El problema de Basilea

Michael Alexánder Rincón Villamizar

Universidad Industrial de Santander

junio, 2018

Introducción

El problema de *Basilea* consiste en encontrar el valor de la suma

Introducción

El problema de *Basilea* consiste en encontrar el valor de la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Introducción

El problema de *Basilea* consiste en encontrar el valor de la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

El nombre del problema proviene de la ciudad natal de Leonhard Euler (1707-1783), aunque el problema fue formulado por primera vez en 1644 por Pietro Mengoli (1625-1686).

Primero debemos estar seguros que realmente tal suma es un número real.

Primero debemos estar seguros que realmente tal suma es un número real.

Observe que $\dfrac{n^2+n}{2} \leq n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto

Primero debemos estar seguros que realmente tal suma es un número real.
Observe que $\dfrac{n^2+n}{2} \leq n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2+n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Sumando se obtiene

Sumando se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + n}.$$

Sumando se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n}.$$

Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2.$$

Sumando se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n}.$$

Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2.$$

Esto muestra que la suma define un número real.

John Wallis (1616-1703) abordó el problema. Obtuvo una aproximación al valor de suma de la serie.

John Wallis (1616-1703) abordó el problema. Obtuvo una aproximación al valor de suma de la serie.

Gottfried W. Leibniz (1646-1716) conoce el problema en 1673, y posteriormente los Bernoulli se enteraron de éste.

John Wallis (1616-1703) abordó el problema. Obtuvo una aproximación al valor de suma de la serie.

Gottfried W. Leibniz (1646-1716) conoce el problema en 1673, y posteriormente los Bernoulli se enteraron de éste.

Christian Goldbach (1690-1764) da una estimación al valor de la suma de la serie.

John Wallis (1616-1703) abordó el problema. Obtuvo una aproximación al valor de suma de la serie.

Gottfried W. Leibniz (1646-1716) conoce el problema en 1673, y posteriormente los Bernoulli se enteraron de éste.

Christian Goldbach (1690-1764) da una estimación al valor de la suma de la serie.

En 1730, James Stirling (1692-1770) obtiene una aproximación al valor de la suma de la serie correcta hasta el noveno decimal.

El intento de los Bernoulli

Los estudios de Jakob Bernoulli (1654-1705) dieron luz al siguiente resultado:

El intento de los Bernoulli

Los estudios de Jakob Bernoulli (1654-1705) dieron luz al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots \\ & = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Un primer intento de Euler

En 1738, Euler dio el siguiente resultado, el cual permite obtener una mejor aproximación al valor de la suma de la serie.

Un primer intento de Euler

En 1738, Euler dio el siguiente resultado, el cual permite obtener una mejor aproximación al valor de la suma de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \ln^2(2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^{k-1}}.$$

Una solución de Euler

Antes de exponer la idea de Euler, enunciamos un lema.

Una solución de Euler

Antes de exponer la idea de Euler, enunciamos un lema.

Lemma

Si $Q(x)$ es un polinomio mónico con raíces $a_1, \ldots, a_n$ distintas de cero, entonces

$$Q(x) = Q(0)\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_n}\right).$$

Es claro que los elementos del conjunto $\{n\pi \,:\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ son raíces de la función $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ con $f(0) = 1$.

Es claro que los elementos del conjunto $\{n\pi \,:\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ son raíces de la función $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ con $f(0) = 1$.
Siguiendo la idea del lema anterior, podríamos expresar la función f como el siguiente producto infinito:

Es claro que los elementos del conjunto $\{n\pi \,:\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ son raíces de la función $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ con $f(0) = 1$.
Siguiendo la idea del lema anterior, podríamos expresar la función f como el siguiente producto infinito:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin x}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x}{3^2\pi}\right)\cdots
\end{aligned}
$$

Observemos ahora el coeficiente de x^2 en los productos:

Observemos ahora el coeficiente de x^2 en los productos:

$$Q_0(x) = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right).$$

Observemos ahora el coeficiente de x^2 en los productos:

$$Q_0(x) = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right).$$

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)x^2 + \frac{x^4}{2^2\pi^4 +}. \end{aligned}$$

Uno más:

Uno más:

$$\begin{aligned}
Q_2(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right)x^2 \\
&+ \frac{1}{\pi^4}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2}\right)x^4 \\
&- \frac{1}{36\pi^4}x^6
\end{aligned}$$

Generalizando, puede verse que el coeficiente de x^2 en el producto

$$Q_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

es

Generalizando, puede verse que el coeficiente de x^2 en el producto

$$Q_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

es

$$-\frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right).$$

Extrapolando al caso infinito, tendríamos que el coeficiente de x^2 en el producto

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x}{3^2\pi}\right)\cdots \end{aligned}$$

es

Extrapolando al caso infinito, tendríamos que el coeficiente de x^2 en el producto

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots \\ &= \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x}{3^2\pi}\right)\cdots\end{aligned}$$

es

$$-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\right).$$

Por otro lado, la función $f(x)$ es representada como el "polinomio infinito"

Por otro lado, la función $f(x)$ es representada como el "polinomio infinito"

$$1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots$$

Por otro lado, la función $f(x)$ es representada como el "polinomio infinito"

$$1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots$$

De modo que los coeficientes de cada potencia de x de ambos "polinomios infinitos" deben ser iguales.

Así, obtenemos la solución al problema de Basilea dada por Euler

Así, obtenemos la solución al problema de Basilea dada por Euler

$$-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{6},$$

Así, obtenemos la solución al problema de Basilea dada por Euler

$$-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{6},$$

es decir,

Así, obtenemos la solución al problema de Basilea dada por Euler

$$-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{6},$$

es decir,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Bibliografía

Sánchez Muñoz, José Manuel, *The Basel problem*. (Spanish) Lect. Mat. 35 (2014), 2, 199-227.