



Recopilación de problemas de las

Olimpiadas Regionales de Matemáticas Primaria

INFORMES

olimpiadas@matematicas.uis.edu.co

Tel.: 6450301, 6344000 Ext.: 2316, 2583, 2581



Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS



Vicerrectoría Académica



"VIGILADA MINEDUCACIÓN"

VIGILADA MINEDUCACIÓN

*Problemas de olimpiadas
matemáticas para básica primaria*



*Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga*

2021



Elaboración y edición

Grupo Olimpiadas Regionales de Matemáticas - 2021.



In memoriam

Germán Moreno Arenas (1967 – 2019)

Agradecimientos.

Este documento es resultado del trabajo a lo largo de 10 años de un grupo de profesores, estudiantes de pregrado, estudiantes de posgrado, y personal administrativo de la Universidad Industrial de Santander.

Son muchas las personas que han hecho parte de este gran proyecto que llega a su décima versión y que ha logrado una destacada incidencia en el sector educativo de su área de influencia, así como el reconocimiento a nivel nacional. A continuación, a manera de reconocimiento, se mencionarán a las personas que han sido integrantes del Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas (ORM-UIS), durante esta primera década:

MONITORES:

Álvaro Javier Andrade Durán
Álvaro Javier Riaño Blanco
Ana Milena Santamaría Bueno
Andrés Fabián Leal Archila
Andrés Sebastián Cañas Pérez
Astrid Katherine Pineda
Cristhian Daniel Cáceres Garavito
Darío Arciniegas Vega
Edson Jair Suárez Porras
Edwin David Valencia Oviedo
Esteban David Salcedo Niño
Fredy Neira Roa
Gabriel Moncada Santos
Gerson Leonel Barajas Ávila
Jenifer Tatiana Puentes Correa
Jesús David Hernández
Jesús Fernando Carreño Díaz
Jhoan Sebastián Báez Acevedo

Johan Sebastián Cortés Villamizar
José Camilo Rueda Niño
Juan Camilo Cala Barón
Juan Camilo Camacho Parra
Juan David Rueda Centeno
Julián Enrique Neira Díaz
Leidy Marcela Angarita Celis
Luis Ángel Pérez Fernández
Luis Eduardo Tavera Santamaría
Luis Manuel Ortiz Durán
Mauricio Jafet Santos
Melany Dayana Mejía
Natalia Isabel Pérez Niño
Natalia Stefania Garzón Laguado
Nicolás Luna Chacón
Sammy Andrés Martínez Cárdenas
Santiago Niño Campos
Silvia Juliana Ballesteros Gualdrón
Viviana Niño Celis
Wilson David Archila Mojica
Yerly Vanesa Soler Porras
Yzel Wlly Alay Gómez Espíndola

PROFESORES

Adriana Alexandra Albarracín Mantilla
Alexander Holguín Villa
Arnoldo Rafael Teherán Herrera
Carlos Arturo Rodríguez Palma
Edilberto José Reyes González
Jorge Eliécer Gómez Ríos
Laura Milena Romero Parada
Malka Irina Cabellos Martínez

ADMINISTRATIVOS

Claudia Garavito Osorio
Germán Moreno Arenas
Jorge Enrique Fiallo Leal
Jorge Villamizar Morales
Julio César Carrillo Escobar
Sofía Pinzón Durán
Yazmín Barajas Arenas

Deseamos destacar la colaboración y el apoyo brindado por el Instituto de Proyección Regional y Educación a Distancia, a través de las sedes regionales de la Universidad en Barrancabermeja, Socorro, Barbosa y Málaga. También, un agradecimiento especial a la Universidad Francisco de Paula Santander, sede Ocaña y a las instituciones educativas, especialmente, a los profesores enlace, quienes animan a sus estudiantes, con paciencia y creatividad, a preparar y a afrontar los retos propuestos en las diferentes pruebas de las ORM-UIS. Finalmente, un reconocimiento

especial a los padres de familia quienes apoyan los procesos de aprendizaje de sus hijos y los motivan a participar con respeto y pasión por las matemáticas.

Las ORM-UIS agradece y destaca, con orgullo y alegría, a todos los estudiantes que han participado en las diferentes versiones del certamen a lo largo de estos años. Ustedes han demostrado ser capaces de pensar y sentir problemas sencillos y bellos de matemáticas, con pasión y con rigor.

A todos ellos, instituciones y personas, ¡gracias! porque con sus aportes están haciendo posible que la educación en matemáticas tenga un lugar destacado y valioso en la comunidad académica de la región.

Introducción

“ (...) nuestra educación conformista y represiva parece concebida para que los niños se adapten por la fuerza a un país que no fue pensado para ellos, en lugar de poner el país al alcance de ellos para que lo transformen y engrandezcan. Semejante despropósito restringe la creatividad y la intuición congénitas, y contraría la imaginación, la clarividencia precoz y la sabiduría del corazón, hasta que los niños olviden lo que sin duda saben de nacimiento: que la realidad no termina donde dicen los textos, que su concepción del mundo es más acorde con la naturaleza que la de los adultos, y que la vida sería más larga y feliz si cada quien pudiera trabajar en lo que le gusta, y sólo en eso”

Gabriel García Márquez - Por un país al alcance de los niños.

La Universidad Industrial de Santander, como institución de educación superior del ámbito regional, forma ciudadanos como profesionales integrales, éticos, con sentido político e innovadores; apropiada, utiliza, crea, transfiere y divulga el conocimiento por medio de la investigación, la innovación científica, tecnológica y social, la creación artística y la promoción de la cultura, buscando de este modo el fortalecimiento de una sociedad democrática, participativa, deliberativa y pluralista, con justicia y equidad social, comprometida con la preservación del medio ambiente y el buen vivir.

En el marco de esta misión institucional, la Escuela de Matemáticas ofrece a la sociedad santandereana y de la región de influencia de la Universidad, un escenario de alta calidad para el cultivo de las matemáticas, promoviendo entre los integrantes de la comunidad académica una actitud creativa y rigurosa, y construyendo un ambiente académico basado en la solidaridad, la empatía y el reconocimiento de los otros en su dignidad humana. Es por esta razón que, desde sus inicios, la Escuela de Matemáticas se ha comprometido con la educación matemática, no solo por la calidad reconocida a nivel nacional e internacional de los egresados de sus programas académicos de pregrado y posgrado, sino también por su participación activa y crucial en la formación de los estudiantes de otros programas de la Universidad.

Como parte de su responsabilidad académica y su proyección social frente a los diversos retos en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las habilidades matemáticas en el nororiente colombiano, la Escuela de Matemáticas ha diseñado y ejecutado desde el 2009, el proyecto ORM-UIS, para estudiantes de básica secundaria y media vocacional, y desde el 2012 para estudiantes de básica primaria desde el grado tercero, a través del fortalecimiento de las competencias matemáticas de los estudiantes y la capacitación simultánea de los profesores que orientan dichos procesos.

Los objetivos planteados por este proyecto han sido, desde sus inicios, los siguientes:

- Contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación matemática en la región de incidencia de la UIS a través del fortalecimiento de las habilidades matemáticas de los estudiantes y de la capacitación docente.
- Generar ambientes apropiados de estudio matemático para los jóvenes santandereanos, en los cuales se brinde la posibilidad de compartir y confrontar en torno a las matemáticas.
- Promover un espacio de competencia académica ligada a la competencia ciudadana, en el cual los estudiantes disfruten y aprendan resolviendo problemas matemáticos.
- Proporcionar a los docentes de Santander un espacio de reflexión sobre el conocimiento de habilidades matemáticas que incidan en el salón de clase.

Por otra parte, las ORM-UIS abordan cinco (5) áreas, a saber: i) teoría de números; ii) combinatoria; iii) álgebra, iv) lógica, y v) geometría, y se desarrollan en tres (3) niveles, según el grado de escolaridad de los participantes, así: en el nivel básico participan los estudiantes de grado tercero; en nivel medio, los de grado cuarto y en el nivel avanzado, los de grado quinto. El certamen, además, cuenta con cinco (5) fases: Preparatoria-Capacitación, Prueba Clasificatoria, Prueba Selectiva, Prueba Final y Entrenamientos para los estudiantes finalistas.

La cartilla que tiene en sus manos compendia algunos de los problemas matemáticos propuestos a lo largo de los nueve certámenes, para estudiantes de educación básica primaria (2012 – 2020), con alguna o varias alternativas de solución, así como una miscelánea de problemas, adicionales, para el entrenamiento permanente de quienes disfrutarán de este documento. En todo caso, las soluciones aquí propuestas no son sino un camino de los tantos posibles, por lo que siempre alentaremos y estaremos

abiertos a sus ingeniosas y rigurosas soluciones.

¿Cuántas preguntas o problemas de las matemáticas están todavía pendientes de resolver y recrear? La niñez, además de una etapa maravillosa para aprender a amar y a ser amados, es también el momento crucial en el que planeamos nuestras más importantes aventuras, por eso, el equipo de las ORM-UIS los invita a incluir en sus sueños, a las matemáticas, y a dedicarle a ellas su vida, las cuales no solamente nos permiten ampliar los límites de nuestro conocimiento, sino, también, lograr ser mejores ciudadanos, y, por lo tanto, mejores seres humanos.

El Comité de las ORM - UIS continuará dirigiendo todos sus esfuerzos, al fortalecimiento de ciudadanías que, gracias al pensamiento crítico que se desarrolla desde el ejercicio matemático, puedan enfrentarse a la diversidad de problemáticas que afronta la sociedad actual y requieren de una mirada no solo crítica, sino, además, creativa para ser solucionadas.

A lo largo de estas nueve versiones hemos resaltado a una personalidad matemática, para proponer a los participantes del certamen diversas manifestaciones de una misma vocación por los números. En ese orden de ideas se ha resaltado a *Hipatia de Alejandría*, *Fibonacci*, *Yu Takeuchi*, *Terence Tao*, *Sophie Germain*, *Artur Ávila*, *Cordeiro de Melo*, *Andrew Wiles* y *Lewis Carroll*. Con la publicación de esta cartilla insistimos en destacar la vida humana, diversa y llena de matices, detrás de estos hacedores de matemáticas. Como lo afirma Gauss, en una de sus cartas a Sophie Germain, “los encantos de esta ciencia sublime solo se revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella”. Esperamos que quienes entren en relación con esta cartilla se animen a tener dicho valor.

Colección de afiches.

1^{as} Olimpiadas Regionales de Matemáticas Primaria

Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander



PRUEBAS
1. Clasificatoria, Septiembre 7 de 2012
2. Selectiva, Octubre 6 de 2012
3. Final, Noviembre 10 y 11 de 2012

INSCRIPCIONES
16 de Julio - 24 de Agosto

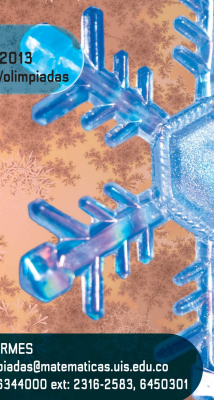
Página Web: <http://matematicas.uis.edu.co/olimpiadas>

Mayores Informes
Teléfonos: 6450301 o 6344000 ext. 2303, 2308, 2583
E-mail: olimpiadas@matematicas.uis.edu.co
Página Web: <http://matematicas.uis.edu.co/olimpiadas>

EDUMAT
IPRED

2^{das} Olimpiadas Regionales de Matemáticas Primaria

Universidad Industrial de Santander



Inscripciones:
Febrero 18 a Marzo 23 de 2013
<http://matematicas.uis.edu.co/olimpiadas>

Pruebas
Fase Clasificatoria Abril 5
Fase Selectiva Mayo 10
Fase Final Junio 1-2

INFORMES
olimpiadas@matematicas.uis.edu.co
Tel: 6344000 ext: 2316-2583, 6450301

Curiosos se casan con el derecho a no fallar, porque incluso el hecho de pensar erróneamente es mejor que no pensar en absoluto.
-Luis de Alarcón

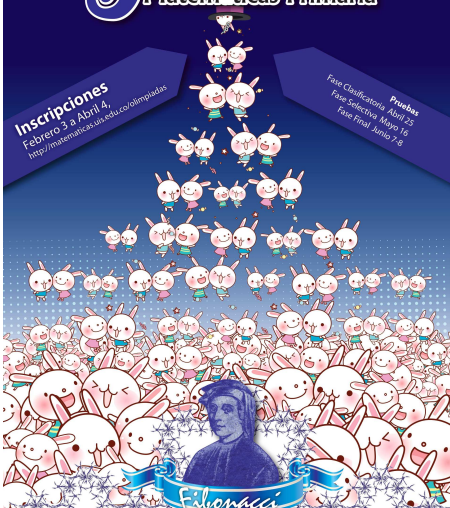
Vicerrectoría Administrativa
Vicerrectoría de Investigación y Extensión

EDUMAT
IPRED

3^{as} Olimpiadas Regionales de Matemáticas Primaria

Inscripciones
Febrero 3 a Abril 4
<http://matematicas.uis.edu.co/olimpiadas>

Pruebas
Fase Clasificatoria Abril 25
Fase Selectiva Mayo 16
Fase Final Junio 7-8



Fibonacci

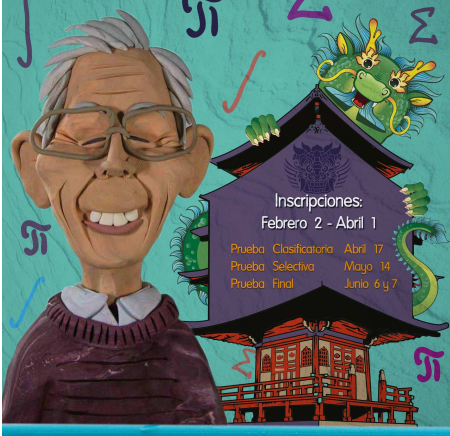
EDUMAT
IPRED

INFORMES
Correo: olimpiadas@matematicas.uis.edu.co
Tel: 6344000 ext: 2316-2583, 6450301

4^{as} Olimpiadas Regionales de Matemáticas

Inscripciones:
Febrero 2 - Abril 1

Prueba Clasificatoria Abril 17
Prueba Selectiva Mayo 14
Prueba Final Junio 6 y 7



EDUMAT
IPRED

Correo: olimpiada@matematicas.uis.edu.co
Tel: 6344000 ext: 2316-2583, 6450301

5^{as} Olimpiadas Regionales de Matemáticas
Primaria

Inscripciones:
Febrero 8 - Abril 1
2016

Prueba Clasificatoria: Abril 22
Prueba Selectiva: Mayo 13
Prueba Final: Junio 4 y 5

INFORMES
Correo: olimpiadas@matematicas.uls.edu.co
Tel: 6344000 ext: 2316-2583-2592, 6450301



Medalla de oro 1988
TERENCE TAO
Australia



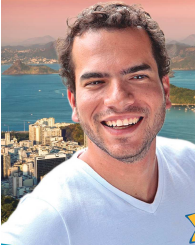

7^{as} Olimpiadas Regionales de Matemáticas
Primaria

Inscripciones
del 7 de mayo al 3 de septiembre

Prueba clasificatoria
12 de septiembre

Prueba selectiva
5 de octubre

Prueba final
3 de noviembre



Medalla de oro 2016
Artur Avila
Brasil



Informes
olimpiadas.matematicas@uls.edu.co
Tel.: 6344000, exts: 1281-2316, 6450301
f Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS



6^{as} Olimpiadas Regionales de Matemáticas
Primaria

Inscripciones:
Febrero 16-Abril 7
de 2017

INFORMES
olimpiadas@matematicas.uls.edu.co
Tel: 6344000 ext: 2316-2583-2581, 6450301
f Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS



Sophie Germain
Prueba Final: 1 de mayo al 1 de junio de 1817

Prueba Clasificatoria: Abril 21
Prueba Selectiva: Mayo 19
Prueba Final: Junio 3




8^{as} Olimpiadas Regionales de Matemáticas
Primaria

Inscripciones
del 11 de mayo al 16 de agosto

Prueba clasificatoria
28 de agosto

Prueba selectiva
20 de septiembre

Prueba final
octubre 26 y 27



El Último Teorema de Fermat:
Si n es un número natural mayor que 2, entonces no existen números naturales a , b y c tales que $a^n + b^n = c^n$.

"Aquí había un problema que yo, un niño de diez años, podía entender, y desde ese momento supe que nunca lo dejaría pasar. Tuve que resolverlo!"
— Andrew Wiles



Informes
olimpiadas.matematicas@uls.edu.co
Tel.: 6344000, exts: 1281-2316, 6450301
f Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS





IX OLIMPIADAS REGIONALES DE MATEMÁTICAS
PRIMARIA, 2020

Not this Way *This Way*

INSCRIPCIONES GRATIS

Inscripciones
Del 1 al 31 de agosto
<http://matematicas.uis.edu.co/olimpiadas>

Prueba clasificatoria
Semana del 7 al 11 de septiembre

Prueba selectiva
Viernes 25 de septiembre

Prueba final
Viernes 16 de octubre

Premiación y clausura
Domingo 18 de octubre

Informes
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000, exts: 1281, 2316; 6450301
f Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

Logos: ORM, EDUAT, SEA, IPRED, Universidad Industrial de Santander, VIGILADA MINEDUCACIÓN



10.ª OLIMPIADAS REGIONALES DE MATEMÁTICAS
Primaria 2021

Inscripciones gratis

Inscripciones
Del 8 de junio al 6 de agosto
<http://matematicas.uis.edu.co/olimpiadas>

Prueba clasificatoria
Semana del 23 al 27 de agosto

Prueba selectiva
Viernes 24 de septiembre

Prueba final
Viernes 22 de octubre

Premiación y clausura
Domingo 24 de octubre

Informes
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000, exts: 1281, 2316; 6450301
f Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

Logos: ORM, EDUAT, SEA, IPRED, Universidad Industrial de Santander, VIGILADA MINEDUCACIÓN



11.ª OLIMPIADAS REGIONALES DE MATEMÁTICAS
Primaria 2022

Inscripciones
del 13 de julio al 17 de agosto
<http://matematicas.uis.edu.co/olimpiadas>

Prueba clasificatoria
miércoles, 31 de agosto

Prueba selectiva
jueves, 15 de septiembre

Prueba final
1 y 2 de octubre

Maryna Viazovska
Ganadora de la medalla Fields 2022

Informes
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000, exts: 1281, 2316; 6450301
f Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

Logos: ORM, EDUAT, SEA, IPRED, Universidad Industrial de Santander, VIGILADA MINEDUCACIÓN

Índice general

1. 170 problemas resueltos	1
2. 50 retos	111

Capítulo 1

170 problemas resueltos

A continuación presentamos una selección de problemas que se han propuesto en a lo largo de las primeras diez versiones de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas para Primaria. Para cada uno de ellos se propone una solución, sin embargo, recomendamos a quien desee enfrentar nuevamente estos problemas, a descubrir y proponer, métodos alternativos de solución que se destaquen por su sencillez, ingenio y belleza matemática.

PROBLEMA 1.

En la suma que se muestra a continuación, las figuras $\triangle$ y $\bigcirc$ representan números dígitos. Halle el valor de $\triangle + \bigcirc$

- (a) 7
- (b) 8
- (c) 9
- (d) 13

$$\begin{array}{r} \triangle \quad \bigcirc \quad 7 \\ + \quad \quad 5 \quad \bigcirc \\ \hline 2 \quad 2 \quad 3 \end{array}$$

Solución: Como $\triangle$ y $\bigcirc$ son números dígitos, entonces $\bigcirc$ debe ser 6 y $\triangle$ debe ser 1. Así $\triangle + \bigcirc = 7$.

PROBLEMA 2.

A la capacitación de Olimpiadas Regionales de Matemáticas asistieron 343 estudiantes. Si hay 67 niños más que niñas, ¿cuántos niños asistieron a la capacitación?

(a) 67

(b) 138

(c) 205

(d) 276

Solución: Dado que asistieron 343 estudiantes a la capacitación y entre ellos hay 67 niños más que niñas, si restamos 67 al número total de asistentes obtenemos 276, donde la cantidad de niños y niñas es la misma. Así, dividiendo 276 entre 2 concluimos que a la capacitación asistieron 138 niñas y $138 + 67 = 205$ niños.

PROBLEMA 3.

Julián quiere comprar un helado de un solo sabor. La heladería ofrece tres sabores: vainilla, chocolate y fresa, y dos tipos de galleta: tradicional o integral. ¿De cuántas formas diferentes puede pedir Julián el helado?

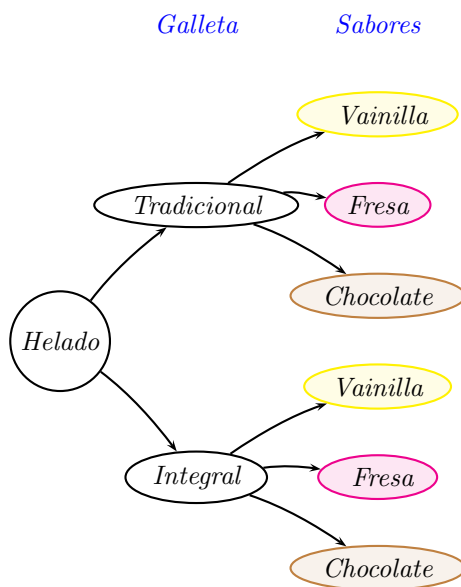
(a) 3

(b) 5

(c) 6

(d) 9

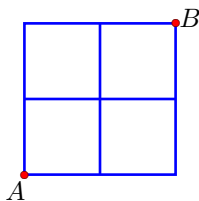
Solución: Considere el siguiente diagrama:



En el diagrama podemos ver que Julián puede pedir su helado de $2 \times 3 = 6$ formas diferentes.

PROBLEMA 4.

¿Cuántos caminos hay para ir del punto A al punto B a través de la siguiente cuadrícula, si cada camino se recorre solo con movimientos hacia la derecha ($\rightarrow$) y hacia arriba ($\uparrow$)?



(a) 4

(b) 5

(c) 6

(d) 7

Solución: Hay 6 caminos posibles:

1. ($\rightarrow$)($\rightarrow$)($\uparrow$)($\uparrow$)4. ($\uparrow$)($\rightarrow$)($\rightarrow$)($\uparrow$)2. ($\rightarrow$)($\uparrow$)($\rightarrow$)($\uparrow$)5. ($\uparrow$)($\rightarrow$)($\uparrow$)($\rightarrow$)3. ($\rightarrow$)($\uparrow$)($\uparrow$)($\rightarrow$)6. ($\uparrow$)($\uparrow$)($\rightarrow$)($\rightarrow$)
PROBLEMA 5.

Se dice que una cuadrícula es mágica cuando la suma de los números en cada fila, en cada columna y en cada diagonal es la misma. Por ejemplo la siguiente cuadrícula 3×3 es mágica:

4	3	8
9	5	1
2	7	6

De cierta cuadrícula mágica 5×5 sabemos que la suma de los números en una de sus diagonales es 59, y que los números de cuatro de sus casillas son: 12, 10, 8 y 19. ¿Cuánto es la suma de los números que están en las casillas restantes?

(a) 49

(b) 236

(c) 246

(d) 295

(e) No sé

Solución: La suma de los números en cada fila es 59, y hay 5 filas, entonces la suma de todos los números en el cuadrado es $59 \times 5 = 295$, a esto le restamos la suma de los números que se conocen, $12 + 10 + 8 + 19 = 49$, y así, la suma de los números en las casillas restantes es $295 - 49 = 246$.

PROBLEMA 6.

Jorge abrió su alcancía y contó 30 monedas de 1.000. ¿De cuántas formas distintas las puede agrupar en montones de igual cantidad de monedas?

- (a) 3 (b) 4 (c) 6 (d) 8

Solución: Si se tienen 30 monedas de 1000, la cantidad de formas distintas en las que se pueden agrupar las monedas (en montones iguales), coincide con la cantidad de divisores que tiene el número 30, los cuales son 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30; en total hay 8 formas de agrupar las monedas.

PROBLEMA 7.

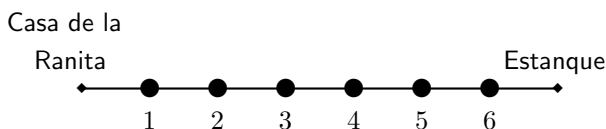
Camilo y Nathalia fueron a cine. Camilo tenía \$25.000 para comprar las dos boletas; si compraba las boletas generales le quedaban \$15.000 y si compraba las preferenciales le quedaban \$1.000. ¿Cuál es la diferencia entre el precio de una boleto preferencial y una general?

- (a) \$5.000 (b) \$7.000 (c) \$12.000 (d) \$14.000

Solución: Si Camilo compraba 2 boletas generales le quedaban \$15.000, es decir pagaba $\$25.000 - \$15.000 = \$10.000$. Luego cada boleto general le costaba \$5.000. Pero si compraba 2 boletas preferenciales le quedaban \$1.000, es decir pagaba $\$25.000 - \$1.000 = \$24.000$. Luego cada boleto preferencial le costaba \$12.000. Así la diferencia entre el precio de las boletas es de $\$12.000 - \$5.000 = \$7.000$.

PROBLEMA 8.

La siguiente figura muestra el camino de la casa de una ranita hasta el estanque. Cada punto enumerado representa una piedra en el camino. Si la ranita quiere ir desde su casa al estanque saltando solamente sobre dos piedras y sin devolverse, ¿de cuántas formas puede hacerlo?



- (a) 6 (b) 12 (c) 15 (d) 30

Solución 1: La ranita sabe que para contar las posibles formas de hacerlo puede proceder de la siguiente manera:

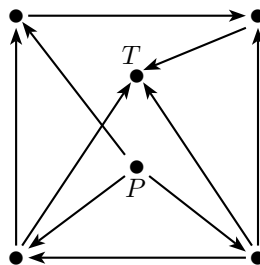
1. Si se dispone a saltar a la primera piedra, entonces tiene 5 posibilidades para aterrizar su segundo salto que corresponden a las piedras 2, 3, 4, 5 y 6.
2. Si su primer salto lo hace a la segunda piedra, entonces tiene 4 posibilidades para aterrizar su segundo salto que corresponden a las piedras 3, 4, 5 y 6. En este caso no puede saltar a la piedra 1 puesto que no se puede devolver.
3. Si su primer salto lo hace a la tercera piedra, entonces tiene 3 posibilidades para aterrizar su segundo salto que corresponden a las piedras 4, 5 y 6.
4. Si su primer salto lo hace a la cuarta piedra, entonces tiene 2 posibilidades para aterrizar su segundo salto que corresponden a las piedras 5 y 6.
5. Si su primer salto lo aterriza en la quinta piedra, entonces tiene 1 única posibilidad para aterrizar su segundo salto que corresponde a la piedra 6.

Sumando todas las posibilidades, la ranita tiene en total 15 formas distintas de llegar al estanque desde su casa, en las condiciones que establece el enunciado.

Solución 2: Este problema equivale a determinar cuántos números de dos cifras se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6; tales que la cifra de las unidades es mayor que la cifra de las decenas. Estos números son 15 en total, a saber: 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56.

PROBLEMA 9.

El siguiente mapa muestra los caminos por los cuales puede desplazarse una persona que está en el punto P para llegar a un tesoro escondido en el punto T . ¿De cuántas formas puede llegar la persona al tesoro, desplazándose como le indican las flechas en el mapa?



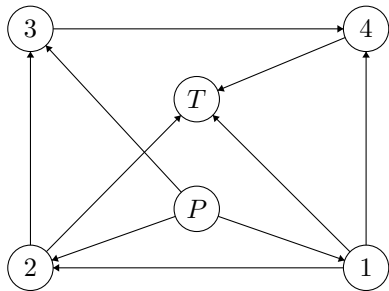
(a) 5

(b) 6

(c) 7

(d) 8

Solución: En la siguiente figura se han enumerado los puntos del mapa para facilitar el conteo de los caminos.



Observe que los caminos posibles para ir desde P hasta T siguiendo la dirección de las flechas son en total 7, a saber:

- $P \rightarrow 1 \rightarrow T$
- $P \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow T$
- $P \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow T$
- $P \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow T$
- $P \rightarrow 2 \rightarrow T$
- $P \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow T$
- $P \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow T$

PROBLEMA 10.

El centro de la flor que se muestra en la figura es un hexágono regular de perímetro 12 cm y sus pétalos son pentágonos regulares. ¿Cuál es el perímetro de la flor?

(a) 24 cm

(b) 48 cm

(c) 30 cm

(d) 60 cm

Solución: El centro de la flor es un hexágono regular de perímetro 12 cm, entonces cada uno de sus lados mide $12 \div 6 = 2$ cm. Además, los pétalos de la flor son pentágonos regulares cuyos lados miden igual que los del hexágono, es decir 2 cm. Note que el contorno de la flor está formado por $6 \times 4 = 24$ de estos lados; por lo tanto el perímetro de la flor es $24 \times 2 \text{ cm} = 48 \text{ cm}$.

PROBLEMA 11.

En una bolsa hay cuatro balotas, enumeradas del 1 al 4. ¿Cuántos números pares de tres cifras se pueden formar extrayendo tres balotas de la bolsa?

(a) 12

(b) 16

(c) 24

(d) 32

Solución: Como el número debe ser par, entonces debe terminar en 2 o 4, es decir los números deben ser de la forma $\textcircled{a}\textcircled{b}\textcircled{2}$ o $\textcircled{a}\textcircled{b}\textcircled{4}$.

Caso 1: Números de la forma $\textcircled{a}\textcircled{b}\textcircled{2}$. Como ya se extrajo el número $\textcircled{2}$ de la bolsa, para el dígito $\textcircled{a}$ hay 3 opciones y una vez se escoja el dígito $\textcircled{a}$, para $\textcircled{b}$ quedan 2 opciones. Usando el principio multiplicativo se establece que en total hay $3 \times 2 = 6$ números en este caso.

Caso 2: Números de la forma $\textcircled{a}\textcircled{b}\textcircled{4}$. Como ya se extrajo el número $\textcircled{4}$ de la bolsa, para $\textcircled{a}$ hay 3 opciones, luego para $\textcircled{b}$ quedan 2 opciones. De modo que en este caso también hay $3 \times 2 = 6$ números.

En conclusión, hay 12 números pares de tres cifras que se pueden formar extrayendo tres de las balotas que hay en la bolsa.

PROBLEMA 12.

¿De cuántas formas se pueden comprar dos panes diferentes en una panadería que vende 4 tipos de panes?

(a) 6

(b) 8

(c) 4

(d) 10

Solución: En la siguiente tabla se muestran las 6 posibles opciones de comprar dos panes diferentes en la panadería que ofrece 4 tipos de panes:

	Opción 1	Opción 2	Opción 3	Opción 4	Opción 5	Opción 6
Tipo 1	1	1	1			
Tipo 2	1			1	1	
Tipo 3		1		1		1
Tipo 4			1		1	1

PROBLEMA 13.

Samuel le pregunta a Paula cuál es su edad, y ella le dice que es alguno de los siguientes números: 14, 16, 17, o 19. Además le dice que su edad coincide con la suma de las edades de sus hermanos que son menores de 10 años y que la edad de uno de sus hermanos es par y la del otro es impar. ¿Cuál es la edad de Paula?

(a) 14

(b) 16

(c) 17

(d) 19

Solución: Teniendo en cuenta que la suma de un número par con uno impar siempre es impar, y que las edades de los dos hermanos de Paula son menores de 10 años, entonces la edad de Paula debe ser un número impar, menor o igual que 18. De los números que da Paula a Samuel, el único que cumple estas condiciones es el 17, así que esta debe ser su edad.

PROBLEMA 14.

¿Cuántas sucesiones de 4 sonidos diferentes se pueden tocar con un piano al que solo le funcionan 6 teclas, si se toca una tecla a la vez?

(a) 24

(b) 1296

(c) 360

(d) 256

Solución: Dado que las sucesiones deben ser de 4 sonidos diferentes, entonces las teclas no se pueden repetir y el orden al tocarlas importa. Así, para el primer sonido tenemos 6 opciones, para el segundo sonido tenemos 5 opciones, pues la tecla que se tocó primero ya no se puede usar; del mismo modo, para el tercer sonido tenemos 4 opciones y para el cuarto sonido tenemos 3 opciones. Así, por el principio multiplicativo tenemos $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$, sucesiones de cuatro sonidos diferentes.

$$\underbrace{6 \text{ opc.}}_{\text{sonido } (1)} \times \underbrace{5 \text{ opc.}}_{\text{sonido } (2)} \times \underbrace{4 \text{ opc.}}_{\text{sonido } (3)} \times \underbrace{3 \text{ opc.}}_{\text{sonido } (4)} = \underbrace{360}_{\text{sucesiones}}$$

PROBLEMA 15.

Camilo tiene un vaso vacío que cuando lo llena completamente de gaseosa su peso total es de 450 gr; pero si lo llena solo hasta la mitad todo pesa 250 gr. ¿Cuánto pesa el vaso vacío?

(a) 150 gr

(b) 100 gr

(c) 50 gr

(d) 200 gr

(e) 250 gr

Solución: El vaso completamente lleno de gaseosa pesa 450 gr y si se llena hasta la mitad pesa 250 gr. Luego el peso de la otra mitad de líquido es 200 gr, lo que implica que el peso del solo líquido cuando el vaso está completamente lleno es 400 gr, de donde podemos deducir que el peso del vaso vacío es 50 gr.

PROBLEMA 16.

En la siguiente sucesión el número 3 es el término inicial, en adelante se obtienen los demás términos sumando 2 y 5 de forma alternada.



De los siguientes números, ¿cuál aparece más adelante en esta sucesión?

(a) 49

(b) 52

(c) 46

(d) 36

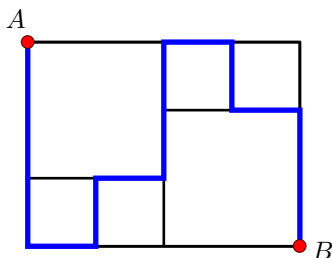
Solución: Teniendo en cuenta la regla de formación de la sucesión, podemos seguir construyéndola de la siguiente manera:

$$\dots 26 \xrightarrow{+5} 31 \xrightarrow{+2} 33 \xrightarrow{+5} 38 \xrightarrow{+2} 40 \xrightarrow{+5} 45 \xrightarrow{+2} 47 \xrightarrow{+5} \underline{52} \dots$$

Por lo tanto el 52, es el número que aparece en la sucesión. Observe que la sucesión es creciente y los números 49, 46, y 36 no aparecen antes del número 52, por ende no aparecerán en la lista.

PROBLEMA 17.

La siguiente figura está construida por cuadrados. Una hormiga se mueve desde el punto A hasta el punto B , siguiendo el camino marcado. Si el lado del cuadrado más grande mide 20 cm, ¿cuántos centímetros caminó la hormiga?



Solución: La figura está formada por cuadrados y cada lado de los cuadrados más grandes mide 20 cm, entonces se puede deducir que el lado de los cuadrados pequeños mide 10 cm. Ahora bien, la hormiga recorre 3 veces el lado del cuadrado grande y 7 veces el lado del cuadrado pequeño, de ahí que la hormiga recorrió $3 \times 20 + 7 \times 10 = 130$ cm en total.

PROBLEMA 18.

Andrea lleva cada día la misma cantidad de dinero al colegio para comprar su lonchera. Un día compró 3 paquetes de galletas y le sobraron \$200, otro día compró 2 paquetes de papas y le sobraron \$300, al día siguiente compró 5 caramelos y le sobraron \$200. Si un paquete de papas vale \$700, ¿cuánto vale un paquete de galletas y un caramelo?

Solución: Dado que 1 paquete de papas cuesta \$700 y el día que Andrea compró 2 paquetes de papas le sobraron \$300, podemos deducir que el dinero que lleva Andrea cada día al colegio es:

$$2 \times \$700 + \$300 = \$1.700.$$

De modo que, el día que compró las 3 galletas, Andrea gastó:

$$\$1.700 - \$200 = \$1.500,$$

luego cada galleta cuesta \$500; y el día que compró los 5 caramelos ella gastó

$$\$1.700 - \$200 = \$1.500.$$

luego cada caramelo cuesta \$300. Por tanto un paquete de galletas y un caramelo cuesta \$800.

PROBLEMA 19.

Hay cuatro perros en un patio, cada uno de ellos con diferente número de pulgas. El que menos tiene pulgas, tiene 32 y cada uno de los demás tiene el doble de pulgas que otro de ellos, ¿cuántas pulgas reúnen entre los cuatro perros?

(a) 512

(b) 480

(c) 256

(d) 128

Solución: Se sabe que el perro que tiene menos pulgas tiene 32. Por la condición de que cada perro tiene el doble de pulgas que otro; podemos garantizar que hay un segundo perro con 64 pulgas, que hay otro tercer perro con 128 y un cuarto perro con 256. Así, entre los cuatro perros reúnen un total de 480 pulgas.

PROBLEMA 20.

En una caja hay tres maras amarillas, dos blancas y una azul. Si Sebastián extrae de la caja tres maras y ninguna de ellas es azul, podemos asegurar de las tres maras que sacó Sebastián que

- (a) todas son del mismo color.
- (b) una es amarilla y dos son blancas.
- (c) una es blanca y dos son amarillas.
- (d) por lo menos una es amarilla.

Solución: Las posibles formas de sacar tres maras de la caja, excluyendo la mara azul, son las siguientes:

Configuración ①: amarilla - amarilla - amarilla.

Configuración ②: amarilla - amarilla - blanca.

Configuración ③: amarilla - blanca - blanca.

Las configuraciones ② y ③ no permiten asegurar que todas las maras son del mismo color y configuración ① no permite asegurar que una es amarilla y dos blancas, o que una es blanca y dos son amarillas. Sin embargo, en cualquiera de las tres configuraciones, es posible asegurar que hay por lo menos una mara amarilla.

PROBLEMA 21.

Si dos empanadas y dos jugos cuestan 8.600 pesos y dos jugos y una empanada cuestan 6.300 pesos, ¿cuánto cuesta una empanada?

Solución: Si dos empanadas y dos jugos cuestan 8.600 y una empanada y dos jugos cuestan 6.300, entonces la diferencia de precios corresponde al precio de una empanada. Por lo tanto, una empanada cuesta 2.300 pesos.

PROBLEMA 22.

La coneja Lola puede agrupar a sus hijos de 12 en 12 sin que sobre alguno y de 10 en 10, pero sobran 4. Si todos sus hijos duermen en 10 madrigueras, cada una con capacidad máxima para 10 conejitos, y 3 madrigueras no son suficientes para que todos duerman, ¿cuántos hijos tiene la coneja Lola?

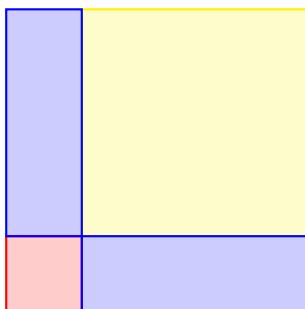
Solución: Dado que la coneja Lola puede agrupar a sus hijos de 12 en 12 sin que sobre alguno, esto implica que la cantidad de sus hijos es múltiplo de 12, es decir, la cantidad de conejitos puede ser:

12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, ...

Ahora, al agruparlos de 10 en 10 sobran 4, entonces la cantidad conejitos es un múltiplo de 10 más 4, esto es, termina en 4. Además, como todos sus hijos duermen en 10 madrigueras, cada una con capacidad máxima para 10 conejitos, se puede decir que como máximo hay $10 \times 10 = 100$ conejitos. Así que la cantidad de hijos de la coneja Lola puede ser 24 u 84; pero 3 madrigueras no son suficientes para que todos duerman, por lo que debe haber más de $3 \times 10 = 30$ conejitos. En conclusión, la coneja Lola tiene 84 hijos.

PROBLEMA 23.

La siguiente figura ha sido construida con dos fichas rectangulares iguales, cada una con perímetro 10 cm, y dos fichas cuadradas de diferente tamaño. ¿Cuál es el perímetro de toda la figura?

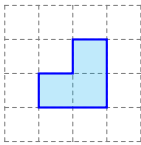


Solución: Los dos cuadrados comparten lados con los rectángulos que son iguales. Note que el contorno de la figura total está conformado por: 4 lados iguales al lado más largo de uno de los rectángulos y 4 lados iguales al lado más corto de

uno de los rectángulos. Luego, el perímetro de la figura es el doble del perímetro de un rectángulo, esto es $2 \times 10\text{ cm} = 20\text{ cm}$.

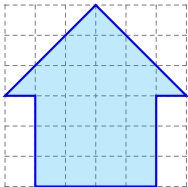
PROBLEMA 24.

Diego juega a formar figuras con fichas como las que se muestran a continuación

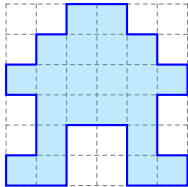


Si las fichas pueden rotarse pero no sobreponerse ni partirse, ¿cuál de las siguientes figuras puede formar Diego con sus fichas?

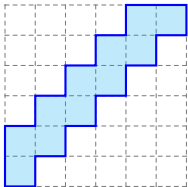
(a)



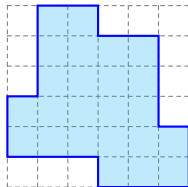
(c)



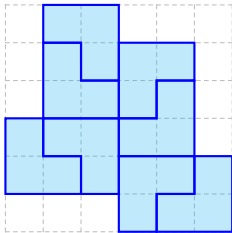
(b)



(d)



Solución: De las figuras que se muestran en las opciones, la única que puede formar Diego con sus fichas es la de la opción (d), por ejemplo, así:



Note que la opción (a) se descarta, pues en las esquinas del techo de la casita hay medios cuadraditos y las fichas no se pueden partir. Las figuras de las opciones (b) y (c) también se descartan, pues ellas cubren un área de 11 y 22 cuadraditos de la cuadrícula, respectivamente; pero cada una de las fichas cubre exactamente el área de 3 cuadraditos, así que todas las figuras que se formen con estas fichas deben cubrir un área equivalente a la que cubre un múltiplo de 3 cuadraditos de la cuadrícula.

PROBLEMA 25.

¿Cuál es la suma de las cifras del mayor número natural de 3 cifras diferentes, tal que la suma de sus cifras es impar, pero el producto es un número par?

(a) 23

(b) 24

(c) 25

(d) 27

Solución: Como el número es de tres cifras, la suma de ellas es impar y el producto par, entonces dos de las cifras deben ser pares y una impar. Para conseguir el mayor número con estas condiciones, seleccionamos el mayor dígito posible para la cifra de las centenas, es decir el 9, en seguida ubicamos el 8 en la cifra de las decenas, y finalmente, el 6 en la cifra de las unidades, formando así el número 986, cuya suma de sus cifras es $9 + 8 + 6 = 23$.

PROBLEMA 26.

La maestra de matemáticas escribió tres números naturales consecutivos en el tablero. Lucía sumó estos tres números y Samuel, los multiplicó. Si el resultado de Lucía fue 24, ¿cuál fue el resultado de Samuel?

Solución: Los tres números naturales que escribió la maestra son consecutivos, es decir “están juntos”, y además la suma de ellos es 24. Entonces, haciendo $24 \div 3 = 8$, vemos que los números son: 7, 8, y 9. Por lo tanto, el resultado que obtiene Samuel es $7 \times 8 \times 9 = 504$.

PROBLEMA 27.

Los cinco hijos de doña Paulina tienen diferentes edades. ¿De cuántas maneras se pueden formar tres de sus hijos en una fila de menor a mayor?

Solución: Supongamos que los hijos de doña Paulina son (1), (2), (3), (4), (5) en el respectivo orden de menor a mayor. Entonces las posibles maneras de formar a tres de ellos en una fila, de menor a mayor, son 10 en total, a saber:

- (1) - (2) - (3),

■ (1) - (2) - (4),

■ (1) - (2) - (5),

■ (1) - (3) - (4),
- (1) - (3) - (5),

■ (1) - (4) - (5),

■ (2) - (3) - (4),

■ (2) - (3) - (5),
- (2) - (4) - (5),

■ (3) - (4) - (5).

PROBLEMA 28.

Juan, María, Isabela y José están jugando a poner fichas sobre un tablero que tiene 64 casillas. En su turno, cada uno debe poner 6 fichas, una en cada casilla. Si gana el que coloque la última ficha que llena el tablero e Isabella quiere ganar el juego, ¿de qué posición debe empezar el juego?

- (a) Primera
- (b) Segunda
- (c) Tercera
- (d) Cuarta

Solución: Teniendo en cuenta que

$$64 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 4$$

$$64 = (6 + 6 + 6 + 6) + (6 + 6 + 6 + 6) + 6 + 6 + 4,$$

donde cada paréntesis de la última igualdad representa una ronda completa de los cuatro jugadores, podemos ver que después de dos rondas completas, el jugador uno y el jugador dos ponen todas sus fichas, pero el jugador 3 solo alcanza a poner 4 fichas, por lo que este colocó la última ficha y sería el ganador. Por lo tanto, Isabella debería iniciar en la tercera posición para ganar el juego.

PROBLEMA 29.

La rifa de la escuela tiene números entre 100 y 999. Si la mamá de Felipe, quiere comprar un número que tenga todas sus cifras impares, diferentes y que una de ellas sea 5, ¿cuántos números tienen estas condiciones?

- (a) 12
- (b) 25
- (c) 45
- (d) 36

Solución 1: Los dígitos impares son {1, 3, 5, 7, 9}. Dado que el número debe estar entre 100 y 999, entonces este tiene tres cifras. Además una de las cifras debe ser el 5, luego tenemos los siguientes casos:

5

Si la primera cifra es el 5, entonces la segunda solo se puede escoger de 4 formas: 1, 3, 7, 9; ya que no se pueden repetir cifras, y por cada una de estas cuatro formas, la tercera cifra se podrá escoger de 3 formas, pues ya se usaron dos dígitos impares en las cifras anteriores. Luego para este

caso se tienen $4 \times 3 = 12$ posibles números que cumplen las condiciones del enunciado.

5 Si la segunda cifra es el 5, por analogía al caso anterior, se tienen 12 números posibles.

5 Si la tercera cifra es el 5, también se tienen 12 números posibles.

De modo que el total de números que cumplen las condiciones es $12 \times 3 = 36$.

Solución 2: La cantidad de números de tres cifras, todas impares y diferentes entre sí, es $5 \times 4 \times 3 = 60$. De estos, los que no tienen al 5 entre sus cifras son $4 \times 3 \times 2 = 24$. Por lo tanto, la cantidad de números entre 100 y 999 que tienen todas sus cifras impares, diferentes, y una de ellas es el 5, está dada por $60 - 24 = 36$.

PROBLEMA 30.

Sobre el segmento $\overline{AB}$ se marcan los puntos C , D y E , en ese orden, de manera que:

- (•) la longitud del segmento $\overline{AC}$ es la cuarta parte de la longitud del segmento $\overline{AB}$,
- (•) la longitud del segmento $\overline{AD}$ es la tercera parte de la longitud del segmento $\overline{AB}$,
- (•) la longitud del segmento $\overline{CE}$ es la mitad de la longitud del segmento $\overline{AB}$.



Si la longitud del segmento $\overline{AB}$ es 12 cm, ¿cuál es la longitud del segmento $\overline{DE}$?

(a) 5 cm

(b) 6 cm

(c) 4 cm

(d) 9 cm

Solución 1: Considere el siguiente bosquejo:



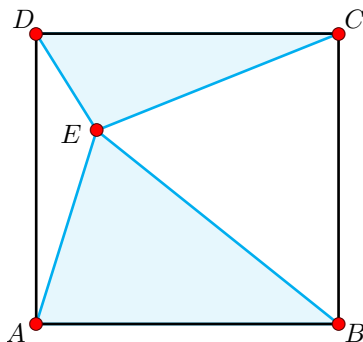
Según el enunciado $AC = \frac{1}{4}AB = 3$ cm, $AD = \frac{1}{3}AB = 4$ cm y $CE = \frac{1}{2}AB = 6$ cm. Además, en el gráfico se observa que $CD = AD - AC = 4 - 3 = 1$ cm,

luego $DE = CE - CD = 6 - 1 = 5 \text{ cm}$.

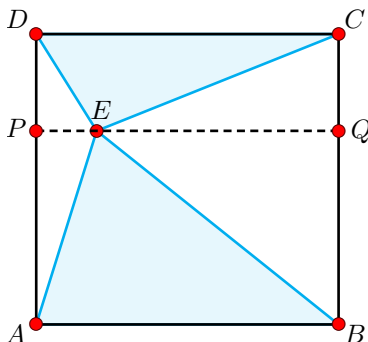
Solución 2: $DE = AE - AD = (AC + CE) - AD = (3 + 6) - 4 = 5 \text{ cm}$.

PROBLEMA 31.

El área del cuadrado $ABCD$ es 30 cm^2 . La altura del triángulo ABE respecto a $\overline{AB}$ es el doble de la altura del triángulo ECD respecto a $\overline{CD}$. ¿Cuánto es el área del triángulo CDE en centímetros cuadrados?



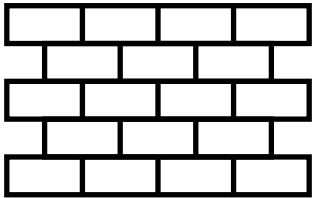
Solución: Consideremos el segmento $\overline{PQ}$ paralelo a $\overline{AB}$ que pasa por E , como se muestra a continuación:



El cuadrado $ABCD$ queda dividido en dos rectángulos, $CDPQ$ de área 10 cm^2 y $ABQP$ de área 20 cm^2 , estas áreas las conocemos pues el área de $ABCD$ es 30 cm^2 y el área de $ABQP$ es el doble del área de $CDPQ$ ya que la altura de ABE respecto a $\overline{AB}$ es el doble de la altura de ECD respecto a $\overline{CD}$. Finalmente, el área de ECD es la mitad del área de $CDPQ$ pues la altura de ECD respecto a $\overline{CD}$ es CQ , por lo tanto el área de ECD es 5 cm^2 .

PROBLEMA 32.

Hermes debe construir un muro con 18 bloques como se muestra a continuación:

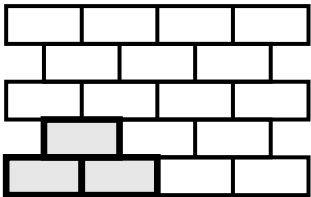


Para ello dispone de bloques de tres colores: amarillo, azul y rojo. Los bloques amarillos cuestan \$900, los azules \$1000 y los rojos \$800. Si desea que en el muro cada bloque tenga color diferente al de sus bloques vecinos,

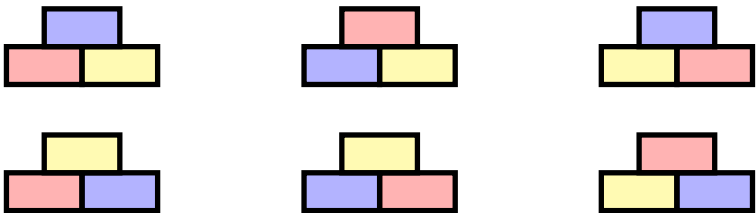
- (a) ¿de cuántas formas puede elegir los colores de cada bloque en el muro?
- (b) ¿cuál es la mínima cantidad de dinero que necesita Hermes para comprar los bloques necesarios para la construcción del muro?

Solución:

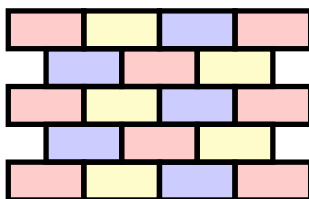
- (a) Observe que, basta elegir el color de los ladrillos resaltados a continuación, pues una vez se eligen los colores de estos, inmediatamente quedan determinados los colores de los demás.



Ahora bien, teniendo solo los colores: amarillo, azul y rojo, los colores de los tres ladrillos resaltados se pueden elegir de 6 formas, así:



(b) Tomando una de las opciones anteriores para pintar todo el muro tenemos:



De este modo vemos que siempre quedarán 8 ladrillos de un color y 5 de cada uno de los otros dos colores. Pero sabemos que los ladrillos rojos son los más económicos, por o tanto, la mínima cantidad de dinero que necesita Hermes para comprar los bloques del muro es

$$800 \times 8 + 5 \times 1000 + 5 \times 900 = \$15,900.$$

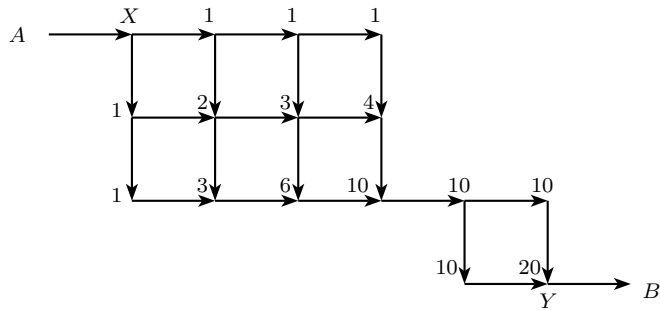
PROBLEMA 33. RELEVOS.

Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado II depende de la respuesta del enunciado I y el enunciado III, de la respuesta del enunciado II.

- I. En la familia de Javier todos tienen dos hijos, excepto sus primos. ¿Cuántos nietos tiene el abuelo de Javier?
- II. La suma de las edades de los nietos del abuelo de Javier es 36. Si la edad de cada nieto es un número primo distinto, menor que 17, ¿cuáles son las edades de los nietos del abuelo de Javier?
- III. El abuelo de Javier tiene una huerta cuadrada, cuyo perímetro (en metros) coincide con la diferencia de las edades de sus nietos mayor y menor. ¿Cuál es el área de la huerta?

Solución:

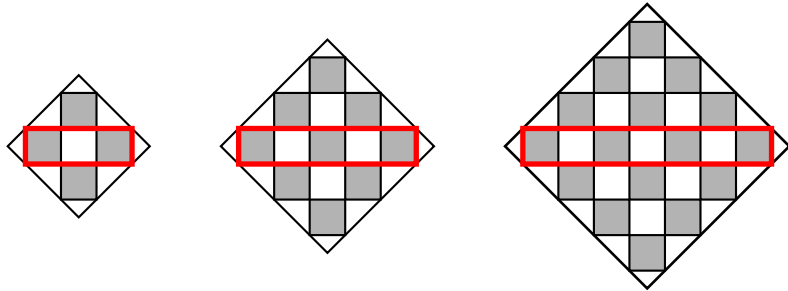
- I. El abuelo de Javier tiene dos hijos, y cada uno de ellos también tiene dos hijos, por lo tanto el abuelo de Javier tiene 4 nietos.
- II. Descomponiendo a 36 como suma de 4 números primos se tiene: $36 = 5 + 7 + 11 + 13$, luego las edades de los nietos son: 5, 7, 11 y 13.
- III. El perímetro de la huerta es $13 - 5 = 8$ m. Dado que la huerta es cuadrada entonces cada lado mide $\frac{8}{4} = 2$ cm. Así que el área es $2 \times 2 = 4$ m².



Claramente para ir desde A hasta X hay una sola forma de hacerlo. Ahora, observe que las formas en que la hormiga puede llegar a un vértice diferente de X , es la suma de las formas en que puede llegar a los vértices inmediatamente anteriores (como se ilustra en la figura). Para finalizar, también es claro que para ir desde Y a B hay una sola manera de hacerlo. Así la hormiga tiene 20 formas distintas para ir desde A hasta B .

PROBLEMA 36.

El mosaico para un piso se construye con baldosas blancas y negras siguiendo el patrón de la figura. ¿Cuál es el total de baldosas negras que se necesitan para construir un piso cuadrado con línea principal de 13 baldosas?

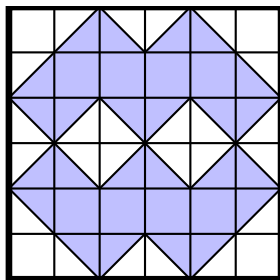


Nota: Para cada mosaico, la línea principal es la que se encuentra resaltada.

Solución: Observe que el número de baldosas de la diagonal principal en cada mosaico va aumentando 2 con respecto al anterior. Como el primer mosaico tiene 3 baldosas en su diagonal principal, entonces el sexto mosaico tendrá 13. Note además que el número de baldosas negras en el primer mosaico es 2×2 , en el segundo mosaico es 3×3 y en el tercer mosaico es 4×4 , siguiendo este patrón el sexto mosaico tendrá $7 \times 7 = 49$ baldosas negras.

PROBLEMA 37.

El pasillo de una casa se ha decorado con 20 baldosas cuadradas como la que se muestra en la figura.



Sabiendo que cada uno de los lados de la baldosa mide 12 cm , ¿cuánto mide el área sombreada total del pasillo?

Solución: Observe que cada cuadradito de la baldosa tiene de área 4 cm^2 y que la figura sombreada en la baldosa ocupa 20 cuadraditos, es decir, el área sombreada de cada baldosa es de 80 cm^2 . Por lo tanto el área sombreada total del pasillo de la casa es $80\text{ cm}^2 \times 20 = 1.600\text{ cm}^2$.

PROBLEMA 38.

La profesora de matemáticas le pide a Carlitos representar en el ábaco el siguiente número romano:

CDXXXV

- (a) ¿Cuántos aros necesita Carlitos para representar este número en el ábaco?
- (b) ¿Cuál es el residuo de dividir este número entre 3?

Solución: Note que

$$\underbrace{CD}_{400} \underbrace{XXX}_{30} \underbrace{V}_5$$

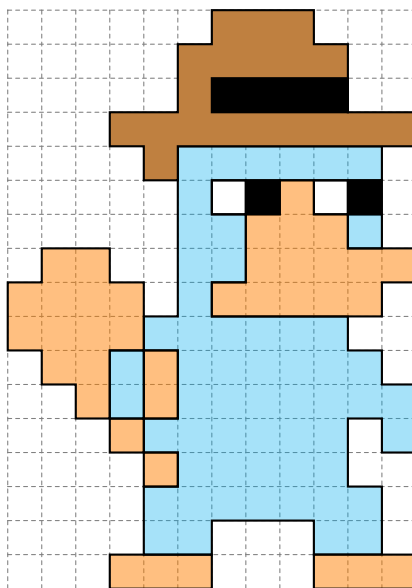
Como el sistema de numeración romano es aditivo, entonces el número romano $CDXXXV$ corresponde a 435 en números arábigos. De modo que para su representación en el ábaco son necesarios 5 aros para las unidades, 3 aros para

las decenas y 4 aros para las centenas; en total 12 aros. Además, el número 435 es múltiplo de 3 ya que la suma de sus cifras es 12 que es un múltiplo de 3. Por tanto, deja residuo 0 al dividirse por 3.

PROBLEMA 39. RELEVOS.

Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado II depende de la respuesta del enunciado I y el enunciado III, de la respuesta del enunciado II.

- I. Emiliano tiene cuatro afiches de sus caricaturas favoritas para decorar su habitación. Si su habitación tiene cuatro paredes y quiere pegar un afiche en el centro de cada pared, de cuántas formas puede Camilo decorar su habitación?
- II. La siguiente figura muestra el afiche favorito de Emiliano, se trata de Perry el ornitorrinco dibujado sobre una cuadrícula. Si la longitud del lado más corto del afiche, en centímetros, coincide con el número de la respuesta del ítem anterior, ¿cuál es el perímetro de la silueta de Perry?



- III. La edad de Emiliano coincide con la suma de las cifras del número de la respuesta del ítem anterior, ¿cuál es la edad de Emiliano?

Solución:

- I. Para determinar el número de formas diferentes para decorar usaremos el principio de multiplicidad. Dado que Emiliano tiene 4 afiches, se tiene que

$$\underbrace{4 \text{ opciones}}_{\text{Pared 1}} \times \underbrace{3 \text{ opciones}}_{\text{Pared 2}} \times \underbrace{2 \text{ opciones}}_{\text{Pared 3}} \times \underbrace{1 \text{ opción}}_{\text{Pared 4}}.$$

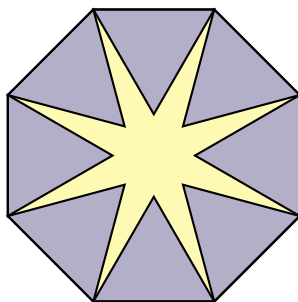
Luego el número de formas en que puede decorar su habitación es $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

- II. La longitud del lado más corto del afiche es 24 cm. Como este lado está formado a su vez por 12 lados de cuadrados de la cuadrícula, se deduce que la longitud del lado de cada cuadrado de la cuadrícula es 2 cm. Ahora, el contorno de Perry está formado por 84 de estos lados, por tanto el perímetro de la figura de Perry es $2 \times 84 = 168$ cm.

- III. Finalmente, la edad de Emiliano es $1 + 6 + 8 = 15$ años.

PROBLEMA 40.

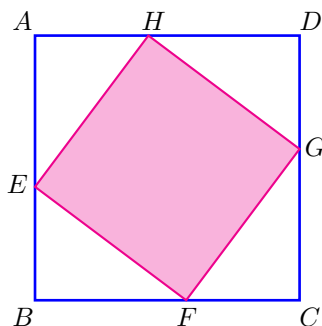
Sobre cada lado de un octágono regular se construyen triángulos equiláteros sombreados, como se muestra en la figura. Si el perímetro del octágono es 16 cm, ¿cuál es el perímetro de la estrella que se forma en su interior?



Solución: Dado que los triángulos sombreados son equiláteros y cada uno de sus lados miden lo mismo que los del octágono regular, se puede ver que el perímetro de la estrella que se forma en el interior del octágono es dos veces el perímetro del octágono, esto es, $2 \times 16 = 32$ cm.

PROBLEMA 41.

Halle el perímetro del cuadrilátero $EHGF$, sabiendo que $ABCD$ es un cuadrado de lado 7 cm , y que los segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ y $\overline{DH}$ miden 4 cm cada uno.



Solución: Dado que el lado del cuadrado $ABCD$ mide 7 cm , entonces su área es 49 cm^2 . Además, $AE = DH = 4\text{ cm}$, luego $AH = 3\text{ cm}$ y así el área del triángulo EAH es

$$\frac{3\text{ cm} \times 4\text{ cm}}{2} = 6\text{ cm}^2.$$

Note que cada uno de los triángulos EAH , HDG , GCF y FBE tiene la misma área, por lo tanto el área del cuadrado sombreado es

$$49\text{ cm}^2 - (4 \times 6\text{ cm}^2) = 25\text{ cm}^2.$$

De modo que cada uno de los lados del cuadrado $EHGF$ mide 5 cm y por lo tanto su perímetro es $4 \times 5\text{ cm} = 20\text{ cm}$.

PROBLEMA 42.

Llamaremos manos a las 8 extremidades de un pulpo. ¿De cuántas formas se pueden dar las manos dos pulpos, si entre ellos no quedan manos libres y demás un pulpo no se da la mano a sí mismo?

Solución: Dejando fijas las manos del pulpo A , contaremos de cuántas formas podemos unir las con las del pulpo B . Inicialmente, la mano ① del pulpo A , la podemos unir con cualquiera de las 8 manos del pulpo B ; luego, la mano ② del pulpo A , solo se puede unir con 7 de las manos del pulpo B , pues ya se ocupó una mano del pulpo B con la primera mano del pulpo A . Análogamente, tenemos que la mano ③ del pulpo A se puede unir a 6 de las manos del pulpo B , y así sucesivamente hasta que la mano ⑧ del pulpo A se puede unir a solo 1 de las manos del pulpo B , precisamente, la última que queda libre.

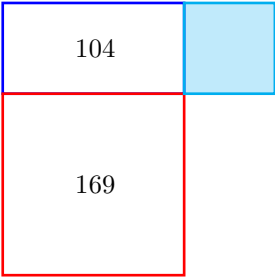
Manos del pulpo A	Opciones
①	8
②	7
③	6
④	5
⑤	4
⑥	3
⑦	2
⑧	1

Con lo anterior, por el principio multiplicativo, tenemos que en total los dos pulpos se pueden dar las manos de $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40.320$ formas diferentes.

PROBLEMA 43. RELEVOS.

Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado **II** depende de la respuesta del enunciado **I** y el enunciado **III**, de la respuesta del enunciado **II**.

I. La siguiente figura está formada por tres rectángulos, dos de ellos cuadrados, cuyas dimensiones, en centímetros, son números naturales. Si el número que aparece en dos de las figuras representa el área, en centímetros cuadrados, de cada una de ellas, ¿cuál es el área del cuadrado sombreado?



II. La suma de dos números primos es igual a una cuarta parte del número encontrado en el ítem anterior, y su diferencia excede en 1 a uno de ellos. ¿Cuáles son estos dos números?

III. La cantidad promedio, en años, que dura una botella de plástico en descomponerse, coincide con diez veces el producto de la pareja de números encontrada en el ítem **II**. Siendo así, ¿en qué año se espera que se descompongan las botellas de plástico fabricadas en el 2019?

Solución:

- I. Note que $169 = 13 \times 13$ y $104 = 13 \times 8$, luego el lado del cuadrado sombreado mide 8 cm y por lo tanto su área es 64 cm^2 .
- II. La cuarta parte de 64 es 16. Además, las únicas parejas de primos que suman 16 son: $\{3, 13\}$ y $\{5, 11\}$, pero como la diferencia entre ellos debe exceder en 1 a uno de ellos, entonces la única pareja de primos que cumple todas las condiciones es 5 y 11.
- III. El producto de la pareja de números encontrada en el ítem anterior es $5 \times 11 = 55$, luego la cantidad promedio en años que dura una botella plástica en descomponerse es $10 \times 55 = 550$. Así, se espera que las botellas de plástico fabricadas en el 2019 se descompongan en el año $2019 + 550 = 2569$ ¡muy grave!

PROBLEMA 44.

Los gemelos Tweedledum y Tweedledee fueron al cine y pidieron crispetas para disfrutar mientras veían una película. La mitad de las crispetas eran de caramelo y la otra mitad de mantequilla. Cuando aun quedaba la mitad de crispetas de caramelo, notaron que se habían comido $\frac{2}{5}$ del total de crispetas. ¿Qué fracción del total de crispetas que quedan son de mantequilla?

Solución 1: Al inicio, $\frac{1}{2}$ del total de crispetas eran de caramelo y $\frac{1}{2}$ de mantequilla. Cuando quedaba $\frac{1}{2}$ de las crispetas de caramelo, es decir cuando $\frac{1}{4}$ del total eran de caramelo, se habían comido $\frac{2}{5}$ del total de crispetas, por lo tanto quedaban $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ del total de crispetas, pero $\frac{1}{4}$ eran de caramelo, luego $\frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{7}{20}$ del total aun eran de mantequilla. Finalmente, si $\frac{3}{5}$ son todas las que quedan y $\frac{7}{20}$ aun son de mantequilla, la fracción que representan las que quedan de mantequilla del total de crispetas que quedan es $\frac{7}{20} \div \frac{3}{5} = \frac{7}{12}$.

Solución 2: Suponga que al inicio hay 100 crispetas, entonces 50 son de caramelo y 50 son de mantequilla. Cuando quedaban 25 crispetas de caramelo, notaron que se habían comido $\frac{2}{5}$ del total, es decir 40 crispetas, por lo tanto quedaban 60 crispetas y de estas, 25 eran de caramelo, luego $60 - 25 = 35$ eran de mantequilla; es decir, $\frac{35}{60} = \frac{7}{12}$ del total que quedan, son de mantequilla.

PROBLEMA 45.

En un acuario hay dos grupos de animales: peces y aves marinas. Para evitar el contagio del COVID-19, los administradores del acuario determinaron que por día, cada persona solo puede ir a ver a uno de los dos grupos de animales. Para ello ofrecen 4 tipos de boleto: para adultos que van a ver a los peces, para niños que van a ver a los peces, para adultos que van a ver a las aves y para niños que van a ver a las aves. Si se sabe que ayer visitaron el acuario 2020 adultos, 3000 personas vieron a los peces y que de las 1600 personas que vieron a las aves, exactamente 1000 eran niños, ¿cuántos niños vieron los peces?

Solución 1: Dado que de las 1600 personas que vieron las aves 1000 eran niños, entonces 600 eran adultos, luego de los 2020 adultos visitantes solo 1420 vieron los peces, esto nos deja que $3000 - 1420 = 1580$ niños vieron los peces.

Solución 2: Considere el siguiente diagrama de Carroll, en el que los datos en negro son dados en el enunciado, los datos en azul y rojo se deducen, siendo el rojo la respuesta al problema.

	Peces	Aves marinas	Total
Adultos	1420	600	2020
Niños	1580	1000	2580
Total	3000	1600	4600

PROBLEMA 46.

La Reina de Corazones compró una caja de dulces con los siguientes sabores: limón, fresa, coco, piña, cereza, mora y sandía. En la caja vienen dulces de un sabor, de dos sabores y hasta de tres sabores combinados. Sabiendo que de todos los sabores y combinaciones viene la misma cantidad, ¿qué fracción del total de dulces de la caja no tiene sabor a coco, ni a piña combinado con mora?

Solución: Dado que en la caja viene la misma cantidad de dulces de cada presentación, asumiremos que viene uno de cada uno para hacer nuestro análisis. Primero contemos las posibles combinaciones de sabores que trae la caja. De un solo sabor hay 7 opciones, de solo dos sabores hay 21 opciones y de tres sabores hay 35 opciones. En total hay $7 + 21 + 35 = 63$ versiones diferentes de dulces. Ahora contemos las opciones que tienen sabor a coco, o piña combinado con

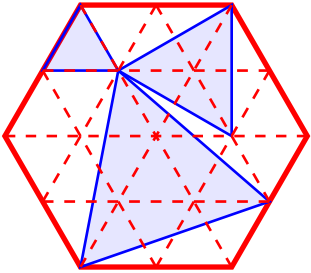
mora. Estas son: de un sabor solo hay 1 opción (coco), de las opciones de dos sabores, 6 tienen sabor a coco y 1 piña con mora, y de las opciones con tres sabores, $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ tienen coco y 5 tienen piña combinado con mora, pero de estas últimas, 1 tiene coco y ya la habíamos contado, luego en total $1 + 6 + 1 + 15 + 4 = 27$ opciones tienen coco, o piña combinado con mora.

	coco	piña con mora (sin coco)
1 sabor	1	0
2 sabores	6	1
3 sabores	15	4

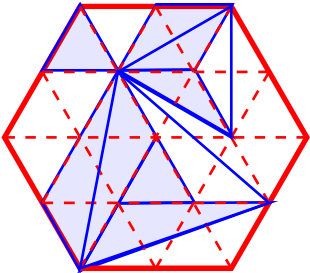
Luego $63 - 27 = 36$ opciones no tienen coco o piña combinado con mora. Finalmente, dado que de todas las opciones viene la misma cantidad de dulces en la caja, entonces la fracción del total de dulces de la caja que no tiene sabor a coco, ni a piña combinado con mora es $\frac{36}{63} = \frac{4}{7}$.

PROBLEMA 47.

En la siguiente figura se muestra un hexágono regular de color rojo, dividido en 24 triángulos equiláteros de igual tamaño. Si la región sombreada en azul tiene 33 cm^2 de área, ¿cuál es el área total, en centímetros cuadrados, del hexágono rojo?



Solución: Completando triangulitos como se muestra en la siguiente figura, tenemos que la región azul equivale a 11 triangulitos,



Luego el área de cada uno de ellos es $\frac{33}{11} = 3 \text{ cm}^2$. Por lo tanto el área del hexágono regular es $3 \times 24 = 72 \text{ cm}^2$.

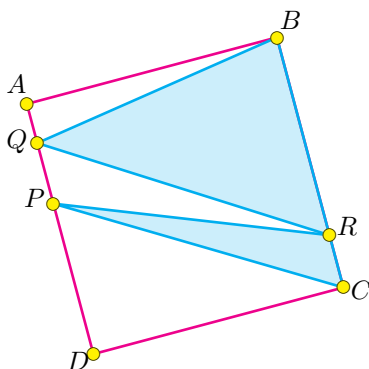
PROBLEMA 48.

Para la celebración de un *no-cumpleaños*, el Sombrero Loco debe comprar los caramelos en una tienda de golosinas donde solo venden caramelos de chocolate en paquetes de 15 unidades, caramelos de fresa en paquetes de 18 unidades y caramelos de miel en paquetes de 20 unidades. ¿Cuál es la mínima cantidad de paquetes que debe comprar el Sombrero Loco para que cumpla con su deber y se garantice que lleva la misma cantidad de caramelos de cada sabor?

Solución: Dado que $\text{mcm}(15, 18, 20) = 180$, entonces el Sombrero Loco debe comprar como mínimo 180 caramelos de cada sabor, esto es, 12 paquetes de caramelos de chocolate, 10 de fresa y 9 de miel, para garantizar que lleva la misma cantidad de caramelos de cada sabor. Por lo tanto, la mínima cantidad de paquetes que debe comprar el Sombrero Loco es $31 = 12 + 10 + 9$.

PROBLEMA 49.

En la siguiente figura, el perímetro del cuadrado $ABCD$ es 24 cm, el punto R está sobre $\overline{BC}$, y los puntos P y Q están sobre $\overline{AD}$. ¿Cuánto es la suma de las áreas de los triángulos coloreados en azul?

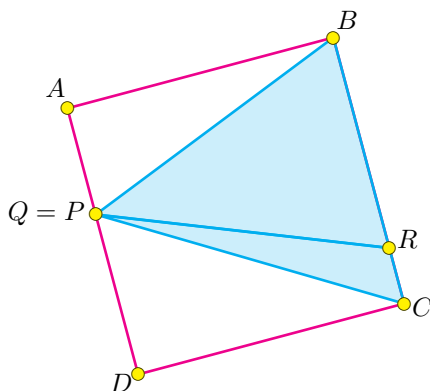


- (a) 18 cm^2 (b) 21 cm^2 (c) 24 cm^2 (d) 15 cm^2 (e) No sé

Solución 1: Dado que el perímetro del cuadrado es 24, entonces cada uno de sus lados mide 6 cm. Note que la altura de dichos triángulos, respecto a sus bases $\overline{BR}$ y $\overline{RC}$, es AB . Por lo tanto, la suma de las áreas de los triángulos es:

$$\frac{AB \times BR}{2} + \frac{AB \times RC}{2} = \frac{AB}{2}(BR + RC) = \frac{6 \times 6}{2} = 18 \text{ cm}^2.$$

Solución 2: Como no hay restricciones adicionales a que los triángulos no se superpongan, consideremos que P y Q son el mismo punto, luego ambos triángulos forman un triángulo de base $BC = 6\text{ cm}$ y altura $AB = 6\text{ cm}$, con un área de 18 cm^2 , como se muestra en la figura.



PROBLEMA 50.

Sea P el producto de todos los primos menores que 100. ¿Cuál es el dígito de las unidades de P ?

- (a) 5 (b) 2 (c) 1 (d) 0

Solución: Note que 2 y 5 son factores de P , por lo tanto P es múltiplo de 10 y en consecuencia la cifra de las unidades de P es 0.

PROBLEMA 51.

La edad de Pedro es el producto de las longitudes de todos los lados de un rectángulo cuyo perímetro es 10 cm . Si la longitud de cada lado es un número primo, en centímetros, ¿cuál es la edad de Pedro?

- (a) 25 (b) 36 (c) 6 (d) 12

Solución: Si el perímetro del rectángulo es 10 cm , entonces el ancho y el largo deben sumar 5 cm . Pero, la longitud de cada lado es un número primo y la única forma de escribir a 5 como la suma de dos números primos es $2 + 3$, entonces la edad de Pedro es $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ años.

PROBLEMA 52.

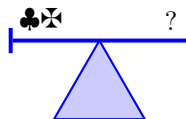
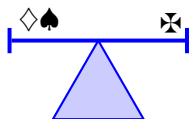
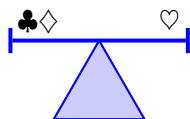
José, Juan y Daniel entrenan en la misma escuela de fútbol. Daniel entrena cada 2 días, Juan cada 3 días y José cada 4 días. Si hoy están todos entrenando, ¿cuántos días pasarán hasta la próxima vez que se encuentren en entrenamiento?

- (a) 6 (b) 12 (c) 18 (d) 24

Solución: El mínimo común múltiplo de 2, 3 y 4 es 12, entonces José, Juan y Daniel se reencuentran en el entrenamiento a los 12 días.

PROBLEMA 53.

En la siguiente figura las dos primeras balanzas están equilibradas. ¿Cuáles figuras deben estar en el lado derecho de la tercera balanza para que esta también quede equilibrada?



(a) ♥ y ♣

(b) ♠ y ♥

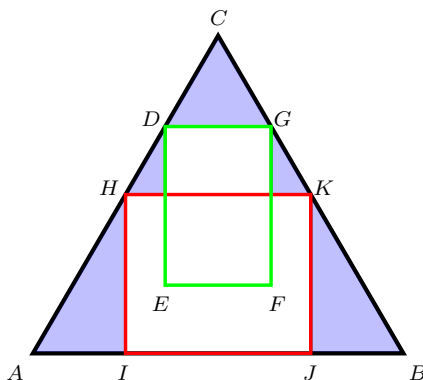
(c) ♦ y ♠

(d) ✕ y ♠

Solución: De la segunda balanza se tiene que ✕ pesa lo mismo que ♦♠, entonces ♣✕ pesa lo mismo que ♣♦♠. Pero de la primera balanza se tiene que ♣♦ pesa lo mismo que ♥; de modo que ♣♦♠ pesa lo mismo que ♥♠. Por lo tanto ♣✕ pesa lo mismo que ♥♠.

PROBLEMA 54.

En la siguiente figura, el triángulo ABC tiene 84 cm^2 de área, el rectángulo $HIJK$ tiene 42 cm^2 de área y $DEFG$ tiene 24 cm^2 de área. Si la región común de los rectángulos tiene 14 cm^2 de área, ¿cuánto mide el área sombreada?



(a) 18 cm^2

(b) 32 cm^2

(c) 66 cm^2

(d) 42 cm^2

Solución: De la figura se observa que el área sombreada puede calcularse de la siguiente manera: al área del triángulo ABC se le restan las áreas de los rectángulos $DEFG$ y $HIJK$, y se suma el área común entre estos rectángulos. Por lo tanto el área sombreada es: $84\text{ cm}^2 - 24\text{ cm}^2 - 42\text{ cm}^2 + 14\text{ cm}^2 = 32\text{ cm}^2$.

PROBLEMA 55.

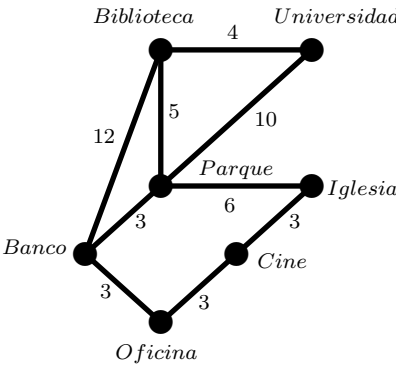
Considere el conjunto $A = \{1, 2, 3, \dots, 17\}$. ¿Cuántos elementos tiene el subconjunto más grande del conjunto A , tal que uno de sus elementos sea múltiplo de todos los demás?

- (a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 8

Solución: El subconjunto de A más grande que se puede formar con la condición de que un elemento sea múltiplo de todos los demás, debe estar formado por los divisores del número que está en A y tiene la mayor cantidad de divisores en A . Este número es el 12, luego el subconjunto de A que cumple las condiciones del enunciado es $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, el cual tiene 6 elementos.

PROBLEMA 56.

En el siguiente mapa los puntos representan algunos lugares cercanos a la oficina de Pablo y los segmentos representan los posibles caminos que los conectan; además el número en cada segmento indica el tiempo en minutos que tarda Pablo en ir de un lugar al otro por tal camino. ¿Cuál es el menor tiempo que puede tardar Pablo para ir de su oficina a la Universidad?



- (a) 11 minutos (b) 22 minutos (c) 15 minutos (d) 16 minutos

Solución: Considere la siguiente tabla, en la que se registran las rutas que puede tomar Pablo para ir desde su Oficina O a la Universidad U y el tiempo empleado en cada una de ellas:

<i>Ruta</i>	<i>Tiempo</i>
$O \rightarrow \text{Cine} \rightarrow \text{Iglesia} \rightarrow \text{Parque} \rightarrow U$	22 min
$O \rightarrow \text{Cine} \rightarrow \text{Iglesia} \rightarrow \text{Parque} \rightarrow \text{Biblioteca} \rightarrow U$	21 min
$O \rightarrow \text{Banco} \rightarrow \text{Biblioteca} \rightarrow U$	19 min
$O \rightarrow \text{Banco} \rightarrow \text{Parque} \rightarrow U$	16 min
$O \rightarrow \text{Banco} \rightarrow \text{Parque} \rightarrow \text{Biblioteca} \rightarrow U$	15 min

Por lo tanto, el menor tiempo que puede tardar Pablo para ir de su oficina a la Universidad es de 15 minutos.

PROBLEMA 57.

Juan estaba leyendo su libro de matemáticas y notó que el producto de los números de las páginas donde estaba abierto era 132. ¿Cuál es la suma de estos números?

- (a) 23
- (b) 28
- (c) 37
- (d) 47

Solución 1: Las siguientes son todas las formas de escribir 132 como producto de dos números naturales:

- 1×132

■ 3×44

■ 6×22
- 2×66

■ 4×33

■ 11×12

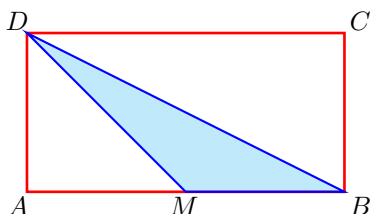
Pero como se trata de los números de dos páginas consecutivas, la única opción que funciona es la última. Entonces, las páginas tienen los números 11 y 12, y la suma de estos números es $11 + 12 = 23$.

Solución 2: Los números de dos páginas consecutivas son naturales consecutivos. Note que 134 está entre $11 \times 11 = 121$ y $12 \times 12 = 144$, entonces los números de las páginas deben ser 11 y 12 y la suma de estos números es $11 + 12 = 23$.

Solución 3: Dado que $\sqrt{132} \approx 11,48$, entonces los números de las páginas son 11 y 12 y su suma es 23.

PROBLEMA 58.

En la siguiente figura el rectángulo $ABCD$ tiene 22 cm de perímetro. Si el lado $\overline{AB}$ mide 8 cm y M es el punto medio de $\overline{AB}$, ¿cuál es el área del triángulo sombreado?



(a) 6 cm^2

(b) 8 cm^2

(c) 12 cm^2

(d) 24 cm^2

Solución: Dado que $ABCD$ es un rectángulo, entonces $AB = DC$ y $AD = BC$. Teniendo en cuenta que $AB = 8\text{ cm}$ y que el perímetro del rectángulo es 22 cm , entonces $AD + BC + 8 + 8 = 22\text{ cm}$, lo cual nos indica que $AD + BC = 6\text{ cm}$, de aquí que $AD = BC = 3\text{ cm}$. Además, como M es el punto medio de $\overline{AB}$, se tiene que $AM = MB = 4\text{ cm}$.

Por último, observe que $\overline{AD}$ es la altura del triángulo sombreado respecto a la base $\overline{MB}$, por lo tanto su área es: $\frac{MB \times AD}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6\text{ cm}^2$.

PROBLEMA 59.

¿De cuántas formas se pueden tomar de la mano tres niños para formar una ronda?

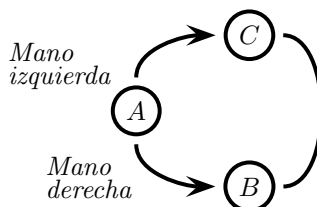
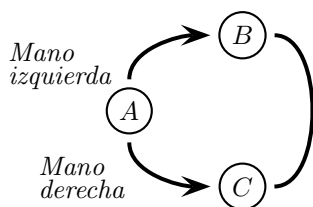
(a) 3

(b) 5

(c) 2

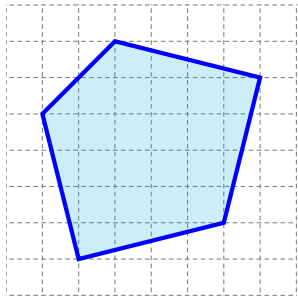
(d) 6

Solución: Llamemos A , B y C a los tres niños. Fijando el niño A tenemos que las posibilidades para formar la ronda con los tres niños son 2: que B tome la mano izquierda de A y C , la derecha; o que B tome la mano derecha de A y C , la izquierda; como se ilustra en las siguientes figuras:



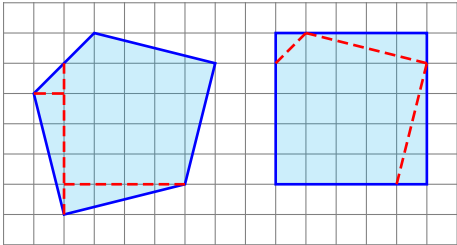
PROBLEMA 60.

Si el área de la siguiente figura es 100 cm^2 , ¿cuál es el área de cada cuadrado de la cuadrícula?



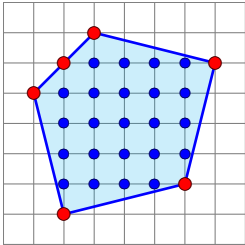
- (a) 2 cm^2 (b) 1 cm^2 (c) 5 cm^2 (d) 4 cm^2

Solución 1: Cortando adecuadamente la figura del problema se puede completar un cuadrado, como se muestra en la siguiente figura:



Note que el área de las dos figuras es equivalente. Además la figura de la derecha está formada por exactamente 25 cuadrados de la cuadrícula dada y como el área de la figura de la izquierda es 100 cm^2 , entonces el área de cada cuadrado de la cuadrícula es $100 \div 25 = 4\text{ cm}^2$.

Solución 2: Observe que el número de vértices de la cuadrícula que están sobre el contorno de la figura es 6 y el número de vértices de la cuadrícula que están en el interior de la figura es 23.



Así, usando la fórmula de Pick¹, tenemos que el área de la figura trazada sobre la cuadrícula equivale al área de

$$\frac{6}{2} + 23 - 1 = 25,$$

cuadrados de la cuadrícula. Sabiendo que el área de toda la figura es 100 cm^2 , concluimos que el área de cada cuadrado es $100 \div 25 = 4 \text{ cm}^2$.

PROBLEMA 61.

Tres animales van a subir una escalera que tiene 61 escalones numerados del 1 al 61. Los animales inician en el primer escalón y suben de la siguiente manera: la rana sube dejando un escalón de por medio, el conejo sube dejando dos escalones de por medio y el canguro sube dejando tres escalones de por medio. ¿Cuál es la suma de los números de los escalones que pisaron en común los tres animales?

- (a) 186 (b) 180 (c) 72 (d) 76

Solución 1: Las secuencias de abajo muestran los escalones pisados por cada animal hasta llegar al escalón 61. Los números encerrados corresponden a los escalones que fueron pisados en común

Rana: $\textcircled{1} \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow \textcircled{13} \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 19 \rightarrow 21 \rightarrow$
 $23 \rightarrow \textcircled{25} \rightarrow 27 \rightarrow 29 \rightarrow 31 \rightarrow 33 \rightarrow 35 \rightarrow \textcircled{37} \rightarrow 39 \rightarrow 41 \rightarrow 43 \rightarrow$
 $45 \rightarrow 47 \rightarrow \textcircled{49} \rightarrow 51 \rightarrow 53 \rightarrow 55 \rightarrow 57 \rightarrow 59 \rightarrow \textcircled{61}$

¹Para calcular el área de un polígono **cuyos vértices coinciden con algunos vértices de una cuadrícula** sobre la cual está dibujado, aplicamos el siguiente algoritmo:

1. Contamos los vértices de la cuadrícula que están en el **contorno** del polígono.
2. Contamos los vértices de la cuadrícula que están **dentro** del polígono.
3. Calculamos la suma de la mitad de los vértices que están en el contorno con los vértices que están en el interior, y restamos 1.
4. El resultado anterior indica el número de cuadraditos de la cuadrícula cuya área total equivale a la de la figura. De modo que el área del polígono será el producto del resultado anterior con el área de un cuadradito de la cuadrícula.

Conejo: $(1) \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow (13) \rightarrow 16 \rightarrow 19 \rightarrow 22 \rightarrow (25) \rightarrow 28 \rightarrow$
 $31 \rightarrow 34 \rightarrow (37) \rightarrow 40 \rightarrow 43 \rightarrow 46 \rightarrow (49) \rightarrow 52 \rightarrow 55 \rightarrow 58 \rightarrow (61)$

Canguro: $(1) \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow (13) \rightarrow 17 \rightarrow 21 \rightarrow (25) \rightarrow 29 \rightarrow 33 \rightarrow$
 $(37) \rightarrow 41 \rightarrow 45 \rightarrow (49) \rightarrow 53 \rightarrow 57 \rightarrow (61)$

Así, la suma de los números de los escalones que pisaron en común los tres animales es: $1 + 13 + 25 + 37 + 49 + 61 = 186$.

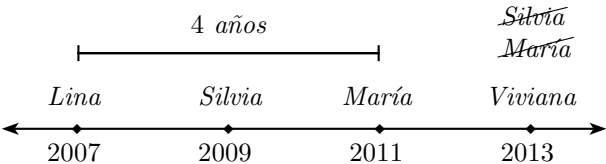
Solución 2: Si corremos la numeración de los escalones una unidad hacia abajo, es decir suponiendo que los escalones estuvieran enumerados desde 0 hasta 60, entonces la rana pisa los múltiplos de 2, el conejo los múltiplos de 3 y el canguro los múltiplos de 4, de modo que los que pisan en común serán los múltiplos de 2, 3 y 4, estos son los múltiplos de $mcm(2, 3, 4) = 12$, desde 0 hasta 60, a saber: 0, 12, 24, 36, 48 y 60. Ahora, corriendo de nuevo la enumeración desde 1 hasta 61, se tiene que los escalones pisados son: 1, 13, 25, 37, 49 y 61; cuya suma es 186.

PROBLEMA 62.

Cuatro hermanas: María, Viviana, Lina y Silvia nacieron en años diferentes: 2007, 2009, 2011 y 2013; no necesariamente en ese orden. Si se sabe que la menor no es María ni Silvia, y que María es 4 años menor que Lina, ¿en qué año nació Viviana?

(a) 2007 (b) 2009 (c) 2011 (d) 2013

Solución: La menor de las cuatro hermanas no es María ni Silvia, entonces ellas no nacieron en el 2013. Además, María es 4 años menor que Lina, luego Lina nació en el 2017 y María en el 2011. Finalmente, se concluye que Silvia nació en el 2009, y por lo tanto Viviana nació en el 2013.



PROBLEMA 63.

La edad de Daniel es el doble de la edad de Karen. ¿Cuál de los siguientes números NO puede ser la suma de las edades de Daniel y Karen?

- (a) 15 (b) 12 (c) 20 (d) 18

Solución: Dado que la edad de Daniel es el doble de la edad de Karen, al sumar estas edades obtenemos 3 veces la edad de Karen, por lo tanto esta suma debe ser un múltiplo de 3, y de las opciones de respuesta, 20 es el único número que NO es múltiplo de 3.

PROBLEMA 64.

El número total de inscritos en una competencia de ciclismo es mayor que 100 pero menor que 1000, y el producto de sus cifras es 21; ¿cuál es la suma de sus cifras?

- (a) 11 (b) 10 (c) 3 (d) 4

Solución: Note que el número de inscritos a la competencia tiene tres cifras y además 21 se puede expresar como producto de tres dígitos de una única forma (salvo el orden de los factores): $21 = 1 \times 3 \times 7$. Por lo tanto, las cifras del número de inscritos son 1, 3 y 7, en algún orden. Así, la suma de las cifras de este número es $1 + 3 + 7 = 11$.

PROBLEMA 65.

Natalia va a una tienda donde hacen jugos con 6 frutas: mango, fresa, mora, coco, sandía y limón. Los jugos pueden tener una o dos de estas frutas. Si Natalia es alérgica al coco y no le gusta el mango acompañado de otra fruta, ¿cuántos jugos diferentes de los que ofrecen en la tienda, le gustaría tomar a Natalia?

- (a) 11 (b) 10 (c) 16 (d) 19

Solución: De los 6 sabores que ofrecen en la tienda, Natalia no tomaría jugos con coco, pues es alérgica y tampoco de mango mezclado con otro sabor. Por lo tanto, de los jugos que ofrecen en la tienda Natalia tomaría 11 jugos diferentes:

de 1 sabor	5	mango, fresa, mora, sandía y limón.
de 2 sabores	6	fresa-mora, fresa-sandía, fresa-limón, mora-sandía, mora-limón y sandía-limón

PROBLEMA 66.

Cuando Ximena vea a José le pedirá una cantidad de pesos colombianos múltiplo de 100, por ejemplo, \$4700. Para ir al encuentro José llevará monedas de 100, 200, 500 y 1000 pesos. ¿Cuál es la menor cantidad de monedas que puede llevar José para poder darle a Ximena cualquier cantidad que ella le pida desde \$100 hasta \$5000?

(a) 5

(b) 8

(c) 12

(d) 50

Solución: Supongamos que José tiene que darle \$4900 a Ximena, la forma de hacerlo con la menor cantidad de monedas posibles es 4 monedas de \$1000, 1 de \$500 y 2 de \$200; 7 en total. José necesita una moneda de \$100 si Ximena le pide 100 pesos, llevando entonces hasta el momento 8. Con estas 8 monedas puede armar cualquier cantidad desde \$100 hasta \$5000, por lo que 8 es la respuesta.

PROBLEMA 67.

Para cada número natural n se define $\boxed{n}$ de la siguiente manera:

$$\boxed{n} = n \times (2021 - n).$$

¿Cuál es el valor de la siguiente expresión?

$$\boxed{1} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times \cdots \times \boxed{2021}$$

(a) 0

(b) 2021

(c) 1

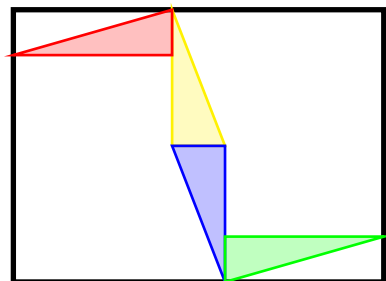
(d) un número mayor que 2021, muy grande.

Solución: Note que $\boxed{2021} = 2021 \times (2021 - 2021) = 2021 \times 0 = 0$, luego

$$\boxed{1} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times \cdots \times \boxed{2021} = \boxed{1} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times \cdots \times 0 = 0.$$

PROBLEMA 68.

El Comité Olímpico de cierto colegio ha propuesto un diseño para la bandera de la olimpiada de matemáticas, el cual consta de cuatro triángulos rectángulos congruentes, pero de diferente color, dibujados sobre un rectángulo completamente blanco, como se muestra a continuación:



Si se imprimen de estas banderas con dimensiones 20 cm y 18 cm , ¿qué fracción del área total de cada bandera estará coloreada por los cuatro triángulos?

(a) $\frac{1}{7}$

(b) $\frac{1}{9}$

(c) $\frac{1}{10}$

(d) $\frac{4}{38}$

Solución: La altura de la bandera es 18 cm , entonces la altura de cada triángulo, respecto al lado más corto, es 9 cm . Además, los 20 cm del ancho de la bandera corresponden a dos veces la altura de los triángulos (respecto al lado más corto) más la longitud del lado más corto, de modo que el lado más corto de cada triángulo mide $20 - 2 \times 9 = 20 - 18 = 2\text{ cm}$.

Por lo anterior, el área de cada triángulo es $\frac{9 \times 2}{2} = 9\text{ cm}^2$, y como son cuatro de estos triángulos, entonces el área total coloreada es $4 \times 9 = 36\text{ cm}^2$. Pero el área total de la bandera es $20 \times 18 = 360\text{ cm}^2$, de ahí que la fracción del área total de la bandera que estará coloreada por los cuatro triángulos es: $\frac{36}{360} = \frac{1}{10}$.

PROBLEMA 69.

El número de diagonales de cierto polígono es 5 veces el número de sus lados. ¿Cuántos lados tiene este polígono?

(a) 8

(b) 10

(c) 12

(d) 13

Solución: Es fácil ver que un polígono de n lados tiene $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales. Entonces, el polígono del enunciado cumple que:

$$\begin{aligned}\frac{n(n-3)}{2} &= 5n, \\ n^2 - 3n &= 10n, \\ n^2 &= 13n, \\ n &= 13.\end{aligned}$$

Esto es, el polígono tiene 13 lados.

PROBLEMA 70.

De los votantes de un pueblo, $\frac{3}{8}$ son mayores de 50 años. Si la mitad de los hombres votantes tienen 50 o menos años y estos corresponden $\frac{1}{8}$ del total de votantes,

(a) ¿qué fracción del total de votantes representan las mujeres?

(b) ¿qué fracción del total de votantes representan las mujeres con 50 o menos años?

(c) ¿qué fracción del total de mujeres votantes son mayores de 50 años?

(d) si se sabe que el total de votantes es 1600, ¿cuántos de ellos tienen 50 o menos años?

Solución: Considere el siguiente diagrama de Carroll, tenga en cuenta que el total de votantes es la unidad, es decir $\frac{8}{8}$ y como la mitad de los hombres votantes tienen 50 o menos años, entonces la cantidad de hombres votantes mayores que 50 años, es igual a la cantidad de hombres votantes con 50 o menos años, es decir $\frac{1}{8}$ del total de votantes

	≤ 50	> 50	Total
Mujeres	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{6}{8}$
Hombres	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
Total	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{8}{8}$

Por lo tanto,

(a) la fracción del total de votantes que representan las mujeres es $\frac{6}{8}$.

- (b) la fracción del total de votantes que representan las mujeres con 50 o menos años es $\frac{4}{8}$.
- (c) la fracción del total de mujeres votantes que son mayores de 50 años es $\frac{2/8}{6/8} = 2/6 = 1/3$.
- (d) Si el total de votantes 1600, entonces los que tienen 50 o menos años son $1600 \times \frac{5}{8} = 1000$.

PROBLEMA 71.

Un granjero tiene 180 huevos de pata y 168 huevos de gallina. El quiere colocarlos en canastos de modo que en cada canasto haya la misma cantidad de huevos, sin juntar huevos de pata con huevos de gallina. ¿Cuál es la mínima cantidad de canastos que necesita el granjero?

- (a) 12 (b) 14 (c) 15 (d) 29 (e) No sé

Solución: Dado que los huevos de pata y los huevos de gallina deben dividirse en grupos con la misma cantidad de huevos (sin juntarse entre ellos), entonces esta cantidad es un divisor común de 180 y 168. Pero se quiere además, que la cantidad de grupos (canastos) sea la menor posible, esto se logra cuando los grupos tienen la mayor cantidad de huevos posibles, esta cantidad es el máximo divisor común entre 180 y 168, que es

$$\text{mcd}(180, 168) = 12.$$

Por lo tanto, se deben hacer grupos de 12 huevos; como en total son $180 + 168 = 348$ huevos, entonces la mínima cantidad de grupos (canastos) es: $\frac{348}{12} = 29$.

PROBLEMA 72.

¿Cuál de los siguientes números es la suma de tres números naturales consecutivos?

- (a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13

Solución: Sea n el menor de los tres números naturales consecutivos, entonces los tres números buscados serán $n, n + 1$, y $n + 2$, cuya suma es un múltiplo de 3 pues $n + (n + 1) + (n + 2) = 3(n) + 3 = 3(n + 1)$, de modo que el único número que satisface la condición es 12. De hecho $12 = 3 + 4 + 5$.

PROBLEMA 73.

En una tienda, con el dinero que se compran 2 pasteles, se pueden comprar 5 galletas y con el dinero que se compra una galleta se pueden comprar 4 dulces. Con el dinero que se compra un pastel, ¿cuántos dulces se pueden comprar?

- (a) 5 (b) 10 (c) 20 (d) 40

Solución: Note que con el dinero con el que se compra 1 galleta, se puede comprar $\frac{2}{5}$ de pastel, de esta manera el dinero con el que se compra $\frac{2}{5}$ de pastel alcanza para comprar 4 dulces. Con esto se puede concluir que con el dinero que se compra $1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$ pastel, se pueden comprar $4 + 4 + 2 = 10$ dulces.

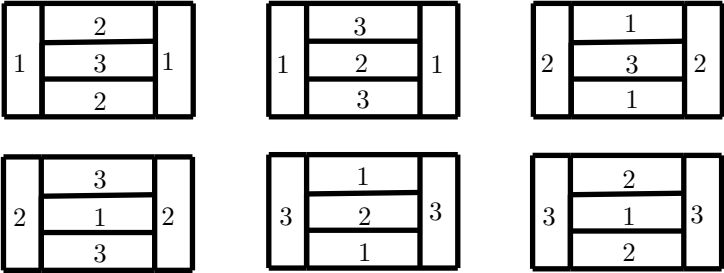
PROBLEMA 74.

¿De cuántas maneras se pueden pintar las regiones de la siguiente figura, con 3 colores, si dos regiones vecinas no pueden tener el mismo color?



- (a) 15 (b) 9 (c) 6 (d) 1

Solución: Dado que dos regiones vecinas no pueden tener el mismo color, las dos columnas deben compartir color y la primera y última fila deben tener un color distinto al de las columnas. De esta manera queda determinado el color de la región restante en cada caso. Sean 1, 2 y 3 los diferentes colores; las 6 maneras de pintar las regiones de la figura se muestran a continuación:



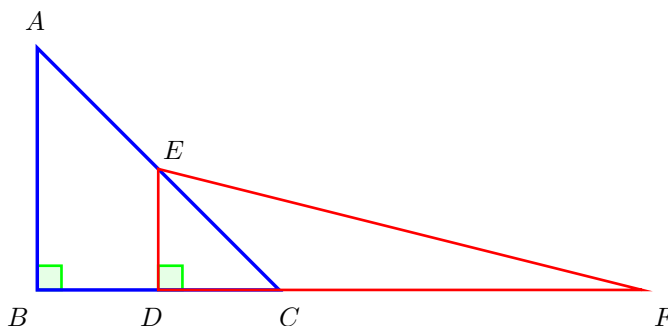
PROBLEMA 75.

Daniel compró en la tienda 5 chocolates y 3 galletas por \$3.700, pero si hubiera comprado 3 chocolates y 5 galletas tendría que haber pagado \$5.100. ¿Cuánto debería pagar por una galleta y un chocolate?

Solución: Del enunciado se tiene que 5 chocolates y 3 galletas cuestan \$3.700, pero 3 chocolates y 5 galletas cuestan \$5.100. Luego 8 chocolates y 8 galletas cuestan \$8.800. Por lo tanto Daniel debería pagar \$1.100 por una galleta y un chocolate.

PROBLEMA 76.

En la siguiente figura los triángulos ABC y EDC son isósceles rectángulos y D es el punto medio del segmento $\overline{BC}$. Si $AB = BC = 4\text{ cm}$ y las áreas de los triángulos ABC y DEF son iguales, ¿cuánto mide $\overline{DF}$?



Solución: D es punto medio del segmento $\overline{BC}$, entonces $\overline{DC}$ mide la mitad de $\overline{BC}$, es decir $DC = 2\text{ cm}$; pero el triángulo EDC es isósceles en D , entonces $ED = 2\text{ cm}$.

En relación a las áreas se tiene que el área del triángulo ABC es

$$\frac{AB \times BC}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8\text{ cm}^2,$$

mientras que el área del triángulo EDF es

$$\frac{ED \times DF}{2} = \frac{2 \times DF}{2} = 8\text{ cm}^2.$$

Por lo tanto, $DF = 8\text{ cm}$.

PROBLEMA 77.

¿Cuántos números de cinco cifras son capicúa y divisibles por 5?

Nota: un número se llama **capicúa** si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Ejemplo: 42124 es capicúa.

Solución: Los números capicúa de cinco cifras se escriben de la siguiente manera:

$$\underline{a} \quad \underline{b} \quad \underline{c} \quad \underline{b} \quad \underline{a}$$

donde a , b y c son dígitos; pero $a \neq 0$. Sabemos que un número es divisible entre 5 si la cifra de las unidades es 0 o 5, en este caso 0 no puede ir en la cifra de las unidades, pues como el número es capicúa la cifra de las decenas de mil también sería 0 y esto daría un número de 4 cifras (que además no es capicúa). Luego $a = 5$, es decir:

$$\underline{5} \quad \underline{b} \quad \underline{c} \quad \underline{b} \quad \underline{5}$$

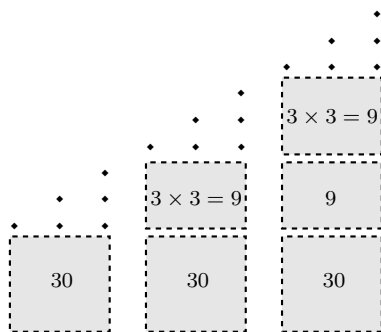
De manera que si se fija un valor para b , por ejemplo, 50c05; vemos que c puede tomar 10 valores: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y el número siempre es capicúa. Luego, por cada valor de b , c puede tomar 10 valores y b puede tomar 10 valores diferentes, entonces el total de números capicúa de cinco cifras y divisibles por 5 es $10 \times 10 = 100$.

PROBLEMA 78.

Escribimos 9 números naturales consecutivos y la suma de los primeros tres es 36. ¿Cuál es el resultado de la suma de los tres últimos?

Solución: Por inspección buscamos tres números consecutivos cuya suma sea 36 y encontramos que estos son: 11, 12 y 13. Por lo tanto los últimos tres de estos nueve números consecutivos son: 17, 18 y 19 cuya suma es 54.

Solución 2: Considere la siguiente gráfica en la que se han representado los 9 números consecutivos como columnas de puntos que han sido tapadas, en parte, con algunos rectángulos. Sobre los rectángulos se escribe el número de puntos que cada uno “tapa”.



Observe que en las primeras tres columnas (de izquierda a derecha) hay 36 puntos, según lo indica el enunciado. De modo que, como se ilustra en la gráfica, en las tres últimas columnas habrá $30 + 9 + 9 + 6 = 54$ puntos, lo que equivale a la suma de los tres últimos números.

PROBLEMA 79.

De cuatro tablas cuadradas de madera, con perímetro 8 m , se cortan cuatro piezas como se muestra en la Figura 1, para formar el marco de un espejo como el que se muestra en la Figura 2. Si en la Figura 1. M y N son los puntos medios $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, ¿cuál es área que cubre el espejo con el marco sobre la pared?

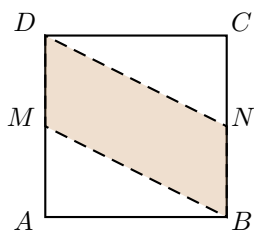


Figura 1.

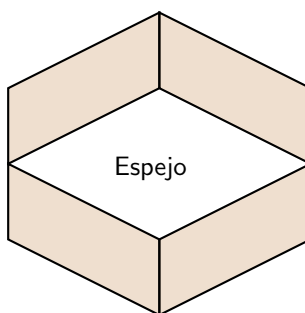
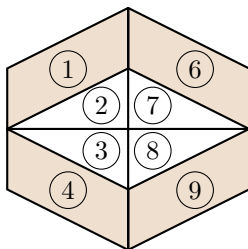


Figura 2.

Solución: Los cuadrados de madera de la Figura 1 tienen 8 m de perímetro, entonces cada lado mide 2 m . Así, el área del cuadrado es $2 \times 2 = 4\text{ m}^2$.

Además, M y N son los puntos medios de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, luego el área sombreada de la Figura 1 equivale a la mitad del área del cuadrado, es decir, 2 m^2 .

Consideremos ahora la siguiente construcción auxiliar:



Con las secciones 1, 2 y 3 podemos formar un cuadrado, al igual que con la secciones 6, 7 y 8. Mientras cada una de las regiones 4 y 9 tiene 2 m^2 de área. Por lo tanto, el área que cubre el espejo con el marco en la pared es:

$$4\text{ m}^2 + 4\text{ m}^2 + 2\text{ m}^2 + 2\text{ m}^2 = 12\text{ m}^2.$$

PROBLEMA 80.

Andrés sabe que la clave de desbloqueo del celular de su amigo Federico es un número de tres cifras múltiplo de 15, tal que sus cifras son impares. ¿Cuántos intentos son suficientes para que Andrés pueda desbloquear el celular de Federico?

Solución: Dado que la clave es un número de tres cifras múltiplo de 15, entonces es múltiplo de 3 y 5. Por ser múltiplo de 5, el dígito de las unidades puede ser 0 o 5, pero todos los dígitos de la clave son impares, luego el dígito de las unidades es 5. Ahora como el número es múltiplo de 3, la suma de sus cifras es múltiplo de 3. Además, por la condición de que sus cifras son impares, entonces las decenas y centenas solo pueden tomar los valores: 1, 3, 5, 7 y 9. Teniendo en cuenta lo anterior los posibles números para la clave del celular de Federico son: 135, 315, 195, 915, 555, 375, 735, 795 y 975. Por lo tanto, 9 intentos son suficientes para que Andrés pueda desbloquear el celular de Federico.

PROBLEMA 81.

La colección de soldaditos de plomo de David tiene entre 50 y 100 soldaditos. En el descanso, jugando con sus compañeros, David los forma en filas de 5 y no sobran soldaditos, luego su mejor amigo los forma en filas de 7 y le sobran 3. ¿Cuántos soldaditos tiene David?

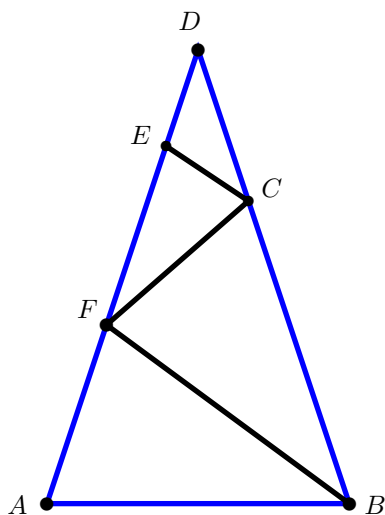
Solución: David forma los soldaditos en filas de 5 y no sobran soldaditos, entonces la cantidad de soldaditos es un múltiplo de 5 entre 50 y 100, los cuales son: 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95 y 100. Además, su mejor amigo los forma en filas de 7 y le sobran 3, luego el número de soldaditos excede en 3 a un múltiplo de 7. Por lo tanto, David tiene 80 soldaditos de plomo, pues este es el único número de la lista anterior que cumple la última condición: $77 + 3 = 80$.

PROBLEMA 82.

En la siguiente figura:

- El triángulo ADB es isósceles.
- Los triángulos ABF y FBC son isósceles en B , cada uno con 90 cm de perímetro.
- El triángulo EFC es isósceles en F y su perímetro es 52 cm.
- $CE = ED$.
- El perímetro del cuadrilátero $ABCF$ es 110 cm.

¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{CD}$?



(a) 12 cm

(b) 17 cm

(c) 20 cm

(d) 35 cm

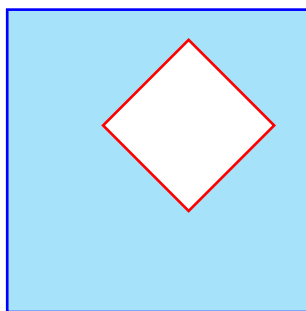
Solución: El perímetro del cuadrilátero $ABCF$ es 110 cm y la suma de los perímetros de los triángulos ABF y FBC es 180 cm, luego la diferencia $180 -$

$110 = 70 \text{ cm}$, corresponde al doble de la medida del segmento $\overline{BF}$, entonces $BF = BC = 35 \text{ cm}$. De lo que se deduce que $FC = 20 \text{ cm}$, pues el triángulo FBC es isósceles, con $BF = BC$. Por otra parte, note que la longitud de $\overline{AD}$ es igual al perímetro del triángulo EFC , pues $AF = FC$ y $CE = ED$. Luego,

$$DC = DB - BC = AD - BC = 52 - 35 = 17 \text{ cm}.$$

PROBLEMA 83.

En la siguiente figura se muestran dos cuadrados. Si un lado del cuadrado más grande mide 5 cm y el área sombreada es 21 cm^2 , ¿cuál es el perímetro del cuadrado pequeño?



Solución: Dado que el lado del cuadrado más grande mide 5 cm , su área es 25 cm^2 . Además, el área sombreada es 21 cm^2 , de modo que el área del cuadrado pequeño es $25 \text{ cm}^2 - 21 \text{ cm}^2 = 4 \text{ cm}^2$. Así, cada lado de este cuadrado mide 2 cm y por lo tanto su perímetro es 8 cm .

PROBLEMA 84.

Camilo tiene dos libros de matemáticas: uno verde y uno rojo, dos libros de sociales: uno azul y uno rojo, y dos libros de ciencias naturales: uno verde y uno azul. Si Camilo desea ordenarlos en una fila por colores, ¿de cuántas maneras puede hacerlo?

(a) 24

(b) 18

(c) 36

(d) 48

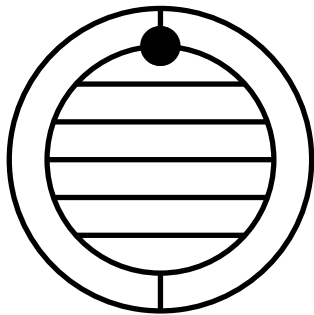
Solución: Para el orden de colores verde-rojo-azul, los libros se pueden ordenar de 8 formas diferentes, a saber:

Verde		Rojo		Azul	
M	C	M	S	S	C
M	C	M	S	C	S
M	C	S	M	S	C
M	C	S	M	C	S
C	M	M	S	S	C
C	M	M	S	C	S
C	M	S	M	S	C
C	M	S	M	C	S

Note que los colores se pueden ordenar de 6 formas diferentes y para cada una de esas formas, los libros se pueden organizar de 8 formas diferentes, por lo tanto Camilo puede ordenar los libros de $6 \times 8 = 48$ formas diferentes.

PROBLEMA 85.

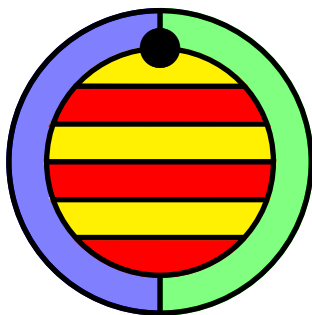
El siguiente es el logo de una empresa de autos.



- (a) ¿Cuántos colores como mínimo, son necesarios para pintar el logo, teniendo en cuenta que regiones vecinas no pueden tener el mismo color?
- (b) Con la cantidad de colores hallada en el ítem anterior, ¿de cuántas formas diferentes se puede pintar el logo?

Solución:

- (a) La cantidad mínima de colores necesaria para pintar el logo es 4, una manera de hacerlo es la siguiente:



- (b) Iniciando, el color de la región izquierda lo podemos elegir de 4 formas (los 4 posibles colores), luego como la región derecha es vecina de la región derecha, su color puede elegirse de 3 formas diferentes (los 3 colores restantes), finalmente los 2 colores restantes deben intercalarse en las regiones centrales, es decir estas regiones pueden pintarse de dos formas diferentes, por lo tanto hay $4 \times 3 \times 2 = 24$ formas diferentes de pintar el logo, con 4 colores.

Otra solución: Suponga que los colores son A, B, C y D. Si pintamos la región izquierda del color A entonces dado que las regiones centrales deben colorearse intercalando dos de los colores restantes, éstas podrían pintarse de 6 formas: (B-C-B-C-B-C), (C-B-C-B-C-B), (B-D-B-D-B-D), (D-B-D-B-D-B), (C-D-C-D-C-D), (D-C-D-C-D-C), la región derecha se colorea del color restante. Por lo tanto, si tomamos el color A para la región izquierda tenemos 6 formas de pintar el logo. De manera análoga, si la región izquierda se pinta del color B se obtienen otras 6 formas, si se pinta de C otras 6 y si se pinta de D otras 6. En total 24 formas de pintar el logo.

También es factible hacer un bosquejo de las 24 formas de pintar el logo usando 4 colores, lo dejamos de ejercicio al lector.

PROBLEMA 86.

La instalación de luces del arbolito de navidad tiene tres colores de bombillos: rojos, amarillos y azules. Los bombillos rojos alumbran cada 20 segundos, los amarillos cada 30 segundos y los azules cada 18 segundos. Si al conectar la instalación alumbran todos los bombillos, ¿cuántas veces alumbran a la vez todos los bombillos de la instalación si permanece conectada durante 4 horas?

Solución: Los bombillos alumbran todos a la vez cada $\text{mcm}(20, 30, 18) = 180$ segundos, es decir cada 3 minutos. En 4 horas hay $4 \times 60 = 240$ minutos. Luego,

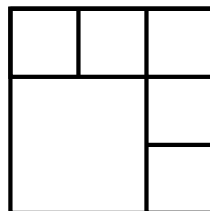
durante las 4 horas los bombillos alumbran todos a la vez $240 \div 3 + 1 = 80 + 1 = 81$ veces.

Note que se debe sumar 1 a $240 \div 3$ puesto que, según el enunciado, cuando se conecta la instalación, en el segundo 0, todos los bombillos alumbran.

PROBLEMA 87. RELEVOS.

Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado II depende de la respuesta del enunciado I y el enunciado III, de la respuesta del enunciado II.

- I. La figura está dividida en un cuadrado grande y 5 cuadrados pequeños. El perímetro del cuadrado grande es de 24 cm. ¿Cuál es el perímetro de toda la figura?



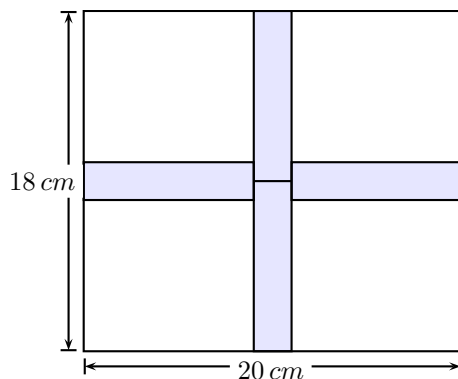
- II. El número de caramelos en una bolsa coincide con el valor del perímetro hallado en el ítem anterior. Si Daniela saca 10 caramelos y Carlos saca la mitad de los caramelos que quedan. ¿Cuántos caramelos quedan en la bolsa?
- III. Carlos afirma que la cantidad de caramelos que quedan en la bolsa corresponde a un número primo mayor que 17. ¿Es correcta la afirmación de Carlos?

Solución:

- I. El perímetro del cuadrado grande es de 24 cm, entonces cada uno de sus lados mide 6 cm. Ahora, en la figura se puede observar que cada lado de los cuadrados pequeños es la mitad del lado del cuadrado grande, es decir cada uno mide 3 cm. Por lo tanto, cada lado de la figura grande mide $6 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$ y así, el perímetro deseado es de $4 \times 9 \text{ cm} = 36 \text{ cm}$.
- II. Se tienen 36 dulces en la bolsa, Daniela saca 10, entonces quedan 26. Después Carlos saca la mitad de estos, es decir, $\frac{26}{2} = 13$ dulces y por lo tanto quedan $26 - 13 = 13$ dulces en la bolsa.
- III. La afirmación es falsa porque aunque 13 es un número primo, este no es mayor que 17.

PROBLEMA 88.

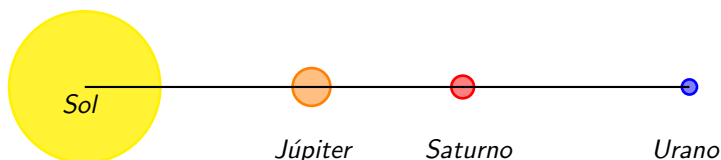
En el siguiente rectángulo, los rectángulos sombreados son iguales. Halle el área de la región sombreada.



Solución: De la figura se observa que el alto del rectángulo grande mide dos veces el alto de uno sombreado, por lo tanto el alto de cada rectángulo sombreado es $18 \div 2 = 9$ cm. Por otra parte, en la figura se observa que el ancho del rectángulo grande mide dos veces el alto más una vez el ancho de un rectángulo sombreado. Es decir, el ancho de un rectángulo sombreado mide $20 - 18 = 2$ cm. Por lo tanto, el área de cada rectángulo sombreado es $9 \times 2 = 18$ cm². Como el área sombreada está formada por cuatro de estos rectángulos, se obtiene que el área sombreada es $4 \times 18 = 72$ cm².

PROBLEMA 89.

El periodo de traslación de un planeta es el tiempo que este demora en dar una vuelta completa alrededor del Sol. Si los periodos de traslación de Júpiter, Saturno y Urano son 12, 30 y 84 años respectivamente, ¿cuántas vueltas debe dar Saturno hasta la próxima vez que los tres planetas vuelvan a estar alineados como muestra la figura?

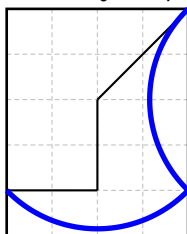


Solución: Para calcular los años en que los tres planetas se alinean basta con calcular el mínimo común múltiplo entre los años que se demora en hacer la traslación cada planeta, el cual es 420 años. De esta manera, Saturno habrá dado $\frac{420}{30} = 14$ vueltas en ese tiempo.

PROBLEMA 90.

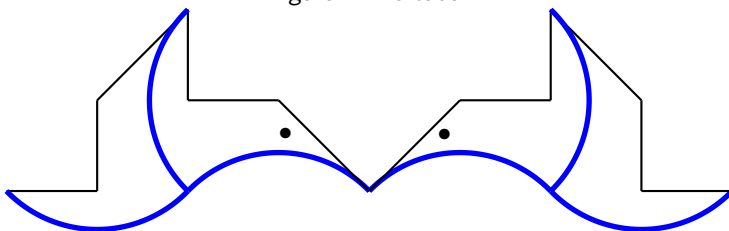
De cuatro hojas rectangulares de papel cuadriculado Isabella corta cuatro piezas, como se ilustra en la Figura 1. Luego pega las piezas en la portada de su diario formando la figura de dos colibrís como se muestra en la Figura 2. Si el área de cada hoja de papel es 20 cm^2 , ¿cuál es el área que cubren los colibrís en la portada del diario?

Figura 1. Hoja de papel.



Nota: Las curvas resaltadas se obtienen una por rotación de la otra.

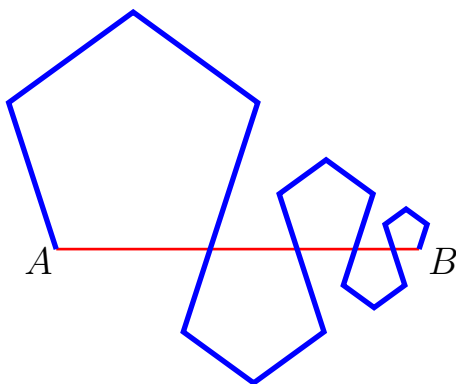
Figura 2. Portada.



Solución: Note que el área de cada figura que cortó Isabella es 6 cm^2 (traslade la parte inferior de la pieza al lado superior derecho de la misma para completar un trapecio, cuya área es la misma que la de 6 cuadraditos de la cuadrícula). Así, el área que cubren los colibrís, equivalente al de las cuatro piezas papel, es: $6 \times 4 = 24 \text{ cm}^2$.

PROBLEMA 91.

Sobre el segmento $\overline{AB}$ se ubican cinco pentágonos regulares como se muestra en la figura. Si la longitud del segmento $\overline{AB}$ es 30 cm, ¿cuál es la longitud del camino de color azul?



Solución: Observe que en el segmento $\overline{AB}$ se ubica exactamente un lado de cada uno de los cinco pentágonos regulares. Es decir al tomar un lado de cada pentágono y sumar estas longitudes el resultado es 30 cm. Ahora, observe que el camino marcado está formado por cuatro lados de cada pentágono regular, de esta forma la suma de las longitudes de los segmentos que forman el camino marcado es $4 \times 30 \text{ cm} = 120 \text{ cm}$.

PROBLEMA 92.

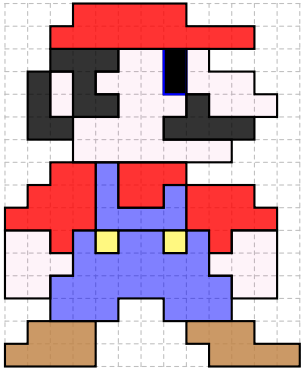
Un robot se desplaza por las escaleras de un edificio de una manera muy particular: por cada dos escalones que sube, baja uno y el tiempo que gasta en subir o bajar un escalón es el mismo. De esta manera el robot demora 172 segundos para ir desde el primer al segundo piso del edificio. Si entre el primer y segundo piso del edificio hay 30 escalones, ¿cuánto demora el robot en subir un escalón?

Solución: Al subir 2 escalones y bajar 1, recorre 3 pero avanza 1. Esto lo hará hasta el escalón 28, recorriendo $28 \times 3 = 84$ escalones. Al subir 2 escalones más llega al segundo piso, entonces recorre 86 escalones en 172 segundos. Por lo tanto, se demora $\frac{172}{86} = 2$ segundos por escalón.

PROBLEMA 93. RELEVOS.

Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado II depende de la respuesta del enunciado I y el enunciado III, de la respuesta del enunciado II.

- I. Lucía lista en su agenda todos los números pares de dos cifras que se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 4 y 6. ¿Cuántos números tiene la lista de Lucía?

 - II. Diego colorea la figura de Mario Bros sobre una cuadrícula como se muestra en la imagen. Si el área, en centímetros cuadrados, de cada cuadradito de la cuadrícula coincide con la respuesta del ítem anterior, ¿cuál es el perímetro de la figura de Mario Bros?
- 
-
- III. El total de niños y niñas que asistieron a una fiesta de Halloween coincide con la respuesta del ítem anterior. Si se sabe que el número de niñas excede en 20 al número de niños, ¿cuál es la cantidad de niñas que asistieron a la fiesta?

Solución:

- I. La cifra de las decenas de los números de la lista de Lucía debe ser 1, 2, 4 o 6; mientras que la cifra de las unidades debe ser 0, 2, 4 o 6, pues son pares. De modo que la cifra de las decenas se puede escoger de 4 formas y la cifra de las unidades también de 4 formas, es decir, la lista de Lucía tiene $4 \times 4 = 16$ números.

$$\underbrace{4 \text{ opciones}}_{\text{decenas}} \times \underbrace{4 \text{ opciones}}_{\text{unidades}} = \underbrace{4 \times 4}_{\text{números}} = 16.$$

También es factible listar los números:

10	40	12	42	14	44	16	46
20	60	22	62	24	64	26	66

- II. El área de cada cuadradito de la cuadrícula es igual a 16 cm^2 , es decir el lado de cada cuadradito es igual a 4 cm . Por lo tanto el perímetro de la figura de Mario Bros es $88 \times 4\text{ cm} = 352\text{ cm}$.
- III. El total de niños y niñas que asistieron a la fiesta de Halloween es 352. La cantidad de niñas excede en 20 al número de niños, es decir que si se resta $352 - 20 = 332$, se obtiene la misma cantidad de niños que de niñas, por tanto $332 \div 2 = 166$ indica la cantidad de niños en la fiesta, así la cantidad de niñas en la fiesta es $166 + 20 = 186$.

PROBLEMA 94.

Edson completó el siguiente tablero de 7×7 casillas, con números dígitos del 1 al 7, de tal forma que no se repetían números en cada fila, ni columna, ni diagonal punteada en el tablero. Luego borró algunos números y otros los reemplazó con letras como se muestra a continuación. Encuentre el valor numérico de la siguiente operación

$$R \times E \times S \times T \times A$$

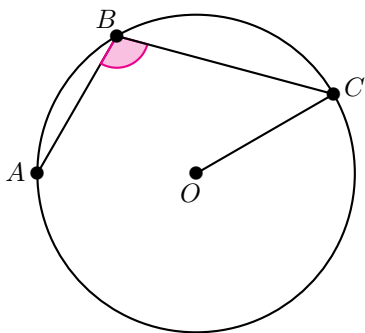
1			R			
	E					7
		7	2			
4		1	3			
				S		
			5		T	
A	2		6	1		5

Solución: Observando la diagonal principal se ve que E, S y T son los números 2, 4 y 6, en algún orden. Por otra parte, teniendo en cuenta las demás condiciones del enunciado se deduce que $A = 7$ y $R = 7$, por lo que el valor numérico de la operación $R \times E \times S \times T \times A$, está dado por $2 \times 4 \times 6 \times 7 \times 7 = 2352$.

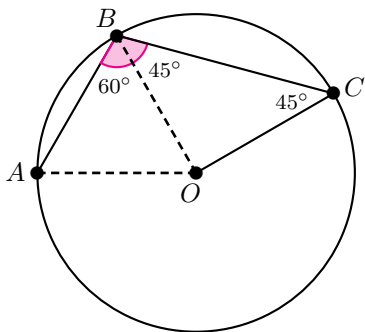
Nota: El problema solo pide el valor numérico de $R \times E \times S \times T \times A$, luego no es necesario completar todo el tablero ni hallar el valor específico de cada letra.

PROBLEMA 95.

Hallar la medida del ángulo sombreado en la siguiente figura, sabiendo que O es el centro del círculo, $AB = OC$ y el ángulo BCO mide 45° .



Solución: Trazando los radios $\overline{OB}$ y $\overline{OA}$, como se muestra en la figura, se observa que el triángulo ABO es equilátero, por lo tanto el ángulo ABO mide 60° ; y también que el triángulo BOC es isósceles en O , luego $\angle OBC = \angle BCO = 45^\circ$.



Así, tenemos que $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$.

PROBLEMA 96.

Paula compró una cantidad de dulces, que es el mayor número, menor que 50, que tiene exactamente 4 divisores naturales, y la suma de sus cifras es un número primo. Si cada día come un caramelo menos que el día anterior, ¿para cuántos días le alcanzan sus caramelos? ¿Cuántos caramelos debe comer cada día?

Solución: En la siguiente tabla se muestran los números menores que 50 cuya suma de sus cifras es un número primo.

Suma de las cifras	Números
13	49.
11	29, 38, 47.
7	16, 25, 34, 43.
5	5, 14, 41, 23, 32.
3	3, 30, 12, 21.
2	2, 20, 11.

Note que los números encerrados dentro de un círculo son los únicos, en la tabla, que tienen exactamente 4 divisores y de ellos el mayor es 38. Este es el número de caramelos que compró Paula.

Por otro lado, sabemos que cada día ella come un caramelo menos que el día anterior, así que se deben buscar números consecutivos que sumen 38, los cuales resultan ser: 8, 9, 10 y 11. Por lo tanto, los caramelos le alcanzan para 4 días y debe comerlos del siguiente modo: 11 el primer día, 10 el segundo, 9 el tercero y 8 el cuarto.

PROBLEMA 97. RELEVOS.

Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado II depende de la respuesta del enunciado I y el enunciado III, de la respuesta del enunciado II.

I. ¿Cuántos números capicúa de cuatro cifras son múltiplos de 15?

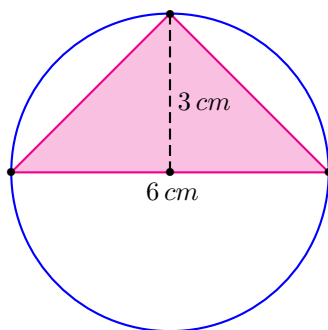
NOTA: Un número es **capicúa** si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

II. Con sus tres vértices sobre una circunferencia, cuyo radio mide, en centímetros, el número hallado en el ítem anterior, se dibuja un triángulo de tal forma que uno de sus lados es diámetro de la circunferencia y su área es la mayor posible. ¿Cuál es el área de este triángulo?

III. ¿En qué año del siglo XX Andrew Wiles demostró el Último Teorema de Fermat, si este coincide con el triple del quintuple de un número de tres cifras cuyo producto es el número de la respuesta del ítem anterior?

Solución:

- I. Los múltiplos de 15 son múltiplos de 3 y de 5 simultáneamente, luego la suma de las cifras de estos números deben ser múltiplo de 3 y terminar en 0 o en 5. Pero como son capicúas, la cifra inicial coincide con la cifra final, por lo tanto solo pueden terminar en 5. De esta manera, los números que cumplen estas condiciones son 3 en total, a saber: 5115, 5445 y 5775.
- II. Si el radio de la circunferencia es 3 cm, su diámetro es 6 cm. Tomando el lado del triángulo que es diámetro de la circunferencia como base, tenemos que la altura, debe medir 3 cm para obtener la mayor área posible, como se muestra en la figura.



Así, el área de dicho triángulo es $\frac{6 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}}{2} = 9 \text{ cm}^2$.

- III. Los números de tres cifras cuyo producto es 9 son: 911, 191, 119, 331, 313, y 133. De ellos, el único que cumple que el triple de su quintuplo es un año del siglo XX es el 133. Luego, el año en que Andrew Wiles demostró el Último Teorema de Fermat fue $3 \times 5 \times 133 = 1995$.

PROBLEMA 98.

Cuando Alicia emprendió su persecución al Conejo Blanco, cayó por la madriguera y llegó a un extraño vestíbulo que tenía 1000 puertas en línea recta enumeradas desde el 1 hasta el 1000. Alicia sabía que alguna de ellas llevaba al Conejo Blanco, así que decidió probar abriendo las puertas de tres formas: primero, intentó abriendo todas las puertas cuyo número era un múltiplo de 15. Después, intentó abriendo las puertas cuyo número fuera un múltiplo de 9. Y finalmente, desesperada, abrió cada puerta cuyo número eran un múltiplo de 4 y la siguiente. Si cada vez que Alicia abría una puerta la volvía a cerrar, ¿en cuántas ocasiones abrió 3 veces la misma puerta?

Solución: Dado que Alicia realizó 3 intentos, buscamos las puertas abiertas en las 3 ocasiones. Haremos el conteo en dos partes, así:

Caso 1. Las puertas cuyo número es múltiplo de 15, de 9 y de 4; es decir, múltiplo del mínimo común múltiplo de dichos números, que es 180. Por tanto, entre la puerta 1 y la puerta 1000 las que tienen los números: 180 , 180×2 , 180×3 , 180×4 y 180×5 , fueron abiertas tres veces por Alicia.

Caso 2. Las puertas cuyo número es múltiplo de 15, de 9 y también son el siguiente de un múltiplo de 4. Hallamos el mínimo común múltiplo de 15 y 9, que es 45 y buscamos entre las opciones: 45 , 45×2 , 45×3 , ..., 45×22 aquellas que cumplan la última condición. Sabemos que si un número es el siguiente de un múltiplo de 4, al restarle 1 nos quedará un múltiplo de 4, así, podemos comprobar si un número de la lista anterior cumple, restándole 1 y verificando, con el criterio de divisibilidad del 4, si es múltiplo de este número. De tal forma, encontramos las 6 puertas: 45 , 45×5 , 45×9 , 45×13 , 45×17 y 45×21 .

Se concluye que en total hay $5 + 6 = 11$ puertas que Alicia abrió 3 veces.

PROBLEMA 99.

El Sombrero Loco hace un experimento: lanza dos dados y anota en su libreta el resultado de sumar los números que quedan en la cara superior de cada dado. ¿Cuántas veces debe lanzar los dados el Sombrero Loco, para estar seguro de que ha escrito el mismo número al menos 5 veces?

Nota: Cada dado es un cubo cuyas caras están enumeradas del 1 al 6.

Solución: El Sombrero Loco puede anotar 11 números: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12. En el peor de los casos, el Sombrero anota cada posible resultado 4 veces, y en tal caso habrá realizado $4 \times 11 = 44$ lanzamientos. Así, basta lanzar otra vez los dados para garantizar que hay uno escrito al menos 5 veces, por lo que con 45 lanzamientos, el Sombrero podrá estar seguro de que ha escrito el mismo número al menos 5 veces.

PROBLEMA 100.

La Reina Blanca invita a Alicia y a sus 5 amigos a jugar dominó. Sin embargo, como es el *País de las Maravillas*, las fichas de este dominó tienen números del 0 al 15. ¿Cuál es la cantidad máxima de fichas que puede recibir cada jugador para que todos tengan la misma cantidad de fichas?

Nota: El dominó está compuesto por fichas rectangulares distintas, de manera que una de sus caras está dividida en dos cuadrados, cada uno de los cuales tiene un número de puntos, en este caso entre 0 a 15 puntos.

Solución: Desde el 0 hasta el 15 hay 16 números. Contemos las fichas del dominó considerando los siguientes casos:

Caso 1. Los números de la ficha son el mismo. En este caso hay 16 fichas:

$$\boxed{0|0}, \boxed{1|1}, \boxed{2|2}, \boxed{3|3}, \dots, \boxed{15|15}.$$

Caso 2. Los dos números de la ficha son diferentes. En este caso, cada uno de los 16 números puede ir con alguno de los otros 15, por lo tanto habrán $16 \times 15 = 240$, pero hasta aquí hemos contado dos veces la misma ficha, pues por ejemplo, la ficha $\boxed{1|0}$ es la misma $\boxed{0|1}$. Por lo tanto solo hay $\frac{240}{2} = 120$ fichas diferentes en este caso.

En total el dominó tiene 136 fichas y hay 7 jugadores, así que para que todos tengan la misma cantidad de fichas, la máxima cantidad que le corresponde a cada uno es 19, pues $7 \times 19 = 133$, y sobran 3 fichas.

PROBLEMA 101.

En agosto de cierto año habían exactamente 4 miércoles y 4 domingos. ¿Qué día fue el 26 de agosto de dicho año?

(a) lunes (b) miércoles (c) sábado (d) domingo (e) No sé

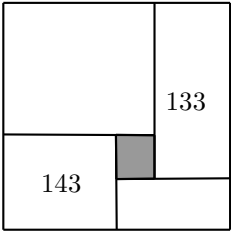
Solución: Agosto tiene 31 días. Entonces para que hayan exactamente 4 miércoles y 4 domingos, el calendario para agosto de tal año necesariamente debe ser el siguiente:

L	M	M	J	V	S	D
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Por lo tanto, el 26 de agosto de tal año fue un lunes.

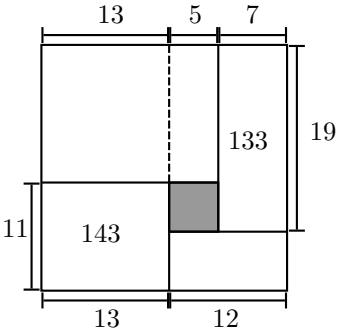
PROBLEMA 102.

Un cuadrado de área 625 cm^2 se cubre con rectángulos cuyas longitudes de los lados, en centímetros, son números enteros mayores que 3, dejando un cuadrado pequeño en el centro, como se muestra en la figura.



Las áreas de dos de los rectángulos, en centímetros cuadrados, son las que están escritas sobre ellos. Encuentre el área del cuadrado que está en el centro.

Solución: Dado que el área del cuadrado es 625 cm^2 , cada lado del cuadrado mide 25 cm , además $143 = 11 \times 13$ y $133 = 7 \times 19$, entonces una posibilidad para las longitudes de los lados de los rectángulos es como se muestra en la figura, así; el área del cuadrado encerrado es $5 \times 5 = 25\text{ cm}^2$.



PROBLEMA 103.

¿Cuántos números diferentes se pueden representar en el ábaco, con 5 aros, si de derecha a izquierda cada barra del ábaco debe tener al menos un aro, hasta colocar el último aro?

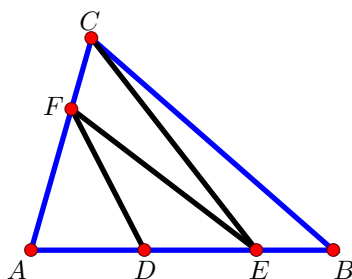
- (a) 7 (b) 12 (c) 16 (d) más de 16 (e) No sé

Solución: En total, se pueden representar 16 números con las condiciones del enunciado, estos son:

11111 2111 221 23 311 41 5
 1211 212 32 131 14
 1121 122 113
 1112

PROBLEMA 104.

En la siguiente figura los triángulos AFD , DFE , FCE y ECB tienen la misma área. Si $AD = 21\text{ cm}$, ¿cuál es la longitud de $\overline{EB}$?



- (a) 12 cm (b) 14 cm (c) 15 cm (d) 18 cm (e) No sé

Solución: Los triángulos AFD y DFE tienen la misma altura, respecto sus bases AD y DE , respectivamente; y dado que tienen la misma área, entonces $AD = DE = 21$. Por otro lado, los triángulos ACE y ECB tienen la misma altura respecto a sus bases AE y EB , respectivamente, pero sus áreas están a razón de 3 a 1, por lo tanto sus bases tienen la misma proporción, esto es $AE = 3EB$, esto es $42 = 3EB$, de ahí que $EB = 14\text{ cm}$.

PROBLEMA 105.

¿Cuántos números de tres cifras hay tales que las unidades son la mitad de las decenas y la tercera parte de las centenas?

- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

Solución: Sea abc el número de tres cifras, se tiene que $c = \frac{b}{2}$ y $c = \frac{a}{3}$, luego $b = 2 \times c$ y $a = 3 \times c$. Como a, b y c son dígitos, entonces los únicos valores que puede tomar c son: 1, 2 y 3. Por lo tanto solo hay tres números que cumplen las condiciones del enunciado, a saber: 321, 642 y 963.

PROBLEMA 106.

El edificio de Pepito tiene 400 apartamentos, de estos el 15 % tienen dos habitaciones y el resto de ellos tienen tres habitaciones. ¿Cuántas habitaciones tiene el edificio?

- (a) 800 (b) 860 (c) 1.140 (d) 1.200

Solución: Se calcula el 15 % de los 400 apartamentos con regla de tres simple:

$$100 \% \rightarrow 400 \text{ apartamentos}$$

$$15 \% \rightarrow x \text{ apartamentos}$$

se tiene que $x = \frac{15 \times 400}{100} = 15 \times 4 = 60$, es decir hay 60 apartamentos de dos habitaciones, estos suman $60 \times 2 = 120$ habitaciones. Los apartamentos restantes son $400 - 60 = 340$ los cuales tienen tres habitaciones cada uno, entonces esos apartamentos tienen $340 \times 3 = 1020$ habitaciones. En total el edificio tiene $120 + 1020 = 1140$ habitaciones.

PROBLEMA 107.

Jairo quiere ordenar sus cuatro carritos (rojo, verde, azul y negro) en una fila. ¿De cuántas formas puede ordenarlos, si el carro azul siempre se ubica de segundo?

- (a) 1 (b) 3 (c) 6 (d) 12

Solución 1: Las posibles formas de ordenar los cuatro carros de distintos colores, teniendo en cuenta que el azul siempre va de segundo en la fila, son 6 en total, como se observa a continuación:

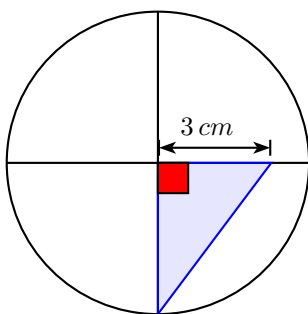
- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. rojo, azul , verde, negro. | 4. verde, azul , negro, rojo. |
| 2. rojo, azul , negro, verde. | 5. negro, azul , rojo, verde. |
| 3. verde, azul , rojo, negro. | 6. negro, azul , verde, rojo. |

Solución 2: Dadas las condiciones, por el principio de multiplicación, se tiene que las posibles formas de ordenar los cuatro carros son

$$\underline{3} \times \underline{1} \times \underline{2} \times \underline{1} = 6.$$

PROBLEMA 108.

Si el área del triángulo es 6 cm^2 , ¿cuál es el diámetro de la circunferencia?



- (a) 2 cm (b) 4 cm (c) 8 cm (d) 12 cm

Solución: Según la figura el triángulo tiene un ángulo de 90° , luego este es un triángulo rectángulo y uno de sus catetos mide 3 cm, si este cateto se considera la base del triángulo entonces su altura correspondiente mide 4 cm, dado que su área es $\frac{4 \times 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$. Ahora bien, esta altura coincide con el otro cateto del triángulo y a su vez con un radio de la circunferencia, entonces el radio mide 4 cm y como el diámetro es el doble del radio, este mide $2 \times 4 = 8 \text{ cm}$.

PROBLEMA 109.

Camila quiere elegir una clave de cuatro dígitos para su celular de tal manera que sus dígitos sean impares y que el número resultante se lea igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. ¿Cuántas posibilidades tiene Camila para elegir la clave?

- (a) 20 (b) 25 (c) 30 (d) 36

Solución: Los dígitos que usará Camila son 1, 3, 5, 7 y 9. Como la clave debe leerse igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, basta elegir los dos primeros dígitos, ya que inmediatamente quedan fijos los dos últimos. Entonces el problema se reduce a contar los números de dos cifras formados con estos dígitos. Por el principio multiplicativo, hay un total de $5 \times 5 = 25$, pues cada cifra puede considerarse de 5 formas.

PROBLEMA 110.

En un colegio, se desea formar a todos los estudiantes de cada grado en filas con el mismo número de estudiantes. Se sabe que

- los estudiantes de 3° se pueden formar en filas de a 3 o de a 7 estudiantes,
- los estudiantes de 4° se pueden formar en filas de a 5 o de a 6 estudiantes, y
- los estudiantes de 5° se pueden formar en filas de a 4 o de a 7 estudiantes.

Es correcto afirmar que:

- (a) en 3° es donde hay menos estudiantes.
(b) en 4° hay exactamente 30 estudiantes.
(c) en 4° se pueden formar filas de 9 estudiantes y sobran 3 estudiantes.
(d) en 5° se pueden formar filas de 14 estudiantes sin que sobre alguno.

Solución: Determinemos el número de estudiantes que puede haber en los grados tercero, cuarto y quinto.

- En tercero se pueden formar filas de 3 o de 7 estudiantes. Es decir que el número de estudiantes de 3 es un múltiplo común de 3 y 7, luego es

múltiplo de $\text{mcm}(3, 7) = 21$. Los múltiplos de 21 son: 21, 42, 63, 84, ...

- Análogamente, para grado cuarto se tiene que el número de estudiantes es un múltiplo de $\text{mcm}(5, 6) = 30$. Los múltiplos de 30 son: 30, 60, 90, 120, ...
- De igual forma, para grado quinto se tiene que el número de estudiantes es un múltiplo de $\text{mcm}(4, 7) = 28$. Los múltiplos de 28 son: 28, 56, 84, 112, ...

A continuación se analiza cada una de las opciones de respuesta:

- (a) No es correcto afirmar que en 3° es donde hay menos estudiantes, pues puede darse el caso en el que en grado tercero haya 42 estudiantes; en grado cuarto, 30 estudiantes y en grado quinto, 28 estudiantes.
- (b) No se puede afirmar que en 4° hay exactamente 30 estudiantes, pues como ya vimos en grado cuarto puede haber 30, 60, 90, 120, ... estudiantes.
- (c) Tampoco se puede asegurar que en 4° se pueden formar filas de 9 estudiantes y sobran 3 estudiantes, pues si el grado cuarto tuviera 60 estudiantes, al formar filas de 9 estudiantes, sobrarían 6.
- (d) Finalmente, note que en 5° se pueden formar filas de 14 estudiantes sin que sobre alguno, pues el número de estudiantes de quinto es múltiplo de 4 y de 7 y por lo tanto de 14. De modo que esta es la opción correcta.

PROBLEMA 111.

Dentro de cada figura del siguiente arreglo se escribe un número natural diferente del 1 al 9 de tal forma que al efectuar la operación el resultado sea el mayor posible. ¿Cuál es este resultado?

$$\frac{\bigcirc - \triangle}{\heartsuit} \times \square$$

(a) 54

(b) 56

(c) 81

(d) 32

Solución: Si $\heartsuit = 1$, $\bigcirc = 9$, $\triangle = 2$ y $\square = 8$, se obtiene el mayor valor posible en el resultado de la operación indicada, a saber:

$$\frac{\bigcirc - \triangle}{\heartsuit} \times \square = \frac{9 - 2}{1} \times 8 = 56.$$

PROBLEMA 112.

En una urna hay 10 balotas enumeradas del 1 al 10. ¿Cuántas balotas, como mínimo, debe extraer una persona con los ojos cerrados para asegurar que una de las balotas extraídas tiene un número primo?

(a) 5

(b) 4

(c) 7

(d) 6

Solución: Del 1 al 10 hay 6 números que no son primos, de manera que para estar seguros de haber extraído una balota con un número primo, debemos extraer, como mínimo, 7 balotas.

Note que si se extraen 6 o menos balotas, no se puede asegurar que al menos una tenga un número primo, pues puede ocurrir que todas estas balotas correspondan a un número compuesto.

PROBLEMA 113.

Gabriela tiene 5 anillos de diferentes colores. ¿De cuántas formas puede lucir los anillos en su mano derecha, si en cada uno de sus 5 dedos se pone un anillo?

(a) 120

(b) 15

(c) 25

(d) 125

Solución: Se trata de contar de cuántas formas se pueden ordenar 5 objetos (anillos) en una fila con 5 posiciones (dedos). Note que para la primera posición (el dedo pulgar) tenemos 5 opciones, y por cada una de estas opciones tenemos 4 opciones para elegir el objeto de la segunda posición (dedo índice), pues ya hay uno en la primera posición, es decir, van 5×4 opciones. Ahora, para cada una de estas opciones tenemos 3 formas de elegir el tercer objeto, esto es $5 \times 4 \times 3$, y para cada una de estas opciones tenemos 2 formas de elegir al cuarto objeto, $5 \times 4 \times 3 \times 2$; finalmente para elegir el quinto objeto, tenemos solo una opción (el que quedó), para un total de $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ formas.

Lo anterior es el principio multiplicativo, que se resume en:

$$\underbrace{5 \text{ opc.}}_{\text{pulgar}} \times \underbrace{4 \text{ opc.}}_{\text{índice}} \times \underbrace{3 \text{ opc.}}_{\text{anular}} \times \underbrace{2 \text{ opc.}}_{\text{corazón}} \times \underbrace{1 \text{ opc.}}_{\text{meñique}} = \underbrace{120}_{\text{formas}}$$

PROBLEMA 114.

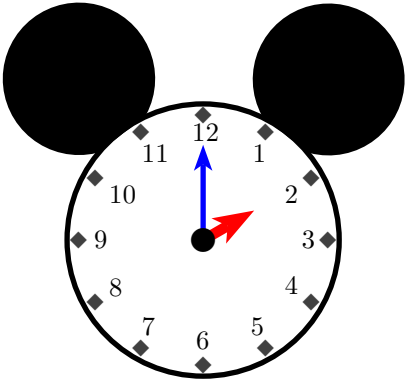
Ana tiene un reloj en su habitación como el que se muestra en la figura. ¿En cuál de las siguientes horas las manecillas del reloj forman un ángulo recto?

(a) 12 : 00

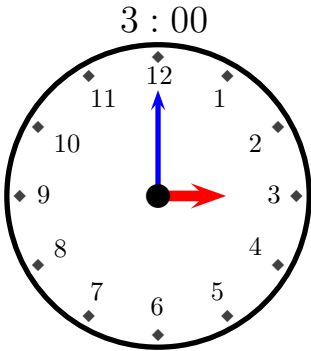
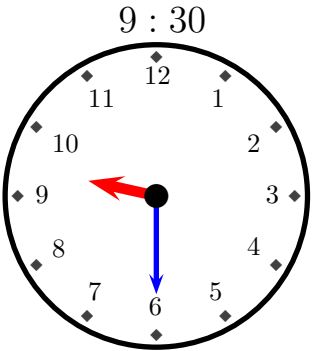
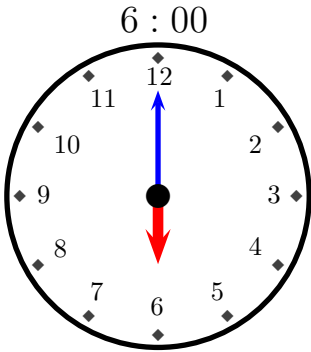
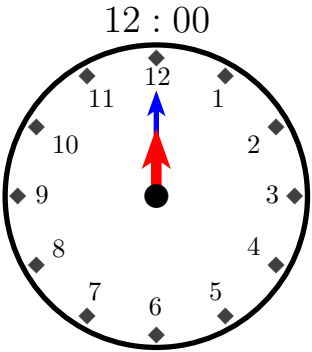
(b) 9 : 30

(c) 6 : 00

(d) 3 : 00



Solución: Las manecillas del reloj forman un ángulo recto a las 3 : 00.



PROBLEMA 115.

Cuatro estudiantes responden Verdadero (V) o Falso (F) en un examen de 5 preguntas como se muestra en la siguiente tabla

	Felipe	Nicolás	Ana	Lucía
Pregunta 1	V	F	V	V
Pregunta 2	F	F	F	V
Pregunta 3	F	V	F	F
Pregunta 4	V	F	F	V
Pregunta 5	F	V	V	F

Si uno de los estudiantes contestó bien todas las preguntas, otro contestó bien solo dos y otro falló en todas sus respuestas, ¿cuántas preguntas contestó bien Felipe?

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 3
- (d) 4

Solución: Se sabe que uno de los estudiantes contestó todas las preguntas bien y otro falló en todas, y se observa que Nicolás y Lucía son los únicos que tienen todas las respuestas distintas entre ellos, luego uno de ellos contestó todo bien y el otro todo mal. Ahora, como otro estudiante contestó bien solo dos respuestas, comparamos las respuestas de Felipe y Ana, con las de Nicolás y Lucía notando que las respuestas de Felipe coinciden en 4 respuestas con Lucía y en 1 con las de Nicolás, mientras que las respuestas de Ana coinciden en 2 con las de Lucía, y en 3 con las de Nicolás. De lo anterior se concluye que Lucía es quien tiene todas las respuestas correctas, y así Felipe contestó bien 4 preguntas.

PROBLEMA 116.

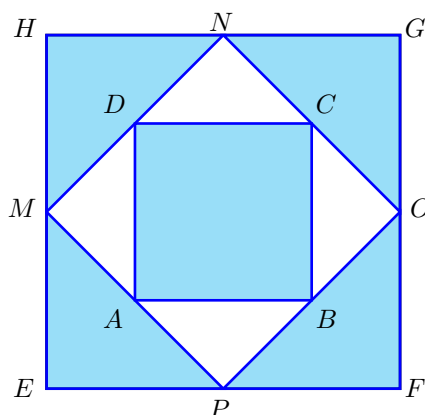
Elian representó el número de la clave de su celular en el ábaco con 21 aritos. De la clave del celular de Elian podemos asegurar que

- (a) es múltiplo de 7.
- (b) es mayor que 400.
- (c) es divisible entre 3.
- (d) tiene más de tres dígitos.

Solución: Note que el número de aritos que se usan para representar un número en el ábaco coincide con la suma de sus cifras, de modo que si Elian usó 21 aritos para representar el número de la clave de su celular, entonces este número es divisible entre 3, pues la suma de sus cifras es 21, que es múltiplo de 3. Las demás opciones se pueden descartar con casos particulares.

PROBLEMA 117.

Calcule el área sombreada en la siguiente figura, sabiendo que el lado del cuadrado $EFGH$ mide 8 cm , el lado del cuadrado $ABCD$ mide 4 cm , y M , N , O , y P son los puntos medios de los lados del cuadrado $EFGH$.



(a) 48 cm^2

(b) 64 cm^2

(c) 16 cm^2

(d) 40 cm^2

Solución: En la figura se observa que el área sombreada corresponde al área del cuadrado $ABCD$ más el área de cuatro triángulos, cada uno con igual área. Ahora, como el lado del cuadrado $ABCD$ mide 4 cm , su área es 16 cm^2 . Además, $HM = HN = 4\text{ cm}$, y de esto se sigue que el área del triángulo MHN es $\frac{4\text{ cm} \times 4\text{ cm}}{2} = 8\text{ cm}^2$. Así, el área sombreada está dada por $16\text{ cm}^2 + 4 \times (8\text{ cm}^2) = 48\text{ cm}^2$.

PROBLEMA 118.

David debe construir un rectángulo cuyo perímetro sea 20 cm usando fichas cuadradas de área 4 cm^2 . ¿Cuál es el mayor área que puede tener este rectángulo?

(a) 16 cm^2

(b) 36 cm^2

(c) 24 cm^2

(d) 40 cm^2

Solución: Dado que cada ficha cuadrada tiene 4 cm^2 de área, cada uno de sus lados mide 2 cm , así el rectángulo que construya David debe tener lados de longitud par (en centímetros). Además, como el perímetro del rectángulo debe ser 20 cm y este se puede interpretar como el doble la suma de las longitudes de dos lados consecutivos, entonces dicha suma debe ser 10 cm . De modo que el rectángulo puede tener lados de 2 y 8 o de 4 y 6 centímetros, respectivamente. Pero es el segundo rectángulo, que se forma con 3 fichas de base y 2 de altura, el que tiene la mayor área: 24 cm^2 .

PROBLEMA 119.

Pedro necesita una clave para su celular de 4 dígitos, pero quiere que tenga estas condiciones:

- Los dígitos deben estar en forma ascendente de izquierda a derecha.
- El último dígito debe ser par.
- No puede haber 2 dígitos consecutivos.

¿Cuántas claves diferentes cumplen estas condiciones?

(a) 11

(b) 8

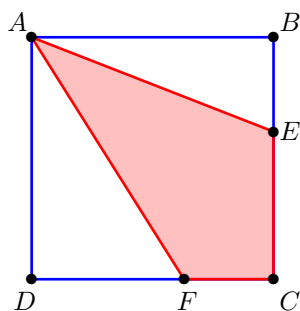
(c) 10

(d) 7

Solución: En total hay 11 claves diferentes que cumplen estas condiciones, a saber: $\boxed{0246}$, $\boxed{2468}$, $\boxed{1468}$, $\boxed{0468}$, $\boxed{1368}$, $\boxed{0368}$, $\boxed{0268}$, $\boxed{1358}$, $\boxed{0358}$, $\boxed{0258}$ y $\boxed{0248}$.

PROBLEMA 120.

En la figura el área del cuadrado $ABCD$ es 30 cm^2 . Si $EB = FC$, ¿cuál es el área de la región sombreada de rojo?



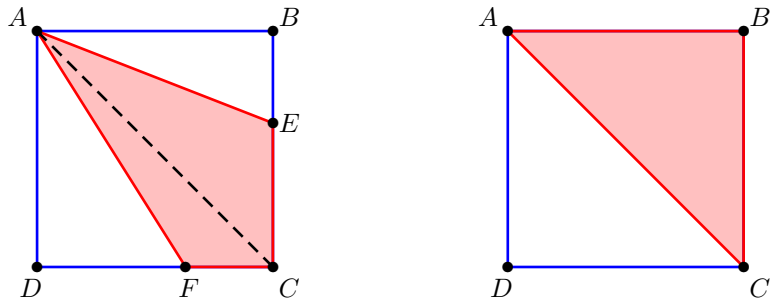
(a) 20 cm^2

(b) 15 cm^2

(c) 10 cm^2

(d) 18 cm^2

Solución: Considere las siguientes figuras:



Dado que $ABCD$ es un cuadrado tenemos que $\overline{AD} = \overline{AB}$ y además, $\overline{EB} = \overline{FC}$ luego el área de los triángulos $\triangle AFC$ y $\triangle AEB$ es igual. Por lo tanto, el área sombreada de rojo es igual a la mitad del área del cuadrado $ABCD$, es decir $\frac{30\text{ cm}^2}{2} = 15\text{ cm}^2$.

PROBLEMA 121.

El Tangram es un juego chino muy antiguo, que consiste en formar siluetas de figuras con las siete piezas dadas sin solaparlas. Las siete piezas o “tans” se obtienen seleccionando un cuadrado de modo que se reproduzcan dos triángulos grandes, uno mediano, dos triángulos pequeños, un cuadrado y un romboide como se muestra en la Figura 1. Hallar el valor del ángulo α marcado en la Figura 2, construida a partir de los siete tans.

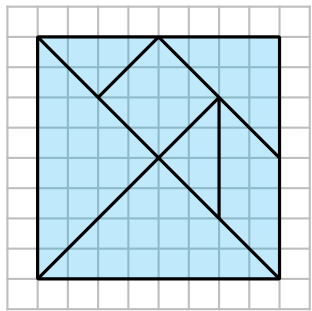


Figura 1.

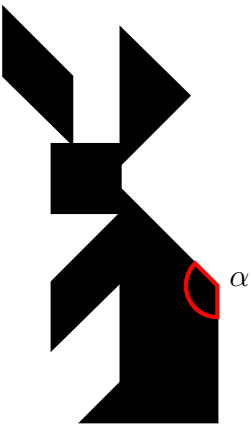


Figura 2.

- (a) 90° (b) 135° (c) 145° (d) 175° (e) 180°

Solución: Note que todos los valores de los ángulos de los tans son múltiplos de 45° y el ángulo α es obtuso, entonces su valor debe ser mayor que 90° , menor que 180° y múltiplo de 45° . Luego $\alpha = 135^\circ$.

PROBLEMA 122.

Juan quiere formar triángulos isósceles con lados cuya longitud en centímetros sea un número entero y de perímetro 14 cm. ¿Cuántos de estos triángulos se puede formar?

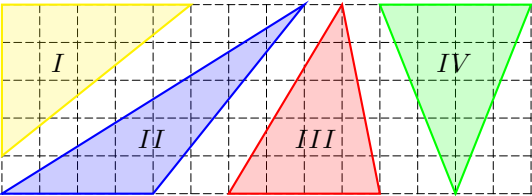
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 6 (e) 14

Solución: Juan puede formar en total 3 triángulos. En la tabla se registran las posibles longitudes de los lados teniendo en cuenta que estas son números enteros, dos deben ser iguales y la suma de las tres es 14. Sin embargo, dado que la suma de las longitudes de dos de los lados de un triángulo tiene que ser estrictamente mayor que la longitud del lado restante, se descartan algunas posibilidades que marcamos con $\times$. Las marcadas con $\checkmark$ son los casos válidos.

Lado 1	1	2	3	4	5	6	7
Lado 2	1	2	3	4	5	6	7
Lado 3	12	10	8	6	4	2	0
¿válido?	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$

PROBLEMA 123.

De la siguiente figura es correcto afirmar que

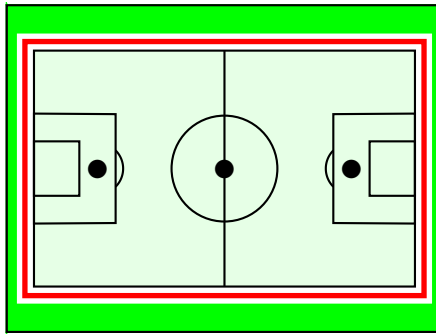


(a) todos los triángulos tienen igual perímetro.
(b) todos los triángulos tienen la misma área.
(c) el triángulo *II* tiene mayor área.
(d) todos los triángulos son escalenos.

Solución: Teniendo en cuenta la cuadrícula en la que están dibujados los triángulos, puede observarse que en cada uno de ellos una base mide 4 unidades y la altura correspondiente mide 5 unidades. Por tanto, los cuatro triángulos tienen la misma área. Las demás afirmaciones son falsas, ya que por ejemplo el triángulo IV es isósceles y como ejercicio al lector dejamos la verificación de que los cuatro triángulos tienen diferente perímetro.

PROBLEMA 124.

Para construir una cancha de fútbol, se dispone de un terreno rectangular de 120 m por 100 m . Para la gradería hay que dejar 10 m desde los lados más largos del terreno y 5 m desde los lados más cortos. Además, las vallas publicitarias se construyen a 1 m de la tribuna y 1 m del terreno de juego. ¿Cuál es el área del terreno de juego en m^2 ?



- (a) 100×80 (b) 110×85 (c) 96×86 (d) 106×76

Solución: Para construir el terreno de juego se debe dejar, desde los lados más cortos del terreno disponible, 5 m para gradería y 2 m para vallas publicitarias. Entonces, en los lados más largos del terreno disponible que miden 120 m , quedan en total $120\text{ m} - 7\text{ m} - 7\text{ m} = 106\text{ m}$. Ahora bien, desde los lados más largos del terreno disponible, se deben dejar 10 m para gradería y 2 m para vallas publicitarias. Así, en los lados más cortos del terreno disponible que miden 100 m , quedan en total $100\text{ m} - 12\text{ m} - 12\text{ m} = 76\text{ m}$. En conclusión, el área del terreno de juego es $(106 \times 76)\text{ m}^2$.

PROBLEMA 125.

Los padres de Diego le compraron una camisa, un pantalón y un par de zapatos por \$135.000. Si el pantalón costó el doble de lo que costó la camisa y los zapatos costaron el triple de lo que costó el pantalón, ¿cuánto costó la camisa y el pantalón?

- (a) \$45.000 (b) \$105.000 (c) \$120.000 (d) \$90.000

Solución: El enunciado plantea que, en términos de precios,

$$\text{camisa} + \text{pantalón} + \text{zapatos} = \$135,000.$$

Además, como el pantalón costó el doble que la camisa, y los zapatos costaron el triple que el pantalón, entonces el precio de los zapatos fue seis veces el precio la camisa. Con esta información, los \$135,000 pueden ser vistos únicamente en términos del precio de la camisa, a saber

$$\text{camisa} + 2 \times \text{camisa} + 6 \times \text{camisa} = \$135,000.$$

De lo anterior se deduce que, $9 \times \text{camisa} = \$135,000$. De ahí que el valor de la camisa es $\$135,000 \div 9 = \$15,000$. Entonces el precio del pantalón, que costó el doble de lo que costó la camisa, es \$30,000. Por ende, la suma de los precios del pantalón y la camisa es

$$\$15,000 + \$30,000 = \$45,000.$$

PROBLEMA 126.

En una veterinaria hay 4 perros y 3 gatos. Al pesar los perros de todas las formas posibles en grupos de dos, los pesos son 34 kg, 20 kg, 32 kg, 28 kg, 40 kg y 26 kg. Los pesos de los gatos en todas las parejas posibles son 9 kg, 8 kg y 7 kg. ¿Cuál es la diferencia entre el peso total de los perros y el peso total de los gatos?

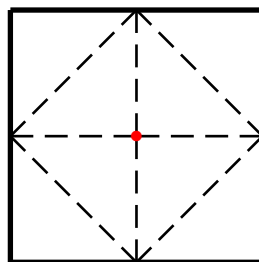
- (a) 37 kg (b) 48 kg (c) 53 kg (d) 72 kg (e) No sé

Solución: Cada perro se pesó tres veces. De modo que, si consideramos la suma de los pesos dados para los perros, 180 kg, estamos sumando el peso de cada perro tres veces, así, si dividimos dicha suma entre 3, tenemos el peso total de

los 4 perros: 60 kg. Sucede de manera similar con los gatos, cada uno se pesó dos veces. La suma de los pesos dados para los gatos es 24 kg, en esta suma el peso de cada gato está contado dos veces, luego el peso total de los 3 gatos es 12 kg. La diferencia entre el peso total de los perros y el peso total de los gatos es $60 - 12 = 48$ kg.

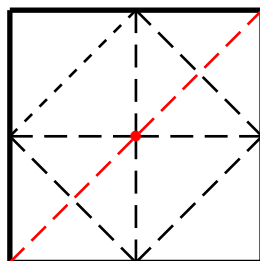
PROBLEMA 127.

La diagonal de la hoja de papel cuadrada mide 12 cm. Se quieren doblar las esquinas de la hoja de tal manera que los vértices del cuadrado inicial queden en el centro de la hoja, como lo muestra la figura. ¿Cuál sería el área del nuevo cuadrado?



- (a) 24 cm^2 (b) 72 cm^2 (c) 36 cm^2 (d) 48 cm^2 (e) No sé

Solución: A partir de la figura, note que el lado del nuevo cuadrado es igual la mitad de la diagonal cuya medida conocemos, 12 cm. Luego la longitud del lado de dicho lado es 6 cm, y por lo tanto el área del nuevo cuadrado es 36 cm^2 .



PROBLEMA 128.

Hay 8 asientos seguidos numerados del 1 al 8. Por normas de bioseguridad, entre cada dos personas sentadas debe haber al menos un asiento libre. Si ningún asiento está ocupado, ¿de cuántas formas pueden sentarse Carlos y Bertha?

- (a) 28 (b) 56 (c) 21 (d) 42 (e) No sé

Solución: Supongamos que Carlos toma un asiento de menor numeración al de Bertha. Si Carlos toma el asiento 1, hay 6 posibilidades para el asiento de Bertha: 3, 4, 5, 6, 7 o 8. Si Carlos toma el 2, hay 5 posibilidades. Si Carlos toma el 3, hay 4. Seguimos así, hasta que al Carlos tomar el asiento 6, solo hay 1 posibilidad, que Bertha tome el asiento 8. La cantidad de posibilidades,

considerando que la numeración del asiento de Carlos es menor al de Bertha, es $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$. De igual manera, si la numeración del asiento de Bertha es menor al de Carlos, el número de posibilidades es 21. El total de posibilidades es entonces 42.

PROBLEMA 129.

Diego borró un número de una lista de 10 números naturales consecutivos. Si la suma de los que quedaron es 2021, ¿cuál fue el número que borró?

- (a) 224 (b) 124 (c) 356 (d) 479 (e) No sé

Solución: Sea n el menor de los 10 números. Entonces la suma de los 10 números consecutivos es $10n + 45$.

A esta suma le quitamos el número que borró Diego, x , y se obtiene:

$$\begin{aligned}10n + 45 - x &= 2021, \\10n &= 2021 - 45 + x \\n &= \frac{1976 + x}{10}.\end{aligned}$$

Pero n es un número natural, entonces $1976 + x$ debe ser múltiplo de 10, esto es, terminar en 0. De las opciones de respuesta las únicas que hacen que $1976 + x$ termine en 0, son 224 y 124, pero 124 no puede ser uno de los 10 números consecutivos, pues de ser serlo, la suma de los demás no alcanza a 2021. Por lo tanto, el número que borró Diego es el 224. De hecho, los 10 números eran:

$$220, 221, 222, 223, \textcircled{224}, 225, 226, 227, 228, 229.$$

PROBLEMA 130.

Juan compró una camisa por el 25 % del precio que compró un pantalón. Si él pagó \$110.000 por ambas prendas, ¿cuánto pagó solo por la camisa?

Solución 1: El precio de una camisa es un cuarto del precio del pantalón, o equivalentemente, el precio de un pantalón es el mismo que el de 4 camisas. Por lo tanto \$110.000 que el precio de un pantalón y una camisa, es el mismo que el de 5 camisas, de ahí que una camisa cuesta $\$110.000 \div 5 = \22.000 .

Solución 2: Si el costo de la camisa es el 25 % del precio del pantalón se puede decir que la camisa y el pantalón cuestan 125 % del costo del pantalón lo cual

corresponde a \$110.000 pues es lo pagado por ambas prendas. Ahora, 125 % dividido entre 5 es 25 %, por tanto al dividir \$110.000 entre 5 se debe obtener lo correspondiente al costo de la camisa, haciendo esta operación se encuentra que la camisa costó \$22.000.

PROBLEMA 131.

En la escuela primaria San Fermín por cada 4 niños hay 5 niñas. En primero hay 50 estudiantes y en cada grado a partir de segundo hay 20 estudiantes más que en el grado anterior. Las cantidades de niños y niñas de primaria son respectivamente

- (a) 150 y 300 (b) 180 y 225 (c) 200 y 250 (d) 40 y 50

Solución: En primero hay 50 estudiantes y en cada grado a partir de segundo hay 20 estudiantes más que en el grado anterior. Es decir, en segundo hay $50 + 20 = 70$; en tercero hay $70 + 20 = 90$; en cuarto hay $90 + 20 = 110$ y en quinto hay $110 + 20 = 130$. Así el número total de estudiantes es:

$$50 + 70 + 90 + 110 + 130 = 450.$$

Ahora, puesto que por cada 4 niños hay 5 niñas, de los 450 estudiantes, $\frac{4}{9}$ son niños y $\frac{5}{9}$ son niñas. Luego las cantidades de niños y niñas en primaria son respectivamente 200 y 250.

PROBLEMA 132.

Carlos, Juan, Andrés, Camila y Juana van al cine y eligen cinco puestos consecutivos en una misma fila. Si Juana se sienta en la mitad de todos y Andrés no quiere sentarse al lado de Juana, ¿de cuántas formas diferentes se pueden acomodar Carlos, Juan, Andrés y Camila?

Solución: Como Juana tiene que sentarse en el medio, entonces solo tiene una forma de hacerlo; Andrés tiene dos posibilidades de sentarse, que son a los dos extremos, para no quedar al lado de Juana; Carlos, Juan y Camila tienen 6 formas diferentes de sentarse. Así por el principio de multiplicidad hay $1 \times 2 \times 6 = 12$ formas diferentes que se pueden acomodar.

PROBLEMA 133.

En una feria hay un juego que consta de un tablero sobre el cual se encuentran distribuidos 20 globos (5 rojos, 5 amarillos, 5 azules y 5 verdes). Sabiendo que Mariana hizo 5 tiros y en cada uno de ellos reventó un único globo, es correcto afirmar que Mariana reventó

- (a) un globo de cada color.
- (b) por lo menos dos globos del mismo color.
- (c) tres globos del mismo color.
- (d) todos los globos de un solo color.

Solución: Primero, observe que los literales (a), (c) y (d) no se pueden asegurar, ya que:

- el literal (a) implica que hay 5 diferentes colores de globos, pero no es así, solo hay 4;
- los literales (c) y (d) no consideran, por ejemplo, que los globos que reventó Mariana sean de color: rojo, rojo, amarillo, azul y azul.

Finalmente, note que solo hay cuatro colores de globos, pero Mariana reventó 5 globos, entonces necesariamente debió romper al menos dos globos del mismo color.

PROBLEMA 134.

En un grupo de 6 amigos, todos menos Juan tienen la misma cantidad de juguetes cada uno. Si Juan tiene 2 juguetes más que uno de sus amigos, es correcto afirmar que el número total de juguetes que tienen los 6 amigos es

(a) 12 (b) 8 (c) divisible entre 2 (d) múltiplo de 3

Solución: Como cada uno de los 6 amigos tiene la misma cantidad de juguetes, menos Juan que tiene 2 más que uno de ellos, entonces el número total de juguetes excede en 2 a un múltiplo de 6 y por lo tanto es par, esto es, divisible entre 2.

En efecto, sea n el número de juguetes de un amigo de Juan. Entonces el número de juguetes de Juan es $n + 2$, luego el número total de juguetes está dado por:

$$n + n + n + n + n + (n + 2) = 6n + 2 = 2(3n + 1).$$

que es múltiplo de 2. Como ejercicio para el lector se deja justificar que las demás afirmaciones son falsas.

PROBLEMA 135.

¿Cuántos números capicúa de 4 cifras son múltiplos de 3?

Nota: un número se llama **capicúa** si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Ejemplo: 4224 es capicúa.

(a) 27

(b) 30

(c) 33

(d) 24

Solución 1: Teniendo en cuenta el criterio de divisibilidad por 3, se tiene que los números capicúa de cuatro cifras que son múltiplos de 3 cumplen con las siguientes condiciones:

- Tienen la forma $abba$, donde a, b son dígitos, con $a \neq 0$.
- La suma de sus dígitos es un múltiplo de 3.

Los números que cumplen con estas condiciones son:

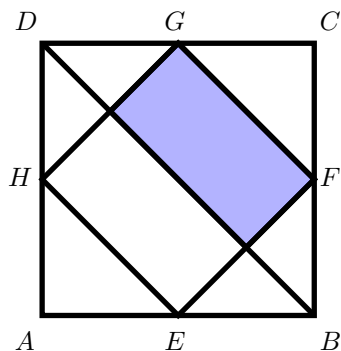
1221	1551	1881	2112	2442	2772
3003	3333	3663	3993	4224	4554
4884	5115	5445	5775	6006	6336
6666	6996	7227	7557	7887	8118
8448	8778	9009	9339	9669	9999

Luego hay 30 números capicúa de cuatro cifras que son múltiplos de 3.

Solución 2: La suma de las cifras del número $abba$ es $2(a + b)$, para que esta cantidad sea múltiplo de 3 se requiere que $a + b$ sea múltiplo de 3. Dado que a y b son dígitos con $a \neq 0$, las únicas posibilidades para (a, b) son: $(1, 2), (1, 5), (1, 8), (2, 1), (2, 4), (2, 7), (3, 0), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 2), (4, 5), (4, 8), (5, 1), (5, 4), (5, 7), (6, 0), (6, 3), (6, 6), (6, 9), (7, 2), (7, 5), (7, 8), (8, 1), (8, 4), (8, 7), (9, 0), (9, 3), (9, 6)$ y $(9, 9)$. Por lo tanto hay 30 números que cumplen las condiciones del enunciado.

PROBLEMA 136.

En la siguiente figura E , F , G , H son los puntos medios de los lados del cuadrado $ABCD$. ¿Qué fracción del área del cuadrado $ABCD$ representa el área de la figura sombreada?



(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{4}$

(d) $\frac{1}{8}$

Solución: Considere las siguientes figuras:

Figura 1.

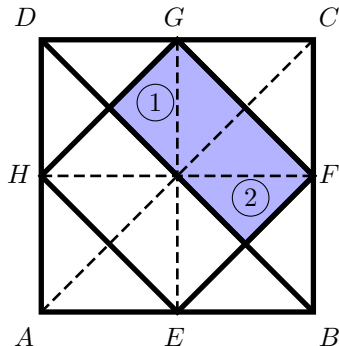
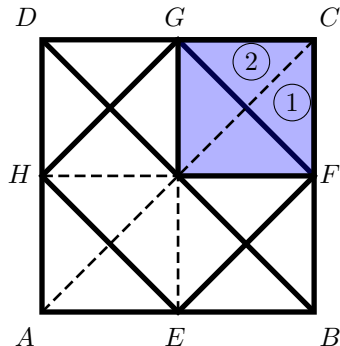


Figura 2.

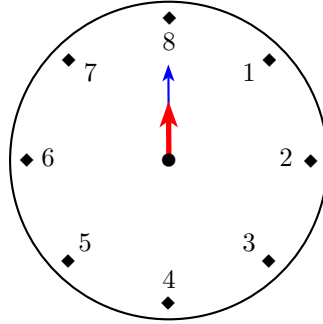


Solución 1: Trasladando convenientemente las regiones marcadas como ① y ② en la Figura 1 obtenemos la Figura 2, en la que se observa que el área sombreada equivale a $\frac{1}{4}$ del área del cuadrado $ABCD$.

Solución 2: En la Figura 1, note que el cuadrado $ABCD$ está dividido en 16 triángulos con igual área, de los cuales 4 forman la región sombreada. Por lo tanto la fracción de área del cuadrado $ABCD$ que está sombreada es $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

PROBLEMA 137.

Isabella compró un reloj de manecillas muy especial, ya que en lugar de contar hasta 12 horas solo contaba hasta 8, el minuterero cambiaba de número cada 5 minutos y el horario cambiaba de número cada vez que el minuterero pasaba por el número 8. Cuando Isabella compró el reloj marcaba la hora que muestra la figura.

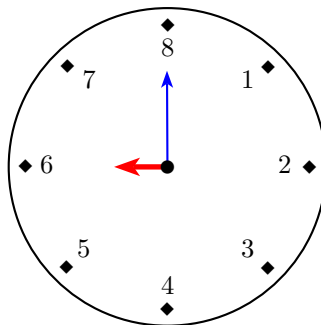


- Haga un dibujo del reloj de Isabella cuando han pasado 4 horas.
- Calcule la medida del ángulo menor que forman las manecillas del reloj de Isabella cuando han pasado 4 horas.

Solución:

- Se puede observar que una vuelta completa del minuterero en el reloj especial realmente son 40 minutos; por lo tanto, para que el reloj especial marque una hora real, que son 60 minutos, hacen falta 20 minutos y esto corresponde a media vuelta de las manecillas del reloj especial. Así, por cada hora real, el minuterero del reloj especial da una vuelta y media.*

De modo que en el reloj especial, luego de 4 horas reales, el minuterero ha dado exactamente 6 vueltas, y por tanto, el horario se ha movido 6 números, pasando del 8 hasta el 6, como se muestra en la figura:



- En la figura del ítem anterior se observa que las manecillas del reloj especial*

forman un ángulo 90° cuando han pasado 4 horas, desde el momento de la compra. En efecto, como la vuelta completa equivale a 360° , entonces cada vez que el horario del reloj se mueve de un número a otro barre un ángulo de $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$. Además, vimos que después de las 4 horas el minutero está en su posición inicial y el horario se ha movido 6 números, entonces este último a barrido un ángulo de $45^\circ \times 6 = 270^\circ$. Por lo tanto, la medida del ángulo menor que forman las manecillas del reloj en dicho momento es $360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$.

PROBLEMA 138.

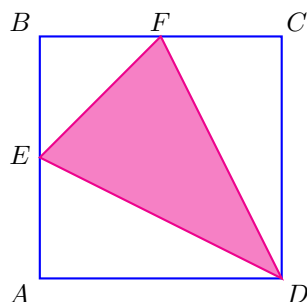
María ahorró \$1.600 durante la semana y Camilo, \$3.000. Si María gastó $\frac{3}{4}$ de su dinero el fin de semana y Camilo, $\frac{2}{5}$ del suyo; es correcto afirmar que

- (a) María gastó más dinero que Camilo.
- (b) Camilo gastó más dinero que María.
- (c) ambos gastaron la misma cantidad de dinero.
- (d) ambos quedaron con la misma cantidad de dinero.

Solución: Note que $\frac{3}{4}$ de 1600 equivale a $\frac{1600}{4} \times 3 = 1200$, luego María gastó \$1.200 y quedó con \$400. Además, $\frac{2}{5}$ de 3000 corresponde a $\frac{3000}{5} \times 2 = 1200$, de modo que Camilo gastó \$1.200 y quedó con \$1.800. En conclusión, ambos gastaron la misma cantidad de dinero.

PROBLEMA 139.

En la siguiente figura se representa un cuadrado $ABCD$ que tiene 8 cm de lado. Si E y F son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, ¿cuál es el área del triángulo EFD ?



Solución: Note que el área sombreada corresponde al área del cuadrado $ABCD$ menos el área de cada uno de los triángulos ADE , EBF y FCD .

El área del cuadrado $ABCD$ es $8\text{ cm} \times 8\text{ cm} = 64\text{ cm}^2$, además como E y F son los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BF}$ respectivamente, entonces $EA = EB = BF = 4\text{ cm}$. Así, las áreas de los triángulos ADE , EBF y FCD son, respectivamente, $\frac{8\text{ cm} \times 4\text{ cm}}{2} = 16\text{ cm}^2$, $\frac{4\text{ cm} \times 4\text{ cm}}{2} = 8\text{ cm}^2$, y $\frac{8\text{ cm} \times 4\text{ cm}}{2} = 16\text{ cm}^2$. Por lo tanto, el área del triángulo EFD es $64\text{ cm}^2 - 16\text{ cm}^2 - 8\text{ cm}^2 - 16\text{ cm}^2 = 24\text{ cm}^2$.

PROBLEMA 140.

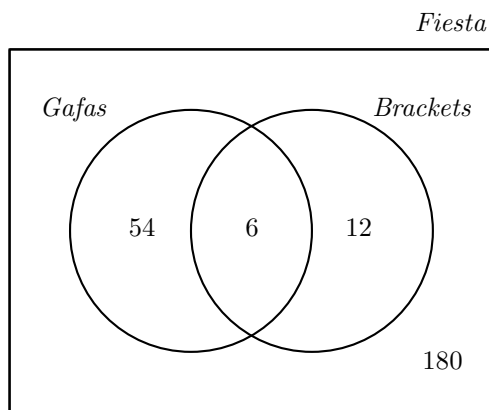
Un científico estuvo dentro de una cueva en una expedición que duró 1.000 horas. Si la expedición inició un lunes a las 6 de la mañana, ¿qué día de la semana y a qué hora terminó?

Solución: Al dividir 1000 entre 24 obtenemos 41 de cociente y 16 de residuo, esto indica que la expedición duró 41 días y 16 horas. Además, al dividir 41 entre 7 obtenemos 5 de cociente y 6 de residuo, lo que significa que la expedición duró 5 semanas, 6 días y 16 horas. Así, como la expedición inició un lunes, entonces terminó un domingo, 16 horas después de las 6 a.m., es decir, a las 10 p.m.

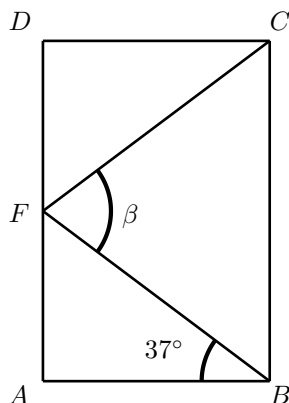
PROBLEMA 141.

En la fiesta de cumpleaños de Leonardo se observó que 60 personas usaban gafas, y 18 personas tenían brackets. Además el número de personas que usan gafas y llevan brackets es el máximo común divisor entre 60 y 18, mientras que las personas que no usaban gafas ni tenían brackets era el mínimo común múltiplo entre 60 y 18. ¿Cuántas personas habían en la fiesta de Leonardo?

Solución: El máximo común divisor entre 60 y 18, es 6, este es el número de personas que usan gafas y llevan brackets, luego $60 - 6 = 54$ personas usan gafas pero no tienen brackets y $18 - 6 = 12$ personas tienen brackets pero no usan gafas. Además, el mínimo común múltiplo entre 60 y 18, es 180, que es el número de personas que no usan gafas ni llevan brackets. Por lo tanto, el número total de personas que había en la fiesta de Leonardo es $54 + 12 + 6 + 180 = 252$.

**PROBLEMA 142.**

En la siguiente figura $ABCD$ es un rectángulo y el triángulo CFB es isósceles, con $FC = FB$. Si el ángulo FBA mide 37° , ¿cuánto mide el ángulo β marcado en la figura?



Solución: Dado que $ABCD$ es un rectángulo, entonces $\angle ABC = 90^\circ$, y como $\angle FBA = 37^\circ$, se tiene que $\angle AFB = 53^\circ$, pues la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180° . Por otro lado, como el triángulo BFC es isósceles, con $FC = FB$, entonces $\angle FCB = \angle CBF = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$, luego $\angle DCF = 37^\circ$ y así, $\angle CFD = 53^\circ$. Finalmente, note que

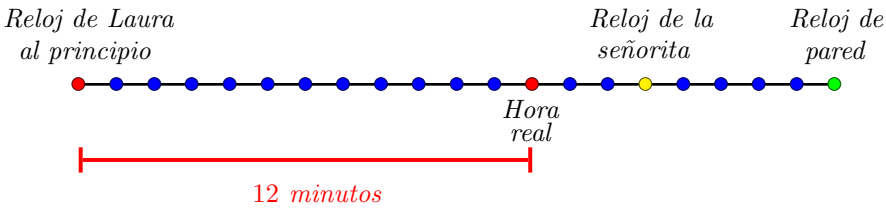
$$\beta = 180^\circ - \angle AFB - \angle DCF = 180^\circ - 53^\circ - 53^\circ = 74^\circ.$$

PROBLEMA 143.

Laura sale de su casa y cuando llega a su cita médica mira su reloj y se da cuenta que llegó a tiempo. Luego mira el reloj que está en la pared y descubre que había llegado 20 minutos tarde, por lo que decide ajustar la hora en su reloj con la que marca el reloj de la pared. Después llega a la peluquería y la señorita le dice que ha llegado 5 minutos antes de la cita. A Laura le parece raro puesto que acorde con su reloj llegó puntual. Si el reloj de la señorita estaba adelantado 3 minutos, ¿cuántos minutos estaba adelantado o atrasado el reloj de Laura al principio?

- (a) 8 minutos atrasado
- (b) 12 minutos atrasado
- (c) 17 minutos adelantado
- (d) 17 minutos atrasado

Solución 1: De la información: “Laura sale de su casa y cuando llega a su cita médica mira su reloj y se da cuenta que llegó a tiempo. Luego mira el reloj que está en la pared y descubre que había llegado 20 minutos tarde”, se deduce que el reloj de Laura estaba atrasado 20 minutos con respecto al de la pared (en el lugar de la cita médica). En este momento, Laura decide “ajustar la hora en su reloj con la que marca el reloj de la pared”. Ahora, al llegar a la peluquería la señorita le dice que ha llegado 5 minutos antes de la cita, pero el reloj de la señorita estaba adelantado 3 minutos, esto es, la hora que marcaba el reloj de pared (que es la que ahora marca el reloj de Laura) estaba adelantada 8 minutos respecto a la hora correcta, por lo tanto, el reloj de Laura estaba atrasado solo $20 - 8 = 12$ minutos. El siguiente diagrama ilustra la solución.



Solución 2: Supongamos que Laura tiene su cita médica a las 9 y su cita en la peluquería a las 10. Laura llega al médico, ve su reloj y se da cuenta que marca las 9 en punto, pero

ve que el reloj de la pared marca las 9 : 20, entonces Laura adelanta su reloj a las 9 : 20, pasan 40 minutos y Laura llega a su cita en la peluquería pensando que está a tiempo, pero la señorita de la peluquería le dice que son las 9 : 55, sin embargo, realmente son las 9 : 52.

Entonces, hace 40 minutos, cuando el reloj de Laura marcaba las 9 eran realmente las 9 : 12. Esto quiere decir que al principio el reloj de Laura estaba atrasado 12 minutos.

PROBLEMA 144.

Pedro fue al mercado y compró 2 manzanas y 3 peras. El vendedor por equivocación intercambió los precios de las manzanas con los de las peras y le cobró a Pedro 6000 pesos. Si el valor cobrado excede en 1000 pesos al valor real de compra, ¿cuál es el valor de una manzana y una pera?

- (a) 1100 pesos
- (b) 1200 pesos
- (c) 2200 pesos
- (d) 2300 pesos

Solución 1: Si m es el precio de una manzana y p el precio de una pera, entonces el vendedor cobró $3m + 2p = 6000$, pero el valor real es $2m + 3p = 5000$. Sumando estas dos ecuaciones tenemos:

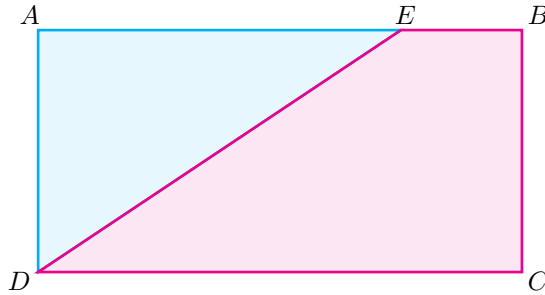
$$\begin{array}{r} 3m + 2p = 6000 \\ 2m + 3p = 5000 \\ \hline 5m + 5p = 11000 \end{array}$$

Por lo tanto una manzana y una pera cuestan $m + p = \frac{11000}{5} = 2200$ pesos.

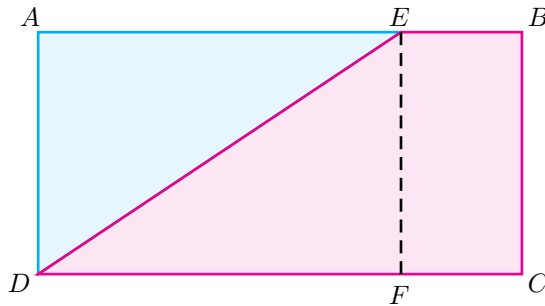
Solución 2: La diferencia entre el valor cobrado y el valor real es 1000 pesos, entonces el precio de una manzana es 1000 pesos más que el de una pera, luego el precio de dos manzanas será 2000 pesos más que el precio de 2 peras, pero esto quiere decir que 5 peras valen 3000 pesos, así que cada pera vale \$600 y entonces una manzana vale \$1600. Por lo tanto, el valor de una manzana y una pera es 2200 pesos.

PROBLEMA 145.

En la siguiente figura, $ABCD$ es un rectángulo tal que el lado $\overline{AB}$ mide el doble del lado $\overline{AD}$. Si el área del cuadrilátero $DEBC$ es el doble del área del triángulo AED y el perímetro del rectángulo $ABCD$ es 36 cm , ¿cuánto mide el segmento $\overline{AE}$?

(a) 6 cm (b) 12 cm (c) 8 cm (d) 10 cm

Solución: Considere la siguiente figura, en la que se ha trazado $\overline{EF}$ perpendicular a $\overline{DC}$.



Note que los triángulos AED y FDE tienen la misma área, y dado que el área del cuadrilátero $DEBC$ es el doble del área del triángulo AED , entonces el área del rectángulo $EBCF$ es igual al área del triángulo AED , es decir

$$EB \times BC = \frac{AE \times AD}{2},$$

pero $AD = BC$, entonces $2 \times EB = AE$.

Por otra parte, el perímetro del rectángulo $ABCD$ es $2 \times (BC + AB) = 36\text{ cm}$

y del enunciado se tiene que $BC = \frac{1}{2}AB$, entonces

$$2 \times (BC + AB) = 2 \times \left(\frac{1}{2}AB + AB \right) = 36 \text{ cm},$$

$$2 \times \frac{3}{2}AB = 36 \text{ cm},$$

$$3 \times AB = 36 \text{ cm},$$

$$AB = 12 \text{ cm}.$$

Finalmente, note que $AB = AE + EB$, pero vimos que $2 \times EB = AE$, entonces $EB = 4 \text{ cm}$ y $AE = 8 \text{ cm}$.

PROBLEMA 146.

El producto de tres números naturales múltiplos de 3, pero diferentes de 3, es 2835. ¿Cuál es la suma de estos números?

(a) 53

(b) 45

(c) 93

(d) 49

Solución: La descomposición de 2835 en factores primos es $2835 = 3^4 \times 5 \times 7$, luego los tres números naturales múltiplos de 3, diferentes de 3, cuyo producto es 2835, son: 9, 15 y 21, pues $2835 = 3^2 \times (5 \times 3) \times (7 \times 3) = 9 \times 15 \times 21$; y la suma de estos números es $9 + 15 + 21 = 45$.

PROBLEMA 147.

La sucesión de Fibonacci es una sucesión de números naturales donde cada término de la sucesión después del segundo es la suma de los dos términos inmediatamente anteriores, siendo 0 y 1 los términos iniciales. Los primeros términos de esta sucesión son:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

¿Cuántos números pares hay en la sucesión hasta el término 2014?

(a) 3

(b) 672

(c) 4

(d) 671

(e) 1007

Solución: El primer elemento de la sucesión es par y los siguientes dos son impares, después el cuarto término es par y los siguientes dos son impares, así

sucesivamente. Al dividir 2014 entre 3 obtenemos 671 y residuo 1, es decir hay 671 tripletas de términos de la sucesión donde el primero es par y los siguientes dos son impares, teniendo en cuenta el residuo concluimos que hay 672 números pares hasta el término 2014 de la sucesión.

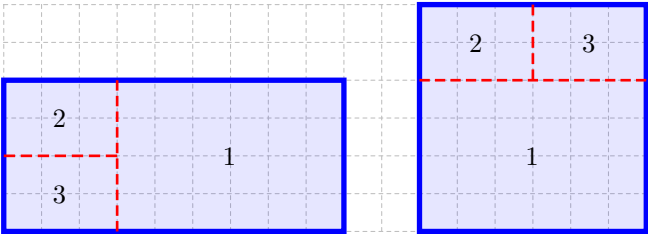
PROBLEMA 148.

Lucía tiene un rectángulo de cartón de 9 cm por 4 cm.

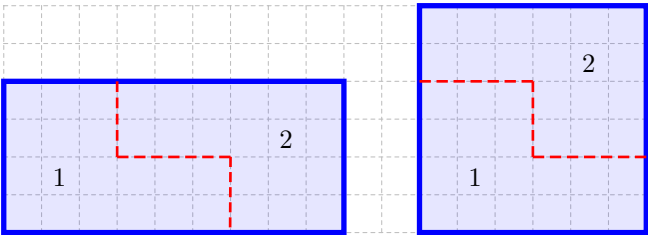
- (a) ¿Es posible dividir el rectángulo en tres piezas rectangulares para formar un cuadrado con 36 cm^2 de área? De ser posible, muestre una forma de hacerlo. no es posible, justificar por qué.
- (b) ¿Es posible dividir el rectángulo en dos piezas para formar un cuadrado con 36 cm^2 de área? De ser posible, muestre una forma de hacerlo, si no es posible, justificar por qué.

Solución:

(a) *Sí es posible, a continuación una forma de hacerlo:*



(b) *Sí es posible, a continuación una forma de hacerlo:*



PROBLEMA 149.

En una floristería agrupan los girasoles por docenas y sobran 6, si lo hacen por decenas sobran 4, y si lo hacen de 15 en 15 y sobran 9. Si se vende cada girasol a 1000 pesos cada uno, se reciben entre 300000 y 400000 pesos. ¿Cuántos girasoles en total hay en la floristería?

Solución: Dado que cada girasol vale \$1000 y el precio de todas los girasoles está entre \$300000 y \$400000 pesos, entonces hay entre 300 y 400 girasoles. Ahora, cuando los girasoles se agrupan por decenas sobran 4, es decir, la cantidad de girasoles excede en 4 a un múltiplo de 10, es decir la cantidad de girasoles es alguno de los siguientes números:

304, 314, 324, 334, 344, 354, 364, 374, 384, 394

Pero si se agrupan por docenas, sobran 6 es decir la cantidad de girasoles es un múltiplo de 12 más 6, y de los anteriores, el número que cumple es 354.

Finalmente verificamos que $354 - 9 = 345$ es múltiplo de 15, por lo tanto, si se agrupan de 15 en 15, sobran 9.

Así que, en total hay 354 girasoles en la floristería.

PROBLEMA 150.

¿Cuántos números naturales menores que 1000 hay tales que el producto de sus cifras es mayor que 10 pero menor que 20?

Solución: Las posibilidades para el producto de las cifras son:

11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 y 19,

pero 11, 13, 17 y 19 son primos es decir no se pueden descomponer como producto de dígitos.

Veamos los posibles números que cumplen las condiciones del enunciado, a partir de la descomposición de los números que quedan de la lista anterior como

producto de a lo sumo tres dígitos:

$$12 = 2 \times 6 \quad \longrightarrow 8 \text{ números: } 26, 62, 126, 162, 216, 616, 261 \text{ y } 621.$$

$$= 3 \times 4 \quad \longrightarrow 8 \text{ números}$$

$$= 2 \times 2 \times 3 \quad \longrightarrow 3 \text{ números: } 223, 232 \text{ y } 322.$$

$$14 = 2 \times 7 \quad \longrightarrow 8 \text{ números}$$

$$15 = 3 \times 5 \quad \longrightarrow 8 \text{ números}$$

$$16 = 2 \times 8 \quad \longrightarrow 8 \text{ números}$$

$$= 4 \times 4 \quad \longrightarrow 4 \text{ números: } 44, 144, 414, \text{ y } 441.$$

$$= 2 \times 2 \times 4 \quad \longrightarrow 3 \text{ números}$$

$$18 = 2 \times 9 \quad \longrightarrow 8 \text{ números}$$

$$= 3 \times 6 \quad \longrightarrow 8 \text{ números}$$

$$= 3 \times 3 \times 2 \quad \longrightarrow 3 \text{ números}$$

En total, 69 números naturales menores que 1000 cumplen que el producto de sus cifras es mayor que 10 pero menor que 20.

PROBLEMA 151.

El producto de las edades de los hijos de Sonia es 3696. Si la edad del mayor es el triple de la edad del menor, ¿cuántos hijos tiene Sonia?

Solución: La descomposición en factores primos de 3696 es

$$3696 = 2^4 \times 3 \times 7 \times 11.$$

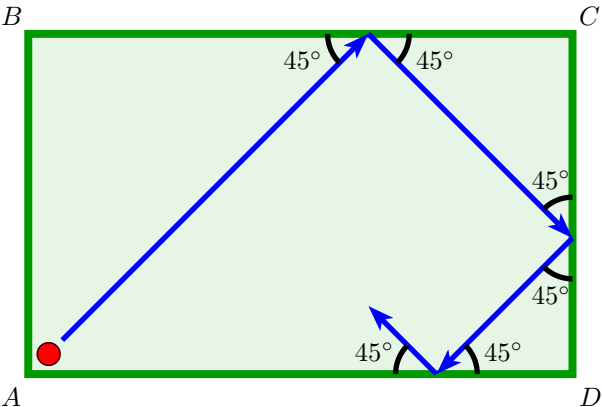
Ahora, teniendo en cuenta que 3696 es el producto de las edades de los hijos de Sonia, y que la edad del mayor es el triple de la del menor, escribimos:

$$3696 = 2^2 \times (3 \times 2^2) \times 7 \times 11 = 4 \times 12 \times 7 \times 11.$$

Luego Sonia tiene 4 hijos, cuyas edades son: 4, 7, 11 y 12 años.

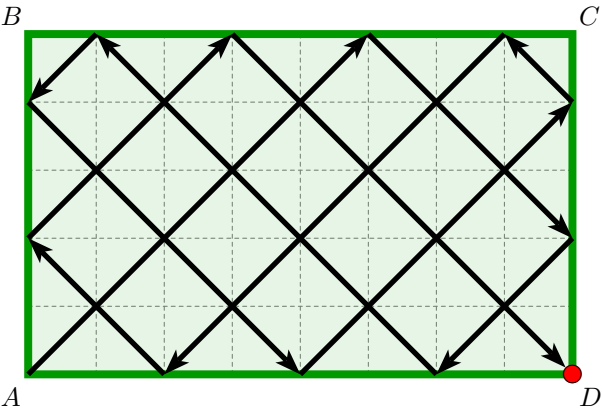
PROBLEMA 152.

Desde una esquina de una mesa rectangular $ABCD$, tal que $AB = 100\text{ cm}$ y $AD = 160\text{ cm}$; se dispara una bola, de modo que, siempre, al golpear uno de los bordes de la mesa, sigue su movimiento formando ángulos de 45° con dicho borde, como se muestra a continuación:



Si la bola se dispara desde la esquina A y se detiene al chocar con una esquina de la mesa, ¿en cuál esquina termina la trayectoria de la bola?

Solución: Subdividiendo la superficie de la mesa en cuadrados con 10 cm de lado, es fácil trazar la trayectoria de la bola, como se muestra a continuación:



Por lo tanto la trayectoria de la bola termina en la esquina D .

PROBLEMA 153.

Las edades de Jorge y Tatiana son divisores primos de 2016. Si tres veces el producto de sus edades es siete veces la suma de los dígitos de 2016, ¿cuál es la edad de cada uno?

Solución 1: Los divisores primos de 2016 son 2, 3 y 7. Por otro lado, siete veces la suma de los dígitos de 2016 es $(7 \times 9) = 63$. Por lo tanto, las únicas edades que cumplen son 7 y 3 dado que $3 \times (7 \times 3) = 63$.

Solución 2: Los divisores primos de 2016 son 2, 3 y 7. Ahora sean a y b las edades de Jorge y Tatiana, entonces según el enunciado se tiene que:

$$3 \times (a \times b) = 7 \times (2 + 1 + 6),$$

$$3 \times (a \times b) = 7 \times 9,$$

$$3 \times (a \times b) = 63,$$

$$a \times b = 21.$$

Por lo tanto, las edades son 7 y 3 años dado que $7 \times 3 = 21$.

PROBLEMA 154. RELEVOS.

Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado II depende de la respuesta del enunciado I y el enunciado III, de la respuesta del enunciado II.

- I. Daniel lanzó un dado tres veces y obtuvo un total de 17 puntos. ¿En cuántos lanzamientos obtuvo 6 puntos?
- II. La edad de Daniel coincide con el primer múltiplo común entre de la cantidad de lanzamientos en los que obtuvo 6 puntos y el número 5. ¿Cuál es la edad de Daniel?
- III. Por cada año de edad de Daniel, su padre le hereda un metro cuadrado de una huerta que tiene forma de cuadrado y el restante lo usa para cultivos. Si el perímetro de la huerta es 20 m, ¿cuál es el área cultivada?

Solución:

- I. La única forma en la cual se pueda producir el resultado con el lanzamiento de un dado tres veces es que caiga 6, 6 y 5, por lo tanto el número

de lanzamientos donde cae 6 es dos.

II. El mínimo común múltiplo de 2 y 5 es 10. Por lo tanto, la edad de Daniel es de 10 años.

III. Dado que la huerta es cuadrada con perímetro 20 m, entonces cada lado de la huerta mide 5 m, es decir la huerta completa tiene 25 m^2 . Como a Daniel se le regala un metro cuadrado por año, entonces se le regalan 10 metros cuadrados de la huerta, por lo que finalmente se usan 15 m^2 para cultivar.

PROBLEMA 155.

Luis le dice a un amigo: "si hace dos días yo tenía seis años, pero el año que viene cumpliré nueve años." ¿Qué día cumple años Luis?

Solución: Como el siguiente año Luis cumplirá 9 años, en el año actual cumplirá 8 años y el año anterior cumplió 7 años. Dado que en el año que cumplirá 8 años dice que hace dos días tenía 6 años, se concluye que cumplió 7 años el 31 de diciembre del año anterior.

PROBLEMA 156.

Encuentre el subconjunto de $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$ con más elementos que cumple las siguientes condiciones:

- (i) Uno de los números divide a todos los demás.
- (ii) Uno de los números divide a todos los demás, excepto a uno de ellos.
- (iii) Uno de los números divide a todos los demás, excepto a dos de ellos.
- (iv) Uno de los números divide a todos los demás, excepto a tres de ellos.

Solución: Note que el subconjunto $\{1, 2, 4, 8, 16, 24, 32, 40, 48\}$ satisface las 4 condiciones del enunciado, ya que en él está el 1 que divide a todos los demás, está el 2 que divide a todos excepto al 1, está el 4 que divide a todos excepto al 1 y 2, y está el 8 que divide a todos excepto al 1, 2 y 4. Como ejercicio al lector se deja verificar que en efecto, este es el subconjunto más grande que cumple tales condiciones.

PROBLEMA 157.

Daniel compró una bolsa de caramelos. Al segundo día después de la compra, regaló a sus amigos la mitad más dos de los caramelos que compró; al tercer día regaló la mitad más tres de lo que le quedaba; al cuarto día, luego de regalar la mitad más cuatro de los caramelos que tenía, se quedó con dos caramelos. ¿Cuántos caramelos compró Daniel?

Solución: Si en el cuarto día quedaron dos caramelos después de regalar la mitad más cuatro de los caramelos que tenía ese día, entonces el cuarto día tenía $2 \times (2 + 4) = 12$ caramelos. Esos 12 caramelos quedaron después de regalar la mitad más tres de los caramelos que tenía al iniciar el tercer día, por tanto al iniciar el tercer día tenía $2 \times (12 + 3) = 30$ caramelos. Esos 30 caramelos le quedaron después de regalar la mitad más dos de los caramelos que tenía al iniciar el segundo día, de manera que al iniciar el segundo día tenía $2 \times (30 + 2) = 64$ caramelos. Así que Daniel compró una bolsa de 64 caramelos.

PROBLEMA 158.

Al pasar por una calle de su pueblo, Alison observa el siguiente mensaje en la puerta de un local:

Cada vez que entre a este establecimiento duplicaremos el dinero con el que ingresa, pero para entrar debe pagar \$150.

Si al salir 5 veces del local Alison tiene \$6.700, ¿con cuánto dinero ingresó la primera vez?

Solución 1: Al salir la quinta vez Alison tiene \$6.700; entonces, al salir la cuarta vez debía tener la mitad de ese valor más los \$150 que valió la quinta entrada, es decir, tenía \$3.500. Haciendo el mismo procedimiento, al salir la tercera vez tiene \$1.900, la segunda \$1.100 y la primera \$700. De modo que antes de ingresar la primera vez tenía \$500.

Solución 2: Sea x la cantidad de dinero que tiene Alison antes de ingresar al local. El siguiente razonamiento muestra la cantidad de dinero con la que sale

Alison cada una de las primeras cinco veces, en términos de x :

Salida 1: $2(x - 150) = 2x - 300$,

Salida 2: $2(2x - 300 - 150) = 4x - 900$,

Salida 3: $2(4x - 900 - 150) = 8x - 2100$,

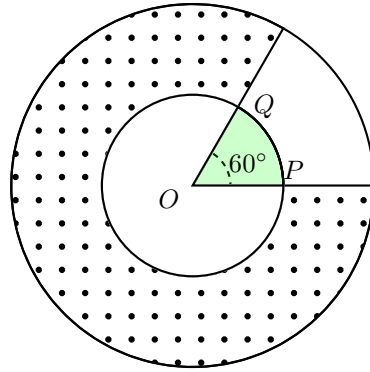
Salida 4: $2(8x - 2100 - 150) = 16x - 4500$,

Salida 5: $2(16x - 4500 - 150) = 32x - 9300$.

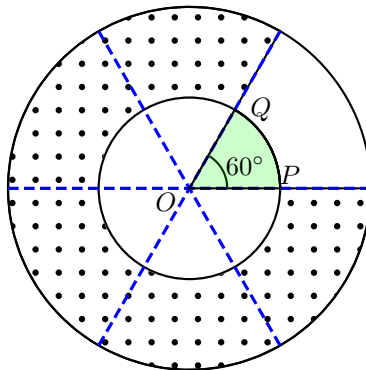
Pero Alison salió la quinta vez con \$6.700, entonces $32x - 9300 = 6,700$. Resolviendo esta última ecuación se llega a que $x = 500$. Así, Alison tenía \$500 antes de ingresar la primera vez.

PROBLEMA 159.

En la siguiente figura se muestran dos círculos con centro en O . Se sabe que el área del círculo grande es cuatro veces el área del círculo pequeño. Si el ángulo POQ mide 60° y el área de la región sombreada es 1 cm^2 , ¿cuál es el área de la región punteada?



Solución: Observe la siguiente figura:

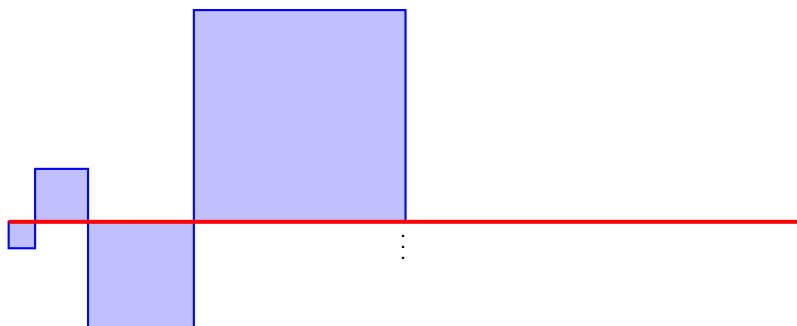


Note que, como el ángulo POQ mide 60° , entonces la región sombreada corresponde a $\frac{1}{6}$ del área total del círculo pequeño, luego el área del círculo pequeño es $1 \times 6 = 6 \text{ cm}^2$. Además, el área del círculo grande es cuatro veces el área del círculo pequeño, es decir $6 \times 4 = 24 \text{ cm}^2$. Finalmente observe que el área de la región punteada es $\frac{5}{6}$ de la diferencia entre el área del círculo grande y el área del círculo pequeño, es decir: $\frac{5}{6} \times (24 - 6) = 15 \text{ cm}^2$.

PROBLEMA 160. RELEVOS.

Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado II depende de la respuesta del enunciado I y el enunciado III, de la respuesta del enunciado II.

Sobre un segmento de 63 cm se construyen cuadrados de tal forma que el lado del primer cuadrado mide 1 cm , y el lado de cada uno de los demás mide el doble del lado del anterior, como se muestra en la siguiente figura.



- I. ¿Cuántos cuadrados se pueden construir sobre dicho segmento?
- II. ¿Cuál es el área de la figura que resulta luego de construir todos los cuadrados posibles sobre el segmento?
- III. ¿Cuántos divisores primos tiene el número que da el valor del área en el ítem anterior?

Solución:

- I. El segmento dado queda particionado en segmentos cuyas longitudes son potencias de 2 consecutivas, de manera que el problema se reduce a sumar estas potencias hasta que resulte 63. Esto se obtiene en la construcción

del sexto cuadrado:

$$\underbrace{1}_{2^0} + \underbrace{2}_{2^1} + \underbrace{4}_{2^2} + \underbrace{8}_{2^3} + \underbrace{16}_{2^4} + \underbrace{32}_{2^5} = 63.$$

II. El área de cada uno de los seis cuadrados es, respectivamente:

$$1, 4, 16, 64, 256, 1024.$$

Al sumar todo se obtiene 1365, que corresponde al área de la figura que se forma.

III. La factorización de 1365 como producto de números primos es $1365 = 3 \times 5 \times 7 \times 13$. Por lo tanto, este número tiene 4 divisores primos.

PROBLEMA 161.

Un viejo mago matemático sabe que el número ganador de la lotería es un múltiplo de 3 con cuatro cifras, tal que la suma de sus cifras es múltiplo de 11. ¿Cuál es el número mínimo de boletas que debe comprar el mago para estar seguro de ganar la lotería?

Solución: El número ganador es un múltiplo de 3 y la suma de sus cifras es un múltiplo de 11, aplicando el criterio de división por 3 se tiene que la suma de las cifras también es un múltiplo de 3, y por lo tanto, de 33. A continuación se listan los posibles números de boletos ganadores de la lotería: 9996, 9969, 9699, 6999, 9987, 9978, 9879, 9897, 9789, 9798, 8799, 8979, 8997, 7899, 7989, 7998, 9888, 8988, 8898, 8889. Esto quiere decir que el mago debe comprar un total de 20 boletos para estar seguro que ganará la lotería.

PROBLEMA 162.

Nicolás tiene como tarea construir un triángulo con las siguientes características: su perímetro debe ser un tercio del que tiene un hexágono regular con 4 cm de lado, y la longitud de cada uno de sus lados debe ser un número natural de centímetros. ¿Cuántos triángulos puede construir Nicolás con estas características?

Solución: El perímetro de un hexágono regular con 4 cm de lado es de $6 \times 4 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$, entonces el perímetro del triángulo debe ser $\frac{24 \text{ cm}}{3} = 8 \text{ cm}$. Como la longitud, en centímetros, de cada lado del triángulo debe ser un número natural,

se deben buscar tres números naturales que sumen 8; las posibles triplas son: $\{1, 1, 6\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 2, 4\}$ y $\{2, 3, 3\}$.

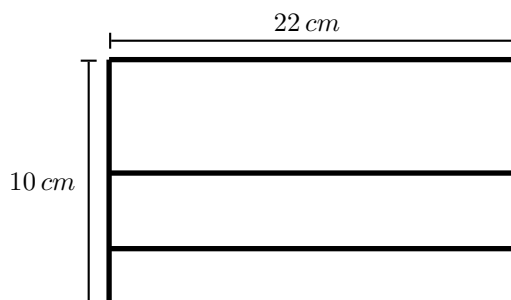
Pero de las anteriores triplas, la única cuyos números pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo es $\{2, 3, 3\}$, pues en las demás la suma de dos de los números es menor o igual que el tercero, lo que es imposible para las longitudes de los lados de un triángulo.

PROBLEMA 163.

Se desea elaborar la bandera de un país, con un rectángulo de $10\text{ cm} \times 22\text{ cm}$, como se muestra en la figura; de tal forma que tenga tres franjas horizontales de diferentes colores, con las siguientes características:

- el área de la franja superior debe ser mayor que el área de la franja del medio, y el área de la franja del medio debe ser mayor que el área de la franja inferior.
- las dimensiones, en centímetros, de cada franja deben ser números naturales.
- solo se pueden usar los colores: amarillo, azul y rojo.

¿De cuántas formas se puede diseñar la bandera con estas características?



Solución: Las formas de escribir a 10 como suma de tres números naturales diferentes son:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| ■ $10 = 1 + 2 + 7,$ | ■ $10 = 1 + 4 + 5,$ |
| ■ $10 = 1 + 3 + 6,$ | ■ $10 = 2 + 3 + 5.$ |

De esta manera, hay 4 opciones para elegir el tamaño de las franjas de la bandera.

Por otra parte, para cada una de las opciones hay 6 formas de elegir el orden de los colores:

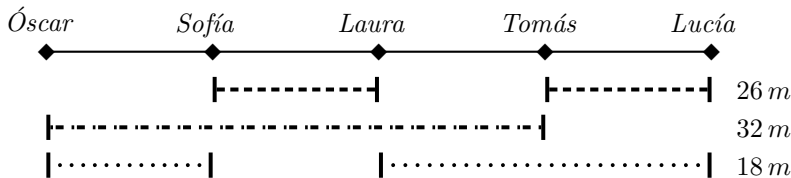
- amarillo - azul - rojo.
- azul - rojo - amarillo.
- amarillo - rojo - azul.
- rojo - amarillo - azul.
- azul - amarillo - rojo.
- rojo - azul - amarillo.

Por lo tanto hay $6 \times 4 = 24$ formas diferentes de diseñar la bandera.

PROBLEMA 164.

Las casas de Óscar, Sofía, Laura, Tomás y Lucía están ubicadas, en ese orden, a lo largo de una calle recta. Encuentre la distancia entre las casas de Óscar y Lucía, sabiendo que: cuando Sofía visita a Lucía recorre 26 m más de lo que recorre Laura cuando visita a Tomás, además Lucía vive 32 m más alejada de Óscar que de Tomás, y cuando Óscar visita a Sofía y Laura visita a Lucía recorren 18 m en total.

Solución: Cuando Sofía visita a Lucía recorre 26 m más de lo que recorre Laura cuando visita a Tomás, de donde se concluye que la distancia de la casa de Sofía a la de Laura más la distancia de la casa de Tomás a la de Lucía es 26 m. También, Lucía vive 32 m más alejada de Óscar que de Tomás, luego la distancia de la casa de Tomás a la de Óscar es 32 m. Finalmente, cuando Óscar visita a Sofía y Laura visita a Lucía recorren en total 18 m, de ahí que la distancia de la casa de Óscar a la de Sofía más la distancia de la casa de Laura a la de Lucía es 18 m; como se muestra en la siguiente gráfica.



Observe que la suma $26\text{ m} + 32\text{ m} + 18\text{ m} = 76\text{ m}$, coincide con el doble de la distancia de la casa de Óscar a la casa de Lucía, por lo tanto, esta distancia es 38 m.

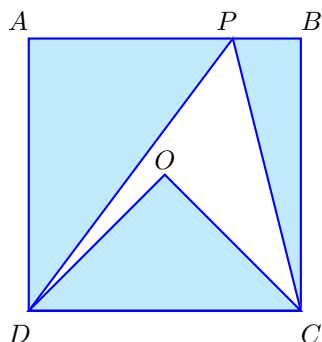
PROBLEMA 165. RELEVOS.

Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado **II** depende de la respuesta del enunciado **I** y el enunciado **III**, de la respuesta del enunciado **II**.

- I.** Valeria asegura que todos sus libros son de matemáticas menos dos, todos son de biología menos dos y todos son de español menos dos. Si Valeria tiene razón, ¿cuántos libros tiene?
- II.** Complete el siguiente SUDOKU formado por 36 casillas, en cada una de las cuales se debe escribir un número, del 1 al 6, de tal manera que no se repitan números dentro de una misma fila, columna o caja de 2×3 casillas. Tenga en cuenta que en la casilla sombreada debe escribir el número encontrado en el ítem anterior.

		5			
				3	1
4		6		5	
	2		6		3
6	5				

- III.** En la siguiente figura, O es el centro del cuadrado $ABCD$ y P es un punto sobre el segmento $\overline{AB}$. Si la longitud, en centímetros, del lado del cuadrado es el producto de los divisores primos de la suma de los números que están en la casilla superior izquierda de cada caja de 2×3 del sudoku resuelto anteriormente, ¿cuál es el área de la región sombreada?



Solución:

I. Sofía tiene 3 libros.

II. Teniendo en cuenta las condiciones, se completa el sudoku así:

3	1	5	4	2	6
2	6	4	5	3	1
4	3	6	1	5	2
5	2	1	6	4	3
6	5	3	2	1	4
1	4	2	3	6	5

III. La suma de los números que están en la casilla superior izquierda de cada caja 2×3 del sudoku resuelto es $3 + 4 + 6 + 4 + 1 + 2 = 20$ y el producto de los divisores primos de 20 es $2 \times 5 = 10$, esta es la longitud de $\overline{AB}$.

Note que el área de la región sombreada coincide con el área del cuadrado $ABCD$, menos el área del triángulo DPC , más el área del triángulo DOC , esto es:

$$(10 \times 10) - \left(\frac{10 \times 10}{2} \right) + \left(\frac{10 \times 5}{2} \right) = 100 + 50 + 25 = 75 \text{ cm}^2.$$

PROBLEMA 166.

Un granjero repartió todo el contenido del último sobre de fertilizante para sus tres cultivos, en forma directamente proporcional a su extensión. El cultivo de zanahorias tiene 25 m^2 de extensión, el de habichuelas, 15 m^2 y el de arvejas, 10 m^2 . Si al cultivo de zanahorias le correspondió 140 gramos más de fertilizante que al cultivo de habichuelas, ¿cuántos gramos de fertilizante tenía el sobre del granjero?

Solución: El cultivo de zanahoria tiene 10 m^2 más de extensión que el de habichuelas, y le correspondió 140 gramos más de fertilizante que al cultivo de habichuela, entonces por cada 10 m^2 de extensión se necesitan 140 gramos de fertilizante o equivalentemente por cada 5 m^2 de extensión se necesitan 70 gramos de fertilizante. Así, tenemos que en el cultivo de arvejas se utilizaron 140

gramos de fertilizante, en el de habichuelas, $140 + 70 = 210$ gramos y en el de zanahorias, $210 + 140 = 350$ gramos. Sumando estas cantidades concluimos que el sobre del granjero tenía $140 + 210 + 350 = 700$ gramos de fertilizante.

PROBLEMA 167.

El Sombrero Loco desea obsequiar a la Reina de Corazones uno de sus fabulosos sombreros. Para ello, elabora una caja tal que el área superficial de tres de sus caras es: 49 cm^2 , 27 cm^2 y 75 cm^2 . ¿Cuál es el volumen de la caja para el fabuloso sombrero?

Nota: todas las caras de la caja son rectangulares.

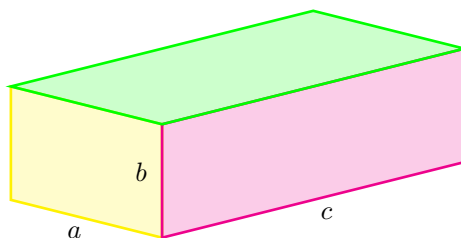
Solución: Siendo a, b y c el largo, ancho y alto de la caja, respectivamente, se tiene, sin pérdida de generalidad, que: $a \times b = 49$, $a \times c = 27$ y $b \times c = 75$. Luego,

$$(a \times b) \times (a \times c) \times (b \times c) = 49 \times 27 \times 75,$$

$$a^2 \times b^2 \times c^2 = 7^2 \times 5^2 \times 3^4,$$

$$(a \times b \times c)^2 = (7 \times 5 \times 9)^2.$$

Por lo tanto el volumen es $a \times b \times c = 7 \times 5 \times 9 = 315 \text{ cm}^3$.



PROBLEMA 168.

Alicia y el Sombrero Loco juegan a “disfrazar” de números las palabras que tienen a lo sumo 10 letras diferentes. Para ello, reemplazan cada letra diferente por un dígito diferente. ¿De cuántas maneras distintas pueden “disfrazar” la palabra **JABBERWOCKY** de un número que sea múltiplo de 60 y no de 9?

Solución: Dado que el número debe ser múltiplo de 60, entonces es divisible por: 10, 4 y 3 pero no por 9. Entonces $Y = 0$ y KY debe ser múltiplo de 4, luego $K \in \{2, 4, 6, 8\}$. Ahora bien, la suma de todos los dígitos es 45, entonces la letra que se repite B debe ser 3 o 6, para que la suma de los dígitos del número sea múltiplo de 3, pero no de 9. Consideremos los siguientes casos:

Caso $B = 3$: $Y = 0$, es decir tiene 1 sola opción, K tiene 4 opciones, J tiene 7 opciones, A tiene 6 opciones, E tiene 5, R tiene 4, W tiene 3, O tiene 2 y C tiene 1, por el principio multiplicativo hay

$$4 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 20160.$$

Caso $B = 6$: $Y = 0$, es decir tiene 1 sola opción, K tiene 3 opciones, J tiene 7 opciones, A tiene 6 opciones, E tiene 5, R tiene 4, W tiene 3, O tiene 2 y C tiene 1, por el principio multiplicativo hay

$$3 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 15120.$$

En total, 35280 “disfraces” diferentes.

PROBLEMA 169.

En un grupo de 15 científicos algunos son matemáticos y los demás son biólogos. Se sabe que el promedio de las edades de los biólogos es 41 años, mientras que el promedio de las edades de los matemáticos es 38 años. Si el promedio de las edades de los 15 científicos es 39,8 años, ¿cuántos científicos de este grupo son matemáticos?

Solución: Podemos suponer que la edad de cada uno de los matemáticos es 38 años y la edad de cada biólogo es 41 años, entonces el promedio está dado por

$$\frac{41B + 38M}{B + M} = 39,8,$$

donde B y M representan el número de biólogos y matemáticos, respectivamente. Operando,

$$\begin{aligned}41B + 38M &= 39,8(B + M), \\41B - 39,8B &= 39,8M - 38M, \\1,2B &= 1,8M.\end{aligned}$$

Luego $\frac{6}{5}B = \frac{9}{5}M$, esto es $B = \frac{3}{2}M$. Teniendo esta relación, solo nos queda encontrar valores que cumplan que $B + M = 15$ y $B = \frac{3}{2}M$ sea un número natural, estos son: $M = 6$ y $B = \frac{3 \times 6}{2} = 9$. Por lo tanto, en el grupo de científicos, 6 son matemáticos.

PROBLEMA 170.

La clave del teléfono de Karen es un número de cuatro cifras que al ser multiplicado por 99999 se obtiene un número cuyas últimas cuatro cifras son 2379. ¿Cuál es la clave del teléfono de Karen?

Solución: Sea $abcd$ la clave del teléfono de Karen. Note que:

$$\begin{aligned}abcd \times 99999 &= abcd \times (100000 - 1) \\&= abcd00000 - abcd = \dots 2379.\end{aligned}$$

Reescribiendo la última igualdad en forma vertical tenemos:

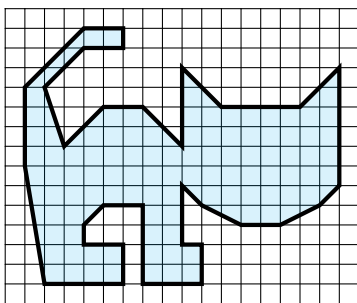
$$\begin{array}{r}abcd00000 \\- \quad \quad abcd \\ \hline \dots 2379\end{array}$$

De donde podemos deducir fácilmente que la clave del teléfono de Karen es $abcd = 7621$.

Capítulo 2

50 retos

1. Encuentra el área del gatito, sabiendo que el área de cada cuadradito mide $1 u^2$.



2. Un HIDATO es un puzzle cuyo objetivo es completar el tablero con todos los números del 1 al 16 de tal forma que dos números consecutivos se conecten horizontal, vertical o diagonalmente. ¿Cuál es la suma de los números que corresponden a las casillas sombreadas en el siguiente hidato?

			4
1		7	16

(a) 13

(b) 15

(c) 17

(d) 25

(e) 28

3. Phineas y Ferb han comprado algunos accesorios para Perry; dos sombreros, tres corbatines y cuatro camisas. Si quieren que Perry siempre tenga un sombrero, un corbatín y una camisa, ¿de cuántas formas pueden Phineas y Ferb vestir a Perry?

(a) 9 (b) 6 (c) 12 (d) 24 (e) 4

4. Martín tiene 9 balotas enumeradas con los números del 1 al 9. Él escoge 3 balotas de tal forma que ninguna es múltiplo de 2 o 3. Con estas balotas se forman números de tres cifras, ¿cuáles de estos números son múltiplos de 5 y 7?

5. Camilo tiene 4 dijes cuyas formas son las siguientes: ★, ▽, □, ◇. Si el peso en gramos de los dijes cumplen que:

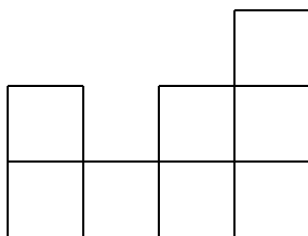
$$\begin{aligned}\star + \diamond &= 5 \text{ gramos,} \\ \square + \star &= 7 \text{ gramos,} \\ \diamond + \diamond &= 6 \text{ gramos,} \\ \square + \nabla &= 6 \text{ gramos,}\end{aligned}$$

¿cuál es el peso en gramos de cada dije?

6. **PROBLEMA DE RELEVOS.**

Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado **II** depende de la respuesta del enunciado **I** y el enunciado **III**, de la respuesta del enunciado **II**.

- I.** ¿Cuál es el triple de la suma de 7, 13 y 17?
- II.** En la siguiente figura el lado de cada cuadrado, en centímetros, coincide con la respuesta del ítem anterior, ¿cuál es su perímetro?

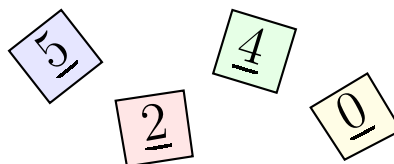


- III.** El año de nacimiento de Sophie Germain coincide con la respuesta del ítem anterior. Si murió en 1831 después de su cumpleaños, ¿a qué edad falleció?

7. PROBLEMA DE RELEVOS.

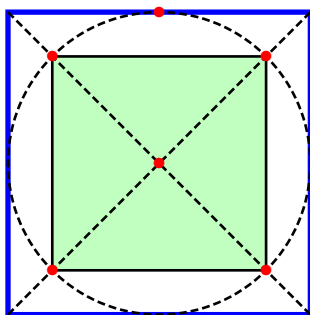
Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado II depende de la respuesta del enunciado I y el enunciado III, de la respuesta del enunciado II.

- I. ¿Cuántos centímetros cuadrados de tela debe comprar doña Martha para hacer dos manteles rectangulares de lados 19 y 53 centímetros?
 - II. Yu Takeuchi nació en 1927. ¿Cuántos años vivió, si el año de su fallecimiento coincide con el número de centímetros cuadrados de tela que necesita doña Martha para hacer los dos manteles?
 - III. ¿Verdadero o Falso? Los divisores positivos del número encontrado en el ítem anterior son cuatro.
8. Iván tiene cuatro tarjetas como las que se muestran a continuación, y juega a formar números con ellas, usándolas todas o algunas.



De los números que puede formar Iván con sus tarjetas,

- (a) ¿cuántos tienen tres cifras?
 - (b) ¿cuántos tienen cuatro cifras?
 - (c) ¿cuántos tienen cuatro cifras y son pares?
 - (d) ¿cuántos tienen cuatro cifras y son múltiplos de 4?
9. Sobre una hoja cuadrada se trazan sus diagonales y se dibuja un círculo colocando el compás fijo en el punto de intersección de las diagonales y el lápiz en el punto medio de uno de los lados de la hoja. Luego se unen los puntos de intersección de las diagonales con el círculo, como se muestra en la figura. Si el lado de la hoja mide 10 cm , ¿cuánto mide el área coloreada en verde?



10. ¿Cuántos números de 2 cifras hay tal que cada número es divisible por cada una de sus cifras?

(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 23

11. Willy tiene en su bolsillo suficientes monedas de \$1000, \$500 y \$200 para pagar una deuda de \$5500. Encuentre la diferencia entre el número máximo y mínimo de monedas que puede usar para pagar su deuda.

(a) 26 (b) 3 (c) 6 (d) 32 (e) 20

12. **PROBLEMA DE RELEVOS.**

Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado **II** depende de la respuesta del enunciado **I** y el enunciado **III**, de la respuesta del enunciado **II**.

- I. ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado cuyo lado es el diámetro de un círculo de radio 3 cm ?
 - II. Halle la edad de Pedro, sabiendo que ésta corresponde al producto de los divisores primos del valor del perímetro encontrado en el ítem anterior.
 - III. Si la edad de Juan es el doble de la edad de María y la edad de María excede en 2 años la edad de Pedro, ¿cuál es la edad de Juan?
13. Carlitos invita a 5 amigos a su casa a jugar videojuegos, se ponen de acuerdo y deciden jugar fútbol, ya que no es un videojuego violento. Si todos juegan contra todos y cada par de amigos juegan un solo partido de fútbol ¿cuántos partidos se realizaron ese día?
14. Dentro de una bolsa se encuentran unos papelitos enumerados del 1 al 20. Juan saca de esta bolsa dos papeles cada uno con su respectivo número y

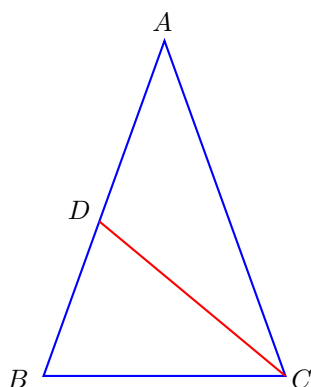
le pide a su primo que adivine el resultado de multiplicar estos dos números; para ello le da unas pistas:

- uno de los números es múltiplo de 5 y el otro es múltiplo de 6.
- la suma de los números es un múltiplo de 11.
- el máximo común divisor de los números es 3.

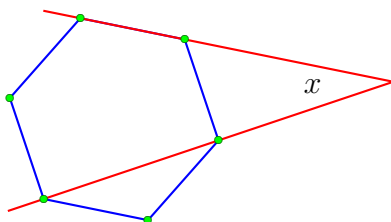
¿Cuál es el producto de los dos números escritos en los papelitos extraídos por Juan?

- (a) 30 (b) 120 (c) 180 (d) 270

15. En una fiesta hay 60 personas, de las cuales 20 son varones. Si 15 mujeres toman gaseosa y 40 personas no toman gaseosa, ¿cuántos varones toman gaseosa?
16. De 100 comerciantes de ropa, electrodomésticos y golosinas; se sabe que 20 venden ropa y electrodomésticos, 40 venden electrodomésticos y golosinas, y 30 venden golosinas y ropa. Además se sabe que 40 venden un solo tipo de producto, mientras que 45 venden solo dos tipos de productos.
- (a) ¿cuántos de estos comerciantes venden los tres tipos de productos?
- (b) ¿cuántos comerciantes venden solo ropa y electrodomésticos?
- (c) ¿es posible determinar cuántos comerciantes venden solo golosinas? Justifique su respuesta.
17. Determine los números naturales menores 100 que son múltiplos de 2 y múltiplos de 3, pero no son múltiplos de 5.
18. En la siguiente figura el triángulo BCD es isósceles en C , el ángulo BAC mide 40° y el ángulo DCA mide 30° . Calcular la medida del ángulo DCB



19. El hexágono que se muestra en la siguiente figura es regular. ¿Cuál es la medida del ángulo x ?



20. En una fiesta donde había 70 personas, 10 eran hombres que no les gustaba bailar y 20 eran mujeres que les gustaba bailar. Si el número de hombres que les gusta bailar es la tercera parte de las mujeres que no les gusta bailar, ¿a cuántas personas en la fiesta les gustaba bailar?
21. Una hija asegura que el producto de su edad con la de su padre es la mitad de 2014. ¿Cuántos años tenía el padre cuando nació su hija?
22. Si a , b y c son números dígitos tales que $a + b + c = 20$, ¿cuál es el valor de $abc + bca + cab$?

Nota: En este problema abc representa el número de tres cifras tal que c es la cifra de las unidades, b la cifra de las decenas y a la cifra de las centenas. Análogamente los números bca y cab .

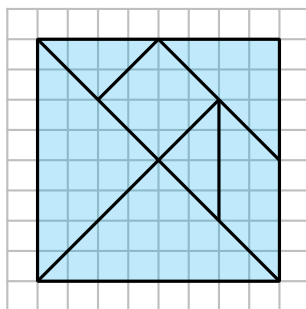
23. ¿Cuál es el dígito de las unidades de 8^{2021} ?
24. ¿Cuántos números capicúa de tres cifras son divisibles por 3 y 5?
- Nota:** Un número es **capicúa** si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

(a) 3 (b) 6 (c) 10 (d) 20

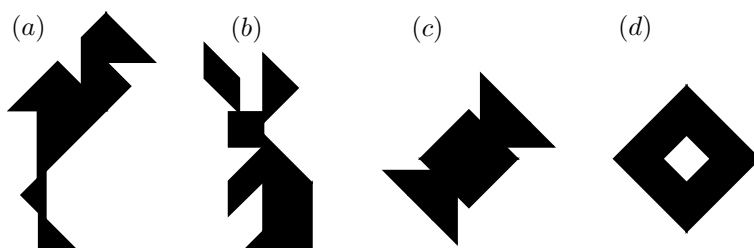
25. Las dimensiones de una caja de base rectangular son valores enteros. Si el largo es el triple del ancho y el ancho es un cuarto del alto, ¿cuál de las siguientes opciones puede ser el volumen de la caja?

(a) $48 u^3$ (b) $96 u^3$ (c) $120 u^3$ (d) $144 u^3$

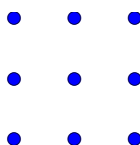
26. El Tangram es un juego chino muy antiguo, que consiste en formar siluetas de figuras con las siete piezas dadas sin solaparlas. Las siete piezas o "tans" se obtienen seleccionando un cuadrado de modo que se reproduzcan dos triángulos grandes, uno mediano, dos triángulos pequeños, un cuadrado y un romboide como se muestra en la siguiente figura.



¿Cuál de los siguientes tangramas no se puede armar usando las 7 fichas del Tangram?



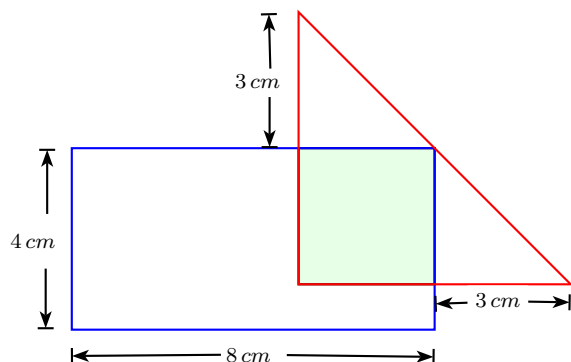
27. En la siguiente figura los puntos son los vértices de una cuadrícula de 2×2 .
¿Cuántos cuadrados se pueden construir con vértices en estos puntos?



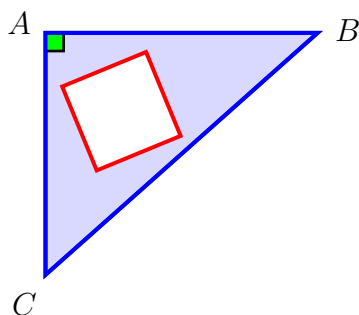
28. En un cuadrado se marcan sus vértices y los puntos medios de sus lados.
¿Cuántos triángulos se pueden formar con sus tres vértices en los puntos marcados?
29. En una papelería, un borrador cuesta 500 pesos y un lápiz cuesta 1000 pesos.
Si María compró el doble de lápices que de borradores y gastó 125000 pesos.
¿Cuántos lápices compró María?

- (a) 50 (b) 100 (c) 83 (d) 90 (e) 60
30. Carlos va a la heladería y quiere comerse un cono doble. Las dos bolas de helado pueden escogerse entre 8 sabores distintos y debe escogerse una de las dos salsas disponibles. ¿De cuántas maneras distintas puede hacer Carlos su pedido?
- (a) 8 (b) 16 (c) 32 (d) 128 (e) 64

31. Julián tiene un cordón de 14 metros, con el cual quiere formar el contorno de un rectángulo cuyos lados sean longitudes enteras. ¿Cuál es el rectángulo con mayor área que puede construir?
32. Un rectángulo y un triángulo isósceles se solapan formando un cuadrado, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

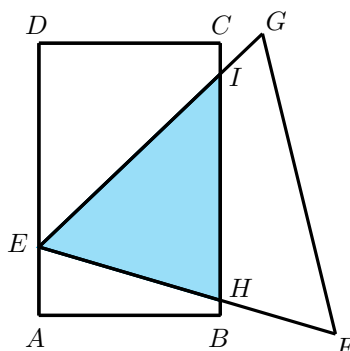


33. En la siguiente figura $AB = 9\text{ cm}$, $AC = 8\text{ cm}$ y el área de la región sombreada es 27 cm^2 . El perímetro del cuadrado en centímetros es

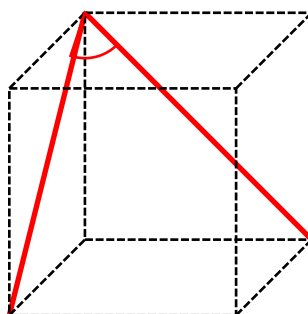


- (a) 72 (b) 9 (c) 36 (d) 12

34. ab y ba representan números de dos dígitos, tienen los mismos dígitos pero en orden inverso. ¿Qué números representan ab y ba si se sabe que la diferencia entre ellos es 54 y que $a + b = 8$?
35. En la siguiente figura $ABCD$ es un rectángulo con área 45 cm^2 y EFG es un triángulo equilátero. El área del rectángulo es $\frac{3}{2}$ del área del triángulo y el área de la región sombreada es $\frac{1}{2}$ del área del triángulo EFG . Determine el área del cuadrilátero $HIFG$.



36. Sea P el producto de todos los primos menores que 2021. ¿Cuál es el residuo al dividir P entre 4?
37. Cuatro amigos planean un viaje en sus vacaciones. Para hacer el viaje disponen de un automóvil que tiene 5 asientos, incluido el del conductor. Si solo 2 de los amigos saben conducir, ¿de cuántas maneras diferentes pueden acomodarse para el viaje?
38. En la siguiente figura se muestra punteado un cubo y en línea continua dos de las diagonales de sus caras. ¿Cuál es la medida (en grados) del ángulo entre estas dos diagonales?



39. En una tienda de zapatos, se depositan en una canasta los zapatos de un mismo estilo y talla. Si se depositaron 3 pares de zapatos rojos, 7 pares de zapatos azules y 8 pares de zapatos blancos, ¿cuál es la mínima cantidad de zapatos que se deben extraer al azar, para estar seguros de obtener un par del mismo color?

(a) 18

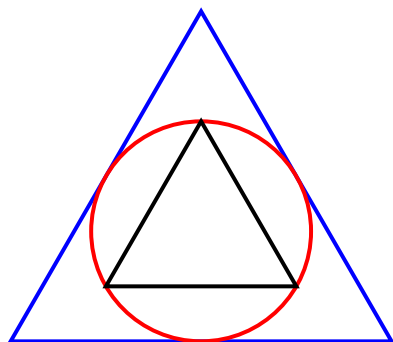
(b) 9

(c) 4

(d) 19

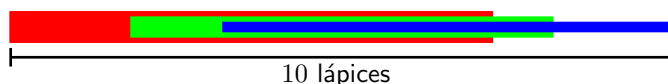
40. Un tanque se llena con dos líquidos diferentes que se vierten a través de dos llaves. La llave 1 vierte el líquido A y la llave 2 vierte el líquido B . Al abrir solo la llave 1, el tanque se llena en 3 horas, y si se abre solo la llave 2, se llena en 4 horas. Si se abren las dos llaves al tiempo, ¿qué fracción del contenido total del tanque representa el líquido B justo cuando el tanque se llena?
- (a) $\frac{3}{7}$ (b) $\frac{7}{12}$ (c) $\frac{5}{12}$ (d) $\frac{4}{7}$
41. ¿Cuántos cuadriláteros se pueden construir con sus vértices en los vértices de un hexágono regular?
- (a) 15 (b) 10 (c) 6 (d) 24
42. Al dividir 337 entre el número natural $n > 10$ el resto es 1. Entonces el resto que se obtiene al dividir 2020 entre n es:
- (a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 5
43. En cierto momento de una maratón olímpica, un atleta se da cuenta que ha recorrido $\frac{3}{7}$ de lo que le falta para llegar a la meta y que aún le quedan 1000 metros más de lo que lleva para terminar la carrera. ¿Cuántos metros debe recorrer el atleta desde el inicio hasta el final de la carrera?
- (a) 2500 (b) 1750 (c) 4500 (d) 2400
44. Julián compró dos empanadas, un jugo natural y varias frutas para sus compañeros. Todo le costó \$8.000. Si el precio de un jugo natural es el doble del de una empanada y el valor total de las frutas que compró es el triple que el de un jugo natural, ¿cuál es el precio de un jugo natural y una empanada?
- (a) \$2.000 (b) \$2.400 (c) \$3.200 (d) \$4.500

45. En un triángulo equilátero de área $A = 8 \text{ cm}^2$ se inscribe una circunferencia, y en la circunferencia se inscribe otro triángulo equilátero cuya área es B , como se muestra en la figura. ¿Cuál es el valor de $\frac{B}{A}$?

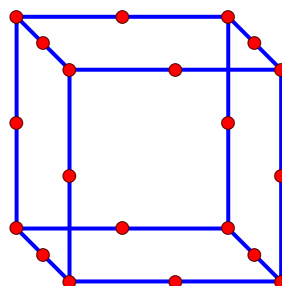


- (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{3}$

46. Lucía desea medir sus lápices de colores. Para ello cuenta con tres cintas de colores diferentes, cuyas longitudes suman 1 metro. Ella logra extender las cintas como se muestra en el gráfico, cubriendo un segmento de línea recta cuya longitud equivale a 10 veces la de un lápiz. Luego se da cuenta que a lo largo de la cinta verde caben exactamente 6 lápices, y en el arreglo que hizo con las cintas, desde el extremo izquierdo de la cinta azul hasta el extremo derecho de la cinta roja caben exactamente 4 lápices, uno en seguida del otro. Si todos los lápices tienen la misma longitud, ¿cuál es la longitud de cada lápiz?



- (a) 5 cm (b) 10 cm (c) 6 cm (d) 4 cm
47. En un cubo se marcan los vértices, y los puntos medios de sus aristas, como se muestra en la figura. ¿Cuántos triángulos equiláteros se pueden construir con sus tres vértices en tres de los puntos marcados?



- (a) 32 (b) 24 (c) 16 (d) 8
48. Si en la figura $AB = 3AE$, $CD = 4CF$, el área del triángulo ADE es 10 cm^2 y el área del triángulo BCF es 3 cm^2 ; ¿cuál es el área del cuadrilátero $ABCD$?

