado pues por ejemplo el conjunto

  $$\{1\overline{0}, 01\overline{0}, 001\overline{0}, 0001\overline{0}, \ldots\}$$

  no tiene primer elemento.
- Si $u \in \Sigma^*$ entonces código $u0\overline{1}$ tiene un *sucesor* que es $u1\overline{0}$, en efecto $u0\overline{1} < u1\overline{0}$ y entre ellos no hay ninguno. Los únicos códigos que tienen sucesor son de esta forma $u0\overline{1}$. Además $u0\overline{1}$ es el *antecesor* de $u1\overline{0}$. Los únicos códigos que tienen antecesor son de la forma $u1\overline{0}$.
- Cuando se tiene un antecesor junto con su sucesor se tiene un *salto*, hay entonces una cantidad infinita numerable de saltos y entre dos códigos diferentes hay siempre por lo menos un salto.
- Dado un subconjunto no vacío siempre es posible construir los extremos superior e inferior.
- No existen puntos aislados: dado cualquier código siempre es posible encontrar una sucesión estrictamente creciente o estrictamente decreciente que se acerque al código.

  Es de notar que estas propiedades caracterizan el espacio de Cantor como conjunto oredenado. Ver [3].

Propiedades de $\Sigma^{\mathbb{N}}$ como espacio topológico

En nuestra construcción se dota a los códigos de la topología de orden. La base para la topología de $\Sigma^{\mathbb{N}}$ son los intervalos abiertos. Dados $x, y \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ se define:

$$]x, y[= \{z \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid x < z < y\}$$

También definimos:

$$\overleftarrow{y} = \{z \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid z < y\}$$

y

$$\overrightarrow{z} = \{z \in x^{\mathbb{N}} \mid x < z\}$$

así $]x, y[= \overleftarrow{y} \cap \overrightarrow{x}$

De lo anterior, una subbase topológica para $\Sigma^{\mathbb{N}}$ son las "colas" de la forma $\overrightarrow{x}$ y $\overleftarrow{x}$ cuando x es cualquier código.

Se cumple:

- Definiendo $\langle u \rangle = \{ux \mid x \in \Sigma^{\mathbb{N}}\}$ para cada $u \in \Sigma^*$, se tiene que tales conjuntos de códigos también forman una base de $\Sigma^{\mathbb{N}}$
- $\Sigma^{\mathbb{N}}$ es compacto.
- $\Sigma^{\mathbb{N}}$ es totalmente disconexo.
- $\Sigma^{\mathbb{N}}$ es metrizable.
- $\Sigma^{\mathbb{N}}$ no contiene puntos aislados.

Estas propiedades indican que el espacio de los códigos es una visión sintáctica del maravilloso espacio de Cantor.

3. $[0, 1]$ como cociente de $\Sigma^{\mathbb{N}}$

Ahora definimos una relación de equivalencia entre los códigos. Seguiremos trabajando en el caso específico de base 2. Lo que se hace es sencillamente identificar, "pegar", cada antecesor con su sucesor. Para formalizar pensemos recursivamente. Primero decimos $\sim$ es una relación reflexiva y simétrica en $\Sigma^{\mathbb{N}}$, en donde $0\overline{1} \sim 1\overline{0}$, esta es la base de nuestra definición; para la parte recursiva si $u \in \Sigma^*$ y $x \sim y$ afirmamos que $ux \sim uy$. La relación $\sim$ es de equivalencia y compatible con la relación de orden. Así entre las clases de equivalencia se da un orden que genera una topología y este nuevo conjunto con ésta topología es precisamente el intervalo $[0, 1]$.

4. Implicaciones Pedagógicas

Al llegar a un curso de cálculo se debe hacer una construcción lo más formal posible del conjunto de los reales, suponiendo ya interiorizados los enteros y los racionales. El paso de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{R}$ se hace "pegando" dos enteros consecutivos con un intervalo. La parte crucial es pues, la construcción del intervalo que es lo que se ha bosquejado hasta ahora, como cociente del Espacio de Cantor. Como el intervalo es un cociente del espacio de Cantor es teóricamente correcto definir el intervalo así:

> Los elementos del intervalo son objetos que se pueden escribir con códigos de $\Sigma^{\mathbb{N}}$ y considerando que el elemento representado por un código antecesor es igual a elemento representado por su sucesor.

Se puede ampliar la noción de código anteponiendo una palabra finita que representa el entero a un elemento de $\Sigma^{\mathbb{N}}$, y entre los dos colocando una coma. Así los *códigos ampliados* serán de la forma "u, x" donde $u \in \Sigma^{+}$ y $x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$. Para los códigos ampliados se extrapola también el concepto de código sucesor y antecesor. De esta construcción a *grosso modo* resulta que es teóricamente correcto definir los números reales así:

> Los reales son objetos que se pueden escribir con códigos ampliados de $\Sigma = \{0, 1, \ldots 9\}$ y considerando que el elemento representado por un código antecesor es igual a elemento representado por su sucesor. Además se tendrá en cuenta que si se anteponen 0's a la derecha el elemento representado no cambia.

Salta a la vista que la presentación que se propone tiene la ventaja de ser familiar para los estudiantes que hayan jugado algo con la representación en base posicional de los sistemas numéricos y en especial de los reales. Abarcar desde este punto de vista los reales como un cuerpo ordenado arquimediano junto con sus ventajas y desventajas pedagógicas, es el trabajo que se propone para los investigadores en la enseñanza del cálculo.

Referencias

1. J. Galavz C, *El Conjunto de Cantor*, Miscelanea Matemática, 24, 1996 p 23-37.

2. Willard, *General Topology.*

3. Arnold Oostra *El conjunto ordenado de Cantor* Ciencia en Desarrollo 2 No. 2 (1995) (Revista Facultad de Ciencias UPTC, Tunja)

UN EJEMPLO DE ANÁLISIS DE LA UNIDAD COGNITIVA ENTRE LOS PROCESOS DE ARGUMENTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN EN TRIGONOMETRÍA

Jorge Enrique Fiallo Leal
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
jfiallo@uis.edu.co

Resumen: Con el objetivo de analizar la unidad o ruptura cognitiva como una herramienta que permita, entre otras cosas, identificar las dificultades y los avances que se presentan en los procesos de argumentación y de demostración en el contexto de aprendizaje de las razones trigonométricas en un sistema de geometría dinámica, presentamos un ejemplo del análisis de la existencia de unidad o ruptura cognitiva presente en la resolución de varios problemas de trigonometría.

Palabras clave: unidad cognitiva, argumentación, demostración.

1. Introducción

Desde hace más de cuatro décadas, las investigaciones en educación matemática sobre el tema de la demostración han ocupado la agenda de varios investigadores, destacándose trabajos que van desde una análisis histórico-epistemológico del tema, el análisis del currículo, el estudio de las concepciones de los estudiantes y de los profesores, hasta el planteamiento de propuestas didácticas que buscan solucionar las dificultades presentadas en la enseñanza y el aprendizaje de la demostración (Fiallo 2010). Dentro de los trabajos que investigan las concepciones de los estudiantes sobre la demostración, algunos tratan las características del razonamiento relacionados con la demostración, principalmente sobre las relaciones entre la argumentación y la demostración (Boero, 2007). Estudian los aspectos cognitivos que entran en juego durante la construcción de una demostración para poner en evidencia ciertas dificultades que los alumnos enfrentan en su aprendizaje. Se busca dar respuesta a preguntas como las siguientes: ¿Existe continuidad o distancia cognitiva entre la argumentación producida en la construcción de una conjetura y su demostración? ¿De qué tipo de continuidad se trata? ¿Qué comparar? ¿Cómo comparar? ¿Cómo identificar la fase de producción de la conjetura y la fase de construcción de la demostración? (Pedemonte, 2005).

En este manuscrito presentamos un ejemplo, resultado de un estudio de investigación con estudiantes de 10° grado (14 – 15 años), que se enfrentan a resolver problemas de planteamiento de conjeturas y construcción de demostraciones de propiedades de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica (SGD).

2. Unidad cognitiva

Para superar la dicotomía entre argumentación y demostración, se han llevado a cabo estudios que plantean la noción de unidad cognitiva de un teorema (Boero y otros, 1996), la cual se dirige a vincular argumentos espontáneos y argumentos matemáticamente aceptables:

- Durante la producción de la conjetura, el estudiante elabora progresivamente su enunciado por medio de una intensa actividad argumentativa que está entrelazada funcionalmente con la justificación de la plausibilidad de sus elecciones;

- Durante la etapa posterior de demostración del enunciado, el estudiante hace conexión con este proceso de manera coherente, organizando algunas de las justificaciones ("argumentos") producidas durante la construcción del enunciado de acuerdo a una cadena lógica. (Boero y otros, 1996, p.113)

Para el análisis cognitivo de la continuidad que puede existir entre los procesos de argumentación que conducen a la explicación de una conjetura y su demostración desde el punto de vista estructural y del sistema de referencia, Pedemonte (2002, 2005, 2007, 2008) plantea una herramienta basada en la integración del modelo cK¢ [1] (Balacheff, 1995, Balacheff y Margolinas, 2005) en el modelo de Toulmin[2] (1958).

El modelo cK¢ permite analizar el sistema de referencia - *unidad cognitiva referencial* -que toma en cuenta los sistemas de representaciones expresivas como el lenguaje, las heurísticas sobre el dibujo, etc. y los sistemas de conocimientos como las *concepciones* (Balacheff, 1995) y los *marcos*[3] (Douady, 1986) que están en juego durante la construcción de una conjetura y el desarrollo de su demostración. Como la demostración hace referencia a una teoría matemática, el sistema de referencia representa una tentativa de organizar ciertos elementos que intervienen durante la argumentación para poder relacionarlos y compararlos con la teoría matemática que interviene durante la demostración.

El análisis estructural - *unidad cognitiva estructural* - puede ser realizado con el modelo de Toulmin. La estructura es la conexión cognitiva lógica entre afirmaciones (la inducción, o la deducción). Se puede decir que hay *continuidad referencial* entre la argumentación y la demostración si algunas palabras, dibujos, teoremas usados en la demostración han sido usadas en la argumentación dando soporte a la conjetura. Hay una *continuidad estructural* entre la argumentación y la demostración si algunos pasos deductivos ó inductivos usados en la argumentación están presentes también en la demostración. De lo contrario, si la estructura de la argumentación es inductiva y la demostración es deductiva, entonces hay una distancia estructural entre los dos.

3. El modelo cK¢

El modelo cK¢ es una herramienta metodológica propuesta por Balacheff (1995, 2002, 2005) para el análisis de los conocimientos que movilizan los estudiantes en la resolución de un problema. En el modelo se caracteriza una **concepción** por una cuádrupla compuesta de (Balacheff y Margolinas, 2005):

P: Un conjunto de problemas.

R: Un conjunto de operadores.

L: Un sistema de representación.

Σ : Una estructura de control.

[1] cK¢: conception, knowing, concept (Balacheff y Margolinas, 2005, p. 105)

[2] Toulmin elabora un modelo de representación de las argumentaciones matemáticas, en el que identifica seis características estructurales que se deben analizar y organizar durante el proceso de argumentación: el enunciado (claim), los datos (data), los permisos de inferir (warrant), el indicador de fuerza del argumento (modal qualifiers), las refutaciones potenciales (rebuttals) y el soporte del permiso de inferir (backing).

[3] Un *marco* está constituido por objetos de una rama de las matemáticas, de las relaciones entre los objetos, de sus distintas formulaciones eventualmente e imágenes mentales asociadas a estos objetos y estas relaciones. Estas imágenes desempeñan un papel esencial en el funcionamiento como herramientas, de los objetos del marco. Dos marcos pueden implicar los mismos objetos y diferir por las imágenes mentales y la problemática desarrollada. (Douady, 1986 p.11)

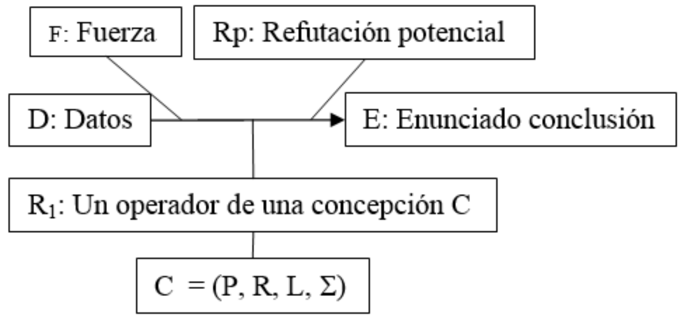


Figura 1. Integración del modelo cK¢ al modelo de Toulmin.

El ámbito de la validez de la concepción, o esfera de práctica, está constituido por el conjunto de los problemas que la concepción permite solucionar.

Un *operador* es lo que permite la transformación de los problemas. Los operadores son visibles en las producciones y los comportamientos del los estudiantes.

Un *sistema de representación* (lingüístico o no) permite la expresión de los problemas y de los operadores. Las representaciones permiten la expresión de los controles, de las acciones y de los problemas, para la anticipación y la validación.

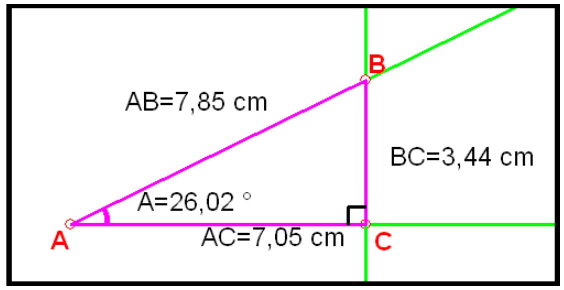
Finalmente, una *estructura de control* da y organiza las funciones de decisión, de elección, de juicio de validez y de adecuación de la acción.

4. El modelo cK¢ en el modelo de Toulmin

Las concepciones de los estudiantes que permiten construir una conjetura constituyen la base de la argumentación. Su movilización permite construir el proceso argumentativo. De hecho, es la concepción movilizada durante la construcción de un argumento la que permite responder a las preguntas: ¿Por qué el permiso de inferir es pertinente para quien argumenta? ¿Por qué es correcto? ¿Por qué es adecuado? La concepción movilizada durante la construcción de un argumento puede entonces remplazar su soporte pues justifica la existencia misma del argumento. Como el soporte de un argumento corresponde a la concepción movilizada, entonces el permiso de inferir es uno de los operadores que constituyen la concepción (Pedemonte, 2005, p. 327). La estructura del modelo de Toulmin queda de la siguiente manera al integrar el modelo cK¢ en él (Figura. 1):

Cuando los estudiantes movilizan una concepción, con frecuencia algunos de sus elementos constituyentes están implícitos. En ese caso el soporte está constituido por los elementos explicitados de la concepción. La comparación entre la estructura de la argumentación y la correspondiente estructura en la demostración nos permite analizar las posibles continuidades y rupturas entre ambas estructuras.

5. Un ejemplo de análisis de la unidad cognitiva

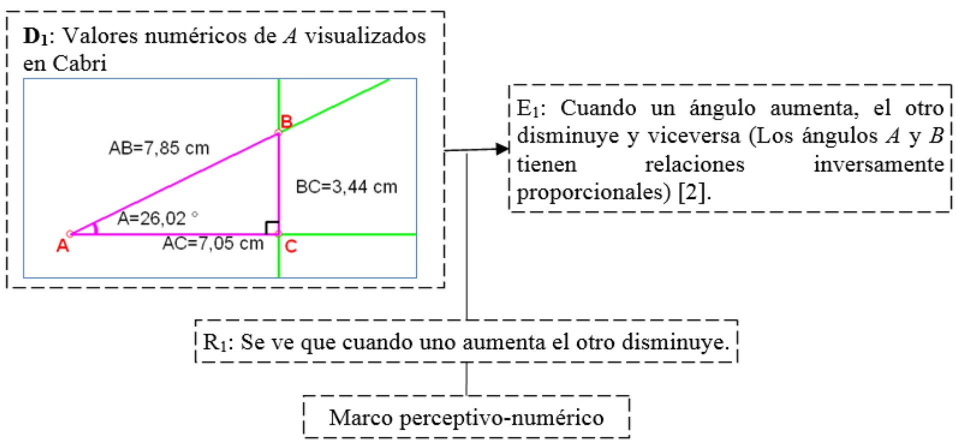


¿Qué relación existe entre la medida de los ángulos A y B? Expresa B en términos de A. Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura.

Proceso de argumentación

[1] G1: *Cuando el ángulo A va disminuyendo el ángulo B va aumentando, y lo mismo va a pasar con todas.*

[2] Diana: *Entonces, que A y B tienen relaciones inversamente proporcionales, que cuando uno aumenta, el otro disminuye, hay, pongamos esto.*



[3] G1. *O sea ¿Por qué? Tenemos que demostrar, el por qué.*

Análisis y comentarios del proceso de argumentación

Aunque el grupo no planteó que los ángulos A y B son complementarios, proponen una conjetura verdadera, pero la enuncian de manera errónea, diciendo que la relación es de proporcionalidad inversa.

Los datos numéricos visualizados en Cabri, llevan al grupo a encontrar la relación planteada por ellos.

El indicador de fuerza es débil, debido a que el único argumento está dado por los valores numéricos visualizados en Cabri.

El operador R_1 es una consecuencia de los valores visualizados en Cabri durante el arrastre.

El sistema de representación es el archivo de Cabri (figura dinámica con valores numéricos), caracterizado por las sucesivas visualizaciones de la figura en la pantalla del ordenador.

El control lo ejerce el arrastre en Cabri para visualizar los datos numéricos que garanticen la conjetura planteada.

La forma de argumentación es constructiva porque los datos visualizados en Cabri, contribuyen a la construcción de la conjetura.

La estructura de la conjetura es la de una argumentación inductiva por generalización de los enunciados (datos numéricos de Cabri).

El marco de la concepción es perceptivo numérico.

Proceso de demostración

[4] Diana: *O sea, que cuando BC está en cero, el ángulo..., está en 89..., o sea, mire B está en 89,8...*
[5] Mapa: *No..., el ángulo A va aumentando, tiene que ver con el ángulo B que va a disminuir.*
[6] Diana: *El ángulo A sí está en cero.*
[7] Mapa: *No, con relación a éste* [señala el ángulo A], *éste está aumentando y este está disminuyendo* [señala los ángulos A y B], *eso es todo.*
[8] Diana: *Pero, eso no es lo que yo veo..., a medida que el lado BC aumenta, oiga, ¿eso, no nos debería dar noventa?*
[9] Mapa: *¿Qué?*
[10] Diana: *O sea, cuando BC está en cero, B debería ser noventa, bueno igual, hay como un error ahí de cálculo, entonces, cuando BC aumenta, el ángulo A aumenta y el ángulo B disminuye.*
[11] Diana: *Cuando AC es constante, entonces el ángulo A tiene que estar ligado a esta lado y cuando A supere el valor, o sea BC, hace que el valor de A aumente, entonces A va a superar a B, ¿si me entiende?*
[12] Diana: *Acá como tienen la misma longitud, entonces son iguales, AC, por eso, son iguales.*
[13] Diana: *Entonces ya, luego, este lado es mayor, y ya, el ángulo A va aumentando y cuando...*
[14] Mapa: *Este también* [refiriéndose al ángulo B]
[15] Diana: *No, mire, o sea cuando BC era menor que AC, el... ángulo B es mayor que A.*
[16] Mapa: *El ángulo B es igual al ángulo A* [se refiere al caso donde $AC = BC$]... *Oiga, ¿esa no era la conjetura?*
[17] Diana: *Yo no sé si será conjetura, o demostración, no, pero es como una demostración. ¡Jorge!*
[18] G1: *Mira, la relación que existe, es como... que cuando BC es menor, como AC es constante, entonces, cuando BC es menor que AC, entonces, el ángulo B va a ser mayor que A.*
[19] G1: *Y cuando están iguales son..., he, esto..., mira, entonces..., los ángulos son iguales.*
[20] G1: *Y cuando BC supera el valor de AC, porque es constante, entonces, el ángulo A se vuelve mayor que el ángulo B, y empieza a disminuir.*
[21] [El grupo escribe en la hoja de trabajo]: "*La relación entre los lados* $\overline{AC}$ *y* $\overline{BC}$ *y los ángulos,* $\angle A$ *y* $\angle B$ *está en que cuando el lado* $\overline{BC}$ *es menor que la constante* $\overline{AC}$ *el* $\angle B$ *es mayor que el* $\angle A$*. sin embargo cuando el valorde* $\overline{BC}$ *es mayor que el de la constante, el ángulo* $\angle A$ *supera el valor del* $\angle B$*".*

D1
D2: Si $BC = 0 \Rightarrow \angle A = 0º$ y $\angle B = 89{,}8 \ldots$ [4]
D3: AC constante, BC variable [11]

→ E1: Cuando un ángulo aumenta, el otro disminuye y viceversa (Los ángulos A y B tienen relaciones inversamente proporcionales) [2]

R1: [7], [8]
R2: Si BC aumenta $\Rightarrow \angle A$ aumenta y $\angle B$ disminuye. [10]
R3: Si $BC>AC \Rightarrow \angle A>\angle B$ [11], [20]
R4: Si $BC = AC \Rightarrow \angle A = \angle B$ [12], [19]
R5: Si $BC<AC \Rightarrow \angle B>\angle A$ [15], [18]

Marco perceptivo-numérico

Análisis y comentarios del proceso de demostración

El grupo utiliza argumentos matemáticos observados en los datos numéricos de los lados AC y BC del triángulo rectángulo ABC del archivo de Cabri. Expresan lo que ven, utilizando algunos términos geométricos, pero no sienten que hayan demostrado la conjetura; se preguntan si lo que están diciendo es la relación entre los ángulos A y B o la demostración del enunciado E_1, es decir el indicador de fuerza es débil.

Los operadores R_2 a R_5 que escribimos en forma de implicación, siguen siendo resultado de los datos numéricos observados en Cabri. Por otro lado, los estudiantes no justifican por qué estos operadores son verdaderos, ni por qué justifican la conjetura planteada.

Hay un cambio del sistema de representación de la figura dinámica de Cabri al lenguaje natural para enunciar y escribir datos y propiedades observadas, producto del arrastre en Cabri. Al escribir la demostración en la hoja de trabajo utilizan símbolos geométricos.

La estructura de control es el arrastre en Cabri (Σ_1) para comprobar numéricamente (Σ_2) las relaciones entre los ángulos A y B y las propiedades descubiertas por el propio arrastre.

El marco sigue siendo perceptivo numérico.

La estructura de la demostración es inductiva, y el tipo de demostración Empírico Ingenuo, al basar sus argumentos en la generalización de los datos observados en Cabri.

Análisis de la unidad cognitiva

Esquema global de la argumentación	Esquema global de la demostración
D_1n → E_1n R_1p n: numérico; p: perceptivo	D_1n, D_2n, D_3an → E_1n R_1p, R_2n, R_3n, R_4n, R_5n n: numérico; p: perceptivo

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

ARGUMENTACIÓN			DEMOSTRACIÓN		
E1: Cuando un ángulo aumenta, el otro disminuye y viceversa (Los ángulos A y B tienen relaciones inversamente proporcionales)			**E1**: Cuando un ángulo aumenta, el otro disminuye y viceversa (Los ángulos A y B tienen relaciones inversamente proporcionales)		
CONCEPCIÓN			CONCEPCIÓN		
OPERA DORES	**SIST. DE REPR.**	**E. DE CONT**	**OPERAD ORES**	**SIST. DE REPR**	**E. DE CONT**

ARGUMENTACIÓN			DEMOSTRACIÓN		
E$_1$: Cuando un ángulo aumenta, el otro disminuye y viceversa (Los ángulos *A* y *B* tienen relaciones inversamente proporcionales)			**E$_1$**: Cuando un ángulo aumenta, el otro disminuye y viceversa (Los ángulos A y B tienen relaciones inversamente proporcionales)		
R$_1$: Generalización de los datos observados en Cabri.	**L$_1$**: Figura dinámica de Cabri. ↔ **L$_2$**: Lenguaje natural ↔ **L$_3$**: Uso de datos numéricos.	**ROL** **Σ$_1$**: Arrastre en Cabri.	**R$_1$**: Generalización de los datos observados en Cabri. **R$_2$**: Si BC aumenta $\Rightarrow\angle A$ aumenta y $\angle B$ disminuye. **R$_3$**: Si $BC>AC\Rightarrow\angle A>\angle B$. **R$_4$**: Si $BC = AC\Rightarrow\angle A = \angle B$. **R$_5$**: Si $BC<AC\Rightarrow\angle B>\angle A$.	**L$_1$**: Figura dinámica de Cabri. ↔ **L$_2$**: Lenguaje natural ↔ **L$_3$**: Uso de datos numéricos.	**ROL** **Σ$_1$**: Arrastre en Cabri. **Σ$_2$**: Control numérico.
Marco Perceptivo – Numérico			Marco Perceptivo - Numérico		

CONTINUIDAD EN EL SISTEMA DE REFERENCIA

Análisis de la continuidad estructural

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva: Los datos ayudan a construir la conjetura	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Argumentación Inductiva (Generalización de los datos)	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Demostración Inductiva (Generalización sobre los datos)
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN EII (Generalización de los datos observados en Cabri)

CONTINUIDAD ESTRUCTURAL

La transcripción, los comentarios y la tabla muestran la unidad cognitiva, caracterizada por la continuidad referencial y estructural. Esta continuidad no permite la construcción de una demostración deductiva. Durante el proceso de construcción de la demostración, el grupo va encontrando de manera perceptiva-numérica propiedades que supuestamente les ayudan a justificar la relación: relacionan los valores de los ángulos con los valores de los lados, plantean propiedades que no justifican matemáticamente, se dedican a ver y expresar propiedades válidas, pero no justifican por qué mientras que un ángulo aumenta el otro disminuye. Un aspecto importante que se deriva de la trascripción es la toma de conciencia, por parte de los estudiantes, de la necesidad de justificar todas las propiedades encontradas y planteadas, desde el mismo proceso de argumentación [3], y también la confusión que los estudiantes tienen respecto al proceso de argumentación y de demostrar, en donde no distinguen un proceso del otro [16], [17].

6. Algunas conclusiones

Este ejemplo plantea un aporte importante en lo siguiente: Cuando el estudiante no tiene plena claridad sobre lo que tiene que demostrar, lo que realiza en los dos procesos es una búsqueda y planteamiento de propiedades, producto de la exploración, que utiliza como un listado de verdades matemáticas válidas percibidas en el diagrama, pero que no conducen al planteamiento de una conjetura, ni de una demostración relevantes para el problema planteado.

De acuerdo al planteamiento inicial del constructo de unidad cognitiva (Boero y otros, 1996) y la hipótesis de Pedemonte (2002, 2005), de que la unidad cognitiva favorece la construcción de una demostración, se concluye que esta ayuda es positiva si la argumentación es deductiva, puesto que la demostración (según su caracterización) debe ser deductiva. De acuerdo a nuestra caracterización de demostración, esta unidad cognitiva determinada por la unidad estructural entre una argumentación inductiva y una demostración empírica ingenua, experimento crucial o ejemplo genérico analítico (Fiallo, 2010) puede ser un obstáculo para favorecer la construcción de demostraciones más próximas a las deductivas. En estos casos se deben enfocar los esfuerzos hacia la ruptura de esa unidad estructural.

Si el estudiante plantea la conjetura soportada en un marco perceptivo numérico y no logra la ruptura referencial hacia una combinación de marcos geométricos, algebraicos, analíticos o trigonométricos, no es capaz de construir una demostración deductiva.

Referencias

Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. En D. Grenier (Ed.), *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-1995* (pp. 219-244). Grenoble: Université Joseph Fourier.

Balacheff, N., Margolinas, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier, C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Francia: La Pensée Sauvage -Editions-.

Boero, P. (2007). Theorems in School: An introduction. En P.Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 19-24). Rotterdam, Los Países Bajos:Sense Publishers.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., Mariotti, A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceeding 20th PME International Conference,Valencia, España, 2*, 113-120.

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica.* (Tesis doctoral). Valencia (España): Universidad de Valencia.

Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démostration dans le apprentisage des mathématiques.* (Tesis doctoral). Université Joseph Fourier-Grenoble I, Grenoble, Francia.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en didactique des mathematiques, 25*(3), 313 - 348.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*, 23-41.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof.*ZDM Mathematics Education, 40*, 385-400.

Toulmin, S.E., (1958) The use of argument, Cambridge University Press.

ALTERNATIVAS CURRICULARES PARA ATENDER LA PROBLEMÁTICA RELACIONADA CON EL CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL DE LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER (UIS)

Sandra Evely Parada Rico
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
sparada@matematicas.uis.edu.co

Resumen: En este documento se describe un proyecto de desarrollo curricular que está en proceso de construcción, el cual busca atender las diferentes problemáticas que rodean los procesos de planeación, enseñanza, aprendizaje y evaluación del curso de Cálculo I (cálculo diferencial) en la UIS. Para el diseño de alternativas se ha seguido el siguiente proceso: i) revisión del estado en que se venía desarrollando el curso; ii) estudio de resultados obtenidos de iniciativas implementadas previamente por la Escuela de Matemáticas; iii) diseño curricular que contempla tres ejes rectores: el currículo, la atención a estudiantes y el desarrollo profesional de los docentes, iv) proposición de algunas metodologías de implementación de las alternativas propuestas.

Palabras clave: desarrollo curricular, cálculo diferencial, reprobación y deserción, formación de profesores, acompañamiento y seguimiento.

1. Revisión de la literatura y descripción del fenómeno de estudio

Las investigaciones relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo son cada vez más frecuentes, debido a que instituciones universitarias de diferentes países manifiestan su preocupación por la amplia problemática que se vislumbra al respecto. La atención a dicha situación se ha intentado atender mediante reformas curriculares que han contemplado cambios en: los planes y programas de estudio, formación de docentes y selección de recursos de apoyo (libros, tecnologías, unidades didácticas, entre otros).

Desde el campo de la didáctica de las matemáticas se han venido desarrollando importantes estudios en las últimas décadas, una las más notables exponentes en este campo es Michelle Artigue (investigadora francesa) quien ha intentado comprender y describir las dificultades de aprendizaje del cálculo por parte de los estudiantes y cómo el sistema educativo ha influido en ellas. Artigue (1995) menciona que los métodos tradicionales de enseñanza del cálculo se enfocan en prácticas algorítmicas y algebraicas, que inciden en un aprendizaje memorístico por parte de los estudiantes. Asimismo, Moreno (2005) menciona que frente a practicas rutinarias de enseñanza el profesor tiende a evaluar a sus alumnos con la proposición de ejercicios similares o iguales a los presentados en clase, pues éstos han de mostrar si están aplicando su mismo esquema de razonamiento.

Las reformas que se han hecho a los planes y programas curriculares de cálculo, como menciona Artigue (1995) no han influido directamente en la solución de los problemas y las dificultades de los estudiantes, pues éstas han consistido básicamente en quitar o incluir un conjunto de temas. No obstante, se siguen tratando superficialmente las metodologías de estudio, de enseñanza y la formación de profesores.

Otros acercamientos al problema se han dado alrededor del desarrollo de software que ayude a construir ideas intuitivas de las nociones de cálculo, trabajos como los de Cuevas y Pluvinage (2009), Mack (1992) y Tall (1986) han presentado algunos avances al respecto. Tall ha destacado las potencialidades que tiene la tecnología para favorecer procesos de visualización y representación de los objetos matemáticos de estudio.

Moreno (2005) menciona que se han dado otra serie de acercamientos metodológicos producto de grupos de trabajo de profesores al interior de proyectos educativos universitarios, entre ellos: i) problematizar los contenidos de estudios con situaciones del contexto; ii) debatir científicamente sobre la epistemología del cálculo (se busca que los estudiantes trabajen como si fueran matemáticos mediante la introducción de diferentes conceptos del cálculo en el contexto de problemas científicos); iii) los que usan el modelo teórico de la Ingeniería Didáctica propuesto por Artigue (1989, 1991, 1992, 1994).

2. Problemáticas que se esperan atender

Los cursos de Cálculo, específicamente de Cálculo I (el relacionado con el cálculo diferencial), en la Universidad Industrial de Santander (UIS) han presentado a través del tiempo altos índices de reprobación y deserción. Datos cuantitativos presentados por comités académicos de la universidad, muestran que la materia con el más alto porcentaje de dificultad en la UIS es precisamente ésta. Desde la perspectiva de las directivas y profesores de la Escuela de Matemáticas, y por varias pueden ser las causas por las que este sea el curso de mayor dificultad, entre ellas enunciamos las que los profesores que han estado a cargo del curso mencionan:

1. Los estudiantes no traen las herramientas matemáticas necesarias de su formación escolar y por ello no logran comprender los contenidos del curso.

2. La inclusión de fundamentos matemáticos en plan de estudios del curso de Cálculo I, hace más extenso el programa y obliga al profesor ir rápido en el estudio de los contenidos trazados. Por eso los alumnos no logran procesar toda la información.

3. Las metodologías de estudio, por parte de los estudiantes, quienes no tienen una disciplina de estudio acorde al sistema universitario.

4. El cambio de los sistemas de evaluación para los estudiantes, quienes están acostumbrados a los procesos evaluativos de la educación básica y media. En el colegio se les ofrecen muchas alternativas para que los estudiantes recuperen una y otra vez una “valoración” lo que se modifica en la universidad.

5. Las metodologías de enseñanza, aunque la mayoría de los profesores de este curso son de cátedra y éstos a su vez son profesores de colegios. Las maneras de manejar los contenidos en clase universitaria se modifican. El profesor no puede hacer un acompañamiento tan personal y para el estudiante esta situación es difícil de manejar.

6. Los profesores a cargo del curso requieren fortalecer sus competencias conceptuales y didáctica para impartir este curso.

Dichas causas nos llevaron a pensar que es necesario atender el problema tanto de manera preventiva (antes de que estos estudiantes entre a la universidad) como de forma correctiva (atendiendo problemáticas emergentes de los problemas propios de la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial).

Por lo anterior, el interés primordial de este proyecto es plantear alternativas para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo diferencial en la Universidad Industrial de Santander con el fin de mejorar el nivel del egresado, así mismo coadyuvar en la disminución del fracaso y deserción de los estudiantes del mismo.

3. Aspectos metodológicos del diseño de la estructura curricular planteada

Este proyecto se desarrolla con una metodología de diseño curricular, el cual consiste en definir las intenciones, acciones, componentes y fases de una labor educativa, además de seleccionar los medios para realizarla. Este diseño curricular podría calificarse como el producto de una articulación entre un conjunto de conocimientos y de acciones. Dicho diseño no puede considerarse como un producto estático, sino más bien como un proceso continuo que sirva para conducir acciones, pero revisando y adecuando las actividades a tiempo real.

La estructura curricular que venimos mencionando está organizada en los tres ejes rectores, pero a su vez éstos se desarrollarán mediantesubproyectos de desarrollo y/o de investigación. Con dichos proyectos se da prioridad a los actores sociales (docentes y estudiantes) como constituyentes básicos de la organización.

Aquí se considera que la construcción de una estructura curricular necesita pensarse con un carácter procesual, abierto y colectivo evitando la idea de instalar algo para que anule todo lo anterior. Dicha construcción supone un análisis y una discusión continua de las alternativas que se planteen y de los resultados que se vayan teniendo durante el proceso.

Uno de los intereses de la investigadora responsable y del director de la Escuela de Matemáticas es precisamente que la puesta en marcha de este diseño no sea sólo una iniciativa personal sino un proyecto de desarrollo curricular de la Escuela de Matemáticas. Es por ello se proyecta ir involucrando paso a paso a profesores (de planta y de cátedra) y a estudiantes (de pregrado y posgrado) con el fin de que el trabajo colaborativo permita la consecución efectiva de los logros propuestos.

4. Descripción de las alternativas curriculares planteadas

El cálculo ocupa en la educación superior un lugar primordial, sobre todo en las ingenierías y las ciencias básicas es la materia a la que más tiempo dedica el currículo. Sin embargo, al intentar llevar a las aulas el contenido teórico y práctico que implica el cálculo, se observa una fuerte problemática en el proceso de enseñanza, aprendizaje, a tal grado, que actualmente el cálculo es uno de los factores causales de la deserción estudiantil (Aparicio, Jarero y Ávila, 2007).

Dado que el objetivo de este proyecto es plantear alternativas para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo diferencial, se han organizado dichas alternativas en una estructura curricular que permita atender desde los ejes que pueden ser atendidos a partir de la experticia de los docentes-investigadores de la Escuela de Matemáticas. En la Figura 1 se muestra un bosquejo general de dicha estructura y en los apartados siguientes se describen brevemente cada una de las alternativas diseñadas para cada eje.

4.1 Diseño de alternativas curriculares

Aquí se concibe la necesidad de diseñar instrumentos de evaluación (prueba diagnóstica inicial) que le den a la universidad mayor información sobre el nivel académico en matemáticas preuniversitarias de los estudiantes que pretenden ingresan a las carreras de ingenierías y ciencias de la UIS. Además favorecer alternativas para aquellos que tienen debilidades conceptuales. Esas alternativas

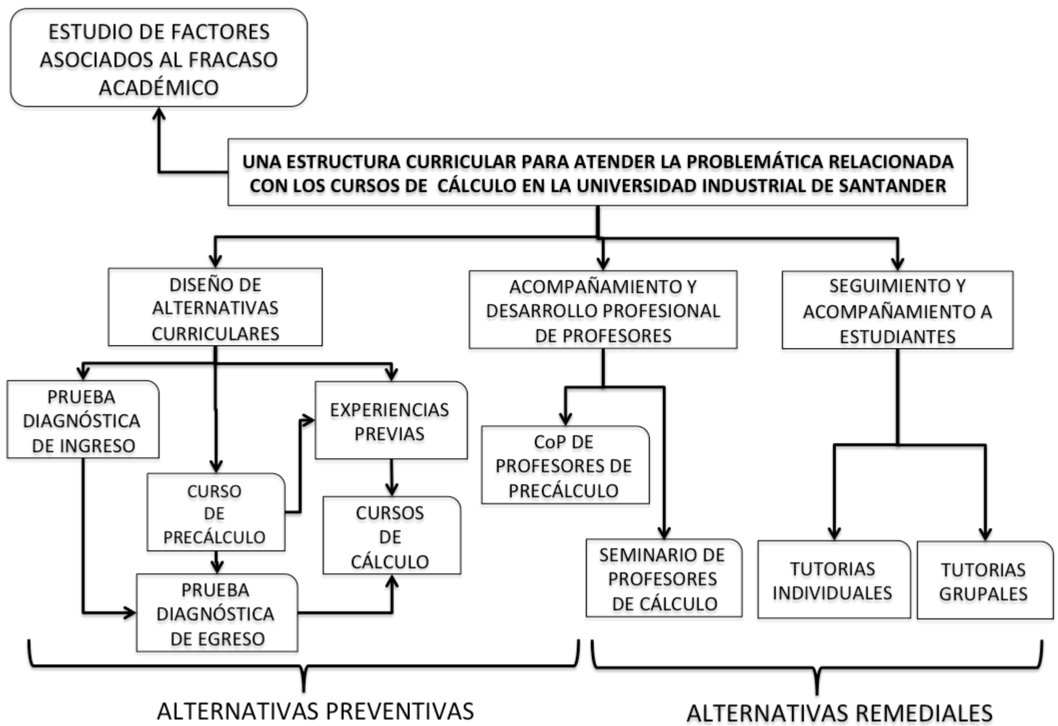


Figura 1. Bosquejo de la estructura general del proyecto

deberán contemplar espacios académicos especializados en los que ellos puedan adquirir metodologías de estudio así como herramientas conceptuales básicas que les permitan sobrellevar el curso de Cálculo Diferencial, para esto se ha pensado en realizar un curso de precálculo en dos modalidades: uno como programa de extensión (para preparar a los estudiantes que desean ingresar a la UIS) y otro como programa interno de la universidad, el cual será ofrecido por única vez a aquellos estudiantes que hayan mostrado dificultades en la prueba diagnóstica inicial.

4.2 Acompañamiento y desarrollo profesional de profesores

Hablar del profesor implica hacerlo desde su conocimiento y su desarrollo profesional. Desde el punto de vista de quien escribe (Parada, 2009, 2011), las creencias juegan un papel importante en todo lo que se relaciona con el profesor y la toma decisiones en su ámbito profesional. Por lo que cualquier intento de implementar una estructura curricular requiere: detectar, identificar, analizar e interpretar cuáles son esas concepciones y creencias de los profesores sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en nuestro caso discutir con ellos sobre cómo ellos están viendo la problemática de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo I en la universidad. Esta discusión puede ser enriquecedora cuando los profesores conforman comunidades de práctica o grupos de trabajo educativo diseñadas para tal fin.

Desde una perspectiva de enseñanza y aprendizaje constructivista retomamos lo que mencionan Benedito, Ferrer y Ferreres (1995) sobre que el profesor universitario debería provocar procesos de aprendizaje en el aula, conocer la dinámica de la misma, seleccionar, organizar los contenidos, facilitar el surgimiento y formulación de interrogantes, alimentar la discusión y el debate, establecer relaciones positivas, evaluar el trabajo de los alumnos y facilitar la búsqueda y construcción de conocimientos por pate de los estudiantes. Para atender este componente fundamental de la estructura curricular, se pretende promover la conformación de grupos de trabajo educativo de profesores de precálculo (profesores de media vocacional de la región) y Cálculo que estén interesados en reflexionar sobre los procesos que mencionan Benedito, Ferrer y Ferreres (Op Cit.)

4.3 Seguimiento y acompañamiento a estudiantes

El acompañamiento es mediación en cuanto es posibilitador para concienciar y personalizar cómo se va construyendo el aprendizaje y desarrollando actitudes y conocimiento científico en el estudiante. El acompañante establece una relación de trabajo para colaborar en el proceso de búsqueda y construcción del saber científico y de la competencia profesional del acompañado (Lobato, 1997). El acompañamiento académico; es un proceso permanente y acumulativo, que busca distinguir fortalezas y debilidades; el cual permite explicar la lógica del proceso vivido, los factores que han intervenido en dicho proceso, cómo se han interrelacionado entre sí y por qué lo han hecho de ese modo.

En la universidad cuenta con dos proyectos de acompañamiento a estudiantes con bajo rendimiento con el fin de atender dudas e inquietudes particulares en materias como Cálculo, Álgebra lineal, Física y Química. Estos programas han mostrado avances significativos, no obstante el programa de acompañamiento y seguimiento a estudiantes que presentan dificultades en el aprendizaje del Cálculo Diferencial ha pensado constituirse, desde este proyecto, como una alternativa remedial posibilitada por educadores matemáticos formados (profesores de planta y de cátedra, así como estudiantes de postgrado – maestría en matemáticas, maestría en educación matemática) y educadores matemáticos en formación (estudiantes de licenciatura en matemáticas) para que de manera mutua se enriquezcan las experiencias de docencia y de construcción del conocimiento alrededor del Cálculo Diferencial.

5. Retos y perspectivas de investigación

Como se mencionó desde el inicio de este documento, el objetivo del proyecto del que aquí se habla es *plantear alternativas para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo diferencial en la UIS.* Reconocemos que dicho objetivo es muy amplio y complejo de lograr, por ello, se quiere enfatizar que los resultados de la puesta en marcha de dichas alternativas esperan verse a largo plazo y que para que puedan evidenciarse cambios positivos y significativos del proceso se requiere de una comunidad académica y social comprometida con su implementación. En la Figura 2 se muestra un esquema de la comunidad que espera constituirse en el proceso.

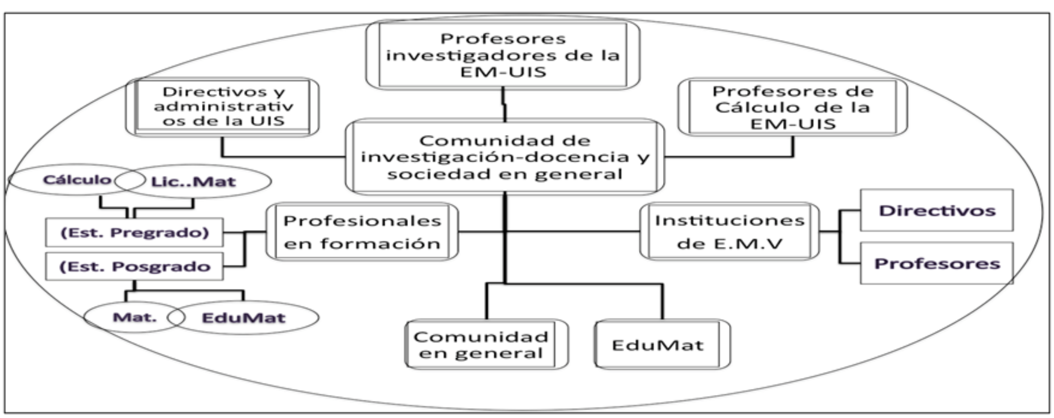


Figura 2. Esquema de la comunidad involucrada en el desarrollo del proyecto

Referencias

Aparicio, E., Jarero, M. y Ávila, E. (2007). La reprobación y rezago en cálculo. Un estudio sobre factores institucionales. *Premisa. Revista de la sociedad Argentina de Educación Matemática*, 35, 3–12.

Artigue, M. (1989). Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en primer cycle universitaire. *Cahiers du Séminaire de Didactique des Mathématiqueset de l'Informatique.*Grenoble: IMAG-LSD.

Artigue, M. (1991). Analysis. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking.* (pp. 67-198). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M. (1992). Functions from algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. In E. Dubinsky, & G. Harel (Eds.), *The concept of function: some aspects of epistemology and pedagogy*, MMA Notes 25. (pp. 109-132). Washington, DC: MAA.

Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. In R. Bielher, et al. (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* (pp. 27-39). Dordrecht: Kluwer Academis Press.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Benedito, V., Ferrer, V., y Ferreres, V. (1995). *La formación universitaria a debate.* Barcelona: Universitat de Barcelona.

Cuevas, C. A. & Pluvinage F. (2009) *Cálculo y Tecnología. El Cálculo y su Enseñanza.* México D.F: DME. Cinvestav-IPN.

Lobato, C. (1997a). Pratique d'accompagnement et projet d'étudiant. FEDORA. *Actas da Conferência Internacional A informacao e a Orientacao Escolar e Profissional no Ensino Superior.* Coimbra: Universidade de Coimbra, 210-218

Mack, J. (1992). Report from Australia and some neighbouring countries. En Artigue, M. y Ervynck, G. (Eds.).*Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*, ICME 7, Université de Sherbrooke, Canadá, pp. 101-113.Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanzadel Cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM. 81-96.

Parada, S. (2009). *Reflexión sobre la práctica profesional: actividad matemática promovida por el profesor en su salón de clases.* Tesis de maestría. Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, México.

Parada, S. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional.* Tesis de doctorado. Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, México.

Tall, D. (1986a).*Building and testing a cognitive approach to the calculus using computer graphics.* Ph. D. Thesis, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick.

Ponencias Cortas

DISEÑO DE UNA ALTERNATIVA DE ACOMPAÑAMIENTO Y SEGUIMIENTO A ESTUDIANTES QUE PRESENTAN DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER (UIS)

Islenis Carolina Botello Cuvides
islenis.botello@correo.uis.edu.co

Sandra Evely Parada Rico
sparada@matematicas.uis.edu.co

Universidad Industrial de Santander

Resumen: Según estudios de Vicerrectoría Académica y la Escuela de Matemáticas de la UIS, la asignatura con mayor pérdida es Cálculo I. En este documento se muestran los primeros avances de un trabajo de investigación -alternativa curricular- que afronta esta problemática, cuyos propósitos son: i) implementare un programa de acompañamiento y seguimiento a estudiantes de Cálculo I de la universidad y ii) analizar el efecto generado de éste en el desempeño académico de aquellos estudiantes que participen en este programa. Actualmente, este trabajo está en la etapa de la prueba piloto. Posteriormentese realizarán las debidas reestructuraciones de esta etapa para mejorar esta alternativa, y así aplicarla en el segundo semestre académico de 2012 de la universidad.

Palabras clave: Cálculo, Fracaso académico, Acompañamiento, Seguimiento y Tutorías.

1. Introducción

Desde hace algunos años, la Universidad Industrial de Santander ha notado con preocupación el alto nivel de fracaso académico [1]. Tras varios estudios de la Vicerrectoría Académica y la Escuela de Matemáticas se encontró que alrededor del 70 % de los estudiantes (de ingenierías y otras carreras afines) que matriculan Cálculo I, la pierden. Se ha visto que algunos de estos estudiantes reprueban o pierden Cálculo I en varias ocasiones: una, dos, tres y hasta cuatro veces. A este fenómeno constante de reprobación, lo llamaremos repitencia[2]. No sólo la repitencia y la reprobación son constantes en la universidad, también es constante la deserción en esta asignatura. La presencia de dichos fenómenos generó en la UIS algunas propuestas de espacios extracurriculares que buscaron ayudar a reducir dicho porcentaje. Motivados por esta problemática, nos hemos tomado la tarea de diseñar e implementar una alternativa remedial [procesos de acompañamiento y seguimiento] que permita a los estudiantes de Cálculo I de la UIS atender las necesidades (conceptuales o procedimentales) que manifiesten en el aprendizaje del cálculo diferencial.

Al plantear la alternativa mencionada en el párrafo anterior, nacen las siguientes inquietudes: *¿cómo guiar procesos de acompañamiento y seguimiento académico (tutorías) a los estudiantes que presentan dificultades en el aprendizaje de cálculo diferencial? y ¿cómo el seguimiento y acompañamiento académico "especializado" influye en el rendimiento de estos estudiantes?*

[1]Se definefracaso académico en Cálculo I como la acción de obtener una nota definitiva menor que tres (3.0).

[2]Repitencia no es un término aceptado por la Real Academia Española, pero es muy frecuente en el ámbito de la educación.

También se plantean otros interrogantes alrededor de las anteriores preguntas: ¿qué son y en qué consisten los procesos de acompañamiento y seguimiento académico?, ¿cómo diseñar o plantear alternativas de acompañamiento para estudiantes de Cálculo I de la Universidad Industrial de Santander?

Con el ánimo de resolver las preguntas de investigación expresadas anteriormente, se han definido los siguientes objetivos: i) plantear e implementar un programa de acompañamiento y seguimiento a estudiantes de Cálculo I de la universidad y ii) analizar el efecto generado de éste en el desempeño académico de aquellos estudiantes que participen en este programa.

2. Aspectos teóricos y revisión bibliográfica

El acompañamiento es mediación, en cuanto es posibilitador para concienciar y personalizar cómo se va construyendo el aprendizaje, el desarrollo de actitudes y el conocimiento científico en el estudiante. El acompañante establece una relación de trabajo para colaborar en el proceso de búsqueda y construcción del saber científico y de la competencia profesional del acompañado (Lobato, 1997). El acompañamiento académico es un proceso permanente y acumulativo, que busca distinguir fortalezas y debilidades; el cual permite explicar la lógica del proceso vivido, los factores que han intervenido en dicho proceso, cómo se han interrelacionado entre sí y por qué lo han hecho de ese modo.

Álvarez (2010) define la Tutoría como una labor de acompañamiento permanente y orientación al alumno durante el aprendizaje. Para Cruz y Abreu (2007) es posible distinguir varios tipos de tutoría, los cuales se describen de la siguiente manera:

> *La tutoría de asignatura*, la cual adiciona las horas de aula, con horas de consultoría en el cubículo para apoyar el aprendizaje de la disciplina; en este caso, los tutores tienden a privilegiar la consultoría de problemas de comprensión en el campo o bien discuten las razones de la inasistencia o fallas de los alumnos.
>
> *La tutoría enfocada a la orientación pedagógica,* la cual pretende apoyar el desarrollo de estrategias de aprendizaje y favorece que el alumno domine su propio proceso para obtener conocimiento.
>
> *La tutoría de acompañamiento*, dirigida a apoyar al alumno durante todo su itinerario escolar, el cual suele presentar una pluralidad de opciones académicas y profesionales, que generan disyuntivas en las que el educando requiere del apoyo de un profesor para orientarlo en sus decisiones, además se incluyen los aspectos motivacionales y de apoyo personal.
>
> *La tutoría dirigida a la formación para la sociedad del conocimiento*, orientada a formar individuos auto-regulados, capaces de actuar en situaciones auténticas, vinculados a la innovación y el desarrollo del saber. (Cruz y Abreu, 2007, p.110)

Alvis (2009) manifiesta que los procesos de acompañamiento y seguimiento académico se refieren a una acción que implica el compromiso de dos o más individuos en la realización de una tarea, un proceso o un proyecto. Alvis (2009) manifiesta que el proceso de acompañamiento y seguimiento académico delega tres funciones: Consejería, asesoría e información (p.13).

Se plantea que los tutores encargados están bajo la imagen de tutoría entre iguales, en Bermejo (1996) encontramos que este tipo de tutorías se fundamenta en la mayor aproximación empática que el estudiante tutorado puede encontrar en los tutores próximos en edad y, con problemáticas semejantes.

3. Aspectos metodológicos

La investigación que se está realizando es de carácter cualitativo. La población a investigar está conformada por los estudiantes de Cálculo I de la UIS, que presentan bajo rendimiento o dificultades en el aprendizaje del cálculo diferencial. Para el diseño, recolección de información, análisis de datos, ejecución, y posterior evaluación de la alternativa se tiene estipuladas las siguientes fases del proyecto:

Fase 0. Un primer acercamiento. En esta fase se hizo un estudio de los programas de seguimiento a estudiantes en la universidad, donde se hace la descripción del fenómeno de estudio para establecer un punto de partida.

Fase I. Diseño de la alternativa. A partir del estudio realizado en la fase anterior, se diseñó una alternativa de seguimiento y acompañamiento a estudiantes, específicamente para Cálculo I de la UIS; esto a partir de la revisión de la literatura y de programas relacionados con el "acompañamiento y seguimiento a estudiantes", a nivel nacional e internacional

Fase II. Prueba piloto. Esta fase busca observar la relación didáctica: profesores en formación - estudiantes del curso. A partir de las fases anteriores se ejecuta la prueba piloto, en esta etapa del proyecto se contó con la colaboración de cuatro profesores de cálculo I de la UIS [un profesor planta de la Escuela de Matemáticas de la UIS –la segunda autora- y tres estudiantes de Maestría en Educación Matemática uno de éstos fue la primera autora]; el profesor de Didáctica del cálculo; los estudiantes de esta asignatura [quienes fueron los tutores]; y los estudiantes [aquellos con necesidades conceptuales] de los cuatro profesores de Cálculo I. Esta fase buscó analizar relaciones como: experiencia del estudiante de Licenciatura en Matemáticas como tutor, y receptividad por parte del estudiante de cálculo I. También estipular para la siguiente fase: el número de tutorías por curso, número de horas de tutoría por semana, número de estudiantes por tutor, alcances de las tutorías grupales frente a las tutorías individualizadas.

*Fase III. Rediseño del plan.*Ya obtenidos los primeros datos recolectados en la Fase II se analizarán estos datos para efectuar un rediseño de la alternativa. De ser admitida esta contribución, serán presentados algunos resultados de esta fase en el marco del Cuarto Seminario Taller en Educación Matemática.

Fase IV. Puesta en escena. Conseguidos los resultados, realizado su posterior análisis y sacando los datos relevantes para conformar la alternativa, se hará la puesta en escena del proceso de acompañamiento y seguimiento a estudiantes de Cálculo I en la UIS.

Fase V. Análisis de los datos de la Fase IV. De los datos obtenidos en la puesta en escena se realizará un nuevo análisis para observar y analizar el efecto generado por la alternativa, en el desempeño académico de aquellos estudiantes que participarán en este programa.

Fase VI. Planteamiento de la alternativa. Al realizar las fases anteriores y analizar los datos obtenidos en ellas, se planteará una Alternativa de Seguimiento y Acompañamiento a Estudiantes (ASAE) en la UIS, tal y como se propone en el objetivo I de esta investigación.

Por último, se estipula que al finalizar la ejecución de la alternativa se elabore el informe final que presentará los resultados, conclusiones y recomendaciones para posteriores ejecuciones del plan. Además se considera que este proceso será continuo y estará sometido a modificaciones, si son pertinentes.

4. Implementación de la prueba piloto

La prueba piloto se realizó desde el 8 de junio hasta el 5 de octubre 2012. En esta prueba se grabaron algunas sesiones y se realizaron dos encuestas a los tutores, una antes de iniciar el proceso y la otra al finalizarlo. Los tutores llenaron un formato de asistencia y otro de su trabajo por sesión [descripción de las actividades, estudiantes asistentes y observaciones generales del grupo]. Se contó con la participación de entre 36 y 64 estudiantes. Inicialmente los estudiantes fueron seleccionados a partir de una prueba diagnóstica y se distribuyeron 3 estudiantes por tutor. Posteriormente, los profesores decidían cuáles estudiantes continuaban o ingresaban a la prueba piloto, acorde a su desempeño académico. Tanto los alumnos como los tutores eran supervisados por la co-investigadora y la investigadora [la profesora Carolina Botello y la profesora Sandra Parada, respectivamente].

5. Primeras reflexiones

Dentro de la Fase III (prueba piloto), los errores más comunes efectuados por los estudiantes eran de tipo algebraico y trigonométrico. No obstante, también demostraban deficiencias en: números reales (por ejemplo, operaciones elementales de fracciones o números decimales), ecuaciones lineales y cuadráticas, funciones (racionales, lineales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas), composición de funciones, desigualdades y sistemas de ecuaciones.

Aunque los tutores trabajaron paulatinamente con sus estudiantes (con el fin de señalar y corregir sus deficiencias), fue casi imposible solventarlas todas, debido a sus malas bases conceptuales o sus malinterpretaciones generadas al estudiar un tema determinado. Por ello, en varias ocasiones algunos tutores dejaban tarea extra a sus estudiantes para que prepararan esos temas en casa, con el fin de comprometerlos a estudiar sin la asistencia del tutor o del profesor.

Además de detectar las dificultades de los estudiantes, es importante destacar las cualidades que fueron evidentes durante esta fase. En varias ocasiones se observaba que los tutores resaltaban los errores del alumno, pero en ocasiones el tutor era quien se equivocaba, y su estudiante, quien le ayudaba. Esta es una fortaleza que tiene la tutoría entre iguales y que se planteará para la Fase IV de la alternativa.

Referencias bibliográficas

Álvarez, N. (2010). La tutoría, el tutor y el plan de acción tutorial. *Revista Pedagogía Magna,* 8, 176-186.

Alvis, K. (2009). *Acompañamiento estudiantil y tutoría académica Reflexiones y aportes a la construcción de un sistema de acompañamiento estudiantil en la Universidad Nacional de Colombia.* Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia.

Bermejo, B. (1996). Fundamentos de acción tutorial. *Cuestiones Pedagógicas*, 12, 209- 222.

Cruz, G. y Abreu, L. (2008). Tutoría en la educación superior: transitando desde las aulas haciala sociedad del conocimiento. *Revista de la Educación Superior*, XXXVII (3), 17, 107-124.

Lobato, C. (1997). "Pratique d'accompagnement et projet d'étudiant". FEDORA. *Actas da Conferência Internacional A informacao e a Orientacao Escolar e Profissional no Ensino Superior (pp. 210-218).*Coimbra: Universidade de Coimbra.

UNA PROPUESTA INCLUSIVA PARA LA REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS POLIEDROS CON POBLACIÓN EN CONDICIÓN DE DISCAPACIDAD VISUAL

Jenny Johanna Torres Rendón
annahojtore@gmail.com

Yenny Rocio Gaviria Fuentes
yengavi@hotmail.es

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen: En este documento se muestra una propuesta que fue implementada en la Institución Educativa Distrital (I.E.D) José Félix Restrepo, durante el desarrollo de la pasantía de extensión de la Universidad Distrital Francisco José de caldas. Para la cual fueron diseñada seis actividades, las cuales consisten en la construcción de los sólidos platónicos, evidenciando sus características y propiedades; con el fin de potenciar las representaciones que tienen los estudiantes en condición de discapacidad visual y videntes, en un aula de inclusión.

1. Problemática

A raíz de las políticas públicas y la obligatoriedad de la integración de estudiantes con necesidades educativas especiales en los establecimientos educativos, surgen muchos temores, interrogantes e incertidumbres por parte de los profesores (Rosich, 1996). El IED José Félix Restrepo es una institución la cual integra personas en condición de discapacidad física visual y en la que los docentes por falta de formación y las actualizaciones de la educación, requieren de un apoyo para brindar oportunidades adecuadas de aprendizaje a los estudiantes. Además los estudiantes en condición de discapacidad física visual, presentan dificultades en el desarrollo del pensamiento geométrico en particular en la identificación, clasificación y apropiación de los polígonos y poliedros.

2. Objetivo general de la propuesta

A continuación presentamos el objetivo general de nuestra propuesta, así como los objetivos específicos:

> Potenciar procesos de reconocimiento del espacio bidimensional y tridimensional a partir de la geometría poligonal y poliédrica en un aula inclusiva para estudiantes invidentes, mediante el diseño, aplicación y evaluación de una secuencia de actividades.

Objetivos Específicos

- Diseñar, gestionar y evaluar una secuencia de actividades con carácter inclusivo en torno a los poliedros y polígonos con población ciega adulta.
- Observar y analizar las acciones de inclusión en la clase de matemáticas
- Proponer adaptación de materiales para el reconocimiento de los poliedros y polígonos en personas ciegas.

3. Referentes teóricos

Para la construcción de las actividades de la propuesta se tuvo en cuenta cuatro referentes importantes:

3.1. Referente legal

En este apartado se referencia lo relacionado con las políticas públicas que propenden por la garantía de derechos educativos para la población con Necesidades Educativas Especiales (NEE), estos documentos son: constitución política, ley general de educación, plan decenal (2006-2016) y todas aquellas políticas que estén relacionadas con la educación a población con discapacidad, haciendo énfasis en la población en condición de discapacidad visual.

3.2. Referente didáctico

Así como para las personas videntes son necesarias las representaciones gráficas y el dibujo, también lo es para una persona invidente, como menciona Rosich (1996) el lenguaje gráfico-geométrico se presenta como paso conveniente entre la manipulación y la abstracción matematizante propiamente dicha; como lenguaje adecuado a los esquemas empíricos forjados por las experiencias lógico-matemáticas interiorizadas. Además el uso de representaciones prefabricadas por parte del profesor para el alumno invidente, es de bastante ayuda, ya que permite tener una comunicación hilada con el estudiante en el momento de realizar una explicación general de una temática, obteniendo una mejor comprensión por parte del estudiante.

> No se debe disponer solo del instrumental, el alumno debe aprender a manejar la aplicación adecuada de los recursos hápticos, táctiles y cenestésicos, y desarrollar destrezas varias como: dominio de los conceptos topológicos, control del esquema y referencias corporales antero-próximas [1], orientación espacial en el ámbito del dibujo, determinación de posiciones relativas entre los elementos de representación, reconocimiento de puntos, líneas y trazos diversos, comparación de distancia, dirección, y ángulos, retención adecuada del bolígrafo, control de la presión sobre el papel, control de la dirección en el trazo, entre otros. (Rosich, 1996, p. 219, 220)

3.3. Referente Metodológico

Para la organización y evaluación de nuestra propuesta de aula tendremos en cuenta a Van Hiele desde un análisis de procesos cognitivos del pensamiento. Donde la matemática se concibe como un proceso de aprendizaje, este modelo presenta una jerarquía de cinco niveles de aprendizaje (Corberán, 1989); en los que se ubican los estudiantes según sus explicaciones (representaciones) y el nivel de información dada en cada una. Una idea fundamental del modelo de Van Hiele es que cada uno de los niveles propuestos es consecutivo y no se puede estar en el nivel 1 y pasar de este al nivel 4, sin antes haber estado en los niveles intermedios. Para la aplicación de la propuesta se tomaran en cuenta los tres primeros niveles, los cuales consisten en: *Nivel 0: Visualización, Nivel 1: Análisis, Nivel 2: Deducción informal.*

Teniendo en cuenta los niveles establecidos por Van Hiele, se presentan cinco fases de aprendizaje geométrico que se estarán presentes en cada nivel:

Fase 1: Encuesta/ Información. Esta fase consiste en identificar en los estudiantes los conocimientos previos, mediante el diálogo e introducción de lenguaje matemático (geométrico) puesto en juego en una situación.

[1] Antero-próximas: se entenderá como la referencia que tiene el estudiante con relación a objetos y cosas de su alrededor.

Fase 2: Orientación Dirigida. El profesor propone actividades para que los estudiantes realicen y exploren, la ejecución y reflexión propuesta servirían de motor para proporcionar el avance en los niveles de conocimiento.

Fase 3: Explicitación. Los estudiantes una vez realizadas las experiencias, expresan resultados y comentarios. Durante esta etapa el estudiante estructura el sistema de relaciones exploradas.

Fase 4: Orientación Libre. Con los conocimientos adquiridos, los estudiantes aplican sus conocimientos de forma significativa en situaciones más complejas que las presentadas, pero con iuna estructura semejante a las trabajadas anteriormente.

Fase 5: Integración. Los objetos y las relaciones son unificados e interiorizadas en un sistema mental de conocimientos.

Teniendo en cuenta la teoría consultada, a continuación se presenta la ruta de aprendizaje que seguirán los estudiantes en el desarrollo la secuencia de actividades denominada: “Un mundo Poliédrico”.

3.4. Referente matemático

Para observar la comprensión del espacio que tiene el estudiante, desde lo tridimensional a lo bidimensional (Godino, 2002) realizaremos una secuencia de actividades en donde el objeto de estudio gira en torno a los sólidos platónicos. Mediante el análisis de cada uno esperamos encontrar diferentes tipos de polígonos. Sin embargo es necesario conocer qué es un sólido Platónico, conocidos como Poliedros Regulares.

Entenderemos poliedros desde la perspectiva de Marín (2001) así:

> **Poliedro** (poli: varios, edros: caras): sólido terminado por superficies planas. Son poliedros regulares aquellos que poseen alta homogeneidad, por estar construidos a partir de polígonos regulares y por converger sobre cada vértice el mismo número de aristas. Son poliedros irregulares los que están construidos con base en polígonos irregulares y en los que sobre cada uno de sus vértices convergen un número irregular de aristas. (p. 6)

Teniendo en cuenta lo que propone Guillén (1991) para la enseñanza de poliedros el primer acercamiento que tiene el estudiante con un cuerpo geométrico (poliedro) es la caracterización del mismo; es decir su tamaño, forma y material. Generando conjeturas que lo llevaran a la construcción, observación, comparación, transformación y modificación del cuerpo trabajado. Cuando se construyen los polígonos a partir de los troquelados la mayor virtud es que permite localizar la atención en dos elementos: las caras y las aristas. Guillén (1991) también menciona que la actividad de clasificar los poliedros teniendo en cuenta la particularidad de cada uno, es una característica esencial de cualquier rama del pensamiento humano y, en particular, una actividad fundamental en las matemáticas. Cuando se quiere realizar una clasificación se debe tener en cuenta:

- Una clasificación depende del criterio utilizado para dividir en clases todo el universo de la clasificación. Lo que importa no es utilizar un criterio, sino que una vez elegido el mismo, se mantenga a lo largo de todo el proceso.
- Cuando se clasifica, una vez determinado el conjunto universo y el criterio de demarcación, cada uno de los elementos del conjunto de partida debe pertenecer a una y sólo a una clase.
- Las distintas clases de un mismo universo deben dar cuenta de la totalidad del mismo. (Guillén, 1991, p. 23, 24)

En la secuencia didáctica para clasificar los cuerpos geométricos, los estudiantes deben de manipular los poliedros y posteriormente determinar elementos que sean comunes, que pertenezcan a cada poliedro para encontrar una característica con los cuales se puedan agrupar.

Para conocer un poco acerca de la historia de los poliedros se tomará como referencia el recorrido histórico que narra Guillen (1997):

> El autor además de ver los poliedros regulares como las superficies, considera que estas a su vez están descompuestas en triángulos rectángulos elementales (isósceles y escalenos). Considera que las figuras de los elementos del fuego, tierra, agua y aire son los cuatro poliedros regulares: tetraedro, cubo, icosaedro, y octaedro respectivamente. La tierra corresponde al cubo, la forma más sólida y menos móvil. El fuego al tetraedro, por ser más aguda y más móvil. Sólo cuatro poliedros se corresponden con los cuatro elementos tradicionales. Pero existe todavía un quinto elemento, el dodecaedro, al que platón simplemente alude en esta frase un tanto enigmática: "Queda sólo una última combinación: Dios la ha utilizado para el todo, cuando dibujó el orden final", para referirse al universo. (p. 44)

Es importante la revisión histórica de los poliedros para observar el recorrido epistemológico y así los estudiantes puedan realizar otro tipo de caracterización o relación de cada poliedro con un objeto de su entorno.

4. Metodología

Para la elaboración de la secuencia se tuvo en cuenta dos elementos orientadores, uno desde los Estándares Básicos para matemáticas para determinar los procesos que se deben desarrollar en el ciclo tres y el otro el Modelo de Van Hiele para la organización y desarrollo de las actividades propuestas. La secuencia busca articular estos elementos orientadores, en miras a desarrollar clases inclusivas con el pretexto de conocer los poliedros platónicos mediante espacios de discusión, argumentación y participación democrática (todos tienen derecho a expresar su opinión con los argumentos que considere convenientes para sustentarla), buscando la tolerancia ante la diferencia.

5. Conclusiones

La importancia de tener representaciones de objetos que permitan relacionarlos con un cuerpo geométrico, es muy significativo para las personas videntes e invidentes, pues al poder relacionar un objeto con caracterizaciones de un sólido, pueden lograr apropiarse más de las características del cuerpo y sus propiedades. Para los estudiantes invidentes, cualquier tipo de referencias y representaciones son aún más importantes que para la persona vidente, pues debe realizar representaciones requiriendo estimular sus otros sentidos para obtener la caracterización del cuerpo geométrico y así referenciarlo con objetos más cercanos a él. Esto permite evidenciar que aunque la persona invidente, a pesar de su discapacidad física, logra tener representaciones y referencias diferentes a una persona vidente, llegando a obtener las características de las figuras trabajadas, pues se centra en detalles que las personas videntes no logran interiorizar con facilidad, por el hecho de ser muy visuales.

La gestión del docente en el uso de instrumentos tangibles que permitan a los estudiantes (videntes o invidentes) caracteriza cuerpos geométricos, es de vital importancia puesto que con la manipulación de los mismos se logra establecer una deducción informal acerca de las características de un cuerpo, que se van convirtiendo en formales gracias a discusiones y argumentos que se van obteniendo en el desarrollo de las actividades propuestas.

Bibliografía

Alsina, C. (1999). *Invitación a la Didáctica de la Geometría.* Madrid: Síntesis

Colección arco iris. (2009). *Cómo orientar al alumno limitado visual en la escuela de matemáticas. Bogotá: INCI.*

Constitución política de Colombia. (1991).

Corberán R., Huerta P., Garrigues J., Peñas A. & Ruiz E. (1989). Didáctica de la geometría: modelo Van Hiele. Universidad de Valencia. España.

Del Olmo M.A., Moreno M.F. & Gil F. (1993). Superficies y volumen ¿algo más que el trabajo con fórmulas? Editorial Síntesis, S.A: Madrid, España.

Guillén G. (1991). Poliedros. Editorial síntesis: Madrid, España.

Ley general de educación (1994)

Lewin, Kurt. (1992). La investigación-acción participativa. Cooperativa editorial magisterio, Bogotá.

Manual de convivencia (2012). Horizonte Institucional. Colegio José Feliz Restrepo IED. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares.* MEN. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (2007). Estándares básicos de competencias en matemáticas. MEN. Bogotá.

Rosich, N., Núñez, J., y Fernández, J. (1996). *Matemática y deficiencia sensorial. Madrid: Síntesis*

LA EXPLORACIÓN DE LA TEORÍA EN LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

Jesús David Berrío Valbuena
jberrio@matematicas.uis.edu.co

Martin Eduardo Acosta Gempeler
martin@matematicas.uis.edu.co

Jorge Enrique Fiallo Leal
jfiallo@uis.edu.co

Universidad Industrial de Santander

Resumen: La actividad demostrativa involucra dos procesos: el primero es un conjunto de acciones que favorecen la emisión de conjeturas y el segundo son acciones destinadas a la producción de una justificación teórica (Camargo, Samper & Perry, 2006). Dentro del segundo proceso proponemos una actividad de exploración de la teoría, gracias a la cual el sujeto busca justificaciones plausibles de sus conjeturas. Estudiamos el uso de software para desarrollar esta actividad de exploración de la teoría, donde se pueden realizar búsquedas de teoremas, definiciones y postulados dentro de una base de datos. Planteamos la hipótesis de que, "el uso de esta base de datos (asistente de demostración) caracterizado por un proceso de razonamiento abductivo se transformarán progresivamente en propiedad del individuo".

Palabras claves: Asistente de demostración, exploración teórica, geometría dinámica, razonamiento abductivo, interiorización.

1. Actividad demostrativa en el ámbito de la educación matemática

El grupo de investigación "Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría" de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), propone la actividad demostrativa un modelo de estudio de los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. Dicho modelo resalta la relación entre la demostración como proceso y como producto (ver figura 1), y comprende dos fases: la primera, es un conjunto de acciones que favorecen la emisión conjeturas y, la segunda, son acciones destinadas a la producción de una justificación (Camargo, Samper & Perry, 2006).

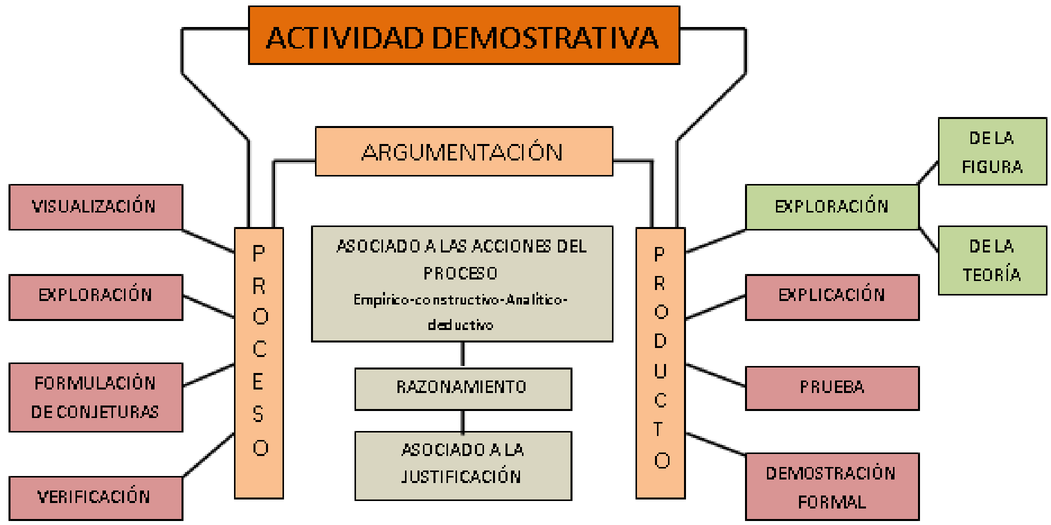


Figura 2. Adaptación del constructo "actividad demostrativa" tomado de (Camargo, Samper & Perry, 2006)

Nuestro trabajo se centra en la segunda fase, a la que añadimos una doble exploración: una exploración de la figura y una exploración de la teoría, caracterizada por procesos abductivos de razonamiento, por medio de los cuales el sujeto busca justificaciones teóricas plausibles para los enunciados que necesita demostrar. Nuestro objetivo es estudiar el impacto del uso del software "asistente de demostración" como andamiaje para el desarrollo de dicha exploración de la teoría.

2. Andamiaje-Asistente de demostración

"La zona de desarrollo próximo no es una zona estática, sino dinámica, donde cada paso es una construcción interactiva específica de ese momento, que abre, a su vez, distintos cursos de evolución futuros" (García, 2003, p.77). Desde este enfoque (Wood, Bruner & Ross, 1976) formulan el concepto de ***andamiaje*** –que refleja este carácter dinámico y sugiere que el apoyo que se le proporciona al individuo, es aquel que se ajusta a sus competencias en cada momento y que va variando a medida que éste puede tener más responsabilidad en la actividad.

En esta investigación, andamiaje hace referencia a un asistente de demostración; este es un software para el aprendizaje de la demostración, desarrollado en la Universidad Industrial de Santander, utilizado en el curso de Geometría Euclidiana, para las carreras de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas. Dentro de las diversas dificultades del aprendizaje de la demostración, el asistente de demostración quiere enfrentar tres: la adquisición de un control lógico para la enunciación de pasos de razonamiento, la flexibilidad en el proceso de producción de pasos de razonamiento (incluyendo las estrategias de análisis y síntesis), y la exploración de la teoría para encontrar definiciones, postulados o teoremas susceptibles de justificar las afirmaciones que se quieren demostrar.

En el presente trabajo nos centraremos en esta última característica del asistente de demostración. Concretamente, el asistente comprende una base de datos de ciento setenta (170) registros con los postulados, definiciones y teoremas a estudiar en el curso (correspondientes al libro de Geometría de (Clemens, O´Daffer & Cooney, 1998)), y permite realizar búsquedas en esa base de datos con tres criterios: el nombre, el antecedente y el consecuente.

3. Exploración teórica

Camargo, Samper y Perry (2006) reconocen "tres acciones distintas de justificación.

> La ***explicación*** es la acción de aludir a una figura para mostrar resultados, de manera empírica, después de una exploración previa de un hecho geométrico. En la ***prueba*** se proporcionan afirmaciones con sus correspondientes razones para validar los resultados obtenidos, pero es un desarrollo deductivo incompleto porque faltan pasos o se cometen algunos errores de índole nominativo o se hace uso de elementos teóricos que no han sido validado. Por último, está la ***demostración formal***; ésta es una justificación elaborada en la cual, a medida que se van deduciendo afirmaciones, se dan las correspondientes razones, ciñéndose al sistema axiomático establecido. (p.374)

Es aquí donde hacemos notar que el individuo recurre a dos tipos de exploración: una exploración de la figura, en la que da prioridad a los enunciados asociados a las propiedades que determina perceptivamente, y una exploración de la teoría, en la que busca en su memoria reglas teóricas ligadas a los enunciados. Consideramos entonces un razonamiento abductivo –que consiste en construir una hipótesis destinada a apoyar los hechos o fenómenos propuestos por un problema. Esto es lo que llamó Charles Sanders Pierce una *conjetura*, cuyo objetivo es ser la mejor o la más probable explicación a dichos fenómenos (Fann, 1970; Beuchot, 1998; Ferrando, 2007).

"Pierce distingue el razonar *hacia* una hipótesis del razonar *desde* una hipótesis. Justamente la abducción es el razonamiento hacia la hipótesis, esto es, desde los hechos hacia la hipótesis que les señala su causa o los explica" (Beuchot, 1998, p.57). Creemos que es posible desarrollar esta exploración de la teoría primero como una serie de acciones externas al individuo, mediadas por el asistente de demostración, que progresivamente el individuo va interiorizando. Para ello nos basamos en el concepto de *zona de desarrollo próximo* de Vygotski.

Esta zona de desarrollo próximo, es el momento en el cual se manifiestan en el ámbito social las habilidades psicológicas o las funciones mentales superiores, y existe un momento posterior donde se manifiestan a nivel individual, es decir, es un fenómeno social que progresivamente se va transformando en propiedad del individuo (García, 2003). Cada función mental superior, primero es social –es ***inter-psicológica***–y después es individual, personal, es decir, ***intra-psicológica***. El paso de inter-psicológico a lo intra-psicológico se conoce como ***interiorización*** –el desarrollo del individuo llega a su plenitud en la medida en que se apropia, hace suyo, interioriza las habilidades inter-psicológicas (García, 2003).

4. Nuestra hipótesis

El uso del asistente de demostración puede considerarse como un andamiaje material para el proceso de exploración de la teoría, y favorece el proceso de interiorización del mismo.

5. Metodología

Realizaremos entrevistas clínicas a alumnos del curso de Geometría Euclidiana, que utilizan el asistente de demostración, en tres o más momentos del curso, en las que les plantearemos problemas de demostración similares a los trabajados en el curso, y observaremos el uso que hagan del asistente de demostración, e intentaremos explicitar los procesos de razonamiento que realizan durante la solución del problema.

Realizando análisis a priori y análisis a posteriori de los diferentes problemas propuestos en las entrevistas, buscaremos confirmar o refutar nuestra hipótesis de investigación.

Referencias

Beuchot, M. (1998). Abducción y Analogía. *Analogía filosófica: revista de filosofía, investigación y difusión. 12*(1), 57-68.

Camargo, L., Samper, C., & Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas, Especial,* 371–383.

Clemens, S., O´Daffer, P., & Cooney, T. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* México D.F: Adisson Wesley Longman.

Fann, K. T. (1970). *Peirce's Theory of Abduction.*La Haya, Holanda: Martinus Nijhoff.

Ferrando, E. (2007). The application of the abductive system to Different kinds of problems. En D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Ed.), *Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (págs. 2280-2289). Larnaca, Cyprus: ERME .

García, M. (2003). *Construcción de la actividad conjunta y traspaso de control en una situación de juego interactivo padres-hijos* (Tesis Doctoral). Universitat Rovira i Virgili, Tarragona, España.

Wood, D., Bruner, J., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Juornal of Child Psychology and Psychiatry, 17*, 89-100.

CARACTERIZACIÓN DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE ESPECÍFICOS A LOS PROCESOS DE DESCRIPCIÓN, DEFINICIÓN Y DEMOSTRACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Danny Luz Algarín Torres
dannyalgarin@gmail.com

Jorge Enrique Fiallo Leal
jfiallo@uis.edu.co

Universidad Industrial de Santander

Resumen: En este documento se presentan las bases teóricas de una propuesta de investigación que busca caracterizar los descriptores de los procesos de descripción, definición y demostración en cada uno de los niveles de razonamiento de los estudiantes, específicos para el tema de las razones trigonométricas. Se proponen las ideas de una primera categorización, basada en el análisis de los resultados obtenidos en la investigación realizada por Fiallo (2010) sobre el estudio del proceso de demostración en el tema de las razones trigonométricas.

Palabras clave: Niveles de Van Hiele, software de geometría dinámica, procesos matemáticos de descripción, definición y demostración.

1.Introducción

Los bajos resultados en el área de matemáticas de los estudiantes colombianos en las pruebas externas e internas es un tema ampliamente conocido. Los alumnos llegan a los niveles superiores con muchas falencias en las competencias matemáticas, debido a los numerosos obstáculos y dificultades que se presentan para que el proceso de adquisición de competencias pueda ser exitoso.

Precisamente, en los grados superiores, una de las dificultades a las que se enfrentan los docentes y estudiantes es la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría. Como una alternativa para brindarle al estudiante herramientas y estrategias que le permitan aprender conceptos y desarrollar procesos de razonamiento; Fiallo (2010) presenta un estudio en el cual entrega información relevante sobre la comprensión del proceso de demostración, a partir del diseño, implementación y evaluación de una unidad de enseñanza de las razones trigonométricas. En esta propuesta se usó las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele como componente didáctica para el diseño de la unidad de enseñanza, pero no se realizó una caracterización de los niveles de razonamiento concernientes al tema de las razones trigonométricas.

Tomando en cuenta lo anterior y con miras a lograr que el estudiante, a partir de situaciones concretas desarrolle su proceso de razonamiento, que adquiera y comprenda conceptos y relaciones matemáticas que favorezcan el aprendizaje de las razones trigonométricas, y sobre todo, que las situaciones planteadas favorezcan el tránsito de los estudiantes de un nivel de razonamiento a otro superior, nos formulamos la siguiente pregunta de investigación: *¿Cuáles son los descriptores que caracterizan los procesos de descripción, definición y demostración en cada uno de los niveles de razonamiento de Van Hiele de los estudiantes cuando se estudian las razones trigonométricas?*

La pregunta de investigación nos lleva a formular el siguiente objetivo general: Caracterizar los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el tema de las razones trigonométricas.

2. Marco conceptual

Teniendo en cuenta que hasta el momento estamos en la etapa de revisión de la literatura, presentamos a continuación algunos aspectos del marco conceptual que fundamenta nuestro trabajo, el cual toma referencias de las siguientes corrientes de investigación: estudio de los procesos matemáticos, el modelo de Van Hiele y uso de software de geometría dinámica, ya que éste es una de las componentes metodológicas en el diseño de la unidad de enseñanza.

3. Procesos matemáticos

Para Gutiérrez (2007), aprender matemáticas es principalmente, aprender una serie de procesos como: observar y describir, analizar y definir, comparar y clasificar, explicar y demostrar, imaginar y visualizar. Este autor considera que basados en el modelo de Van Hiele, podemos comprender, plantear y desarrollar unidades de enseñanza que nos ayuden a promover estos procesos matemáticos. Por otro lado, en los principios y estándares de la educación matemática del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), se proponen los siguientes estándares de procesos: resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, representación y conexiones, los cuales deben ser transversales en la enseñanza de los cinco estándares de contenidos, allí propuestos. El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998), plantea que, de acuerdo con una visión global e integral del quehacer matemático, para organizar el currículo se deben considerar los procesos generales que tienen que ver con el aprendizaje, tales como: el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración; comparación y ejercitación de conocimientos básicos, que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas.

> El objetivo de enseñar las habilidades del pensamiento no se debería considerar, por tanto, como algo opuesto al de enseñar el contenido convencional sino como un complemento de éste. La capacidad del pensamiento y el conocimiento son como la trama y la urdimbre de la competencia intelectual, y el desarrollo de cualquiera de las dos cosas en detrimento de la otra, nos produciría algo muy distante de una tela de buena calidad. (MEN, 1998)

En nuestro trabajo de investigación, por las características del tema escogido y las actividades planeadas, se considerarán solamente los procesos de descripción, definición y demostración.

Respecto a estos procesos, tenemos que: la palabra *describir* en todos los niveles de razonamiento puede asociarse a listas de propiedades o características de los conceptos, con lo cual entendemos que este proceso se da si los estudiantes elaboran un listado de propiedades físicas o las propiedades y elementos matemáticos de los objetos en cuestión (Guillén, 2004); *la definición* se concibe generalmente como un enunciado de las características y propiedades inherentes de un objeto matemático, las definiciones expresan las propiedades que los caracterizan (objetos) y los ubican dentro de una red de relaciones establecidas (Flórez, s.f.); la *demostración* se concibe como el proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática (Fiallo, 2010).

3.1 Modelo de Van Hiele

El modelo de Van Hiele, está formado por dos componentes: los niveles de razonamiento, que describen la forma como los estudiantes razonan cuando efectúan diversas actividades para un tema, desde el razonamiento intuitivo hasta el razonamiento abstracto formal y las fases de aprendizaje, que ayudan al profesor a organizar las actividades para que sus estudiantes puedan avanzar de un nivel de razonamiento al inmediatamente superior. El modelo considera cinco niveles de razonamiento, siendo el último nivel el de rigor, el cual no se alcanza en la escuela secundaria, por lo que en nuestro trabajo no lo tendremos en cuenta. Es característico del modelo el seguimiento de un orden, la adyacencia, las relaciones y el lenguaje propio de cada uno de los niveles, además, el paso de un nivel de pensamiento y conocimiento a otro no va asociado a la edad y sólo alcanzado un nivel se puede pasar al siguiente. La transición entre niveles sólo es posible con el aprendizaje de un nuevo lenguaje por ese motivo dos personas que razonan en niveles diferentes, no se pueden entender.

En cuanto a las características de los procesos de descripción, definición y demostración de los niveles tenemos:

Nivel 1 Reconocimiento: los estudiantes razonan sobre conceptos básicos, tales como formas simples, principalmente por medio de consideraciones visuales del concepto como un todo (Burger y Shaughnessy, 1986). Describen las propiedades y elementos físicos de los objetos matemáticos, no hay razonamiento matemático, por lo que no realizan ningún tipo de demostración (Gutiérrez, 2007).

Nivel 2 Análisis: los estudiantes razonan sobre los conceptos por medio de un análisis informal de las relaciones y propiedades, se establecen las propiedades necesarias del concepto (Burger & Shaughnessy, 1986). Describen propiedades y elementos matemáticos de los conceptos, usan definiciones de estructura lógica simple, construyen definiciones a partir de un listado de las propiedades conocidas (Gutiérrez, 2007), realizan demostraciones de tipo empírico ingenuo, experimento crucial basado en ejemplo, experimento crucial constructivo y ejemplo genérico analítico (Fiallo, 2010).

Nivel 3 Deducción informal: los estudiantes ordenan lógicamente las propiedades de los conceptos, construyen definiciones abstractas y pueden distinguir entre la necesidad y suficiencia de un conjunto de propiedades al determinar un concepto (Burger & Shaughnessy, 1986). Usan cualquier tipo de definición (Gutiérrez, 2007). Realizan demostraciones de tipo ejemplo genérico intelectual, experimento mental transformativo y experimento mental estructurado (Fiallo, 2010).

Nivel 4 Deducción formal: El estudiante razona formalmente dentro del contexto de un sistema matemático, completo, con términos indefinidos, axiomas, un sistema lógico subyacente, definiciones y teoremas (Burger & Shaughnessy, 1986). Se admite la existencia de definiciones equivalentes, se puede demostrar la equivalencia de definiciones (Gutiérrez, 2007). Realizan demostraciones de tipo experimento mental estructurado, deductiva formal transformativa y deductiva formal estructurada (Fiallo, 2010).

Con relación a las fases de aprendizaje, según Crowley (1987) tenemos que:

- *Fase 1* Información: En esta etapa inicial el profesor y los estudiantes conversan y realizan actividades sobre los objetos de estudio de este nivel.

- *Fase 2* Orientación dirigida: Los estudiantes exploran el tema de estudio a través de los materiales que el profesor ha ordenado cuidadosamente. Estas actividades deben revelar gradualmente a los estudiantes las estructuras características de este nivel.

- *Fase 3* Explicación: Apoyándose en sus experiencias previas, los estudiantes expresan e intercambian sus incipientes puntos de vista acerca de las estructuras que han observado.

- *Fase 4* Orientación libre: Los estudiantes encuentran tareas más complejas, tareas con muchos pasos, tareas que se pueden realizar de varias formas y actividades abiertas.
- *Fase 5* Integración: Los estudiantes analizan y resumen lo que han aprendido, con el fin de tener una visión global de la nueva red de objetos y relaciones.

  La evaluación es una de las claves de este modelo ya que para la asignación de niveles, se deben tener en cuenta algunas ideas previas:

- El nivel de razonamiento de los estudiantes depende del área de las matemáticas que se trate.
- Se debe evaluar cómo los estudiantes contestan y el porqué de sus respuestas, más que lo que no contestan o contestan bien o mal.
- En las preguntas no está el nivel de los estudiantes sino que está en sus respuestas.
- En unos contenidos se puede estar en un nivel y, en otros diferentes, en nivel distinto.
- Cuando se encuentran en el paso de un nivel a otro puede resultar difícil determinar la situación real en que se encuentran.

3.2 Uso de software de geometría dinámica

Teniendo en cuenta que la unidad de enseñanza que nos proponemos diseñar utilizará un entorno de geometría dinámica, debemos tener en cuenta los resultados de investigaciones que nos indican sobre los beneficios y riesgos de su uso, especialmente en lo referente al desarrollo de los procesos planteados. Al respecto Noss y Hoyle (1993) expresan que a los estudiantes se les debe ofrecer un conjunto de actividades computacionales cuidadosamente diseñadas en formas que pueden ser a la vez funcionales y lúdicas, de modo que al interactuar con el software pueda discriminar los conceptos y relaciones matemáticas específicas a la situación. Esto, conlleva a la generalización y síntesis de las ideas en un marco matemático coherente.

Mariotti (2006) explica que el uso de herramientas computacionales, como primitivas, macro o arrastrar - puede ser aprovechado por el profesor con el objetivo de desarrollar el significado personal de los estudiantes hacia la matemática con significados, según objetivos didácticos específicos. Con relación al uso del arrastre Arzarello (2000) opina que el docente mediante intervenciones adecuadas, debe promocionar su uso consciente y además debe enseñar las diferentes tipologías existentes como el arrastre guiado y la prueba de arrastre entre otras.

4. Aspectos metodológicos

La investigación que se desarrollará será de tipo cualitativo; se llevará a cabo con estudiantes de grado 10° de la Institución Educativa Luis Carlos Galán de Bucaramanga durante el primer semestre del 2013. Para conseguir el objetivo planeado se tendrán en cuenta las siguientes fases:

a) Primera fase: Elaboración del proyecto. En esta etapa se hace necesario una revisión de la literatura para verificar el estado de las investigaciones y posteriormente seleccionar un marco conceptual acorde al problema.

b) Segunda fase: Trabajo de campo. Esta fase tendrá dos momentos:

   - Elaboración de una propuesta de descriptores para los procesos de descripción, definición y demostración de cada nivel de Van Hiele para el tema de las razones trigonométricas y diseño de las actividades a ejecutar con los estudiantes.

- Implementación de las actividades, aplicación de pre-test y post-test.

c) Tercera fase: Análisis de los datos. Esta fase nos permitirá contrastar los datos obtenidos con la caracterización propuesta de modos que encontremos respuesta a la pregunta de la investigación.

d) Cuarta fase: Conclusiones y resultados del proceso. En esta fase podremos presentar una propuesta formal para los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele de los estudiantes para el tema de las razones trigonométricas.

5. Avances

Aunque en este momento nos encontramos en la fase de revisión de literatura y elaboración de un marco conceptual que nos permita sustentar el trabajo a realizar, hemos ido avanzando en la construcción de una primera propuesta de los descriptores de los niveles de Van Hiele teniendo en cuenta las actividades diseñadas por Fiallo (2010), en primera instancia consideramos pertinente analizar cada actividad por separado, de modo que sean la base de una caracterización general de toda la unidad de enseñanza que planeamos rediseñar.

En el siguiente cuadro se observa algunas de las características de los niveles para la actividad 1: Razones trigonométricas para triángulos rectángulos.

Nivel / Proceso	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Descripción	▪ Describen los elementos y las propiedades de los triángulos rectángulos, e identifican los ángulos internos y externos del triángulo. ▪ Identifican las seis razones trigonométricas en el triangulo rectángulo y las describen como "cocientes" entre los lados del triángulo rectángulo.	▪ Describen las razones trigonométricas como la relación entre pares de lados del triángulo rectángulo. ▪ Reconocen que el valor de las razones trigonométricas de un triángulo depende de la amplitud de los ángulos del triángulo pero no depende de las longitudes de sus lados. ▪ Reconocen con ayuda de SGD que las razones trigonométricas seno y coseno varían entre cero y uno; tangente y cotangente entre cero e infinito; secante y cosecante entre uno e infinito. ▪ Reconocen que seno y cosecante; coseno y secante; tangente y cotangente son recíprocas respectivamente. ▪ Reconocen que los ángulos agudos del triangulo rectángulo son complementarios. ▪ Reconocen con ayuda de SGD que: $sen\,(A) = cos\,(90 - A)$; $cos\,(A) = sen\,(90 - A)$; $tan\,(A) = cot\,(90 - A)$; $cot\,(A) = tan\,(90 - A)$; $sec\,(A) = csc\,(90 - A)$; $cos\,(A) = sec\,(90 - A)$; ▪ Reconocen que: $tan\,(A) = \frac{sen(A)}{cos(A)}$;		
Uso de definiciones		▪ Usan las definiciones de las razones trigonométricas del triángulo rectángulo: ▪ $sen\,(A) = \frac{opuesto}{hipotenusa}$; ▪ $cos\,(A) = \frac{adyacente}{hipotenusa}$; ▪ $tan\,(A) = \frac{opuesto}{adyacente}$; ▪ $cot\,(A) = \frac{adyacente}{opuesto}$; ▪ $sec\,(A) = \frac{hipotenusa}{adyacente}$; ▪ $csc\,(A) = \frac{hipotenusa}{opuesto}$;	▪ Relaciona las definiciones de las razones en trigonométricas en el triangulo rectángulo como cociente y como relación entre magnitudes reales positivas.	▪ Se admiten definiciones equivalentesde las razones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente

Formulación de defini- cionesción		■ Comprenden las definiciones: ■ $sen\,(A) = \frac{opuesto}{hipotenusa}$; ■ $cos\,(A) = \frac{adyacente}{hipotenusa}$; ■ $tan\,(A) = \frac{opuesto}{adyacente}$; ■ $cot\,(A) = \frac{adyacente}{opuesto}$; ■ $sec\,(A) = \frac{hipotenusa}{adyacente}$; ■ $csc\,(A) = \frac{hipotenusa}{opuesto}$;	Conjunto de propiedades necesarias y suficientes Encontrar relaciones entre las razones trigonométricas	
Demostración		■ dentiRealizan demostraciones empíricas de las propiedades reconocidas de las razones trigonométricas (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico)	■ Realizan demostraciones empíricas (Ejemplo Genérico Intelectual) ■ Realizan demostraciones deductivas (Experimento Mental)	■ Realiza demostraciones deductivas (Deductivas Formales

Referencias bibliográficas

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Jaime,J., Peñas,A. y otros (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele.* España: Ministerio de Educación, Centro de investigación y Documentación Educativa.

Crowley, M. (1987). The Van Hiele model of the development of geometric thought, en NCTM, pp 1-16. Traducción por Tomás Macías (E.U. de profesorado de E.G.B. Cádiz) corregida por Angel Gutiérrez y Adela Jaime (Dpto de Didáctica de la Matemática de la U. de Valencia)

Hoyles, C. & Noss, R. (1993) Deconstructing Microworlds.En Ferguson, D (Ed) Advanced Educational Technologies for Mathematics and Science (p 415-438) NATO ASI series.

Fiallo, J. (2011). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica.* (Tesis de Doctorado) Universidad de Valencia.

Gutiérrez, A. (2007). *Procesos matemáticos en la enseñanza/aprendizaje de la geometría.* XVI Congreso Nacional de Matemáticas. Medellín.

Mariotti, M. (2006). Proof and Proving in Mathematics Educations. En A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education:Past, Present and Future (p. 173-204). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Ministerio de Educación Nacional MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales.* Colombia: M.E.N.

Ministerio de Educación Nacional (MEN), (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas ciencias y ciudadanía* (Primera edición). Colombia, Ministerio de Educación Nacional. NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Van Hiele, P.M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría).* (Tesis doctoral). Universidad de Utrecht, Utrecht (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).

LA FORMACIÓN DE PROFESORES QUE ENSEÑAN ESTADÍSTICA DESDE LA INVESTIGACIÓN COLABORATIVA

Difariney González Gómez [1]
difariney@gmail.com
Universidad de Antioquia

Resumen: En este documento se presenta el planteamiento del problema y un plan para el desarrollo de una investigación apoyada por la línea de formación de profesores. Se abordan temas como el conocimiento profesional de los profesores que enseñan estadística cuando participan y reflexionana través del trabajo colaborativo. La metodología que se plantea es bajo el paradigma cualitativo con un enfoque crítico-dialéctico adoptando la investigación colaborativa como horizonte metodológico. Los profesores participantes en esta propuesta constituirán una comunidad de práctica en la que compartirán, estudiarán, reflexionarán y actuarán sobre sus propias realidades de la clase de estadística.

Palabras clave: Formación de profesores, conocimiento profesional del profesor, comunidad de práctica, investigación colaborativa.

1. Introducción

En la primera y segunda parte de este artículo se incluye una breve descripción del problema y un acercamiento al marco referencial de la investigación en curso con la finalidad, de contextualizar y facilitar la comprensión de las reflexiones metodológicas que se han ido dando en el desarrollo de la propuesta de investigación. En la tercera parte, se presenta la investigación colaborativa como herramienta metodológica para trabajar con profesores en ejercicio.

La construcción de esta propuesta de investigación ha sido desafiante pero me ha permitido pensar profundamente en la formación de los profesores que enseñan estadística y en los retos de los programas de formación para superar propuestas estáticas y alejadas de la realidad de los profesores. Cabe mencionar que la presente propuesta de investigación se encuentra en construcción y hasta el momento hemos planteado la pregunta de investigación: ¿cómo se moviliza el conocimiento profesional de los profesores que enseñan estadística a través de la participación y reflexión en una comunidad de práctica?

2. Presentación del problema

La formación de profesores es de actual interés en el campo de la investigación en educación y se ha abordado desde diferentes miradas (Toledano-Perez, 2008). Algunas posturas han estado relacionadas con el desarrollo curricular, la evaluación, la cognición del profesor, la didáctica, entre otros aspectos que apuntan a la mejora de la educación.

Un primer aspecto problemático es el aislamiento de la profesión del profesor, es decir, los profesores tienden a trabajar solos, viéndose enfrentados a asumir el control total de lo que pasa dentro del aula de clase (Horn, 2012; Chauraya & Brodie, 2012).

[1] Estudiante de Doctorado en Educación en la línea de Educación Matemática, Universidad de Antioquia Docente Universidad de Antioquia.

Los profesores tienen poca interacción con sus colegas para compartir su experiencia y en algunos casos cuando hacen parte de programas de formación, el flujo de ideas es unidireccional y no multidireccional (Kumar & Subramaniam, 2012).

Otro aspecto problemático en la formación de profesores es el distanciamiento entre teoría y práctica, debido a que en muchos programas de formación el conocimiento evoluciona por un lado, mientras que las experiencias de los profesores que trabajan en las aulas se desarrollan por otro (Vaillant, 2009; Sánchez, 2011; Parada, 2011). Finalmente, existe una problemática relacionada con el conocimiento profesional de los profesores que enseñan estadística, ya que se ha dado a la estadística un papel invisible en algunos casos, o de poca incidencia en la educación secundaria y en la formación de profesores. Por tanto, es común que algunos profesores tengan preocupaciones y tensiones al enseñar estadística, debido a que consideran tener una escasa preparación en el área.

Lo anterior nos lleva a considerar que es importante generar y fortalecer espacios de discusión y conversación en los cuales el profesor pueda compartir sus explicaciones, su sentir y su experiencia en el aula de clase. Es decir, es conveniente tener programas de formación en donde los profesores puedan trabajar en forma colaborativa y tener espacio para observar y dejarse observar, contar y escuchar sus experiencias y las de los demás. En otras palabras, hay una necesidad de espacios de formación en donde el profesor tenga confianza en sus colegas y sea visto desde diferentes dimensiones (Krichesky & Murillo, 2011; Horn, 2012; Parada, 2011).

3. Marco referencial

En la presente sección presento una aproximación a la fundamentación teórica la cual consta de tres ideas que han sido centrales para construir la investigación. La primera es la *comunidad de práctica*, la segunda relacionada con el *conocimiento profesional del profesor* y la tercera el modelo de *reflexión-acción*.

3.1. Comunidad de práctica

La última década ha sido testigo de la creciente demanda para mejorar la enseñanza de la matemática, se ha generado una necesidad por parte de los profesores de unir fuerzas y experiencias en colectivo. Es así como empiezan a consolidarse grupos de trabajo colaborativo donde cada integrante participa voluntariamente. Muchas investigaciones se han enfocado desde una perspectiva sociocultural, centrándose en los aprendizajes construidos por los profesores cuando participan y reflexionan en una comunidad de práctica (Horn, 2012; Parada, 2011; Lupu, 2010; Chauraya & Brodie, 2012; Escudero, 2009). Los resultados de estas investigaciones afirman que las discusiones entre profesores pueden posibilitar reflexiones que lleven a favorecer la práctica del profesor y pueden atender a las necesidades de sus vivencias en el aula de clase.

Una comunidad de práctica se define como un grupo de personas informalmente unidas (Wenger, 2001; Lupu, 2010). Las personas en una comunidad de práctica comparten preocupaciones e intereses comunes en forma fluída y libre, profundizan y construyen de manera colaborativa conocimiento encontrando modos creativos que permiten desarrollar nuevas aproximaciones de soluciones a los problemas del aula de clase. En una comunidad de práctica los profesores tienen la oportunidad de participar de actividades conjuntas, discusiones y relaciones que les permiten aprender de los otros de tal forma que el aprendizaje se constituye como un proceso de participación en la comunidad.

Este estudio se fundamenta en una comunidad de práctica debido a las potencialidades que la comunidad ofrece para el trabajo colaborativo de los profesores. Pretendo tabajar con profesores que pertenezcan a la mesa de trabajo de matemáticas[2]. Considero que este grupo de profesores ya tienen una dinámica de trabajo colaborativo que puede facilitar el desarrollo de la investigación.

[2]Las mesas de trabajo están conformadas por un grupo de profesores que trabajan de manera voluntaria.

3.2 Conocimiento profesional del profesor

Referente al conocimiento profesional del profesor, cabe señalar que algunas investigaciones como las de Marcelo (1992) y Bolívar (2005) coinciden en mencionar los trabajos de Lee Shulman (1986, 1987) como desencadenantes de las discusiones sobre el conocimiento y la formación de los profesores.

Posteriormente Debora Ball y sus colaboradores (Ball, 2005; Ball, Hill & Bass, 2005; Hill, Rowan & Ball, 2005) quienes trabajan enmarcados en la propuesta de Shulman hacen aportes en el campo de la educación matemática. Estos autores hacen referencia al conocimiento matemático que los profesores necesitan para que los estudiantes aprendan. Los autores proponen cuatro componentes: conocimiento disciplinar común, conocimiento disciplinar especializado, conocimiento disciplinar y de estudiantes y, finalmente el conocimiento displinar y de enseñanza.

Autores como Ponte (2012) hacen referencia al conocimiento profesional del profesor, tomando una postura mucho más integral a la propuesta por Shulman (1986). Para Ponte (2012), el conocimiento profesional está comprendido por cuatro dimensiones que se conjugan formando una unidad sin dar espacio a fragmentaciones. Una primera dimensión viene dada por la disciplina que es objeto de enseñanza, denominada el conocimiento de la matemática para su enseñanza. Una segunda dimensión es el conocimiento que se tiene de los estudiantes y de sus procesos de aprendizaje. Una tercera dimensión está relacionada con el conocimiento del currículo, en este caso se hace referencia al conocimiento de las finalidades y objetivos principales de la enseñanza de la estadística. Finalmente la cuarta dimensión está relacionada con el conocimiento de la práctica educativa, lo cual constituye el núcleo fundamental del conocimiento profesional del profesor.

3.3 Modelo reflexión-y-acción en comunidades de práctica: un modelo de desarrollo profesional

El modelo de reflexión-acción propuesto por Parada (2011) se fundamenta en el desarrollo del pensamiento reflexivo que se posibilita mediante el trabajo colaborativo entre profesores. En el modelo reflexión y acción se rescata la necesidad de reflexionar antes, durante y después de la clase. Teniendo presente que se necesitan analizar muchos aspectos del quehacer del profesor, Parada (2011) centra la atención en tres aspectos que componen el pensamiento reflexivo del profesor de matemáticas: el pensamiento matemático escolar, el pensamiento pedagógico y didáctico del área y el pensamiento orquestal.

En las secciones anteriores se han presentado algunos referentes conceptuales que son esenciales para el desarrollo de la propuesta. Concuerdo con varios de los puntos antes mecionados, sin embargo, adopto la propuesta de Ponte (2012) referente al conocimiento profesional del profesor, debido a que este modelo no concibe la posibilidad de separar unas dimensiones de otras y aunque se intentan establecer diferencias se resalta que todas deben estar presentes en la labor del profesor cuando enseña matemática. En este punto cabe mecionar que cuando el profesor enseña estadística está presente la estadística, están presente los objetivos y principios curriculares, está presente el conocimiento que se tiene de los estudiantes y las formas de aprendizaje, así como también el conocimiento de las dinámicas de trabajo, los recursos y la práctica.

4 Metodología

La presente propuesta se desarrollará de acuerdo al paradigma de investigación cualitativo bajo un enfoque crítico-dialéctico donde se concibe al profesor como resultado de los procesos sociales e históricos, determinado por contextos económicos, políticos y culturales y al mismo tiempo como un ser transformador de esos contextos. Se tiene una concepción de realidad, entendiendo la realidad como una visión dinámica, el mundo es inacabado y en constante construcción (Sánchez, 1998).

Los participantes para esta propuesta serán profesores en ejercicio de primaria o secundaria que hagan parte de una mesa de trabajo de matemáticas activa y que tengan un interés por la estadística. Los profesores se reunirán cada 15 días en un espacio de 3 horas durante un semestre. Ellos participarán en un programa de formación que se desarrollará bajo la concepción de una comunidad de práctica en la cual se resalta la importancia del aprendizaje informal y del trabajo colaborativo (Lupu, 2010).

En este punto resalto la investigación colaborativa debido a que ésta constituye el horizonte metodológico. Tomo como referentes a Boavida y Ponte (2002) y Cano y García (2010) comprendiendo que una investigación se torna colaborativa cuando surge de un grupo de profesionales el compromiso por trabajar juntos frente a un objetivo común. La colaboración implica negociación, toma conjunta de decisiones y comunicación efectiva para el aprendizaje mutuo (Day, 1999 citado por Boavida y Ponte, 2002).

Cabe mencionar que en la investigación colaborativa se dan varias etapas de acción y reflexión lo que requiere la definición de un plan general de trabajo que en muchos casos puede ser modificado de acuerdo a las situaciones, dinámicas y conflictos en el grupo de profesores. Comparto las acepciones de Boavida y Ponte (2002) quienes afirman que toda colaboración es un proceso emergente en el cual la imprevisibilidad toma un papel fundamental y es por esto que el trabajo colaborativo debe estar fundamentado en la negociación, la apertura y disposición de sus participantes.

Un trabajo colaborativo no involucra apenas un aprendizaje relativo al problema en cuestión. Implica un auto-aprendizaje y un aprendizaje acerca de las relaciones humanas debido a que cada profesor llegará al grupo colaborativo con sus propios objetivos, necesidades, comprensiones y sentires y a través de un proceso de compartir y colaborar cada uno aprenderá del otro, aprenderá más de sí mismo y más del tema en cuestión.

Los instrumentos que se utilizarán para la recolección de registros y datos consisten en autobiografías, planeaciones de clase, videograbaciones de los encuentros y de las clases y otros que surjan de la dinámica misma de la comunidad de práctica. Se espera que esta información pueda aportar elementos suficientes para dar cuenta de la movilización del conocimiento profesional del profesor.

Referencias Bibliográficas

Ball, D. L. (2005).Mathematics teaching and learning to teach project.*Documento presentado ante la American Educational Research Association: Annual Meeting.*

Ball, D. L., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows math well enough to teach third grade and how can we decide? *American Educator*, 14-46.

Boavida, A. M., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Org.). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, 43-55.

Bolívar, A. (2005). Conocimiento didáctico del contenido y didácticas específicas. Profesorado. *Revista de currículum y formación del profesorado*, 9 (2), 1-39.

Cano Flores, M., & García López, T. (2010). La investigación colaborativa: una experiencia en el desarrollo de un proyecto educativo. Ciencia administrativa 1, 61-67.

Casals, A., Mercè, V., &Jaume, A. (2008). La investigación-acción colaborativa: reflexiones metodológicas a partir de su aplicación en un proyecto de música y lengua. Revista electrónica complutense de investigación en educación musical, 5 (4), 1-17.

Chauraya, M. & Brodie, K. (2012). Mathematics teachers' learning and teaching practices in a professional learning community.12th.International Congress on Mathematical Education, 5124-5131. Seoul, Korea.

Hill, H., Rowan, B. & Ball, D. (2005). Effects of teachers´ Mathematical Knowledg eforteachingon student achievement.American Educational Research Journal, 42 (2), 371-406.

Horn, I. (2012). Teachers learning together: pedagogical reasoning in mathematics teachers collaborative conversations. 12th. International Congress on Mathematical Education, (págs. 1-9). Seoul, Korea.

Krichesky, G. F. & Murillo Torrecilla, J. (2011). Las comunidades profesionales de aprendizaje. Una estrategia de mejora para una nueva concepción de escuela. Revista iberoamericana sobre calidad, eficacia y cambio en la educación 9 (1), 1-20.

Kumar, R. S. & Subramaniam, K. (2012). Understanding teachers' concerns and negotiating goals for teaching: Insights from collaborative lesson planning. 12th. International Congress on Mathematical Education, 1-10. Seoul, Korea.

Lupu, M. M. (2010). Learning to be teachers between participatin go a community of educational practice and belonging to a learning community. Journal of Educational Sciences 12 (2), 63-69.

Marcelo, C. (1992). Como conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre conocimiento didáctico del contenido. Ponencia presentada al Congreso "Las didácticas específicas en la formación del profesorado". Santiago 6 – 10 julio.

Parada, S. (2011). Reflexión y acción en comunidades de práctica: un modelo de desarrollo profesional.(Tesis de doctorado no publicada), Centro de investigación y de estudios avanzados IPN, México.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.),. Teoría, crítica y práctica de la educación matemática, 93-98.

Sánchez, M. (2011). Profesores que estudian matemática educativa. Didac (56-57), 4-8.

Sánchez, S. (1998). Fundamentos para la investigación educativa: presupuestos epistemológicos que orientan al investigador. Santa Fé de Bogotá: Magisterio.

Shulman. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. AmericanEducational Researcher Association, 15 (2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of new reform. Harvard Educational Review 57 (1), 1-22.

Toledano-Pérez, M. (2008). Políticas y tensiones en los procesos de profesionalización docente en-Hidalgo, una agenda de política educativa. Tesis doctoral: Universidad autónoma del estado de Hidalgo.

Vaillant, D. (2009). Formación de profesores de Educación Secundaria: realidades y discursos. Revista de Educación, 350, 105-122.

Wenger, E. (2001). Comunidades de Práctica: aprendizaje, significado e identidad. Barcelona: Paidós.

CONFORMACIÓN DE UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICA DE PROFESORES DE PRECÁLCULO: UNA ALTERNATIVA DE DESARROLLO PROFESIONAL PARA COADYUVAR EN LA PREPARACIÓN PREUNIVERSITARIA EN MATEMÁTICAS

Daniel Moreno Caicedo
dmorenoc@uis.edu.co

Sandra Evely Parada Rico
sparada@matematicas.uis.edu.co

Universidad Industrial de Santander

Resumen: El presente trabajo muestra los inicios de una investigación que tiene como objetivo: Aportar elementos para la conformación de una comunidad de práctica (CoP) de profesores de matemáticas de Educación Media, en la que se fomente la reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos de precálculo y cálculo diferencial. En este documento se presenta brevemente el marco teórico que guiará los procesos metodológicos y de análisis de la investigación. Así mismo, se exhiben avances sobre los inicios de la conformación de la CoP en mención.

Palabras Clave: Comunidad de práctica, formación de profesores, modelo R-y-A, precálculo, y procesos de reflexión.

1. Introducción

Internacionalmente, en el campo de la Educación Matemática, se ha identificado como foco de amplia problemática las dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo (Azcárate y Camacho, 2003). Esta situación no es ajena en la Universidad Industrial de Santander (UIS), donde estudios recientes muestran que cerca del 70 % de los estudiantes reprueban el curso de Cálculo I (Cálculo diferencial).

Ante esta situación, la Escuela de Matemáticasde la UIS ha implementado diferentes iniciativas. Desde el aspecto curricular, se implementó desde el año 2009 un plan de estudios unificado de contenidos, metodología y evaluación. Posteriormente, se realizaron algunos estudios para analizar el rendimiento académico de los estudiantes a partir de esta intervención (ver Tabla 1).

Semestres	**PS2009**		**SS2009**		**PS2010**		**SS2010**[2]	
	No.	**%**	**No.**	**%**	**No.**	**%**	**No.**	**%**
Aprobaron	616	39,82	640	43,33	400	28,23	422	28,19
No aprobaron	513	33,16	417	28,23	440	31,05	448	29,93
Cancelaron[3]	418	27,02	420	28,44	577	40,72	627	41,88
Total matriculados	1547	100,00	1477	100,00	1417	100,00	1497	100,00

Tabla 1. Porcentaje de rendimiento académico de cálculo I por semestre.

En la tabla 1, se puede analizar los cambios de aprobación del curso de cálculo I y hacer su análisis.

Diversos factores pueden influir en la problemática ya enunciada y consideramos que uno de ellos es que los estudiantes no tienen los presaberes necesarios para la comprensión de los conceptos de cálculo. Ante esta situación la universidad ha planteado alternativas remediales (proyecto MIDAS, y PAMRA) para ayudar a los estudiantes. Pero no se ha detenido en analizar el problema teniendo en cuenta las condiciones académicas de ingreso de los estudiantes a la Universidad, y es allí donde se enfoca nuestro trabajo. Principalmente en plantear alternativas preventivas, en particular mediante la conforrmación de una Comunidad de Práctica de profesores de matemáticas de media vocacional de algunos colegios de Bucaramanga y su área metropolitana.

Por lo descrito anteriormente tenemos como objetivos de investigación:

i) Aportar elementos teóricos y metodológicos para la conformación de una comunidad de práctica de profesores de matemáticas media vocacional en la que se fomente la reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos de precálculo y cálculo I.

ii) Analizar cómo las reflexiones emergente del trabajo colaborativo en la comunidad pueden influir en la preparación de estos estudiantes para ingresar a un curso de cálculo I en la UIS.

2. Referentes teóricos y conceptuales

Para Wenger (1998) una Comunidad de práctica CoP es un grupo de personas que comparten una preocupación, un conjunto de problemas o un interés común acerca de un tema, y que profundizan su conocimiento en esta área a través de una estructura social basada en la construcción colaborativa de conocimientos a beneficio de todos sus miembros.

Dentro de la CoP creada con los docentes de media vocacional, nuestras unidades de análisis serán los significados negociados dentro de ella. Para hacer los procesos de análisis y reflexión se usará el modelo teórico Reflexión y Acción (R-y-A) propuesto por Parada (2011).

En la figura 1, se muestra un bosquejo del modelo teórico y metodológico (R-y-A), el bosquejo tiene una lectura del exterior al centro. A continuación se define cada uno de los elementos que la componen.

El anillo exterior describe los procesos que se realizan al interior de las CoP de educadores matemáticos (profesores, autoridades educativas, investigadores e investigadores en formación). El modelo se fundamenta en los procesos que son posibles cuando éstos se unen para desarrollar un pensamiento reflexivo sobre el área.

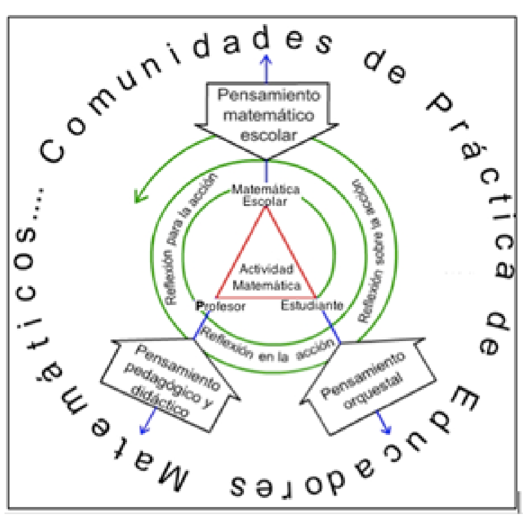


Figura 1. Bosquejo del modelo teórico y metodológico (R-y-A).

La reflexión por parte de los profesores es un proceso que requiere guía y orientación con el fin de que el maestro centre su atención en aspectos puntuales de su acción pedagógica; en esta investigación se promueve el desarrollo del pensamiento reflexivo de los profesores, desde tres perspectivas (Parada, 2012). Este pensamiento esta compuesto por: i) el pensamiento matemático (se refiere al uso de los conocimientos matemáticos); ii) el pensamiento didáctico (está relacionado con el uso de los conocimientos pedagógicos y didácticos); y iii) el pensamiento orquestal (corresponde a las maneras como el maestro durante la clase direcciona el uso de los recursos que ha seleccionado para la consecución de la actividad matemática esperada por parte de los estudiantes).

La reflexión de los docentes es sobre la actividad matemática que promueven en clase; pero se espera que hagan esa reflexión antes, durante y después de la clase, y los cambios que puedan surgir son los procesos a analizar.

3. Metodología

Ante esta situación de reprobación de cálculo I, Parada (2012) presenta a la Universidad Industrial de Santander un proyecto llamado "Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander" donde propone unas alternativas preventivas y remediales para disminuir la alta reprobación de estudiantes de cálculo I, la estructura curricular se muestra en la figura 2.

Es en el acompañamiento y desarrollo profesional (cuadro intermedio de la figura 2) en el que se refiere a la conformación de una CoP profesores de precálculo, donde aportamos nuestro trabajo de investigación. Las fases del trabajo se describen a continuación.

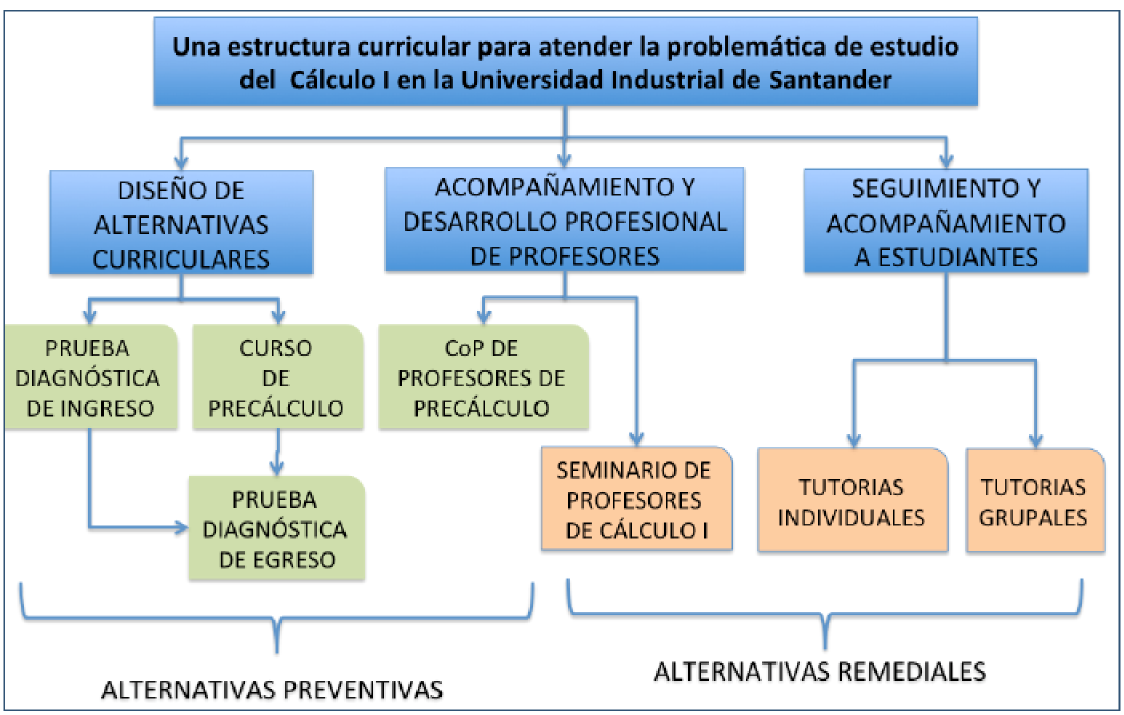


Figura 2. Estructura general del proyecto parada 2012.

Fase I: Conformación de la comunidad de práctica.
Uno de los intereses es la conformación de la comunidad de práctica de profesores de matemáticas de Media vocacional de algunas instituciones de Bucaramanga y su área metropolitana.

Fase II: Diseño del trabajo colaborativo.
Con el fin de incentivar la participación y comunicación constante entre los participantes de la CoP, se planean una serie de actividades de tipo presencial y virtual.

- Actividades presenciales: La CoP organizó sus sesiones presenciales todos los lunes durante dos horas después de su jornada laboral.
- Actividades en línea: Para lograr una mejor comunicación entre los participantes de la CoP, usando la plataforma www.centic.edu.co, se creo un sitio de acceso para tener correo internos, leer artículos, comunicarse directamente con los integrantes de la comunidad para solucionar problemas del trabajo que se desarrolle, etc...

Fase III: Procesos de Reflexión Y- Acción en CoP sin intervención Inicialmente.
Se propone la planeación de una clase sin intervención, donde los profesores muestran cómo realizan la planeación. De esta planeación se solicita al docente que filme la clase y luego se lleve a la comunidad para ser visto por todos los miembros de la comunidad y reflexionar sobre el objetivo propuesto inicialmente y el alcanzado.

Fase IV: Participación, reflexión y acción con intervención.
De la etapa anterior se pretender identificar algunos conflictos relacionados con los tres aspectos del pensamiento reflexivo del profesor. A partir de ello, se realizará un diseño de intervención que consista en actividades dirigidas a los profesores.

Fase V: Seguimiento y acompañamiento en el desarrollo de las CoP.
En esta fase se acompañarán los procesos de las CoP, de acuerdo a los planes de trabajo trazados por la CoP. Al finalizar el proceso se espera haber conceptualizado sobre algunas problemáticas del estudio de conceptos de precálculo en media vocacional. En la actualidad nos encontramos en la fase III, en el siguiente apartado describimos algunos avances en cada una de las fases.

4. Primeros avances

Para conformar la CoP recurrimos a la base de datos que se tiene del Grupo de Investigación en Educación Matemática de la UIS, (EDUMAT-UIS), de esta base enviamos mas de 250 correos a diferentes docentes y de ellos se inscribieron 22. La CoP se conformó inicialmente con 13 profesores, dos son de colegios privados, 11 de colegios oficiales. De ellos, 8 tienen menos de cuatro años de experiencia docente y los otros cinco cumplen con más de 15 años de labores.

En la primera sesión presencial se comentaron los objetivos de la conformación de la CoP y las formas de trabajo. En la mismase empezó a implementar la fase de Reflexión-y-Acción sin intervención pidiéndole a los participantes que planear una clase de acuerdo a su calendario académico de la institución donde trabajan.

1. Para la tercera fase, se hizo una sesión de socialización sobre las planeaciones de una clase realizadas por los participantes de acuerdo al plan de cada institución, en esta sesión los profesores discutieron y dieron sugerencias de cómo llevar la planeación al aula de clase. Las planeaciones realizadas por los tres grupos son: Sobre el concepto de derivada en funciones constantes.
2. Límites de funciones exponenciales.

3. Límite de funciones constante. Es en está etapa donde nos encontramos actualmente que estamos escribiendo el presente artículo.

5. Primeras reflexiones

Sobre las interacciones de los docentes en la CoP la profesora Adriana (profesora que aceptó la invitación y hace parte de la CoP) piensa sobre su interés en participar:

> "Definitivamente este espacio me parece muy importante y necesario, porque analizando yo me estaba cuestionando, ya que enseño, matemáticas en once, pero yo soy física y cuando enseño física yo se la importancia de lo que estoy enseñando en la clase, pero cuando estoy en matemáticas, siento que hay que mejorar en muchas cosas y me tengo que replantear las cosas de cómo estoy enseñando en la clase".

En los primeros avances de la investigación, los docentes participantes muestran interés en que la UIS le brinde espacios para socializar y compartir sus experiencias de aula.

La planeación para el presente año (2012) está llegar hasta la fase III y continuaremos en el año 2013 con las restantes fases, donde analizaremos los datos obtenidos y respondernos a nuestros objetivos de investigación.

Referencias bibliográficas

Azcárate, C y Camacho, M (2003). *Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático.* Boletín de la asociación Matemática Venezolana X, (2) , 135-149.

Parada, S. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, México.

Parada, S. (2012). *Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander.* Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas de la UIS, Bucaramanga.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, Meaning, and Identity.* Cambridge: Cambridge University Press.

EXPERICIAS DE MODELACIÓN CON ESTUDIANTES DE CÁLCULO DIRERENCIAL E INTEGRAL [1]

Francisco Javier Córdoba Gómez
franciscocordoba@itm.edu.co

Pablo Felipe Ardila Rojo
pabloardila@itm.edu.co

Instituto Tecnológico Metropolitano

Resumen: En el siguiente trabajo se presentan los resultados preliminares de una actividad de modelación con estudiantes de un curso de cálculo diferencial y de cálculo integral, en las cuales se trabajaron problemas de aplicación de algunos conceptos matemáticos en actividades experimentales. Se muestra la conveniencia de implementar estas actividades en clases de matemáticas y la alta motivación y compromiso que despierta en los estudiantes, así como la identificación debilidades conceptuales y procedimentales que tienen los estudiantes al enfrentarse a una situación real de modelación, sin dejar de lado las interacciones que promueve como parte del proceso de construcción y resignificación del conocimiento matemático.

Palabras clave: Modelación matemática, interacciones, resignificación

1. Presentación del problema

Una preocupación general tiene que ver con encontrar maneras de intervenir y mejorar los procesos de aprendizaje de las matemáticas de tal forma que el conocimiento matemático escolar se convierta realmente en conocimiento significativo y funcional, en el sentido de que se pueda integrar al mundo de la vida para transformarla y transformar al sujeto que aprende, reconstruyendo y enriqueciendo significados permanentemente (Córdoba, 2011).

La modelación en la enseñanza de las matemáticas es un tema que en las últimas décadas ha cobrado mayor relevancia y que además se ha incorporado en diferentes currículos escolares ya que se ha puesto en evidencia la importancia de articular e integrar el conocimiento matemático con otras áreas de conocimiento. Tal y como lo exponen Biembengut y Hein (2004) la modelación matemática está siendo fuertemente defendida, en diversos países, como método de enseñanza de las matemáticas en todos los niveles de escolaridad, ya que permite al alumno no solamente aprender las matemáticas de manera aplicada a las otras áreas del conocimiento, sino también mejorar la capacidad para leer, interpretar, formular y solucionar situaciones problema en diferentes contextos. El trabajo que se presenta a continuación muestra los resultados de una experiencia realizada con estudiantes de cálculo diferencial e integral con actividades de modelación en las cuales los estudiantes experimentan, interactúan, conjeturan y construyen modelos que les permiten a su vez construir y resignificar conocimientos matemáticos.

[1]Este trabajo hace parte de la investigación "La práctica de modelación en matemática escolar una experiencia para el trabajo de aula en ingeniería" que se realiza con estudiantes de tecnología e ingeniería del Instituto Técnologico Metropolitano de Medellín.

2. La modelación y su importancia

La modelación es un proceso en el cual un problema no matemático es resuelto a través de la aplicación de las matemáticas (Kaiser y Maaß, 2007). Para Castro y Castro (2000) la modelación matemática es una forma de resolución de problemas de la vida real en la que no sólo se tiene en cuenta la solución del mismo sino que exige la utilización de un gran número de habilidades matemáticas y no llega sólo a una respuesta específica sino a un rango de respuestas que describen la conducta del fenómeno considerado y da alresolutor sentido de participación matemática sea un poderoso instrumento de aprendizaje significativo, a tener en cuenta para trabajar en el aula.

Para Sadovsky (2005) un proceso de modelación supone en primer lugar recortar una cierta problemática frente a una realidad generalmente compleja en la que intervienen muchos más elementos de los que uno va a considerar, identificar un conjunto de variables sobre dicha problemática, producir relaciones pertinentes entre las variables tomadas en cuenta y transformar esas relaciones utilizando algún sistema teórico- matemático, con el objetivo de producir conocimientos nuevos sobre la problemática que se estudia.

La modelación permite enriquecer la comprensión de fenómenos extra matemáticos ya que proporciona diversas representaciones de dichos fenómenos y dota de sentido las diferentes actividades matemáticas (Molyneux-Hodgson et al, 1999, citado en Suárez, 2008)

Para Bassanezi (1994) el uso de la modelación en la enseñanza conduce al aprendizaje de contenidos matemáticos que están conectados a otras formas de conocimiento. El trabajo con la modelación matemática no intenta simplemente ampliar el conocimiento sino desarrollar una forma particular de pensar y actuar: produciendo conocimiento, aunando abstracciones y formalizaciones, interconectadas a fenómenos y procesos empíricos considerados como situaciones problemáticas.

Según Blomhøj (2004) las actividades de modelación pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar (al aprendiz) a establecer raíces cognitivas sobre las cuáles construir conceptos matemáticos. Así mismo, la modelación tiene como finalidad describir y analizar algún fenómeno de la vida diaria con el fin de: motivar el trabajo con las matemáticas y experimentar la matemática como medio para describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones de la vida diaria.

3. Metodología

El trabajo se realizó con 13 estudiantes de un curso de cálculo diferencial y 30 de un curso de cálculo integral (distribuidos por equipos) en el Instituto Tecnológico Metropolitano de la ciudad de Medellín. La actividad se realizó en el laboratorio de matemáticas para el caso de cálculo diferencial (figura 1) y en el salón para el caso de cálculo integral, en una sesión de dos horas en cada caso.

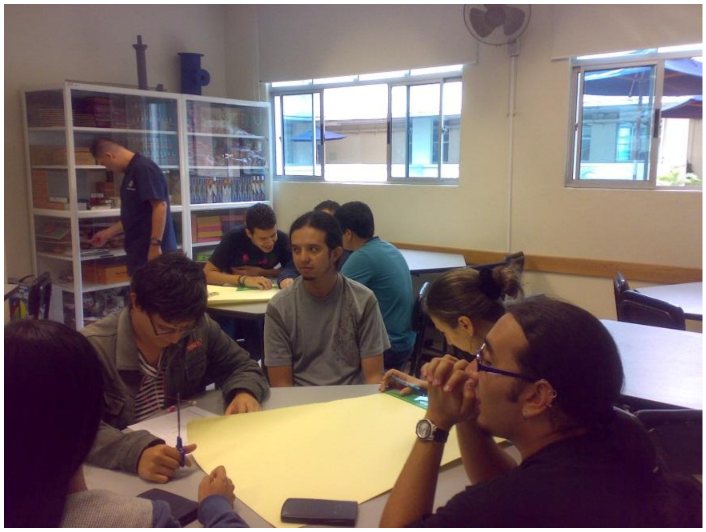


Figura 1. Laboratoriode matemáticas.

La práctica estuvo orientada por el profesor del curso (que también es investigador) y un investigador, que fungió como observador de la actividad. El problema de trabajo que se propuso modelar fue el siguiente:

> ***Dada una hoja de papel cartulina de 25 cm de lado, construir la caja de volumen máximo recortando cuadrados en las esquinas y determinar las dimensiones de los cuadrados que deben recortarse.***

Para el desarrollo de la actividad se les entregó una guía y los materiales necesarios (cartulina, escuadras, tijeras) (figura 2)

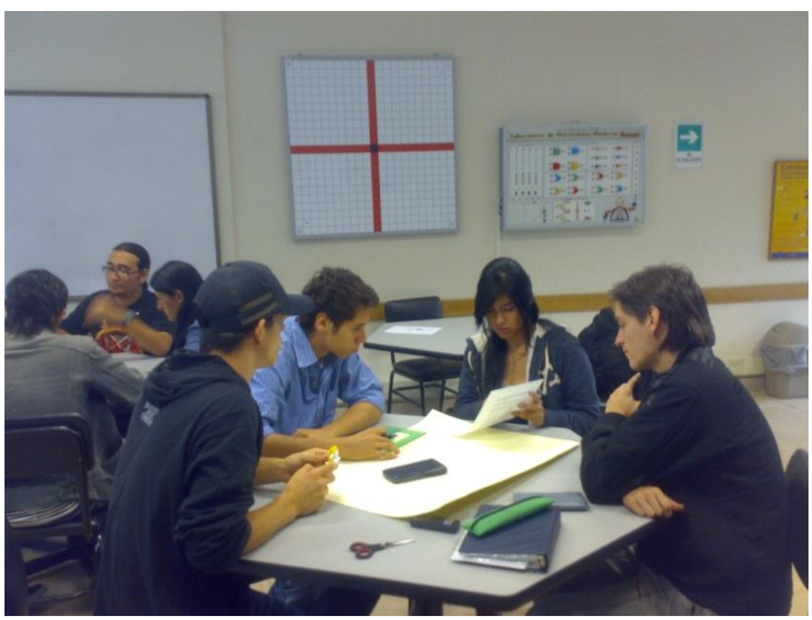


Figura 2. Estudiantes en el laboratorio con los instrumentos respectivos.

En el caso del grupo de cálculo integral,el problema planteado surgió a partir de una necesidad real en una planta de producción. El problema es el siguiente:

Se tiene un tanque de forma cilíndrica en posición horizontal que almacena un combustible (ACPM)y se requiere saber cuáles el volumen de combustible en el tanque en cualquier momento, solo con introducir una varilla por una abertura y saber la altura marcada sobre la varilla.

En la figura 3 se muestra un esquema del tanque real y la varilla que sirve para determinarla altura del combustible:

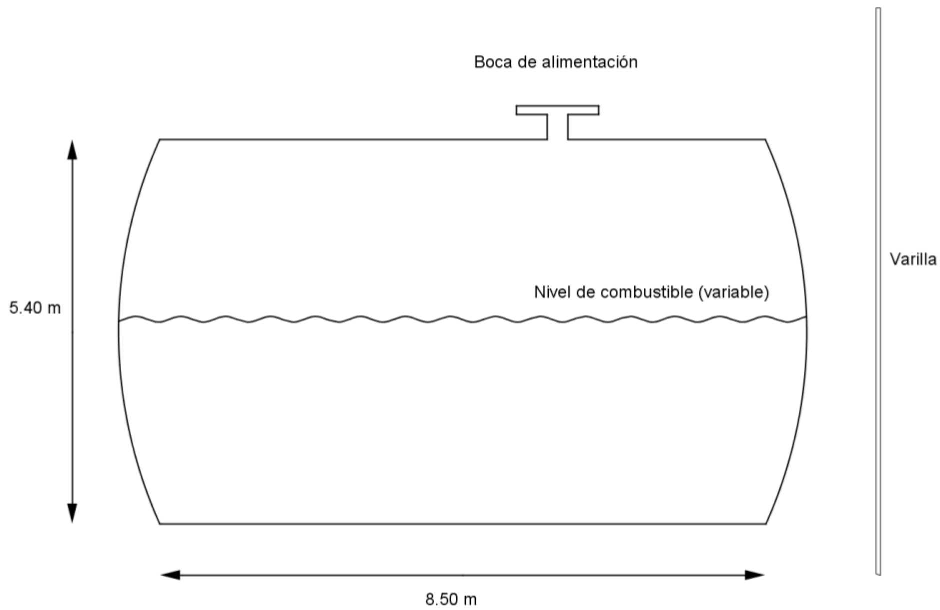


Figura 3. Corte transversal del tanque.

En este caso, la actividad se realizó a escala tomando como modelo físico un botellón de agua, para tomar datos reales y luego compararlos con los datos obtenidos usando el modelo matemático encontrado. Para ello se les entregó una guía con las indicaciones y orientaciones, pero en todo momento se privilegió el trabajo autónomo de los estudiantes y sus propias maneras de abordar el problema.

4. Recolección y análisis de la información

La información se registró mediante grabaciones en audio, durante toda la sesión, de algunos equipos. La investigación siguió los lineamientos de la investigación cualitativa y del análisis del discurso para identificar las interacciones que favorecieran la construcción y resignificación de conocimiento matemático escolar, así como la identificación de debilidades de aprendizaje de conocimientos previos. En este análisis también se consideraron las producciones escritas de los estudiantes y las notas de campo tomadas por el investigador observador.

Veamos algunas respuestas de los estudiantes frente al trabajo realizado:

4. Frente a las actividades normales de clase, la práctica de modelación que se ha realizado en el grupo le ha parecido:

Mucho mejor X   Mejor___   Igual__   Peor__   que la clase normal

¿Por qué? porque nos obliga a pensar mas y a enfrentarnos a problemas reales los cuales son muy utiles a la hora de comprender mejor un tema

4. Frente a las actividades normales de clase, la práctica de modelación que se ha realizado en el grupo le ha parecido:

Mucho mejor___   Mejor X   Igual__   Peor__   que la clase normal

¿Por qué? Porque interfiere un factor extra y es llevar a la practica lo que estamos haciendo en nuestros cuadernos.

6. De manera breve, comente cual fue su experiencia y qué le aportó esta actividad

me gusto bastante enfrentarme a un problema real porque al realizarlo notaba como me equivocaba y me tocaba buscar por mi mismo una solucion.

6. De manera breve, comente cual fue su experiencia y qué le aportó esta actividad

fue algo nuevo, nunca lo habia hecho, me afianzó aun mas el concepto de que las matematicas nos ayudan a resolver problemas de la vida d cotidiana

5. Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos, se pueden exponer las siguientes conclusiones (las demás conclusiones y evidencias se presentan en el trabajo completo):

- La actividad despertó un gran interés, motivación e interacciones entre los estudiantes, pues para ellos era la primera vez que en un curso de matemáticas se hacía una actividad experimental lo que generó actitudes positivas frente al trabajo.
- Se pudo observar que los estudiantes resignificaron el concepto de la derivada y su aplicación en problemas de optimización así como también el concepto de área y volumen, pues ya no consideraron ese conocimiento aislado sino que lo pudieron integrar a una actividad real.
- Al establecer el modelo, se dieron cuenta de que efectivamente lo realizado en la realidad correspondía a lo que matemáticamente habían encontrado, verificando así que las matemáticas no son ajenas a la realidad y que se pueden integrar a la cotidianidad.
- En la valoración de la actividad los estudiantes respondieron muy positivamente y todos coincidieron que este tipo de actividades es mucho mejor que la clase netamente magistral y dotaron de sentido a las matemáticas puestas en juego.

Bibliografía

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Córdoba, F. (2011). *La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería.* Tesis de maestría no publicada. CICATA- IPN. México.

Bassanezi, R. (1994). Modelling as a Teaching-Learning Strategy. *For the Learning of Mathematics*, 14(2), 31-45.

Biembengut, M, y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática* 16(2), 105-125

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. En Clarke, B.; Clarke, D.

Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) I*nternational Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. National Center for Mathematics Education* (pp 145-159). Suecia.

Castro, E. y Castro, E. (2000). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona: Universidad de Barcelona-Instituto de Ciencias de la Educación.

Káiser, G. & Maaß, . (2007). Modelling and applications in mathematics education. *The* 14th *International Commission on Mathematical Instruction.*

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy: Miradas, sentidos y desafíos.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Suárez, L. (2008). *Modelación-Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultado de un estudio socioepistemológico.* Tesis de Doctorado no publicada, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. México.

LA ENSEÑANZA DE LA LEY DE SENOS Y LA LEY DE COSENOS EN GRADO 10

Eric Fernando Bravo Montenegro
erikbravo89@hotmail.com
Universidad del Pacífico

Resumen: En este trabajo se presenta una experiencia relacionada con La Ley de senos y la Ley de cosenos en grado 10°. El principal objetivo es describir los errores más frecuentes que cometen los estudiantes al desarrollar situaciones en donde pueden aplicar dichas leyes.

Palabras clave: Investigación, enseñanza, Ley de senos y Ley de cosenos, errores.

1. Presentación del problema

La Práctica Pedagógica Investigativa (PPI) es un espacio curricular que tiene por objetivo proveer al estudiante del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca condiciones para la formación en competencias profesionales como docente en Matemáticas, desde una perspectiva crítica, reflexiva y propositiva en instituciones de educación formal.

A través del desarrollo de un proyecto pedagógico de intervención en el aula, en Matemáticas, la PPI busca facilitar la cualificación profesional del estudiante como educador mediante una experiencia directa, continua y progresiva del ejercicio docente.

En este trabajo se encuentra la descripción del proyecto pedagógico de intervención realizado en la Institución Educativa Técnico Industrial (IETI) de Popayán alrededor del tema: Ley de senos y Ley de cosenos. Además, se presentan los resultados de una investigación realizada en torno a la misma temática, la cual tuvo por objetivo describir los errores más frecuentes que cometen los estudiantes al aplicar la Ley de senos.

2. Marco teórico

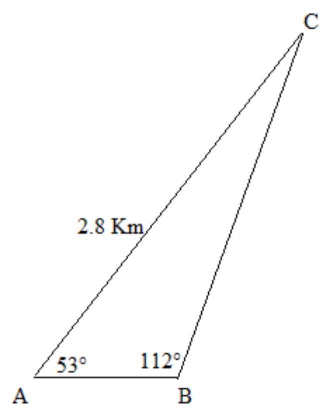
Para describir los errores más frecuentes que cometen los estudiantes al aplicar la Ley de senos, fue conveniente conocer algunos referentes que proporcionaran un marco teórico que permitiera estudiar y localizar las fallas en el conocimientos en los estudiantes. Precisamente, esa es la principal finalidad de Vergnaud (1990) en su teoría de los campos conceptuales, quien se convirtió en el principal referente para afrontar este trabajo de investigación.

Asimismo, fue pertinente conocer métodos de recolección y tratamiento de la información que se adecuarán al tipo de investigación que se realizó. Para ello, Gutiérrez (1991) fue fundamental con su método de recolección de información denominado “estudio de casos”, el cual consiste en hacer un seguimiento continuo, completo y detallado de un número muy reducido de estudiantes durante una actividad. Esta característica, el número reducido de estudiantes, representa la debilidad del estudio de casos, ya que es muy problemático hacer generalizaciones a partir de muestras tan reducidas. No obstante, existen las técnicas “de rejilla” que permiten clasificar a los individuos de una población heterogénea en una serie de tipos de características muy concretas, en función de sus valores para ciertas variables, de manera que los resultados de un estudio de casos se puede generalizar a los individuos del mismo tipo que los observados. Como se mostrará más adelante, esta técnica fue usada en este trabajo.

3. Metodología

Para alcanzar el objetivo propuesto se utilizó como instrumento una situación que a continuación se presenta, la cual fue propuesta en uno de los exámenes que se aplicó a todos los estudiantes del grado décimo C de la IETI de Popayán. Este grado estuvo conformado por 27 niños y 7 niñas cuyas edades estaban entre los 15 y 17 años.

> *Una persona se encuentra en el punto A de la siguiente figura y desea dirigirse al punto C, que se encuentra a $2{,}8\,km$ en línea recta. Debido a que el terreno está en malas condiciones, decide seguir el camino de A a B para dirigirse, finalmente, hacia C. ¿Cuál es la distancia total que deberá recorrer?*



Después de obtener los resultados de esta situación, se dio paso a estudiar minuciosamente la solución dada por cada uno de los estudiantes. Después, se decidió clasificar a cada uno de los estudiantes con base en las estrategias utilizadas por ellos para la solución de la situación siguiendo las sugerencias de Gutiérrez (1991) y su técnica de rejilla descrita anteriormente. En este trabajo se entiende por estrategia: “todo sistema y toda secuencia de procedimientos susceptibles de ser repetidos y transferidos a otras situaciones, que constituyen los medios para alcanzar el fin hacia el que tiende el sujeto” (Inhelder, 1978, p. 5).

Las estrategias usadas por los estudiantes, y que a continuación se presentan ordenadas jerárquicamente según su grado de complejidad, fueron las siguientes:

1. *Situación escolar ideal:* Denominada de esta manera, ya que fue usada por los estudiantes que resolvieron la situación de la forma esperada. Esto es, hallaron los lados a y c mediante la Ley de senos y respondieron correctamente la pregunta sumando los dos lados encontrados.

2. *Solución ideal con error de procedimiento:* Esta estrategia fue utilizada por los estudiantes que resolvieron la situación despejando erróneamente a, c o ambos en la Ley de senos y que respondieron correctamente la pregunta sumando los dos lados encontrados.

3. *Solución de la situación sin comprensión de la pregunta:* Esta estrategia fue usada por los estudiantes que encontraron correctamente la longitud de los lados a y c usando la Ley de senos, pero respondieron mal o no respondieron la pregunta planteada en la situación.

4. *Solución incompleta de la situación sin comprensión de la pregunta:* Esta estrategia fue empleada por los estudiantes que solucionaron de manera incompleta la situación encontrando tan solo la longitud del lado a ó el lado c y respondieron mal o no respondieron la pregunta.

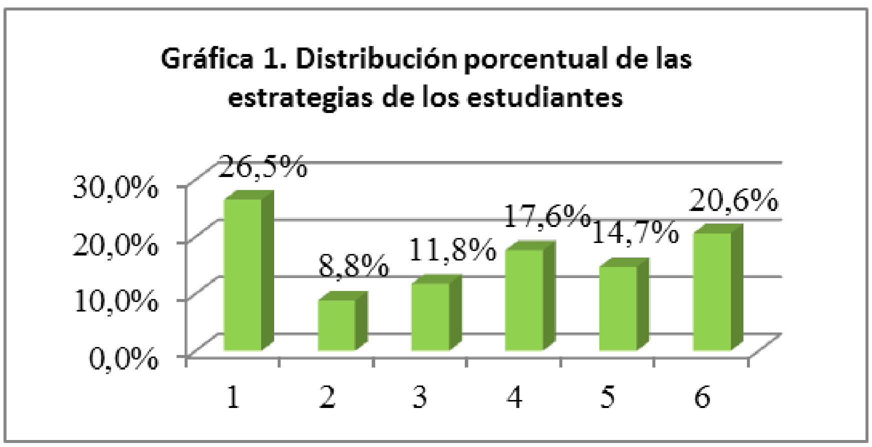
5. *Solución de la situación con error sin comprensión de la pregunta:* Aquí se encuentran los estudiantes que encontraron equivocadamente la longitud de los lados a y c y que respondieron mal o no respondieron la pregunta planteada en la situación.

6. *Exposición incomprensible de la solución:* En esta última estrategia se ubican los estudiantes que no realizaron nada y los que plantearon estrategias inexplicables en los términos utilizados en este trabajo.

Vale la pena resaltar que estas estrategias surgen de categorizar a los estudiantes de acuerdo al procedimiento usado para resolver la situación descrita anteriormente.

4. Analisis de datos

A continuación se describen los errores que cometen los estudiantes al aplicar la Ley de senos con base a las anteriores estrategias utilizadas por los estudiantes.



Gráfica 1. Distribución porcentual de las estrategias de los estudiantes

Se observa que el 26,5 % de los estudiantes utilizaron la estrategia "*Situación escolar ideal*", esto quiere decir que este porcentaje de estudiantes no comete ningún tipo de errores al aplicar la Ley de seno. Mientras que el 8,8 % de los estudiantes que usaron la estrategia "*Solución ideal con error de procedimiento*" cometen errores de procedimiento como despejar erróneamente algunas de las variables en una de las ecuaciones a las cuales equivale la Ley de seno. Sin embargo, se puede decir que este porcentaje de estudiantes aplica correctamente este concepto ya que sus errores son de tipo procedimental, los cuales son ajenos a su comprensión como tal.

Por otro lado, el 11,8 % de los estudiantes que utilizaron la estrategia "*Solución de la situación sin comprensión de la pregunta*" no contextualizan la Ley de seno, pues aunque la aplican correctamente, no logran comprender la relación que existe entre el concepto y sus aplicaciones en situaciones.

También, se ve que el 17,6 % de los estudiantes que utilizaron la estrategia "*Solución incompleta de la situación sin comprensión de la pregunta*" no reconocen todas las ecuaciones a las cuales equivale la Ley de seno, ya que tan sólo usan una de las ecuaciones para hallar la longitud del lado a ó la longitud del lado c. Además, al igual que los estudiantes que utilizaron la estrategia anterior, no contextualizan la Ley.

Por otra parte, el 14,7 % de los estudiantes que utilizaron la estrategia "*Solución de la situación con error sin comprensión de la pregunta*" cometen errores de tipo conceptual. Por ejemplo, no reconocen la relación entre la longitud de los lados y los valores del seno de sus ángulos respectivamente opuestos; además, tampoco contextualizan la Ley.

Finalmente, el 20,6 % de los estudiantes que utilizaron la estrategia denominada "*Exposición incomprensible de la solución*" no han comprendido en absoluto la Ley de seno, ya que usan el Teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas para resolver triángulos no rectángulos como el presentado en la situación.

5. Conclusiones

Entre los errores más frecuentes que cometen los estudiantes al aplicar la Ley de seno se encuentran los siguientes:

- No contextualizan la Ley de seno, a pesar de que la aplican correctamente no comprenden la relación que existe entre el concepto y sus aplicaciones en situaciones.
- No reconocen todas las ecuaciones a las cuales equivale la Ley de seno, tan solo usan una de las tres ecuaciones para hallar alguno de los lados.
- No reconocen la relación entre la longitud de los lados y el seno de sus ángulos respectivamente opuestos, lo que evidencia que no saben aplicar el concepto estudiado.
- Utilizan conceptos aprendidos anteriormente fuera de contexto, por ejemplo, usan el Teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas para resolver triángulos no rectángulos como el presentado en la situación. Esto muestra que no entendieron por qué la Ley de seno es útil para resolver triángulos.

Finalmente, estudiar los errores que cometen los estudiantes es de vital importancia para el docente ya que su análisis puede ayudarlo a organizar estrategias para un mejor aprendizaje, insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, y contribuyendo en la corrección de los errores más frecuentes.

6. Referencias

Inhelder, B. (1978). Las estrategias cognitivas: Aproximación al estudio de los procedimientos de resolución de problemas. *Anuario de Psicología* 18, 3-20.

Gutiérrez, A. (1991). La investigación en didáctica de las matemáticas. *Matemáticas: Cultura y aprendizaje* 1, 149-194.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los Campos Conceptuales. *Recherches en didáctique des Mathématiques* 10, 133-170.

Programa

Jueves 22 de noviembre

08:00 - 09:30	Inscripción, información y entrega de materiales.	Auditorio Ágora Edificio Ciencias Humanas
09:30 - 09:45	Presentación del evento por parte de *Jorge Fiallo*, director de la Escuela de Matemáticas-UIS.	
09:45 - 10:00	Receso	
10:00 - 11:00	Conferencia plenaria: Experimentando la Enseñanza del Cálculo con el uso de las Técnicas de Información y Comunicación (TIC) *François Pluvinage*	
11:00 - 12:00	Conferencia plenaria: ¿Qué Es Teoría En Didáctica De Las Matemáticas Y Para Qué Sirve? *Mario Sánchez*	

14:00 - 15:00	**Ciclo de ponencias cortas I**	
	Grupo A Moderador: *Solange Roa* 1. Diseño de una alternativa de acompañamiento y seguimiento a estudiantes que presentan dificultades en el aprendizaje del cálculo diferencial en la Universidad Industrial de Santander. *Carolina Botello y Sandra Parada* 2. Una propuesta inclusiva para la representación geométrica de los poliedros con población en condición de discapacidad visual. Jenny Torres y Yenny Gaviria	Auditorio Ágora Edificio Ciencias Humanas
	Grupo B Moderador: *Jorge Fiallo* 1. La exploración de la teoría en la actividad demostrativa. *Jesús Berrío, Martin Acosta y Jorge Fiallo* 2. Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la enseñanza y el aprendizaje de las razones trigonométricas en un entorno de geometría dinámica. *Danny Algarín y Jorge Fiallo*	Auditorio Mecánica
15:00 - 15:30	Receso	Auditorio Ágora Edificio Ciencias Humanas
15:30 - 16:30	Conferencia plenaria: El aprendizaje del infinito matemático. *Bruno D'Amore*	
16:30 - 17:00	Receso	

Talleres			
17:00 - 18:30	Uso de varios recursos computacionales en el estudio de problemas de cálculo, en particular con funciones racionales.	*François Pluvinage*	Sala de Computo Edificio Camilo Torres 110
	Sobre los componentes fundamentales de una investigación en didáctica de las matemáticas.	*Mario Sánchez*	Sala Cifuentes Edificio Camilo Torres 313
15:00 - 15:30	Problemas de investigación relativos al infinito matemático.	*Bruno D'Amore*	Sala Lezama Laboratorios Livianos 301

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias Escuela de Matemáticas
Grupo de Investigación Educación Matemática EDUMAT-UIS
Bucaramanga, Noviembre 22, 23 y 24 de 2012