IV encuentro Hablemos de Olimpiadas Matemáticas
Cuadriláteros cíclicos bajo un enfoque de resolución de problemas en Olimpiadas matemáticas

Silvia Juliana Ballesteros
Esteban Salcedo

Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander

8 de junio de 2018

Según Pólya(1945):

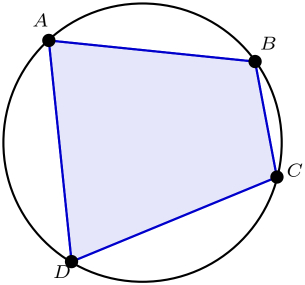
> Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto: pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo.

En este sentido Pólya propone **el método de los cuatro pasos** para resolver un problema:

- entender el problema
- configurar un plan
- ejecutar el plan
- probar el resultado

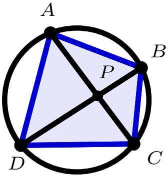
Cuadrilateros Cíclicos

Definición: *Un cuadrilátero $ABCD$ convexo se llama* ***cuadrilátero cíclico*** *si todos sus vértices están sobre una circunferencia. Es también llamado un* ***cuadrilátero de cuerdas****.*



Teorema 1 (Caracterización de cuadriláteros cíclicos)
Dado el cuadrilátero $ABCD$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

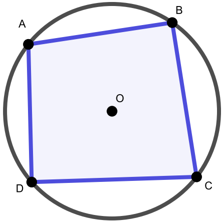
- i) *$ABCD$ es un cuadrilátero cíclico*
- ii) *La suma de los productos de las medidas de sus lados opuestos es igual al producto de las medidas de sus diagonales, es decir,* $AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$.
- iii) *Los ángulos opuestos de $ABCD$ son suplementarios, es decir,* $\measuredangle BAD + \measuredangle DCB = 180^o$ *y* $\measuredangle CBA + \measuredangle ADC = 180^o$
- iv) *Dos lados opuestos forman ángulos iguales con las diagonales, es decir,* $\measuredangle CAD = \measuredangle CBD$ *y* $\measuredangle ADB = \measuredangle BCA$
- v) *Sea P la intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, entonces* $AP \times PC = BP \times PD$.



Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico entonces dos lados opuestos forman ángulos iguales con las diagonales
$\measuredangle CAD = \measuredangle CBD$ y $\measuredangle ADB = \measuredangle BCA$

Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico entonces dos lados opuestos forman ángulos iguales con las diagonales
$\measuredangle CAD = \measuredangle CBD$ y $\measuredangle ADB = \measuredangle BCA$

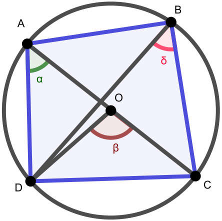
Demostración



Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico entonces dos lados opuestos forman ángulos iguales con las diagonales

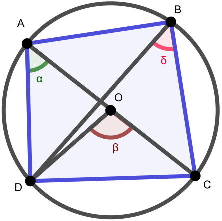
$\measuredangle CAD = \measuredangle CBD$ y $\measuredangle ADB = \measuredangle BCA$

Demostración



Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico entonces dos lados opuestos forman ángulos iguales con las diagonales
$\measuredangle CAD = \measuredangle CBD$ y $\measuredangle ADB = \measuredangle BCA$

Demostración



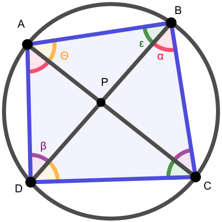
$\angle CAD = \dfrac{\angle COD}{2}$ y $\angle CBD = \dfrac{\angle COD}{2}$
así

$$\angle CAD = \angle CBD$$

Si dos lados opuestos de un cuadrilatero cíclico $ABCD$ forman ángulos iguales con las diagonales, es decir, $\measuredangle CAD = \measuredangle CBD$ y $\measuredangle ADB = \measuredangle BCA$ entonces los ángulos opuestos de $ABCD$ son suplementarios, es decir, $\measuredangle BAD + \measuredangle DCB = 180^{o}$ y $\measuredangle CBA + \measuredangle ADC = 180^{o}$

Si dos lados opuestos de un cuadrilatero cíclico $ABCD$ forman ángulos iguales con las diagonales, es decir, $\measuredangle CAD = \measuredangle CBD$ y $\measuredangle ADB = \measuredangle BCA$ entonces los ángulos opuestos de $ABCD$ son suplementarios, es decir, $\measuredangle BAD + \measuredangle DCB = 180^{\text{o}}$ y $\measuredangle CBA + \measuredangle ADC = 180^{\text{o}}$

Demostración:

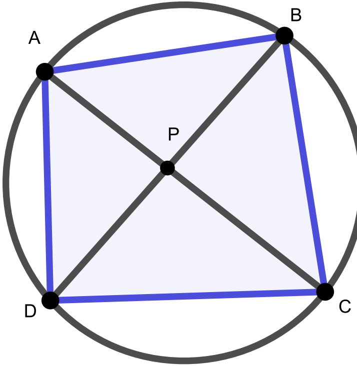


$$\theta + \varepsilon + \alpha + \beta = 180^\circ$$

$\theta + \alpha = \angle BAD$
$\beta + \varepsilon = \angle DCB$

Algunos problemas...

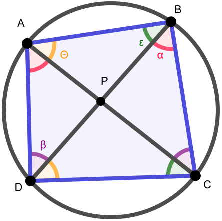
1. Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico y P la intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, entonces $AP \times PC = BP \times PD$.



Algunos problemas...

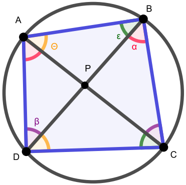
1. Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico y P la intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, entonces $AP \times PC = BP \times PD$.

Solución:



1. Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico y P la intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, entonces $AP \times PC = BP \times PD$.

Solución:

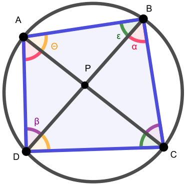


Se tiene que:

$$\triangle APD \sim \triangle BPC$$

1. Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico y P la intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, entonces $AP \times PC = BP \times PD$.

Solución:



Se tiene que:

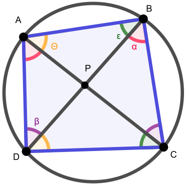
$$\triangle APD \sim \triangle BPC$$

entonces

$$\frac{AP}{BP} = \frac{PD}{PC}$$

1. Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico y P la intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, entonces $AP \times PC = BP \times PD$.

Solución:



Se tiene que:

$$\triangle APD \sim \triangle BPC$$

entonces

$$\frac{AP}{BP} = \frac{PD}{PC} \Rightarrow AP \times PC = BP \times PD$$

2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia

$$AB = AD = 7\ cm,\ BC = 3\ cm \text{ y } DC = 5\ cm$$

Si se sabe que la magnitud de una de sus diagonales es un número primo, NO es correcto afirmar que:

- a) el triángulo ABD es equilátero.
- b) el ángulo DCB mide 120º.
- c) el área del cuadrilátero $ABCD$ es $16\sqrt{3}\ cm^2$.
- d) la longitud de la circunfetencia que inscribe el cuadrilátero $ABCD$ es 8π.

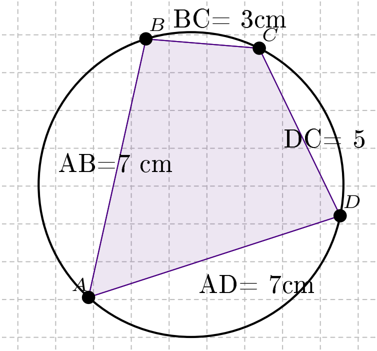
(2017,ORM-UIS, Capacitación de Nivel Avanzado)

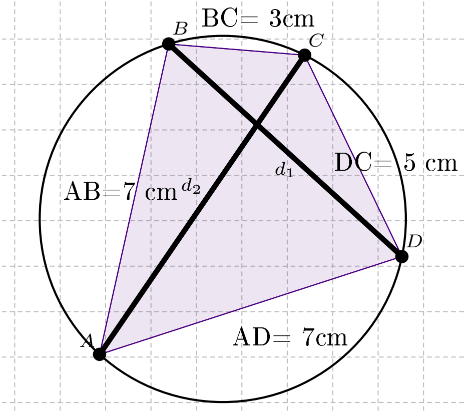
2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia

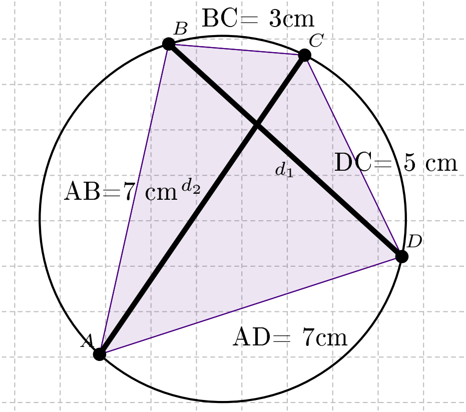
$$AB = AD = 7\ cm,\ BC = 3\ cm \text{ y } DC = 5\ cm$$

Si se sabe que la magnitud de una de sus diagonales es un número primo, NO es correcto afirmar que:

Solución:

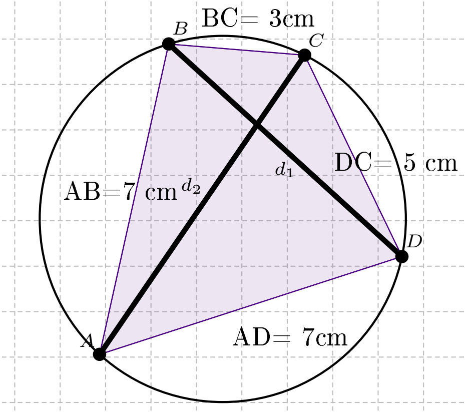



BC= 3cm
B
C
DC= 5 cm
d1
AB=7 cm
d2
D
A
AD= 7cm



Por el teorema de Ptolomeo se tiene que:

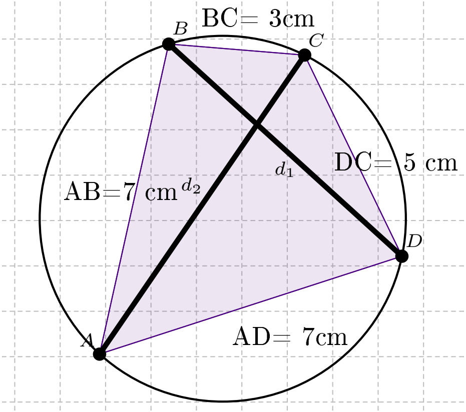
$$3 \times 7 + 7 \times 5 = d_1 \times d_2$$



Por el teorema de Ptolomeo se tiene que:

$$3 \times 7 + 7 \times 5 = d_1 \times d_2$$

$$56 = d_1 \times d_2$$



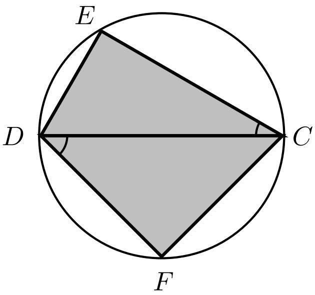
Por el teorema de Ptolomeo se tiene que:

$$3 \times 7 + 7 \times 5 = d_1 \times d_2$$

$$56 = d_1 \times d_2$$

$$d_1 \times d_2 = 7 \times 2^3$$

3. Considere el círculo de diámetro $DC = 4\ cm$, y E, F puntos de la circunferencia. Si el ángulo DCE mide 30º y el ángulo CDF mide 45º, ¿cuánto mide el área sombreada en cm^2?



(a) $4 + 2\sqrt{3}\ cm^2$ (b) $8\ cm^2$ (c) $4 + 2\sqrt{2}\ cm^2$ (d) $4\pi + 2\sqrt{3}\ cm^2$

(2017,ORM-UIS, Prueba Clasificatoria de Nivel Avanzado)

Referencias bibliográficas

1. Olimpiadas Regionales de Matemáticas. (2017).Universidad Industrial de Santander, Colombia.
2. Polya, G., & Zugazagoitia, J. (1965). Cómo plantear y resolver problemas (No. 04; QA11, P6.). Trillas.
3. Aarts, J.M. (2008). Plane and Solid Geometry. Springer, New York.