La hermosa geometría del triángulo: un enfoque olímpico

Cursillista: Juan Carlos Basto Pineda
Universidad Industrial de Santander

En este cursillo de 3 días recorrimos algunas propiedades básicas e interesantes de la geometría de los triángulos y de la geometría de los círculos, ya que ambos poseen interesantes puntos de encuentro. Esto se evidencia, por ejemplo, al deducir la existencia del incírculo y el circuncírculo de un triángulo a partir de las definiciones de mediatriz y bisectriz. A continuación un breve resumen.

Ángulos opuestos por el vértice y alternos internos

Son dos propiedades geométricas fundamentales, que nos sirven de base para descubrir muchas otras propiedades. La primera, ángulos opuestos por el vértice, hace referencia a que el cruce de dos líneas rectas genera ángulos iguales en regiones opuestas respecto al punto de corte de dichas rectas (el vértice). Se puede pensar en esta propiedad como en unas tijeras, que al abrirse o cerrarse lo hacen en igual medida de los dos lados.

La segunda, ángulos alternos internos, afirma que si tenemos dos líneas paralelas y una tercera línea oblícua que las corta, los ángulos de corte con cada una de las dos paralelas son iguales. Usted puede pensar en esta propiedad imaginando que tenemos un rectángulo de papel y lo cortamos a la mitad por una diagonal. ¿Cómo son los dos triángulos que se forman? Idénticos, y por tanto el ángulo en el vértice de uno es el mismo ángulo en el vértice del otro. Ahora reconstruya el rectángulo original y visualice los pares de ángulos iguales, corresponden a los ángulos formados por el corte de la diagonal a cada uno de los lados paralelos.

Ángulos en círculos

Imagine que se tienen dos puntos A y B sobre el perímetro de una circunferencia. Imagine que marcamos sobre el arco mayor $\overparen{\mathrm{AB}}$ un tercer punto C, y tomamos la medida del ángulo $\angle ACB$ (con vértice en C, la letra que está al medio). Bien, ahora imagine que jugamos con la posición de C, desplazándolo sobre el arco mayor. ¿Qué pasará con la medida de $\angle ACB$? Sorprendentemente, resulta que esa medida se mantiene constante independientemente de la posición de C, siempre y cuando este punto se mantenga sobre el arco mayor.

Para entender el por qué, borremos momentáneamente a C de la figura y ubiquemos el centro de la circunferencia, O. Dibujando el triángulo $\triangle AOB$, vemos que es isósceles ya que dos de sus lados tienen como medida al radio de la circunferencia. Sea α la medida de los ángulos iguales, $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$. Claramente, α no depende de la posición del punto C que se escogerá, es una medida fija que solo depende de las posiciones relativas de A y B en esta circunferencia. Ahora bien, dibujemos nuevamente al punto C, asumiendo por simplicidad que O cae al interior del triángulo $\triangle ABC$. Notemos que los triángulos $\triangle AOC$ y $\triangle BOC$ también son isósceles, y digamos

$$\begin{aligned} \angle OAC &= \angle OCA = \beta \\ \angle OBC &= \angle OCB = \gamma \end{aligned}$$

Ahora, si analizamos la suma de ángulos en el triángulo $\triangle ABC$ vemos que esta implica $2(\alpha + \beta + \gamma) = 180°$, es decir, $\angle ACB = \beta + \gamma = 90° - \alpha$

Esto demuestra que el valor de $\angle ACB$ únicamente depende de la medida del ángulo α, independientemente de la posición específica del punto C. Nos referiremos a esta propiedad con el nombre de ángulo inscrito.

Otras propiedades importantes, cuya demostración se deja como ejercicio al lector son:

- Dada una cuerda AB sobre una circunferencia de centro O, el ángulo $\angle AOB$, conocido como ángulo central, mide el doble del ángulo inscrito por la cuerda AB[1].
- El ángulo inscrito por una cuerda sobre el arco mayor y el ángulo inscrito por la misma cuerda sobre su arco menor son suplementarios, es decir, suman 180°.
- El ángulo inscrito por un diámetro en una circunferencia es siempre de 90°.

Otras propiedades interesantes relacionadas son las que incluyen a una recta tangente a la circunferencia. Se puede probar, por ejemplo, que el radio trazado hasta el punto de tangencia es perpendicular a la recta tangente que pasa por allí, y se puede probar que si construímos una cuerda con uno de sus dos extremos en dicho punto de tangencia, el ángulo inscrito por dicha cuerda es igual al ángulo formado entre la cuerda y la recta tangente.

[1] Por cuerda nos referimos al segmento recto $\overline{AB}$, para distinguirlo de los arcos $\overparen{\mathrm{AB}}$, que son las secciones de circunferencia conectando esos mismos puntos.

Congruencia y semejanza

Para ponerlo en términos familiares, decimos que dos figuras geométricas son congruentes cuando tienen exactamente la misma forma y tamaño, y decimos que son semejantes cuando poseen la misma forma, pero una es una versión escalada de la otra. En el primer caso todos los segmentos y ángulos correspondientes son idénticos (congruentes). En el segundo caso, la semejanza, existe igualdad de ángulos correspondientes y una razón de proporcionalidad constante entre cualquier par de segmentos correspondientes.

De forma simbólica representamos la congruencia entre dos tríangulos con el símbolo $\equiv$. Por ejemplo, la expresión $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ denota que ambos triángulos son congruentes y se verifican las igualdades angulares y de segmentos:

$$\begin{array}{ccc} \angle A = \angle D & ; & AB = DE \\ \angle B = \angle E & ; & BC = EF \\ \angle C = \angle F & ; & CA = FD \end{array}$$

Si en cambio los triángulos son semejantes, decimos $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, lo cual estable inmediatamente la misma igualdad angular anterior, y una relación de proporcionalidad entre los lados correspondientes:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\,.$$

Nota: El orden en que se escriben los vértices del triángulo al establecer la relación de congruencia o semejanza es muy importante, estos deben ser escritos exactamente en el orden de correspondencia entre pares de ángulos.

Cevianas

Mediatrices

Normalmente conocemos como mediatriz a la recta que se levanta perpendicularmente a un segmento, exactamente por su punto medio. Sin embargo, esta definición encierra otra propiedad menos evidente: se trata de la unión de todos los puntos sobre el plano que se encuentran a una misma distancia de dos puntos dados (los extremos del segmento). Es fácil convencerse de la equivalencia entre estas dos definiciones. Dibuje un segmento, trace su mediatriz, y reflexione sobre las distancias a cada extremo del segmento cuando nos ubicamos en un punto sobre la mediatriz, y cómo cambian dichas medidas cuando nos salimos de tal recta.

Pues bien, esta nueva definición nos permite probar una propiedad muy interesante: para todo triángulo existe un círculo que pasa por sus tres vértices. Curioso, ¿verdad?

Para entender el porqué, piense que trazamos las mediatrices de dos de los lados del triángulo. Por ejemplo, si el triángulo es ABC, tracemos las mediatrices de AB y BC, y llamemos O a su punto de corte. Es claro que, por estar sobre la primera mediatriz, las distancias AO y OB son iguales, y por estar sobre la segunda mediatriz, las distancias BO y OC son iguales. Por lo tanto, las 3 distancias desde O hasta los vértices A, B y C son iguales, luego es posible trazar un círculo con esa distancia como radio y centro en O, el cual pasará exactamente por los 3 vértices del triángulo. Identificamos a tal círculo como *el circuncírculo* de ABC, a O como el circuncentro, y a la distancia OA la llamamos circunradio, R.

Aunque no se mencionó explícitamente, el razonamiento anterior también prueba que la tercera mediatriz debe pasar por O, luego hemos probado de paso que las 3 mediatrices concurren, es decir, que las 3 pasan por un mismo punto común.

Bisectrices

Similar al caso anterior, la definición de bisectriz que resulta más popular, como la recta que divide a un ángulo a la mitad, admite otra interpretación. La bisectriz es el conjunto de todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de dos rectas dadas. Es decir que si tomamos un punto cualquiera sobre la bisectriz de un ángulo, y trazamos segmentos perpendiculares hasta los dos lados que conforman el ángulo, ambos segmentos tendrán la misma medida. Reflexione sobre un dibujo para convencerse de este hecho.

Ahora bien, un razonamiento muy parecido al que hicimos con las mediatrices permite mostrar que las bisectrices internas de un triángulo también son concurrentes. El punto de corte de las tres bisectrices se llama *incírculo*, denotado por la letra I. Este punto equidista de los tres lados, y por lo tanto es el centro de un círculo que es tangente interiormente a los mismos, cuyo radio se conoce por el nombre de *inradio*, r.

Problemas propuestos, recopilados de diversas Olimpiadas

1. En el cuadrilátero $ABCD$ los lados AD y BC son paralelos, y $AD + BC = CD$. Sea E el punto medio de AB. Si se sabe que $\angle CDE = 64°$, ¿cuál es la medida del ángulo $\angle BCD$?

2. Sea el trapecio $ABCD$ con bases paralelas AB y CD. Sea M un punto sobre el lado AB y N un punto sobre el lado CD. Sea P el punto de corte de los segmentos AN y DM, y sea Q el punto de corte de los segmentos MC y BN. Conociendo las áreas de los tríangulos $(APM) = 1$, $(DPN) = 9$ y $(BQC) = 5$, determine el área del cuadrilátero $MQNP$.

3. Dos circunferencias se intersectan en los puntos A y B. Una recta tangente a ambas circunferencias, que está más cerca de B que de A, toca a la primera circunferencia

en el punto C y a la segunda en el punto D. La prolongación del segmento BC corta nuevamente a la segunda circunferencia en el punto E que es diferente a B. Demuestre que la línea AD es bisectriz del ángulo $\angle CAE$.

4. Sea $ABCD$ un cuadrado, y sea K un punto cualquiera sobre el lado BC. La bisectriz del ángulo $\angle KAD$ corta al lado CD en M. Demuestre que la longitud del segmento AK es igual a la suma de los segmentos DM y BK.

5. Sea P un punto cualquiera al interior de un hexágono regular. Unimos P a cada uno de los vértices del hexágono y coloreamos los 6 triángulos que se forman de rojo y amarillo alternadamente. Demuestre que la suma de las áreas rojas es igual a la suma de las áreas amarillas.

6. Demuestre que el área de un triángulo puede expresarse mediante la fórmula $A = s \cdot r$, donde s denota el semiperímetro, que equivale a la mitad del perímetro, y r denota el inradio.

Pistas a los problemas

1. Trace la recta CE, prolongándola hasta cortar a la recta AD en un nuevo punto, F.

2. Considere proporcionalidades y equivalencias entre áreas de triángulos, basadas en la proporcionalidad entre sus bases y sus alturas.

3. Establezaca igualdades angulares utilizando las propiedades de los ángulos inscrito y semi-inscrito.

4. Prolongue el segmento CB más allá de B, y marque un nuevo punto P sobre la prolongación, tal que $BP = DM$.

5. Prolongue los lados del hexágono hasta que se corten formando un triángulo equilátero.

6. Trace segmentos perpendiculares desde el incentro hasta cada uno de los lados de ABC.