EXPLORACIÓN DEL CONTEO DE CÍCLOS EN EL DOMINÓ POR MEDIO DE GRAFOS

Viviana Niño Celis
Andrés Fabián Leal Archila
Universidad Industrial de Santander

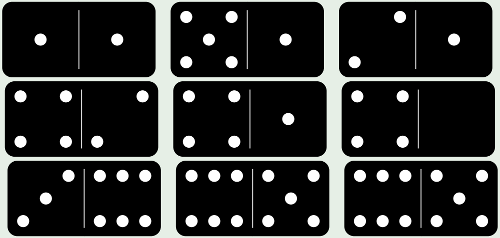
IV Encuentro Hablemos de Olimpiadas
Universidad Industrial de Santander
7 de junio de 2018

Introducción

La teoría de grafos es una herramienta matemática con múltiples aplicaciones en diferentes contextos, especialmente la solución de problemas de combinatoria; en este sentido, comprender las múltiples maneras en las que un grafo puede expresarse puede llevar a resolver los problemas más fácilmente. En esta charla se mostrará como el uso de ciclos eulerianos en grafos conexos permite contar los ciclos cerrados que se generan al unir fichas de dominó convencional, entendiendo como un ciclo cerrado iniciar por un número específico y terminar en él.

El dominó

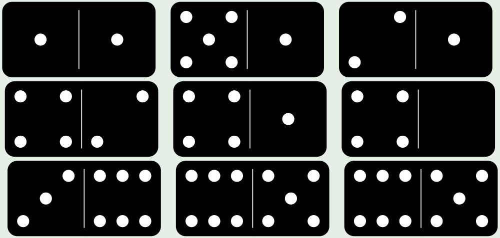
Ejemplo (Algunas fichas del dominó convencional)



Es de aclarar que en los análisis que se realizarán se descartan las fichas dobles o con cifras repetidas, dado que tienen múltiples usos de acuerdo al tipo de dominó que se juegue.

El dominó

Ejemplo (Algunas fichas del dominó convencional)

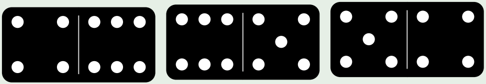


Es de aclarar que en los análisis que se realizarán se descartan las fichas dobles o con cifras repetidas, dado que tienen múltiples usos de acuerdo al tipo de dominó que se juegue.

Simbolizaremos a cada ficha como un par ordenado (i, j) donde $0 \leq i, j \leq 6$ y se tomará $(i, j) = (j, i)$.

El dominó

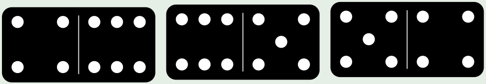
Ejemplo



Esta partida la simbolizaremos como $(4,6)(6,5)(5,4)$

El dominó

Ejemplo



Esta partida la simbolizaremos como $(4,6)(6,5)(5,4)$

Diremos que una partida es perfecta cuando se abre y se cierra con la misma cifra y semiperfecta cuando se abre y se cierra con cifras distintas.

Algunos ejemplos particulares

Observemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo

$(6,0)(0,3)(3,1)(1,0)(0,4)(4,1)(1,6)(6,4)(4,2)(2,6)(6,5)(5,1)$
$(1,2)(2,5)(5,3)(3,2)(2,0)(0,5)(5,4)(4,3)(3,6)$.

Algunos ejemplos particulares

Observemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo

$(6,0)(0,3)(3,1)(1,0)(0,4)(4,1)(1,6)(6,4)(4,2)(2,6)(6,5)(5,1)$
$(1,2)(2,5)(5,3)(3,2)(2,0)(0,5)(5,4)(4,3)(3,6)$.

Aquí hacen parte todas las fichas que estamos considerando y el ciclo inicia en el 6 y termina en el 6, por lo tanto es una partida perfecta.

Algunos ejemplos particulares

Observemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo

$(6,0)(0,3)(3,1)(1,0)(0,4)(4,1)(1,6)(6,4)(4,2)(2,6)(6,5)(5,1)$
$(1,2)(2,5)(5,3)(3,2)(2,0)(0,5)(5,4)(4,3)(3,6)$.

Aquí hacen parte todas las fichas que estamos considerando y el ciclo inicia en el 6 y termina en el 6, por lo tanto es una partida perfecta.

En realidad, si queremos construir una partida perfecta basta con romper el ciclo en la ficha que necesitamos.

Algunos ejemplos particulares

Observemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo

$(6,0)(0,3)(3,1)(1,0)(0,4)(4,1)(1,6)(6,4)(4,2)(2,6)(6,5)(5,1)$
$(1,2)(2,5)(5,3)(3,2)(2,0)(0,5)(5,4)(4,3)(3,6)$.
Aquí hacen parte todas las fichas que estamos considerando y el ciclo inicia en el 6 y termina en el 6, por lo tanto es una partida perfecta.

En realidad, si queremos construir una partida perfecta basta con romper el ciclo en la ficha que necesitamos.
Esto nos aclara el panorama para buscar una partida perfecta, pero y si queremos encontrar una partida semiperfecta ¿qué deberíamos hacer? Veamos el siguiente ejemplo:

Algunos ejemplos particulares

Ejemplo

$(6,0)(0,3)(3,1)(1,0)(0,4)(4,1)(1,6)(6,4)(4,2)(2,6)(6,5)(5,1)$
$(1,2)(2,5)(5,3)(3,2)(2,0)(0,5)(5,4)(4,3)$.

Algunos ejemplos particulares

Ejemplo

$(6,0)(0,3)(3,1)(1,0)(0,4)(4,1)(1,6)(6,4)(4,2)(2,6)(6,5)(5,1)$
$(1,2)(2,5)(5,3)(3,2)(2,0)(0,5)(5,4)(4,3)$.

Aquí tenemos una partida que inicia en el 6 y termina en el 3, lo cual es un ejemplo de partida semiperfecta. Note que se eliminó una ficha de la partida original.

Algunos ejemplos particulares

Ejemplo

$(6,0)(0,3)(3,1)(1,0)(0,4)(4,1)(1,6)(6,4)(4,2)(2,6)(6,5)(5,1)$
$(1,2)(2,5)(5,3)(3,2)(2,0)(0,5)(5,4)(4,3)$.
Aquí tenemos una partida que inicia en el 6 y termina en el 3, lo cual es un ejemplo de partida semiperfecta. Note que se eliminó una ficha de la partida original.

Es imposible realizar una partida semiperfecta usando las 21 fichas del dominó que no son dobles.

Algunos ejemplos particulares

Ejemplo

$(6,0)(0,3)(3,1)(1,0)(0,4)(4,1)(1,6)(6,4)(4,2)(2,6)(6,5)(5,1)$
$(1,2)(2,5)(5,3)(3,2)(2,0)(0,5)(5,4)(4,3).$

Aquí tenemos una partida que inicia en el 6 y termina en el 3, lo cual es un ejemplo de partida semiperfecta. Note que se eliminó una ficha de la partida original.

Es imposible realizar una partida semiperfecta usando las 21 fichas del dominó que no son dobles. Entonces, la respuesta está en quitar la última ficha de una partida perfecta, observe que la partida iniciará y finalizará en los números de la ficha que se quita.

Condiciones necesarias para la elaboración de partidas

Los anteriores son casos muy particulares. Esto naturalmente genera la siguiente pregunta: ¿cuáles son las condiciones que deben cumplirse para crear una partida perfecta y una semiperfecta?

Condiciones necesarias para la elaboración de partidas

Los anteriores son casos muy particulares. Esto naturalmente genera la siguiente pregunta: ¿cuáles son las condiciones que deben cumplirse para crear una partida perfecta y una semiperfecta?

Teorema (Elaboración de partidas perfectas)

En un juego de dominó una partida es perfecta si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

Condiciones necesarias para la elaboración de partidas

Los anteriores son casos muy particulares. Esto naturalmente genera la siguiente pregunta: ¿cuáles son las condiciones que deben cumplirse para crear una partida perfecta y una semiperfecta?

Teorema (Elaboración de partidas perfectas)

En un juego de dominó una partida es perfecta si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- ***Paridad:*** *Cada cifra debe aparecer un número par de veces.*

Condiciones necesarias para la elaboración de partidas

Los anteriores son casos muy particulares. Esto naturalmente genera la siguiente pregunta: ¿cuáles son las condiciones que deben cumplirse para crear una partida perfecta y una semiperfecta?

Teorema (Elaboración de partidas perfectas)

En un juego de dominó una partida es perfecta si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- ***Paridad:*** *Cada cifra debe aparecer un número par de veces.*
- ***Conexión:*** *Para cada par de cifras que aparecen en el conjunto, debe tenerse una cadena de fichas del que empiece y termine en cada cifra, i.e., que las ponga en contacto.*

Condiciones necesarias para la elaboración de partidas

Teorema (Elaboración de partidas semiperfectas)

En un juego de dominó una partida es semiperfecta si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

Condiciones necesarias para la elaboración de partidas

Teorema (Elaboración de partidas semiperfectas)

En un juego de dominó una partida es semiperfecta si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- ***Paridad:*** *Todas las cifras, salvo dos, aparezcan un número par de veces.*

Condiciones necesarias para la elaboración de partidas

Teorema (Elaboración de partidas semiperfectas)

En un juego de dominó una partida es semiperfecta si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- ***Paridad:*** *Todas las cifras, salvo dos, aparezcan un número par de veces.*
- ***Conexión:*** *Para cada par de cifras que aparecen en el conjunto, debe tenerse una cadena de fichas del que empiece y termine en cada cifra, i.e., que las ponga en contacto.*

Condiciones necesarias para la elaboración de partidas

Teorema (Elaboración de partidas semiperfectas)

En un juego de dominó una partida es semiperfecta si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- ***Paridad:*** *Todas las cifras, salvo dos, aparezcan un número par de veces.*
- ***Conexión:*** *Para cada par de cifras que aparecen en el conjunto, debe tenerse una cadena de fichas del que empiece y termine en cada cifra, i.e., que las ponga en contacto.*

Veamos ahora la teoría que nos permitirá probar estos resultados.

Grafos

Definición (Grafo)

Se entiende como grafo G (sin lazos) al par (V, A) donde V es el conjunto de nodos o vértices y A es el conjunto de aristas, este último es el conjunto de pares de las forma (u, v) tal que $u,\ v \in V$.

Definición (Grafo)

Se entiende como grafo G (sin lazos) al par (V, A) donde V es el conjunto de nodos o vértices y A es el conjunto de aristas, este último es el conjunto de pares de las forma (u, v) tal que $u,\ v \in V$.

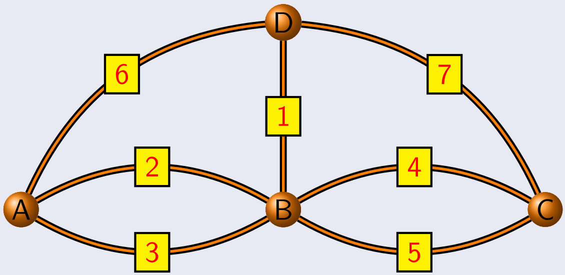


Figura: Grafo creado por Euler para expresar el problema de los puentes de Königsberg, tal vez el grafo más famoso existente.

Algunas definiciones

Definición

- Un **subgrafo** $H = (V', A')$ es un grafo construído seleccionando algunos de los vértices de G (esto es, $V' \subseteq V$). Y A' se construye tomando todas las aristas necesarias para unir los puntos de V'.

Algunas definiciones

Definición

- Un **subgrafo** $H = (V', A')$ es un grafo construído seleccionando algunos de los vértices de G (esto es, $V' \subseteq V$). Y A' se construye tomando todas las aristas necesarias para unir los puntos de V'.
- Si $G = (V, A)$ es un grafo decimos que $v_i, v_j \in V$ son **vecinos** si existe una arista entre ellos. El **grado** de v_i indicará el número de vecinos que tiene cada vértice en el grafo.

Algunas definiciones

Definición

- Un **subgrafo** $H = (V', A')$ es un grafo construído seleccionando algunos de los vértices de G (esto es, $V' \subseteq V$). Y A' se construye tomando todas las aristas necesarias para unir los puntos de V'.
- Si $G = (V, A)$ es un grafo decimos que $v_i, v_j \in V$ son **vecinos** si existe una arista entre ellos. El **grado** de v_i indicará el número de vecinos que tiene cada vértice en el grafo.
- Sean G y G' dos grafos, con conjuntos de vértices y aristas (V, A) y (V', A') respectivamente. Decimos que una función biyectiva $\varphi : V \to V'$ es un isomorfismo de grafos si:

$$(v, w) \in A \Leftrightarrow (\varphi(v), \varphi(w)) \in A'$$

Se dirán que los grafos son **isomorfos** si existe un isomorfismo entre ellos.

Ejemplos

El grafo 1 y el 2 son isomorfos y el grafo 3 es un subgrafo del grafo 1.

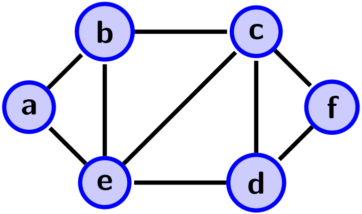
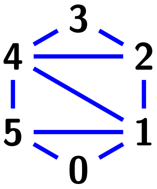


Figura: Grafo 1

Figura: Grafo 2



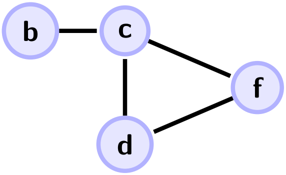


Figura: Grafo 3

Algunas definiciones

Definición

- Un **paseo** en un grafo $G = (V, A)$ es una sucesión finita de vértices $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_r$ (pueden repetirse vértices) de forma que (v_i, v_{i+1}) es una arista de G, para cada $i = 0, 1, \ldots, r-1$.

Algunas definiciones

Definición

- Un **paseo** en un grafo $G = (V, A)$ es una sucesión finita de vértices $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_r$ (pueden repetirse vértices) de forma que (v_i, v_{i+1}) es una arista de G, para cada $i = 0, 1, \ldots, r-1$.
- Un paseo es **cerrado** si $v_0 = v_r$.

Algunas definiciones

Definición

- Un **paseo** en un grafo $G = (V, A)$ es una sucesión finita de vértices $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_r$ (pueden repetirse vértices) de forma que (v_i, v_{i+1}) es una arista de G, para cada $i = 0, 1, \ldots, r-1$.
- Un paseo es **cerrado** si $v_0 = v_r$.
- Un paseo es un **camino** si no repite ninguna arista.

Algunas definiciones

Definición

- Un **paseo** en un grafo $G = (V, A)$ es una sucesión finita de vértices $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_r$ (pueden repetirse vértices) de forma que (v_i, v_{i+1}) es una arista de G, para cada $i = 0, 1, \ldots, r-1$.
- Un paseo es **cerrado** si $v_0 = v_r$.
- Un paseo es un **camino** si no repite ninguna arista.
- Un camino cerrado es un **circuito.**

Algunas definiciones

Definición

- Un **paseo** en un grafo $G = (V, A)$ es una sucesión finita de vértices $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_r$ (pueden repetirse vértices) de forma que (v_i, v_{i+1}) es una arista de G, para cada $i = 0, 1, \ldots, r-1$.
- Un paseo es **cerrado** si $v_0 = v_r$.
- Un paseo es un **camino** si no repite ninguna arista.
- Un camino cerrado es un **circuito.**
- Un **ciclo** es un paseo cerrado que no repite vértices intermedios.

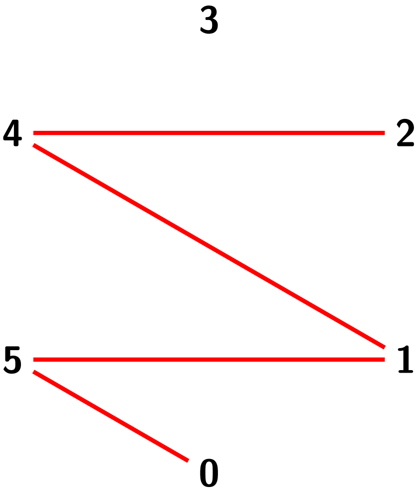
Algunas definiciones

Definición

- Un **paseo** en un grafo $G = (V, A)$ es una sucesión finita de vértices $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_r$ (pueden repetirse vértices) de forma que (v_i, v_{i+1}) es una arista de G, para cada $i = 0, 1, \ldots, r - 1$.
- Un paseo es **cerrado** si $v_0 = v_r$.
- Un paseo es un **camino** si no repite ninguna arista.
- Un camino cerrado es un **circuito.**
- Un **ciclo** es un paseo cerrado que no repite vértices intermedios.

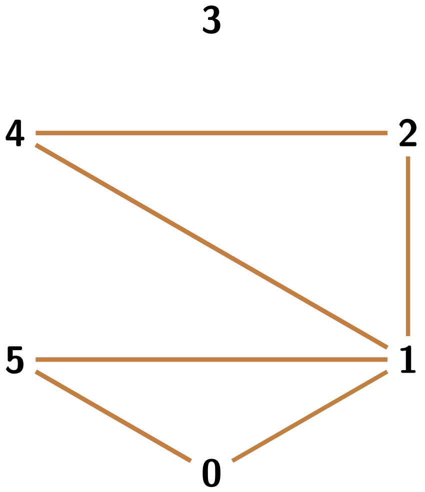
Ejemplo

A continuación se muestra un paseo, un paseo cerrado, un camino, un circuito y un ciclo.



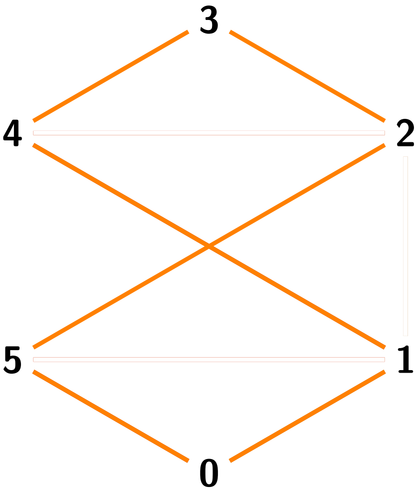
Ejemplo

A continuación se muestra un paseo, un paseo cerrado, un camino, un circuito y un ciclo.



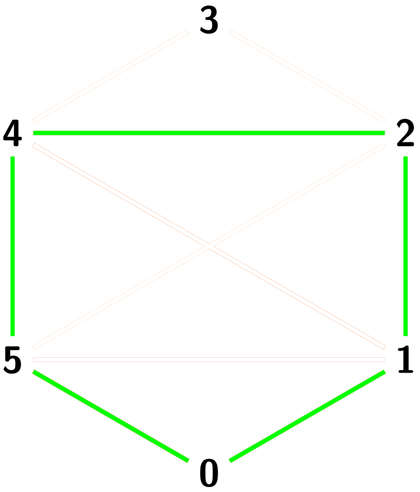
Ejemplo

A continuación se muestra un paseo, un paseo cerrado, un camino, un circuito y un ciclo.



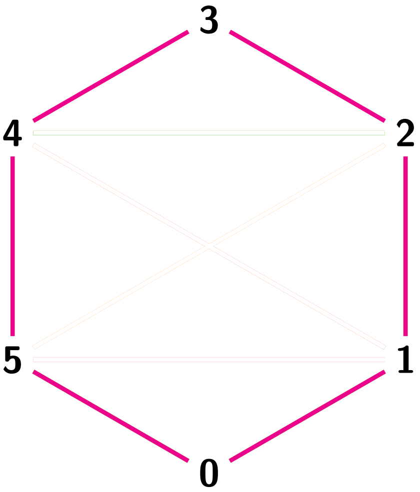
Ejemplo

A continuación se muestra un paseo, un paseo cerrado, un camino, un circuito y un ciclo.



Ejemplo

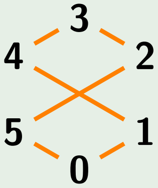
A continuación se muestra un paseo, un paseo cerrado, un camino, un circuito y un ciclo.



Definición

- Un grafo $G = (V, A)$ es **conexo** si dados cualesquiera dos vértices distintos $v, w \in V$, podemos encontrar un paseo que los conecte.
- Si $G = (V, A)$ es conexo y tiene un camino, diremos que es un **camino de Euler.**
- Si $G = (V, A)$ es conexo y tiene un circuito, diremos que es un **grafo de Euler.**

Ejemplo (Grafo conexo)



Algunos resultados importantes

Los siguientes resultados nos permitirán caracterizar los grafos.

Proposición

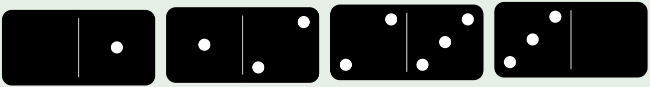
Sea $G = (V, A)$ es un grafo conexo

1. *Si cada vértice es de grado par, entonces G es un grafo de Euler.*
2. *Si todos los vértices son pares salvo dos, entonces G tiene un camino de Euler.*

Grafos y partidas

Retomemos los ejemplos de partidas dados anteriormente, es claro que nuestros vértices serán las cifras y las aristas nuestras fichas, por lo tanto

Ejemplo

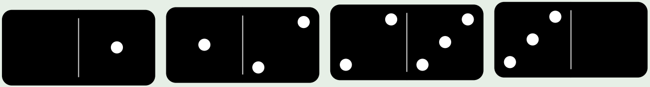


que es igual a $(0,1)(1,2)(2,3)(3,0)$ se simboliza como el grafo

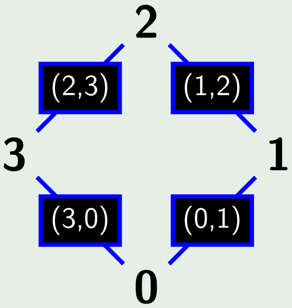
Grafos y partidas

Retomemos los ejemplos de partidas dados anteriormente, es claro que nuestros vértices serán las cifras y las aristas nuestras fichas, por lo tanto

Ejemplo



que es igual a $(0,1)(1,2)(2,3)(3,0)$ se simboliza como el grafo



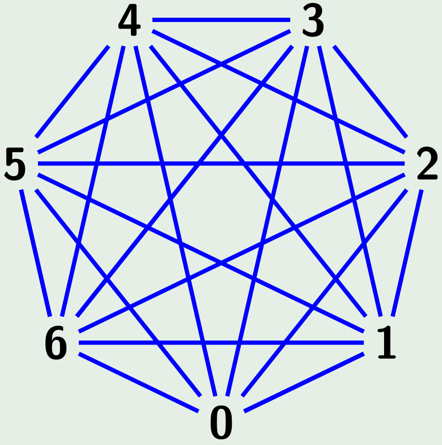
Grafos y partidas

Ejemplo (Partida perfecta)

$(6,0)(0,3)(3,1)(1,0)(0,4)(4,1)(1,6)(6,4)(4,2)(2,6)(6,5)(5,1)$
$(1,2)(2,5)(5,3)(3,2)(2,0)(0,5)(5,4)(4,3)(3,6).$

Ejemplo (Partida perfecta)

$(6,0)(0,3)(3,1)(1,0)(0,4)(4,1)(1,6)(6,4)(4,2)(2,6)(6,5)(5,1)$
$(1,2)(2,5)(5,3)(3,2)(2,0)(0,5)(5,4)(4,3)(3,6).$



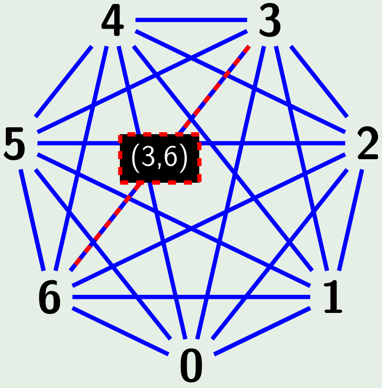
Grafos y partidas

Ejemplo (Partida semiperfecta)

$(6,0)(0,3)(3,1)(1,0)(0,4)(4,1)(1,6)(6,4)(4,2)(2,6)(6,5)(5,1)$
$(1,2)(2,5)(5,3)(3,2)(2,0)(0,5)(5,4)(4,3)$.

Ejemplo (Partida semiperfecta)

$(6,0)(0,3)(3,1)(1,0)(0,4)(4,1)(1,6)(6,4)(4,2)(2,6)(6,5)(5,1)$
$(1,2)(2,5)(5,3)(3,2)(2,0)(0,5)(5,4)(4,3)$.



Recuerde que eliminamos la ficha $(3,6)$

Condiciones necesarias para la elaboración de partidas (versión 2)

Estas proposiciones nos muestran que el estudio de las partidas del dominó se reduce a estudiar grafos conexos, entonces podemos decir que:

Condiciones necesarias para la elaboración de partidas (versión 2)

Estas proposiciones nos muestran que el estudio de las partidas del dominó se reduce a estudiar grafos conexos, entonces podemos decir que:

Teorema (Elaboración de partidas perfectas (versión de grafos))

En un juego de dominó una partida es perfecta si y solo si el grafo $G = (V, A)$ generado por la partida es un grafo de Euler.

Condiciones necesarias para la elaboración de partidas (versión 2)

Estas proposiciones nos muestran que el estudio de las partidas del dominó se reduce a estudiar grafos conexos, entonces podemos decir que:

Teorema (Elaboración de partidas perfectas (versión de grafos))

En un juego de dominó una partida es perfecta si y solo si el grafo $G = (V, A)$ *generado por la partida es un grafo de Euler.*

Teorema (Elaboración de partidas semiperfectas (versión de grafos))

En un juego de dominó una partida es semiperfecta si y solo si el grafo $G = (V, A)$ *generado por la partida tiene todos sus vértices pares salvo dos.*

Referencias Bibliográficas

FERNÁNDEZ GALLARDO, P. (N.D.). *Capítulo 8: Grafos*. Recuperado en junio 7 del 2018, desde https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/capitulo8a.pdf

MUÑOZ ESCOLLANO, J., & OLLER MARCEN, A. (2006, NOVIEMBRE). *Euler jugando al dominó*. SUMA, 53, 39-49.