APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL: un enfoque geométrico

Rafael ISAACS, Sonia SABOGAL

APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL: un enfoque geométrico

Bucaramanga, 2009

A nuestros hijos,
el mio, el tuyo
y la nuestra.

Contenido

Presentación iii

1. Algo sobre inducción matemática y números complejos **1**

1.1. Números naturales 1

1.2. Demostraciones por inducción matemática 4

1.3. Definiciones recursivas 11

1.4. Sumatoria y productoria 14

1.5. Combinatoria y teorema del binomio 19

1.6. Números complejos 23

1.6.1. Forma polar 26

1.7. Algo sobre dinámicas complejas 32

2. $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial **37**

2.1. Sistemas de ecuaciones lineales 37

2.2. $\mathbb{R}^n$: el espacio donde viven las soluciones a sistemas de ecuaciones con n variables 48

2.3. Combinaciones lineales e independencia lineal 55

2.4. Planos y rectas en $\mathbb{R}^3$ 63

2.4.1. Ecuaciones paramétricas y cartesianas 63

2.4.2. Rectas que contienen el origen 63

2.4.3. Rectas trasladadas 64

2.4.4. Planos que contienen el origen 66

2.4.5. Planos trasladados 66

2.5. Subespacios vectoriales y subespacios afines de $\mathbb{R}^n$ 70

3. Transformaciones lineales y matrices **75**
3.1. Transformaciones lineales 75
3.2. Representación de transformaciones lineales por medio de matrices 80
3.3. El núcleo y la imagen de una transformación lineal . . . 88
3.4. Álgebra de matrices 94
3.4.1. Suma y producto por escalar 94
3.4.2. Multiplicación 95
3.4.3. Inversa de una matriz 99
3.5. Transformaciones afines 107

4. $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial euclídeo **111**
4.1. Producto interno 111
4.2. Longitudes, ángulos, distancias y proyecciones 114
4.3. Producto cruz 122
4.4. Similitudes e isometrías 126

5. La función determinante **129**
5.1. Áreas y volúmenes orientados 129
5.2. Axiomas del determinante 132
5.3. La regla de Cramer 143
5.4. Inversa por cofactores 147

Respuestas a los ejercicios **151**

Lecturas recomendadas **163**

Presentación

Por sus múltiples aplicaciones, el estudio del álgebra lineal en los programas universitarios cobra cada día más importancia. Esta rama de las matemáticas se ocupa de ciertas estructuras llamadas espacios lineales o vectoriales, e investiga de qué manera ellos se interrelacionan mediante las llamadas transformaciones lineales; comprende además el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y de las matrices. Los espacios vectoriales y las transformaciones lineales se pueden ubicar como temas capitales del álgebra moderna, y su teoría es extensamente usada en el análisis funcional, en el análisis vectorial y en las ecuaciones diferenciales, entre otros; por ejemplo, en el cálculo es importante para las derivadas de orden superior. Sus numerosas aplicaciones no se restringen al campo de las matemáticas, sino que se extienden también al campo de las ciencias naturales y de las ciencias sociales. La historia del álgebra lineal moderna se remonta a mediados del siglo XIX con los trabajos de William Hamilton, de quien proviene el uso del término "vector". Sin embargo, solamente en la segunda mitad del siglo XX el álgebra lineal se institucionalizó como una materia básica e introductoria en las matemáticas universitarias.

El material que presentamos en esta exposición ha sido escrito con el objetivo de servir de apoyo y guía para el desarrollo de la asignatura Álgebra Lineal I, que deben cursar los estudiantes de primer semestre de ciencias e ingenierías de la Universidad Industrial de Santander (UIS); por lo tanto, está dirigido fundamentalmente a los profesores y estudiantes de dicha asignatura. El programa de Álgebra Lineal I de la UIS ha venido evolucionando a través de los años, y actualmente se puede decir que se ha constituido como una introducción al álgebra lineal, fundamentalmente, mediante el estudio de un espacio vectorial particular como es $\mathbb{R}^n$. Como el título lo indica (*Aproximación al álgebra lineal: un enfoque* *geométrico*), hemos querido hacer la introducción mencionada al álgebra lineal, pero procurando observar cada concepto desde un punto de vista geométrico, con el ánimo de establecer nociones y resultados básicos del álgebra lineal haciendo énfasis en conocimientos e interpretaciones geométricas muy concretas e intuitivas. Pensamos que, aunque los temas tratados son los mismos que aparecen en la mayoría de los textos introductorios al álgebra lineal, el punto de vista y el orden en que se ven se apartan un poco del tratamiento tradicional; por otra parte, en algunas secciones y ejercicios (secciones 1.7, 3.5, 4.4 y ejercicios 1.3-(6), 3.5-(5) y 4.4-(10)) tocamos –muy ligeramente– temas no clásicos y relativamente recientes de la matemática, como los fractales y los sistemas dinámicos. Esperamos que lo expresado anteriormente justifique, hasta cierto punto, la presente publicación.

El estudiante puede tomar este material como guía de estudio, pero su lectura debe forzosamente estar acompañada y orientada por el profesor, pues hay varios resultados fundamentales para el desarrollo de los temas cuya demostración es dejada como ejercicio y que están marcados con el símbolo ☛; por ejemplo, la demostración del teorema del binomio, la demostración del teorema de la dimensión, la demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, entre otros. El desarrollo de estos ejercicios muy seguramente requerirá de la ayuda del profesor.

Hemos distribuido nuestra exposición en cinco capítulos. Aunque en el primer capítulo ("Algo sobre inducción matemática y números complejos") se tratan temas básicos muy importantes e interesantes, nos parece que en realidad éste existe más por tradición que por conexión directa con los temas centrales del curso; incluso se podría omitir en principio y dejarlo para el final, lo cual podría ser conveniente teniendo en cuenta que, según nuestra experiencia, abordar al inicio del curso las demostraciones por inducción matemática produce generalmente cierta ansiedad y desconcierto en los estudiantes recién ingresados a la universidad aunque, por otra parte, se puede pensar en este capítulo como una bonita forma de "calentamiento" antes de sumergirse en los temas centrales; así pues, el dejarlo para el principio o el final del curso, queda a criterio de cada profesor. Salvo este primer capítulo, podemos decir que todo el texto se centra en resolver con cierta profundidad un problema con el cual el estudiante debe estar familiarizado: hallar las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales en varias variables.

En el segundo capítulo ("$\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial") se hace una introducción al álgebra lineal propiamente dicha proponiendo el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales lo cual, al observar la forma de las soluciones de tales sistemas, motiva la definición del conjunto $\mathbb{R}^n$ y el estudio de su estructura de espacio vectorial, tomando siempre como base los casos particulares e interpretables geométricamente, como son el plano $\mathbb{R}^2$ y nuestro espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$. En este capítulo se definen conceptos básicos del álgebra lineal como son los de dependencia e independencia lineal, sistemas de generadores, dimensión de un espacio vectorial y el concepto de base, entre otros; se estudian también planos y rectas en el espacio $\mathbb{R}^3$ y se finaliza el capítulo con las nociones de subespacio vectorial y subespacio afín, identificando geométricamente los subespacios de $\mathbb{R}^3$.

El tercer capítulo ("Transformaciones lineales y matrices") se dedica a las funciones entre los espacios $\mathbb{R}^n$ (estudiados en el capítulo anterior) que respetan la estructura de espacio vectorial y a su íntima relación con las matrices, mostrando cómo a cada transformación lineal se le puede asociar una matriz y recíprocamente, de tal manera que las matrices y las transformaciones lineales son, en cierta forma, "esencialmente lo mismo." Se analiza también en este capítulo el efecto geométrico (cambios de escala, giros, reflexiones, etc.), que puede producir una transformación lineal del plano en el plano o del espacio tridimensional en sí mismo; se introducen los conceptos de núcleo e imagen de una transformación lineal, relacionándolos con los respectivos problemas de resolver ciertos sistemas de ecuaciones lineales, y el teorema de la dimensión. Se deducen las operaciones entre matrices a partir de las operaciones entre transformaciones lineales lo cual, en nuestro concepto, justifica mejor el álgebra de matrices y facilita un poco la comprensión de sus propiedades. Se expone también el tema de la inversa de una matriz, y al final del capítulo se definen las transformaciones afines, lo que se aprovecha para mostrar, mediante un ejemplo, cómo se pueden construir conjuntos fractales con este tipo de transformaciones.

En el cuarto capítulo ("$\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial euclídeo") se introduce una nueva operación en $\mathbb{R}^n$: el producto interno o producto escalar, el cual permite "hacer más geometría" en nuestro espacio $\mathbb{R}^n$, por ejemplo calcular longitudes, ángulos, distancias, proyecciones, determinar vectores perpendiculares, etc. Además, se define la operación producto cruz o producto vectorial (operación exclusiva de $\mathbb{R}^3$), que tiene importantes aplicaciones geométricas en $\mathbb{R}^3$ y servirá, al combinarla con el producto interno (combinación llamada producto mixto), como fuente de inspiración para la definición de la función determinante que se estudia en el siguiente capítulo. El capítulo cuarto termina con las nociones de similitud e isometría, usando las similitudes para proporcionar una definición formal de la noción de autosimilitud, característica esencial de los conjuntos fractales.

Como ya se mencionó en el párrafo anterior, tomando como fuente de inspiración las propiedades del producto mixto e interpretándolo como un volumen orientado se aborda en el capítulo quinto ("La función determinante") la definición axiomática de la función determinante (al estilo del tratamiento que hace Apóstol en su clásico libro de cálculo,[*] Vol. II.), viéndola entonces como una función que a cada matriz cuadrada le asigna un número real y constituyendo un muy buen mecanismo teórico que indica si n vectores dados de $\mathbb{R}^n$ son o no linealmente independientes. Este enfoque de los determinantes resulta muy bondadoso: permite, por ejemplo, deducir fácilmente propiedades como la de que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices, deducción que de otra manera puede resultar muy dispendiosa. Usando los axiomas de la función determinante, se deduce un sencillo método para calcular el de cualquier matriz cuadrada, triangularizándola mediante operaciones elementales sobre filas o sobre columnas. Se deducen la regla de Cramer, el cálculo de la inversa de una matriz usando cofactores y finalmente el método (que en la mayoría de los libros aparece al principio del capítulo respectivo) para calcular determinantes desarrollándolos por alguna de las filas de la matriz. Por último incluimos un pequeño apéndice con las respuestas a la mayoría de los ejercicios.

Queremos agradecer muy sinceramente a varias personas y entidades que contribuyeron de una u otra forma con la elaboración del trabajo que estamos presentando: a Claudia Granados, quien revisó y digitó una de las

[*] APÓSTOL Tom, *Calculus, Vol. I y Vol. II.* Reverté-Barcelona, 2a. ed., 1974.

primeras versiones de nuestro trabajo y además incluyó varios ejemplos y ejercicios; a Angy Coronel y a Beatriz Rojas, que digitaron versiones posteriores; a Jorge Angarita, quien revisó una buena parte de los ejercicios propuestos en cada capítulo; a Gilberto Arenas, quien elaboró en PSTricks[**] la mayoría de las figuras y nos dio valiosas sugerencias; a los profesores que han participado en el Seminario Docente de Álgebra Superior y Lineal que se realiza en la Escuela de Matemáticas de la UIS, pues de este seminario surgieron varias inquietudes que hemos aprovechado para la escritura de este material; obviamente a la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander y a la UIS misma, por brindarnos la oportunidad de impartir el curso de Álgebra Superior a lo largo de muchos años durante los cuales nuestro trabajo ha venido tomando forma. Por otra parte la segunda autora quiere también agradecer a Colciencias por una beca-crédito que le otorgó durante los años 1994 a 1996 para adelantar estudios de doctorado en la Universidad Nacional de Colombia, y a la Fundación Mazda para el desarrollo del Arte y la Ciencia que le concedió una beca durante los años 1998 y 1999, con el mismo objetivo.

Esperamos entonces que el material que estamos ofreciendo se convierta en una buena alternativa de apoyo al desarrollo de las asignaturas de matemáticas del ciclo básico que deben cursar los estudiantes de primer semestre de ciencias e ingenierías de la Universidad Industrial de Santander y de otras latitudes de habla hispana.

Una vez agotada la primera impresión presentamos esta reimpresión en donde se han corregido algunos errores. Agradecemos la acogida por parte de colegas y estudiantes a este texto y planeamos una próxima edición enriquecida con sus comentarios y sugerencias y además con algunas modificaciones un poco más profundas.

Los autores
Bucaramanga, abril de 2009

[**]Colección de sofisticados macros TEX, basados en el lenguaje de programación PostScript, diseñados para la creación y manipulación de objetos gráficos.

Capítulo 1

Algo sobre inducción matemática y números complejos

1.1. Números naturales

¿Cuál es el primer conjunto de números que estudiamos desde la escuela primaria? Se sabe que los números naturales constituyen la estructura básica de las matemáticas. Recordemos aquí que el camino normal que se recorre es partiendo de los naturales ($\mathbb{N}$) pasar a los enteros ($\mathbb{Z}$), de estos a los racionales ($\mathbb{Q}$) y luego a los reales ($\mathbb{R}$), los cuales se extienden a los complejos ($\mathbb{C}$); el paso de un conjunto numérico a otro se da por la necesidad de ampliar cada conjunto a otro (que lo contenga) y en el cual se puedan resolver ciertos problemas que no tienen solución en el conjunto dado.

Una definición muy "popular" pero nada formal de los números naturales dice que "son los números que nos sirven para contar" $(1, 2, 3, 4, \dots)$. Sin embargo, en matemáticas se debe dar una definición formal y una manera (muy usual) de hacerlo es axiomáticamente, es decir, estableciendo una lista de "reglas" que se aceptan sin demostración y que definen el concepto. Así, para el caso de los números naturales, el conjunto de los axiomas universalmente aceptado es el conjunto de axiomas propuesto por el matemático italiano Giusseppe Peano (1858-1932), que usa sólo tres términos técnicos:

> *número natural*;
>
> *primer número natural*;
>
> la función *el siguiente de*.

En los axiomas de Peano se establece la "esencia" de los números naturales que corresponde a la idea intuitiva que tenemos de ellos: "empiezan en algún momento" (existe el primero) y "van en fila" (uno enseguida de otro). Los axiomas son 5:

Figura 1.1. Giusseppe Peano.

N1: El 0 es un número natural (aquí puede ser 1 ó 0, o cualquier otro "símbolo", en realidad lo que importa es que existe al menos un natural).

N2: A todo número natural n se le puede asociar otro número natural llamado el *siguiente de* n.

N3: Si los siguientes de dos números naturales son iguales, entonces los números son iguales.

N4: No existe un número natural cuyo siguiente es 0 (aquí nuevamente puede ser 1 ó 0, o cualquier otro "símbolo", lo que importa es que existe un "primer elemento").

N5: Si S es una colección de números naturales que cumple:

(i) 0 es un elemento de S, es decir, $0 \in S$;

(ii) cada vez que un natural está en S, también el siguiente de él está en S,

entonces S es el conjunto de todos los naturales.

Notas

1. El conjunto de los números naturales se simboliza $\mathbb{N}$, así la expresión $k \in \mathbb{N}$ significa que k es un número natural.

2. Si $k \in \mathbb{N}$, el "siguiente" o "sucesor" de k se simboliza $k + 1$.

De los 5 axiomas de Peano queremos destacar el axioma N5 llamado el **Principio de Inducción Matemática** (algunas veces el conjunto $\mathbb{N}$ se define como el subconjunto "más pequeño" de $\mathbb{R}$ que satisface las condiciones (i) y (ii) de N5). El Principio de Inducción Matemática (P.I.M) constituye la base de las demostraciones que trabajaremos en la siguiente sección.

Ejercicios 1.1

1. Si $\mathbb{N}$ es el conjunto de los naturales, $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros, $\mathbb{Q}$ el de los números racionales, $\mathbb{I}$ el conjunto de irracionales y $\mathbb{R}$ son los reales, ¿cuál de las siguientes proposiciones **no** es cierta?

   a) $\mathbb{Z}$ contiene a $\mathbb{N}$;

   b) $\mathbb{Q}$ contiene a $\mathbb{N}$ y a $\mathbb{Z}$;

   c) $\mathbb{I}$ contiene a $\mathbb{N}$;

   d) $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{N}$;

   e) $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{I}$;

   f) $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{Q}$.

2. No existe un número natural mayor que todos los demás. ¿Por qué?

1.2. Demostraciones por inducción matemática

Es posible que el estudiante alguna vez se haya encontrado con afirmaciones como las siguientes:

* “para todo natural n, $n^2 + n$ es par”.
* “Si $r \in \mathbb{R}$, $r > 1$ entonces $1 + r + r^2 + \cdots + r^n = (1 - r^{n+1})/(1 - r)$ para todo n natural”.
* “$2^n > n$, para todo natural n”.
* “Para todo natural n se tiene que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n + 1)/2$”.

Las afirmaciones anteriores tienen en común la expresión: “para todo natural n”; en todas se afirma que algo es válido para todo número natural, es decir todas ellas son de la forma: “$p(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$”, donde $p(n)$ es una proposición relativa al natural n. Es fácil verificar que cada afirmación es válida, por ejemplo para $1, 2, 3$, u otros valores particulares, pero ¿cómo probar que en efecto $p(n)$ es válida para todo número natural?

La idea es la siguiente: si llamamos S al conjunto de números naturales que hacen cierta la proposición $p(n)$, o sea $S = \{n \in \mathbb{N} : p(n) \text{ es verdadera}\}$, entonces bastaría probar que $S = \mathbb{N}$; para esto, usamos el principio de inducción matemática, es decir, debemos probar:

i) que $0 \in S$, o, lo que es lo mismo, que $p(0)$ es verdadera;

ii) que si $k \in S$ entonces $k + 1 \in S$, es decir, asumimos para algún k, $p(k)$ es verdadera (hipótesis de inducción) entonces se debe demostrar que $p(k + 1)$ es verdadera.

Al demostrar (i) y (ii), por el P.I.M, se concluye que $S = \mathbb{N}$, es decir, que $p(n)$ es verdadera para todo n.

A continuación presentamos tres ejemplos de proposiciones que se pueden demostrar por el principio de inducción matemática.

Ejemplo 1.2.1. La suma de los cubos de los primeros n enteros positivos es igual a $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$; es decir $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Prueba. Sea $P(n)$ la proposición: la suma de los cubos de los primeros n enteros positivos es igual a $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

i) $P(1)$ claramente es verdadera ya que $1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}=1$.

ii) Supongamos que $P(k)$ es verdadera. Veamos que $P(k+1)$ también es verdadera.

Tenemos que:

$$P(k): \quad 1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad \left.\vphantom{\frac{k^2}{4}}\right\} \text{hipótesis de inducción}$$

y $P(k+1)$ es la igualdad:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \quad \left.\vphantom{\frac{k^2}{4}}\right\} \text{tesis de inducción.}$$

Partiendo de la hipótesis de inducción, sumamos a ambos lados de la igualdad $(k+1)^3$ que es el término siguiente de la suma de la izquierda, entonces tendríamos

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3;$$

sumando las fracciones algebraicas del lado derecho de la igualdad, se obtiene

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4};$$

factorizando al lado derecho de la igualdad, tenemos

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Luego $P(k+1)$ (la tesis) es verdadera y por el principio de inducción matemática se sigue que la suma de los cubos de los primeros n enteros positivos es igual a $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

un enfoque geométrico]

Ejemplo 1.2.2. Si $n \in \mathbb{N}$ y a es una constante mayor o igual que cero entonces $(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)a^2}{2}$.

Prueba. Sea $P(n)$ la proposición: si $n \in \mathbb{N}$ y a es una constante mayor o igual que cero entonces $(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)a^2}{2}$.

i) $P(1)$ claramente es verdadera ya que $1 + a \geq 1 + a + \frac{1(1-1)a^2}{2}$.

ii) Supongamos que $P(k)$ es verdadera. Veamos que $P(k+1)$ también es verdadera.

Tenemos que:

$$P(k): \quad (1+a)^k \geq 1 + ka + \frac{k(k-1)a^2}{2} \qquad \left.\vphantom{\frac{a}{2}}\right\} \text{hipótesis de inducción}$$

y $P(k+1)$ es la desigualdad:

$$(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a + \frac{k(k+1)a^2}{2} \qquad \left.\vphantom{\frac{a}{2}}\right\} \text{tesis de inducción.}$$

Partiendo de la hipótesis de inducción, por las propiedades de las desigualdades multiplicamos a ambos lados por un número positivo y la desigualdad no se altera, luego tenemos,

$$(1+a)^{k+1} \geq \left[1 + ka + \frac{k(k-1)a^2}{2}\right](1+a),$$

realizando el producto, tenemos,

$$(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a + \frac{k(k+1)a^2}{2} + \frac{k(k-1)a^3}{2};$$

podemos plantear las siguientes desigualdades ya que $\frac{k(k-1)a^3}{2} \geq 0$,

$$\begin{aligned} (1+a)^{k+1} &\geq 1 + (k+1)a + \frac{k(k+1)a^2}{2} + \frac{k(k-1)a^3}{2} \\ &\geq 1 + (k+1)a + \frac{k(k+1)a^2}{2}; \end{aligned}$$

por la propiedad transitiva de las desigualdades, tenemos:

$$(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a + \frac{k(k+1)a^2}{2}.$$

Luego $P(k+1)$ (la tesis) es verdadera y por el principio de inducción matemática se sigue que la desigualdad es verdadera para todo número natural n.

Ejemplo 1.2.3. Para todo número natural n, $n^2 + n$ es par.

Prueba. Sea $P(n)$ la proposición: para todo número natural n, $n^2 + n$ es par.

i) $P(1)$ claramente es verdadera ya que $1^2 + 1$ es par.

ii) Supongamos que $P(k)$ es verdadera. Veamos que $P(k+1)$ también es verdadera.

Tenemos $P(k)$, $k^2 + k$ es par, es decir, $k^2 + k = 2m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$ (hipótesis de inducción matemática), y $P(k+1)$ es $(k+1)^2 + (k+1)$ es par (tesis de inducción matemática). Veamos:

$$\begin{aligned}
(k+1)^2 + (k+1) &= k^2 + 2k + 1 + k + 1 \\
&= (k^2 + k) + 2(k+1) \\
&= 2m + 2(k+1); \qquad \text{usando la hipótesis} \\
&= 2(m + k + 1)
\end{aligned}$$

y llamando $t = m + k + 1 \in \mathbb{Z}$ obtenemos $(k+1)^2 + (k+1) = 2t$, luego $P(k+1)$ es verdadera y por el principio de inducción matemática se sigue que para todo número natural n, $n^2 + n$ es par.

Como ocurre con muchas cosas en la vida, la mejor manera de entender y llegar a realizar con cierta destreza demostraciones por inducción matemática, es haciendo varios ejercicios. Invitamos al estudiante a practicar e intentar **por sí mismo**. No se desanime ante las dificultades o si no logra realizar la demostración; cualquier intento, por fallido que sea, es un paso importante en su proceso de aprendizaje. ¡Ánimo!

Ejercicios 1.2

1. Demostrar por inducción sobre n:

   a) $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$;

   b) $a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (a+(n-1)d) = n[2a + (n-1)d]/2$ (suma de una progresión aritmética);

c) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = (1 - x^{n+1})/(1 - x)$ (suma de una progresión geométrica, x no es 1);

d) $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$;

e) $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (n(n + 1)/2)^2$;

f) $1 - 4 + 9 - 16 + \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}n(n + 1)/2$;

g) $1 \times 2 + 3 \times 4 + 5 \times 6 + \cdots + (2n - 1)(2n) = n(n+1)(4n - 1)/3$;

h) Si $r > 1$ entonces $r^n \geq 1$;

i) $1 + 2^n < 3^n$ con $n > 1$;

j) $n < 2^n$.

2. Si $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ y r son números reales demostrar por inducción que:

   a) $r(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) = rb_1 + rb_2 + \cdots + rb_n$.

   b) $|b_1 + b_2 + \cdots + b_n| \leq |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n|$.

3. Probar que n rectas en el plano, tales que dos cualesquiera de ellas no son paralelas y tres cualesquiera de ellas no tienen un punto en común, determinan $(n^2 + n + 2)/2$ regiones diferentes.

4. Sea b un número entero positivo fijo. Demostrar que para todo natural n existen q y r naturales tales que $n = bq + r$; $0 \leq r < b$.

5. Sea $x > 0$. Probar que para todo entero $n \geq 3$ se tiene que:

$$(1 + x)^n > 1 + nx + nx^2.$$

6. ¿Cuál es el error en la siguiente "demostración"?

   "Teorema": Todos los caballos tienen el mismo color.

   Demostración: Sea P_n la proposición "todos los caballos de un conjunto de n caballos son del mismo color".

   a) P_1 es claramente verdadera.

b) Supongamos que P_k es verdadera. Veamos que P_{k+1} también es verdadera. Sean $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_{k+1}$ los $k+1$ caballos en un conjunto de $k+1$ caballos. Consideremos el conjunto de k caballos $\{c_1, c_2, c_3, \cdots, c_k\}$. Por hipótesis de inducción todos estos caballos son del mismo color. En el conjunto anterior reemplacemos c_k por c_{k+1}. Luego en el conjunto resultante $\{c_1, c_2, c_3, \cdots, c_{k-1}, c_{k+1}\}$ de k caballos, por hipótesis de inducción, todos son del mismo color; como c_1 y c_k al igual que c_{k+1} y c_1 son de igual color, todos los $k+1$ caballos son del mismo color. Luego P_{k+1} es verdadera y, por el principio de inducción se sigue que, todos los caballos son del mismo color.

7. Demostrar que si un conjunto S tiene n elementos entonces S tiene 2^n subconjuntos.

8. El famoso rompecabezas conocido como las *Torres de Hanoi*, consta de un número finito de discos de diferentes diámetros, insertables en tres varillas (en la Figura 1.2 se muestra el caso de cuatro discos). Los discos se encuentran insertados en una varilla, dispuestos de mayor a menor; el propósito del rompecabezas es trasladar todos los discos desde la varilla en que se encuentran hasta otra distinta, moviendo los discos de uno en uno de tal manera que en ningún momento, un disco quede descansando sobre otro de diámetro menor. Demuestre por inducción sobre n, que para un rompecabezas con n discos, el menor número de movimientos para resolverlo es $2^n - 1$.

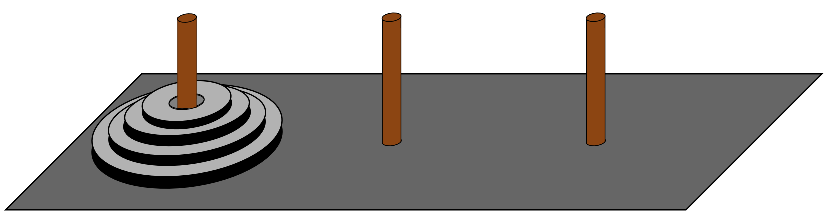
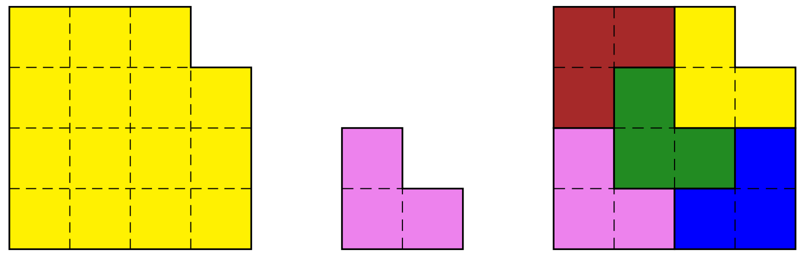


Figura 1.2. Torres de Hanoi.

9. Un cuadrado de lado $4 = 2^2$ con un extremo perdido (ver Figura 1.3 a)), se puede "embaldosinar" o recubrir con piezas como la de la Figura 1.3 b), llamada "triminó", (ver Figura 1.3 c) Recubrimiento con triminós). Demuestre por inducción sobre n, que

todo cuadrado de lado 2^n, $n \geq 1$, con un extremo perdido, se puede embaldosinar con triminós.



a) Cuadrado de lado 4 con un extremo perdido

b) Triminó

c) Recubrimiento con triminós

Figura 1.3.

1.3. Definiciones recursivas

Otra aplicación importante del principio de inducción matemática la encontramos en las definiciones recursivas. Un concepto se dice definido recursivamente, si se define explícitamente para el caso $n = 1$ (o $n = 0$, o, en general, para un "primer caso") y se da una regla (o lista de reglas) que lo definen para el caso n-ésimo en términos del caso anterior. Por ejemplo, el concepto de "potenciación" se puede definir recursivamente así: "para $a \in \mathbb{R}$ definimos: $a^1 =: a$ y $a^n =: a^{n-1}a$, para todo $n \geq 2$"; de esta manera tendríamos, por ejemplo, que $a^2 = a^{2-1}a = a^1a = aa, a^3 = a^{3-1}a = a^2a = aaa$, y así sucesivamente.

Muchas sucesiones de números se pueden definir recursivamente: sea, por ejemplo, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por: $S_1 =: 1$ y $S_{n+1} = 2S_n + 1$ entonces los cuatro primeros términos de esta sucesión serán:

$$1, 3, 7, 15.$$

En realidad, podemos afirmar que toda definición recursiva al fin y al cabo lo que siempre define es una **sucesión** en un determinado conjunto X, es decir una función f de dominio $\mathbb{N}$ y codominio X; así por ejemplo las potencias de una base fija a se pueden obtener con la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(1) =: a$ y $f(n) =: f(n-1)a$ para $n \geq 2$.

Ejercicios 1.3

1. El **factorial** de un número natural es el producto de sí mismo por todos sus anteriores hasta 1. Por ejemplo, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$. Para 0 se considera $0! = 1$.

   a) Sin hacer las multiplicaciones de todos los términos muestre que: $10! = 6!7!$; $16! = 14!5!2!$; $10! = 7!5!3!$; $9! = 7!3!3!2!$

   b) Definir recursivamente: $n!$

2. Demuestre utilizando la definición recursiva e inducción:

   a) $(ab)^n = a^nb^n$;

   b) $a^na^m = a^{n+m}$;

c) $2^n < n!$ para $n > 3$.

3. Se define S_n recursivamente así:

$$S_1 = 2; \qquad S_{n+1} = S_n + n + 1,$$

demostrar que $S_n = (n^2 + n + 2)/2, \ \forall n \geq 1$.

4. Se define S_n recursivamente así:

$$S_0 = 1; \qquad S_{n+1} = xS_n + 1,$$

demostrar que $S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n, \ \forall n \geq 1$.

5. A continuación se define recursivamente la sucesión a_n de diferentes maneras:

a) $a_0 = 0;\ b_0 = 1; \qquad a_{n+1} = a_n + b_n;\ b_{n+1} = xb_n;$

b) $a_0 = 0;\ b_0 = 0; \qquad a_{n+1} = a_n + b_n;\ b_{n+1} = x + b_n;$

c) $a_0 = 0;\ b_0 = 1; \qquad a_{n+1} = a_n + b_n;\ b_{n+1} = b_n + 1;$

d) $a_0 = 1;\ b_0 = 1; \qquad a_{n+1} = a_n b_n;\ b_{n+1} = b_n + 1;$

e) $a_0 = 0;\ b_0 = 0; \qquad a_{n+1} = a_n + 2b_n + 1;\ b_{n+1} = b_n + 1;$

f) $a_0 = 0;\ b_0 = 1;\ c_0 = 1;$
$a_{n+1} = a_n + b_n;\ b_{n+1} = \frac{b_n}{c_n};\ c_{n+1} = c_n + 1.$

A continuación están, en otro orden, las definiciones no recursivas de a_n, halle las correspondientes:

I. $a_n = n!$

II. $a_n = n^2;$

III. $a_n = n(n-1)/2;$

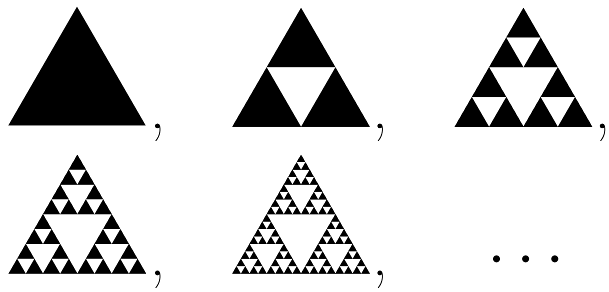
IV. $a_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}, \ \forall n \geq 1;$

V. $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!};$

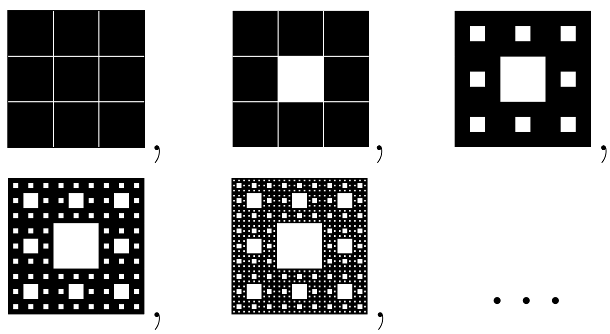
VI. $a_n = xn(n-1)/2.$

6. Definir recursivamente las siguientes sucesiones de figuras:

a)



b)



7. Demostrar que si $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$, entonces para todo n se tiene:

$$x_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n).$$

8. Demostrar que si $x_0 = 2$, $x_1 = 1$ y $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$ entonces para todo n se tiene:

$$x_n = 2^n - (-1)^{n-1}.$$

9. Definir recursivamente la sucesión: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... (sucesión de Fibonacci).

1.4. Sumatoria y productoria

Algunas veces debemos trabajar con sumas (finitas) de varios sumandos, es decir expresiones de la forma: $a_1+a_2+\ldots+a_n$. Una forma abreviada de escribir esta suma es usando el símbolo $\sum$, así: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ que se lee: "sumatoria (o simplemente suma) de los a_i cuando i varía de 1 a n". El símbolo $\sum$ se puede definir recursivamente como sigue:

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1; \qquad \sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1};\ \forall n \geq 1.$$

Notas

1. El subíndice es "aparente", es decir podríamos usar cualquier otra letra y el significado sería el mismo; por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = \sum_{p=1}^{4} p^2 = \sum_{k=1}^{4} k^2 = \sum_{j=0}^{3} (j+1)^2 = 1+2^2+3^2+4^2 = 30.$$

2. Obsérvese que no siempre las sumas deben empezar en 1, en realidad pueden empezar en cualquier índice p entero, y en tal caso tendríamos:

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + \ldots + a_q; \quad p \leq q.$$

Por ejemplo:

$$\sum_{i=3}^{10} ik^i = 3k^3 + 4k^4 + \ldots + 10k^{10}.$$

Proposición 1. *Algunas propiedades del símbolo de sumatoria son:*

i. $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)$;

ii. $\sum\limits_{i=1}^{n} ka_i = k\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)$;

iii. $\sum\limits_{i=1}^{n} k = nk$;

iv. $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$ *(Propiedad Telescópica);*

v. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i + \sum\limits_{i=p+1}^{n} a_i$ *(siempre que* $1 \leq p < n$*);*

vi. $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} a_i b_j = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{m} b_j\right)$.

Todas las propiedades anteriores se pueden demostrar por inducción (ver Ejercicio 3) aunque también se pueden dar argumentos intuitivos para cada una de ellas, por ejemplo para la propiedad **ii**. podríamos escribir:

$$\sum_{i=1}^{n} ka_i = ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n = k\,(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = k\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Usando las propiedades de la Proposición 1 se puede calcular el valor de ciertas sumas, por ejemplo de términos de progresiones tanto aritméticas como geométricas.

A continuación mostramos una proposición que se demuestra por inducción matemática, donde además se usan sumatorias y sus propiedades.

Ejemplo 1.4.1. El polinomio $\sum\limits_{i=1}^{n} x^{n-i}y^{i-1}$ es igual a $\dfrac{x^n - y^n}{x - y}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} x^{n-i}y^{i-1} = \frac{x^n - y^n}{x - y}.$$

Prueba. Sea P_n la proposición, $\sum\limits_{i=1}^{n} x^{n-i}y^{i-1} = \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$.

Nota. Una proposición $P(n)$ también la notaremos P_n.

i. Claramente P_1 es verdadera pues

$$\sum_{i=1}^{1} x^{1-i}y^{i-1} = x^0y^0 = \frac{x^1 - y^1}{x - y} = 1.$$

ii. Supongamos que P_k es verdadera. Veamos que P_{k+1} también es verdadera. P_k es la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{k} x^{k-i}y^{i-1} = \frac{x^k - y^k}{x - y} \quad \text{(hipótesis de inducción matemática)}$$

mientras que P_{k+1} es la igualdad

$$\sum_{i=1}^{k+1} x^{k+1-i}y^{i-1} = \frac{x^{k+1} - y^{k+1}}{x - y} \quad \text{(tesis de inducción matemática).}$$

Partiendo de la hipótesis de inducción, despejamos x^k y tendremos:

$$x^k = y^k + (x-y)\sum_{i=1}^{k} x^{k-i}y^{i-1},$$

multiplicando a ambos lados por x obtenemos:

$$x^{k+1} = xy^k + x(x-y)\sum_{i=1}^{k} x^{k-i}y^{i-1};$$

restando a ambos lados y^{k+1} se obtiene:

$$x^{k+1} - y^{k+1} = xy^k - y^{k+1} + x(x-y)\sum_{i=1}^{k} x^{k-i}y^{i-1};$$

factorizando tenemos:

$$x^{k+1} - y^{k+1} = y^k(x-y) + x(x-y)\sum_{i=1}^{k} x^{k-i}y^{i-1};$$

factorizando nuevamente y con ayuda de las propiedades de sumatoria, se sigue que:

$$x^{k+1} - y^{k+1} = (x-y)\sum_{i=1}^{k+1} x^{k+1-i}y^{i-1};$$

multiplicando por $\dfrac{1}{x-y}$ a ambos lados tenemos:

$$\sum_{i=1}^{k+1} x^{k+1-i}y^{i-1} = \frac{x^{k+1} - y^{k+1}}{x - y}.$$

Luego P_{k+1} (la tesis) es verdadera y por el principio de inducción matemática se sigue que el polinomio $\sum\limits_{i=1}^{n} x^{n-i}y^{i-1}$ es igual a $\dfrac{x^n - y^n}{x-y}$ para todo número natural.

Así como existe una notación abreviada para sumas de varios sumandos, existe también una notación abreviada para productos de varios factores usando el símbolo $\prod$. De esta manera, un producto de la forma: $a_1a_2\cdots a_n$ se simboliza por:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i$$

que se lee: "productoria (o multiplicatoria, o simplemente producto) de las a_i cuando i varía de 1 a n". Todas las observaciones que se hicieron respecto al símbolo de sumatoria, así como las propiedades, se pueden extender al caso de la productoria, claro está, haciendo las modificaciones adecuadas (ver Ejercicio 4).

Ejercicios 1.4

1. Calcular los valores numéricos de las siguientes expresiones:

   a) $\sum\limits_{i=1}^{6} i^2$; c) $\sum\limits_{i=2}^{5}(3i+1)$; e) $\sum\limits_{i=1}^{3}\prod\limits_{k=1}^{i} k$;

   b) $\sum\limits_{i=1}^{4}(-1)^{i+1}i^2$; d) $\prod\limits_{i=1}^{4}(2i+1)$; f) $\prod\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{k=1}^{i} k$.

2. Definir $n!$ en términos de productoria.

3. Demostrar por inducción las propiedades de $\sum$.

4. Formular propiedades de la productoria análogas a las enunciadas para la sumatoria.

5. Dado por conocido el valor de $\sum\limits_{i=1}^{n} i$ y utilizando las propiedades de la sumatoria encontrar:

   a) La suma de los primeros n impares.

b) $2 + 8 + 14 + \ldots + (6n - 4)$.

c) La suma de los n primeros números de la sucesión $3, 8, 13, \ldots$

6. Deducir una fórmula para:

a) $\sum_{i=1}^{n} i^2$; b) $\sum_{i=1}^{n} i^3$; c) $\prod_{i=1}^{n} i$.

7. Deducir una fórmula para hallar el valor de:

a) $\sum_{i=1}^{n} x^i$;

b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ (Sugerencia: use la Propiedad Telescópica).

8. Deducir una fórmula para:

a) $\prod_{i=1}^{k} i$; b) $\prod_{i=2}^{n} (1 - \frac{1}{i})$; c) $\prod_{i=2}^{n} (1 - \frac{1}{i^2})$.

9. Un cuadro mágico de orden n es un cuadrado dividido en otros en donde se colocan los números de 1 hasta n^2 de tal manera que cada columna, fila o diagonal suman lo mismo. La Figura 1.4 muestra un cuadro mágico de orden 4 que aparece en un grabado de Durero (pintor y grabador alemán, 1471-1528).

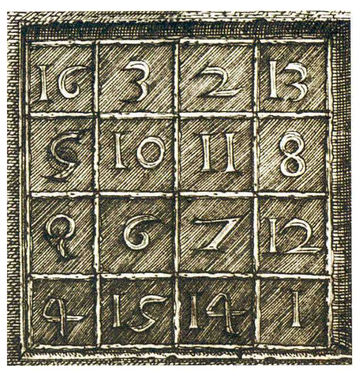


Figura 1.4. Cuadro mágico en un grabado de Durero.

En general, ¿cuánto vale la suma de los números de cada columna, fila o diagonal de un cuadro mágico de orden n?

1.5. Combinatoria y teorema del binomio

Seguramente el estudiante sabe de memoria el desarrollo de $(a+b)^2$ y de $(a+b)^3$. Pero, ¿qué pasa si nos preguntamos por el desarrollo de $(a+b)^4$, o de $(a+b)^{10}$, o de $(a+b)^{54}$? O tal vez por alguna razón no estemos interesados en todo el desarrollo, sino sólo en un determinado término del desarrollo. El Teorema del Binomio, cuya demostración es una consecuencia importante del Principio de Inducción Matemática, "muestra" todos y cada uno de los términos en el desarrollo de $(a+b)^n$, para todo entero positivo n. En la fórmula que proporciona el Teorema del Binomio aparecen ciertos números llamados coeficientes binomiales que definiremos antes de enunciar el teorema.

Definición 1. Si n es un entero no negativo y k un entero con $0 \leq k \leq n$, entonces el **coeficiente binomial** o **combinado de** n **y** k, notado por $\binom{n}{k}$, se define como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Teorema 2 (del Binomio)**.** *Sean a y b reales, entonces para todo natural n se tiene que:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Analizando la fórmula que aparece en el teorema, es fácil hacer algunas observaciones respecto al desarrollo de $(a+b)^n$, como las siguientes:

1. Tiene $n+1$ términos.

2. El exponente de a disminuye desde n hasta 0 mientras que el de b aumenta desde 0 hasta n.

3. En cada término la suma de los exponentes de a y de b es n.

4. Cada término es de la forma $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

5. El q-ésimo término se obtiene tomando $k = q-1$.

Ejemplo 1.5.1. Por el teorema del binomio tenemos que el desarrollo de $(x+y)^4$ sería el polinomio que se obtiene de la sumatoria, cuyos términos son

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{4}\tbinom{4}{k}x^{4-k}y^k &= \tbinom{4}{0}x^4y^0+\tbinom{4}{1}x^3y^1+\tbinom{4}{2}x^2y^2+\tbinom{4}{3}x^1y^3+\tbinom{4}{4}x^0y^4\\ &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.5.2. Encontrar el término que contiene x en el desarrollo de

$$\left(2x+\frac{1}{3x}\right)^7.$$

Por el teorema del binomio tenemos que:

$$\left(2x+\frac{1}{3x}\right)^7=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}(2x)^{7-k}\left(\frac{1}{3x}\right)^k,$$

y como enunciamos anteriormente, el q-ésimo término se obtiene tomando $k=q-1$, es decir, el término q-ésimo es

$$\begin{aligned}T_q &= \binom{7}{q-1}(2x)^{7-(q-1)}\left(\frac{1}{3x}\right)^{q-1}\\ &= \binom{7}{q-1}(2x)^{8-q}(3x)^{-q+1} = \binom{7}{q-1}2^{8-q}3^{-q+1}x^{9-2q}\end{aligned}$$

y como nos piden x con exponente 1 debemos resolver la ecuación $9-2q=1$, de donde obtenemos que $q=4$, entonces el término que buscamos es:

$$T_4=\binom{7}{3}2^{8-4}3^{-4+1}x^{9-8}=\frac{560}{27}x.$$

Ejercicios 1.5

1. Encuentre el valor de cada uno de los siguientes coeficientes binomiales:

   a) $\binom{10}{0}$; *b*) $\binom{50}{1}$; *c*) $\binom{20}{3}$.

2. Demostrar:

   $a)\ \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1;$ $\qquad b)\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$

3. Use el teorema del binomio para encontrar todos los términos en la expansión de las siguientes expresiones:

   $a)\ (a+b)^5;$ $\qquad b)\ (m-n)^7;$ $\qquad c)\ (3x-4y)^7.$

4. ¿Cuál es el coeficiente de $x^{99}y^{101}$ en la expansión de $(2x+3y)^{200}$?

5. Demuestre que: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$. (Sugerencia: expanda $(1+1)^n$).

6. Expandiendo $(1+(-1))^n$, demuestre que: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = 0.$

7. Usando el ejercicio anterior compare los valores de

   $$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots \quad \text{y} \quad \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots$$

8. Pruebe que si n, r y k son enteros tales que $0 \le k \le r \le n$ entonces:

   $$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

9. Pruebe que: $\displaystyle\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\ldots+\binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$

10. Los coeficientes binomiales se pueden colocar formando el famoso **Triángulo de Pascal**[*] (también llamado de Tartaglia[**]) como se muestra en el arreglo.

[*]Blaise Pascal, filósofo, físico y matemático francés, 1623-1662.

[**]Matemático italiano (1499-1557), su verdadero nombre era Niccolá Fontana. Tartaglia era un sobrenombre que significa tartamudo.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Casi todas las propiedades de los coeficientes binomiales se pueden observar en el triángulo. Por ejemplo, la propiedad a) del Ejercicio 2, nos indica que en los bordes del triángulo siempre va 1, mientras la propiedad b) del mismo ejercicio nos da razón de su simetría.

a) Interprete el resultado del ejercicio 7 en términos del Triángulo de Pascal.

b) Los términos de una fila, que no sean extremos, se pueden obtener sumando los dos términos que están encima, esto quiere decir que:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$

demostrar esta importante propiedad. Nótese que esta propiedad es cierta para todo k si aceptamos que $\binom{n}{i} = 0$ cuando $i < 0$ o $i > n$.

11. ☛Demostrar por inducción el teorema del binomio (en alguna parte de la demostración, utilice la propiedad b), del ejercicio 10).

1.6. Números complejos

"... Ya en el Renacimiento, los matemáticos asumieron que habían descubierto todos los números en el universo. Se podía pensar que todos los números estaban ubicados en una recta numérica, una línea infinitamente larga cuyo centro es el cero. La recta numérica sugería que la completud, aparentemente, se había logrado. Todos los números parecían en su lugar listos a responder a cualquier pregunta matemática. En cualquier caso, no había en la recta numérica campo para más números. Entonces, durante el siglo XVI, hubo nuevos estruendos de inquietud. El matemático italiano *Rafaello Bombelli* estaba estudiando las raíces cuadradas de varios números cuando se tropezó con una pregunta imposible contestar: ¿cuál es la raíz cuadrada de -1? El problema parece insoluble. La solución no puede ser $+1$ ni -1, pues el cuadrado de ambos es $+1$. Sin embargo, no hay otros candidatos obvios. Al mismo tiempo, la completud exige que seamos capaces de contestar la pregunta.

La solución de Bombelli fue crear un número nuevo (i) llamado número imaginario, que simplemente se definía como la solución a la pregunta: ¿cuál es la raíz cuadrada del negativo de 1? Esta puede parecer una manera cobarde de resolver el problema, pero no es diferente de la manera como fueron introducidos los números negativos. Enfrentados a una pregunta que de otra manera no tenía respuesta, los hindúes simplemente definieron a -1 como la respuesta a la pregunta ¿cuánto es cero menos uno? Es más fácil aceptar el concepto de -1 sólo porque conocemos el concepto análogo de "deuda", mientras no hay nada en el mundo real que respalde el concepto de número imaginario. El matemático alemán del siglo XVII Gottfried Leibniz describió en forma elegante la extraña naturaleza del número imaginario: "El número imaginario es un magnífico y maravilloso recurso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser". Aunque las raíces cuadradas de los números negativos se conocen como números imaginarios, los matemáticos no consideran que i sea más abstracto que un número negativo o un número entero. Además, los físicos descubrieron que los números imaginarios son el mejor lenguaje para describir algunos fenómenos del mundo real. Con algunas manipulaciones menores los números imaginarios resultan ser la manera ideal para analizar el movimiento natural de balanceo de objetos como el péndulo. Este movimiento, técnicamente conocido como "oscilación sinusoidal", se encuentra con frecuencia en la naturaleza, así que los números imaginarios se han vuelto parte integral de muchos cálculos físicos. Actualmente, los ingenieros eléctricos invocan a i para analizar corrientes eléctricas oscilantes y los físicos teóricos calculan las consecuencias de las funciones de onda mecánicas de los cuantos acudiendo al poder de los números imaginarios..." (Tomado del libro *El enigma de Fermat*, de Simon Singh.*)

*SINGH Simon, *El enigma de Fermat*, Editorial Planeta, 1998.

Figura 1.5. Leonhard Euler.

Al comenzar este capítulo anotábamos que el paso de un conjunto numérico al siguiente surge por la necesidad de ampliar el conjunto a otro en el cual se puedan resolver ciertos problemas que no admiten solución en el conjunto "más pequeño". El sistema $\mathbb{R}$ de los números reales goza de muy buenas propiedades; sin embargo si consideramos, por ejemplo, la ecuación $x^2+1=0$, es claro que ella no admite solución en $\mathbb{R}$, es decir, no existe un número real que la satisfaga; entonces se hace necesario ampliar $\mathbb{R}$ a otro conjunto en el cual sí exista solución para esta ecuación y aparece el conjunto $\mathbb{C}$ de los **números complejos.** Para esto asumimos que el símbolo i representa un número (imaginario) que cumple $i^2=-1$ y consideramos entonces el conjunto de todos los números de la forma $a+bi$ donde a y b son números reales, es decir:

$$\mathbb{C} =: \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Si $z=a+bi$ es un número complejo, a se llama la **parte real** de z, b la **parte imaginaria** y se suele notar como $\mathrm{Re}(z)=a$ y $\mathrm{Im}(z)=b$. Un complejo cuya parte real es cero, es decir de la forma $z=bi$, se dice un **imaginario puro**. Si la parte imaginaria es cero, el complejo es de la forma $z=a$, es decir, es simplemente un número real, esto muestra que $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$.

Obsérvese que un número complejo está determinado por una pareja ordenada de números reales, es decir $z=a+bi$ lo podríamos identificar con la pareja (a,b) y de esta manera una definición alternativa del conjunto $\mathbb{C}$ sería:

$$\mathbb{C} =: \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$

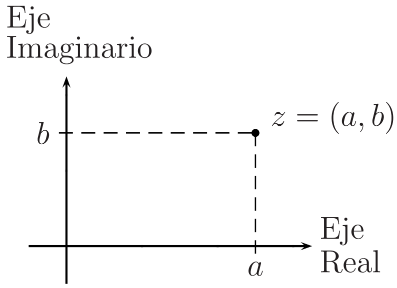


Figura 1.6. Representación geométrica cartesiana de un complejo.

Por tratarse de parejas ordenadas tendremos que $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Esta forma de ver los complejos corresponde a lo que, en el próximo capítulo, llamamos $\mathbb{R}^2$, que junto con ciertas operaciones constituye un ejemplo importante de espacio vectorial, concepto fundamental de este curso.

La expresión $a + bi$ se llama la **forma binómica** mientras que (a, b) se llama la **forma rectangular** o **cartesiana**; más adelante veremos otra forma muy útil de escribir un número complejo. Observando la forma rectangular es fácil deducir que el conjunto $\mathbb{C}$ se puede representar geométricamente con el conjunto de puntos de un plano cartesiano (que debe ser familiar para el estudiante); en este caso el eje x se llama también **eje real** y el eje y, **eje imaginario**.

Si $z = a + bi$, un complejo asociado a z que resulta muy útil se llama el **conjugado** de z, se nota $\bar{z}$ y está dado por $\bar{z} = a - bi$. ¿Qué relación geométrica hay entre z y $\bar{z}$?

Definiremos ahora dos operaciones importantes en el conjunto $\mathbb{C}$, **suma y multiplicación**, las cuales le dan a los números complejos cierta estructura especial. Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ son números complejos, se define la **suma** de z_1 y z_2 por:

$$\boxed{z_1 + z_2 =: (a + c) + (b + d)i,}$$

y la **multiplicación** de z_1 y z_2 por:

$$\boxed{z_1 z_2 =: (ac - bd) + (ad + cb)i;}$$

se puede apreciar a simple vista que la suma se define de manera natural, lo que no está claro es el caso del producto, aunque es fácil verificar que éste se obtiene multiplicando común y corriente los binomios $a+bi$ y $c+di$ y recordando que $i^2 = -1$. Teniendo definidas estas dos operaciones el paso siguiente es establecer qué propiedades cumplen.

Propiedad 1. *Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, entonces:*

c1. $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ *y* $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$*;*

c2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ *y* $(z_1 z_2) z_3 = z_1(z_2 z_3)$*;*

c3. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ *y* $z_1 z_2 = z_2 z_1$*;*

c4. *existen* $0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$ *y* $1 = 1 + 0i \in \mathbb{C}$ *tales que* $z + 0 = 0 + z = z$ *y* $z1 = 1z = z$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$*.*

c5. *Para todo* $z = a + bi \in \mathbb{C}$ *existe* $-z = -a + (-b)i \in \mathbb{C}$ *tal que* $z + (-z) = 0$*, y para todo* $z = a + bi \neq 0$ *existe* $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i \in \mathbb{C}$ *tal que* $zz^{-1} = 1$*.*

c6. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$*.*

Las propiedades anteriores se llaman **propiedades de campo**. En general, si un conjunto K, junto con dos operaciones (que por costumbre se llaman adición y multiplicación), satisfacen las propiedades anteriores, se dice entonces que la estructura $\langle K, +, \cdot \rangle$ es un **campo**. Así, $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ es un campo (ver ejercicio 3). Existen muchos otros campos, los más conocidos: $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$ y $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$. En el ejercicio 2 se establece una diferencia importante entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}$.

1.6.1. Forma polar

Recordando la representación geométrica de los complejos en un plano cartesiano, vamos a estudiar otra forma de notar un complejo. Sea P el punto del plano cartesiano (de origen O) correspondiente al complejo. Llamemos r la longitud del segmento OP y θ el ángulo que forma dicho segmento con la parte positiva del eje real y tal que $0 \leq \theta < 2\pi$; entonces

z queda completamente determinado si conocemos r y θ. r se llama **módulo** o **norma** de z se nota $r = |z|$, θ se llama el **argumento** (principal) de z y se nota $\operatorname{Arg}(z)$, obsérvese que cualquier ángulo coterminal con θ sirve para determinar a z, es decir, en realidad existen muchos argumentos; sin embargo con la condición $0 \leq \theta < 2\pi$ estamos escogiendo sólo uno (a veces llamado argumento principal).

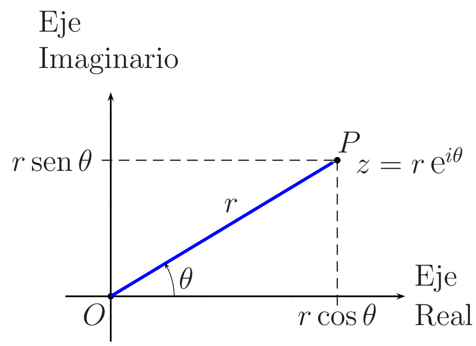


Figura 1.7. Representación geométrica polar de un complejo.

Es fácil establecer las siguientes relaciones:

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\operatorname{sen}\theta, \quad r = \sqrt{a^2+b^2}, \ \tan\theta = b/a. \tag{1.1}$$

luego: $z = a + bi = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ y aceptamos sin demostración (por estar fuera de los alcances del curso) que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, con lo cual $z = re^{i\theta}$, expresión que llamaremos la **forma polar** de z; e es la llamada **constante de Euler** (en honor al gran matemático suizo Leonhard Euler, 1707-1783), un número irracional cuyo valor aproximado es 2,71828.

La forma polar es útil, por ejemplo, para hacer productos y cocientes de complejos, así como para encontrar potencias n-ésimas y las raíces n-ésimas de un complejo. Utilizando la forma polar es fácil deducir que la norma de un producto de complejos es el producto de sus normas y el argumento del producto es la suma de los argumentos. Esto nos da una "receta" muy sencilla y útil para multiplicar complejos en forma polar:

Para multiplicar complejos se suman sus argumentos y se multiplican sus normas.

un enfoque geométrico]

Lo cual implica que la norma de un cociente es el cociente de las normas y que el argumento del cociente de dos complejos es la diferencia de sus argumentos. El lector debe deducir una sencilla receta para dividir complejos, además ver que si n es un entero, y $z \in \mathbb{C}$, la norma de z^n es $|z|^n$ y el argumento de z^n es n veces $\mathrm{Arg}(z)$. Todas estos resultados los agrupamos en la siguiente proposición:

Proposición 2. *Si* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *entonces,*

i) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ *y* $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$*;*

ii) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ *y* $\mathrm{Arg}(z_1/z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2),\ z_2 \neq 0$*;*

iii) $|z^n| = |z|^n$ *y* $\mathrm{Arg}(z^n) = n \cdot \mathrm{Arg}(z)$*.*

Demostración. (Ejercicio 4). □

Ejemplo 1.6.1. Sean $z_1 = 3\, e^{i\, 45^{\mathrm{o}}}$ y $z_2 = \dfrac{1}{2}\, e^{i\, 38^{\mathrm{o}}}$. Entonces:

$$z_1 z_2 = \frac{3}{2}\, e^{i\, 83^{\mathrm{o}}}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = 6\, e^{i\, 7^{\mathrm{o}}}, \qquad \text{y} \qquad z_1^4 = 81\, e^{i\, 180^{\mathrm{o}}}.$$

Si $z \in \mathbb{C}$, una raíz n-ésima de z será un complejo z_0 tal que ${z_0}^n = z$. Usando la parte iii) de la proposición anterior deducimos que $|z_0| = |z|^{1/n}$, es decir la norma de la raíz n-ésima de un complejo es la raíz n-ésima de la norma del complejo. ¿Qué podemos decir del argumento de z_0? Según la parte iii) de la proposición anterior $n\,\mathrm{Arg}(z_0)$ y $\mathrm{Arg}(z)$ deben ser ángulos coterminales. Una posibilidad inmediata es que $\mathrm{Arg}(z_0) = \mathrm{Arg}(z)/n$. Pero hay otros ángulos que al multiplicarse por n resultan como un ángulo coterminal con $\mathrm{Arg}(z)$. Nótese que, por ejemplo, 3 veces $\pi/6$ es $\pi/2$; pero también 3 veces $5\pi/6$ es $5\pi/2$ ángulo coterminal con $\pi/2$. En realidad cualquier argumento de la forma $(\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi)/n$ al ser multiplicado por n nos da un ángulo coterminal con $\mathrm{Arg}(z)$. Entonces no podemos hablar de **la** raíz n-ésima de un complejo, sino de **las** raíces n-ésimas de un complejo. Se puede probar que hay exactamente n argumentos de la forma $\frac{\mathrm{Arg}(z)+2k\pi}{n}$, mutuamente no coterminales y se obtienen tomando $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. De esta manera, tenemos la siguiente "fórmula" para calcular raíces n-ésimas llamada **fórmula de De Moivre**[*]: si $z = re^{i\theta}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ejemplo 1.6.2. Calculemos las raíces cúbicas del complejo $z = \frac{1}{8}i$.

Debemos escribir z en forma polar, para lo cual podemos usar las relaciones establecidas en (1.1), con $a = 0$ y $b = \frac{1}{8}$ para obtener que $r = \frac{1}{8}$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$, de modo que $z = \frac{1}{8}\, e^{i\pi/2}$. Pero también en este caso podríamos llegar a la forma polar simplemente observando la ubicación del complejo z en el plano cartesiano que corresponde al punto de coordenadas $\left(0, \frac{1}{8}\right)$, de donde se deduce claramente que $r = \frac{1}{8}$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$. Aplicando entonces la fórmula de De Moivre, con $n = 3$, $r = \frac{1}{8}$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$z^{1/3} = \left(\tfrac{1}{8}\right)^{1/3} e^{i\frac{\pi/2+2k\pi}{3}}, \qquad k = 0,\, 1,\, 2$$

obtenemos las tres raíces z_1, z_2, z_3 buscadas, así:

* cuando $k = 0$, $\quad z_1 = \frac{1}{2}\, e^{i\,\frac{\pi/2+0}{3}} = \frac{1}{2}\, e^{i\,\pi/6}$;
* cuando $k = 1$, $\quad z_2 = \frac{1}{2}\, e^{i\,\frac{\pi/2+2\pi}{3}} = \frac{1}{2}\, e^{i\,5\pi/6}$;
* cuando $k = 2$, $\quad z_3 = \frac{1}{2}\, e^{i\,\frac{\pi/2+4\pi}{3}} = \frac{1}{2}\, e^{i\,3\pi/2}$.

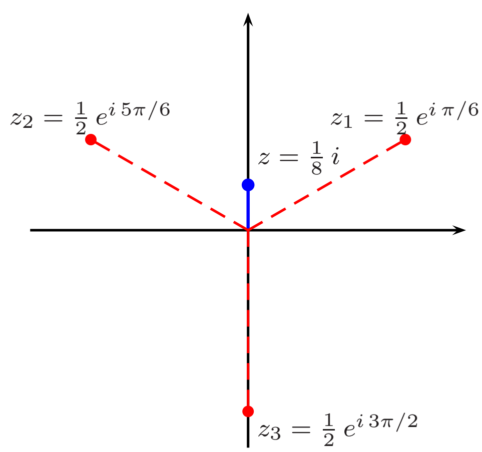


Figura 1.8. Raíces cúbicas de $z = \frac{1}{8}\, i$.

[*] Abraham de Moivre, matemático francés, 1667-1754.

Ejercicios 1.6

1. Efectuar la operación indicada y escribir la respuesta en la forma $z = a + bi$:

   a) $(4 + i) + (3 - 5i)$;
   b) $\frac{(6-i)}{(5+2i)} - \frac{(3+4i)}{(2-5i)}$;
   c) $(1 - i)^2(1 + i)$;
   d) $\frac{(5+4i)}{(3-4i)}$;
   e) $(8 - i\sqrt{3})(8 + i\sqrt{3})$;
   f) $(i - 1)^3$
   g) i^{104};
   h) $(-i)^{101}$.

2. Supongamos que los complejos se pueden ordenar y cumplen las mismas propiedades de orden que los reales. ¿Qué problema hay en considerar $i > 0$?, ¿qué problema hay si consideramos $i < 0$? Como bajo cualquier consideración se llega a una contradicción, se concluye que los complejos no se pueden ordenar cumpliendo las mismas propiedades de orden que los reales.

3. Demostrar las propiedades de campo para números complejos.

4. Demostrar la Proposición 2.

5. Expresar en forma polar los siguientes complejos:

   a) $3i$;
   b) $3i - 2$;
   c) $(1 + i)/\sqrt{2}$;
   d) $2 - 2i$;
   e) $\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha + 1$;
   f) $\cos\alpha + i \operatorname{sen}(\alpha + \pi)$.

6. Sea $\alpha = \pi/4$, $\beta = 2\pi/3$ y $\gamma = \pi/6$. Expresar en forma rectangular los siguientes complejos:

   a) $e^{\alpha i}$;
   b) $2e^{\beta i}$;
   c) $3e^{-\beta i}$;
   d) $-e^{-\gamma i}$;
   e) $4e^{(\gamma-\alpha)i}$.

7. Hallar los conjugados de los complejos de los ejercicios 5 y 6. Expréselos en forma polar y rectangular.

8. Demostrar que el complejo z es real si y sólo si z es igual a su conjugado.

9. Demostrar que z es imaginario puro si y sólo si z es igual al negativo de su conjugado.

10. Encontrar z en forma rectangular tal que se cumpla la ecuación:

    a) $z(2-5i) = 1+5i$;
    b) $(z+1)(-4i) - 1 = i$;
    c) $2z(i-1) = -i+2$.

11. Dibujar en el plano complejo los conjuntos de complejos z que cumplen cada una de las condiciones dadas:

    a) $\mathrm{Re}(z+1) = 1$;
    b) $\mathrm{Im}(z-i) > 0$;
    c) $|z-i| = 1$;
    d) $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) > 2$;
    e) $|z+1| < 1$;
    f) $0 < \mathrm{Arg}(z) < \pi/3$.

12. Hallar las raíces cuadradas de:

    a) $-i$;
    b) $4e^{i\pi/3}$;
    c) $2 - 2\sqrt{3}i$.

13. Halle todas las soluciones complejas de:

    a) $x^3 + 1 = 0$;
    b) $x^5 - 1 - i = 0$;
    c) $x^4 - x^2 + 1 = 0$.

14. *a*) a) Demostrar que si z y w son complejos se tiene: $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ y $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$.
    b) Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales, demuestre que si z es un complejo tal que $p(z) = 0$ entonces $p(\bar{z}) = 0$.
    c) Demuestre que un polinomio con coeficientes reales siempre tiene un número par de raíces complejas no reales.

1.7. Algo sobre dinámicas complejas

Imaginemos un "paseo" por el plano complejo; en el tiempo n usted estará en el lugar z_n. Partimos en el momento 0 del lugar $z_0 = 1$ y para determinar la posición z_{n+1} tomamos la posición z_n, la elevamos al cuadrado y le sumamos i, es decir, nuestro paseo obedece a la definición recursiva

$$z_0 = 1 \text{ y } z_{n+1} = z_n^2 + i, \ \forall n \geq 1, \tag{1.2}$$

así podemos calcular $z_1 = 1 + i$; $z_2 = (1+i)^2 + i = 3i$; $z_3 = i - 9$; etc. Este paseo nos lleva a alejarnos cada vez más del origen, sin embargo esto depende del punto de donde hayamos partido. Si partimos ya no de 1 sino de i, tenemos la definición recursiva

$$z_0 = i \text{ y } z_{n+1} = z_n^2 + i, \ \forall n \geq 1$$

entonces, $z_0 = i$; $z_1 = i - 1$; $z_2 = (i-1)^2 + i = -i$; $z_3 = i - 1$; etc. Nos damos cuenta que z_1 es igual a z_3, y el paseo ya no es interesante es más bien repetitivo y totalmente deducible, por ejemplo $z_{100} = -i$, (¿por qué?). Quedamos "presos" ya que $|z_n| < 2$ para todo n. La sucesión z_0, z_1, z_2, z_3, $\ldots$, se llama **órbita** de i y decimos que es "acotada" porque existe un $k \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $|z_n| < k$, esto significa, de una manera un poco mas informal, que todos los puntos de la órbita quedan "encerrados" en el interior de algún círculo.

Ejercicio 1.7.1. Llene la siguiente tabla teniendo en cuenta la definición recursiva que hemos estado trabajando y además que z_0 varía en cada línea horizontal.

z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
$-i$				
		$-i+1$		
$-2-i$				
-1				
$3+i$				

De la tabla anterior nos podemos preguntar, ¿cuáles de los z_0 de la tabla tienen órbita acotada? Llamemos J el conjunto de los complejos z que quedan "presos", es decir que tienen órbita acotada:

$$J =: \{\ z \in \mathbb{C} \mid \text{órbita de } z \text{ es acotada}\}$$

y al dibujar J (con ayuda de un computador) nos resulta una figura muy sugestiva (Figura 1.9).

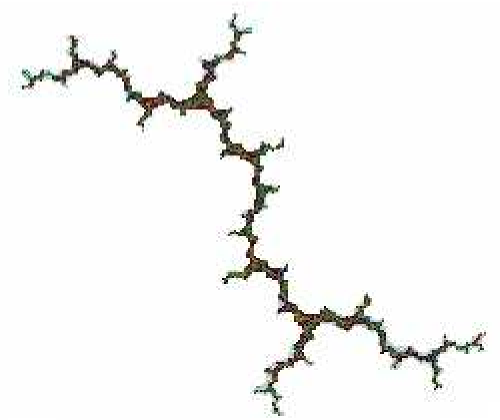


Figura 1.9. Conjunto J para $z_{n+1} = z_n^2 + i$.

Claramente la definición recursiva (1.2) se puede modificar de muchas maneras, cambiando el valor inicial z_0, o cambiando $z_{n+1} = z_n^2 + i$ por $z_{n+1} = f(z_n)$ donde f es una función de variable compleja y valor complejo, y para cada función f se puede considerar el correspondiente conjunto J que denotaremos J_f y el cual es llamado **conjunto lleno de Julia** (en honor al matemático francés Gaston Julia, 1893–1978). Estos conjuntos J_f desempeñan un papel muy importante en lo que actualmente se conoce como la teoría de los sistemas dinámicos, la teoría del caos y los fractales. Dibujar en el plano complejo el conjunto J_f resulta, en la mayoría de los casos, una labor imposible de realizar sin la ayuda de un computador; actualmente existen varios programas computacionales, por ejemplo *Fractint* (el cual se puede bajar gratuitamente por internet), con los cuales se pueden graficar y "manipular" estos conjuntos. Para la definición recursiva (1.2) que hemos venido trabajando en esta sección, se muestra su correspondiente conjunto J en la Figura 1.9 y para la definición recursiva del Ejercicio 1.7.2, se muestra su correspondiente J en la Figura 1.10; ambas figuras fueron obtenidas con el programa Fractint. Obsérvese la semejanza entre las dos figuras y su parecido con objetos de la naturaleza como la raíz de una planta, una grieta en una pared o un relámpago en una noche de tormenta. Quizá usted pueda encontrar otros parecidos del mismo estilo.

Ejercicio 1.7.2. Llene la misma tabla del Ejercicio 1.7.1 pero tomando

un enfoque geométrico]

ahora $z_{n+1} = z_n^2 - i$, para $n \geq 1$. El conjunto J correspondiente a este nuevo "paseo" se muestra en la Figura 1.10.

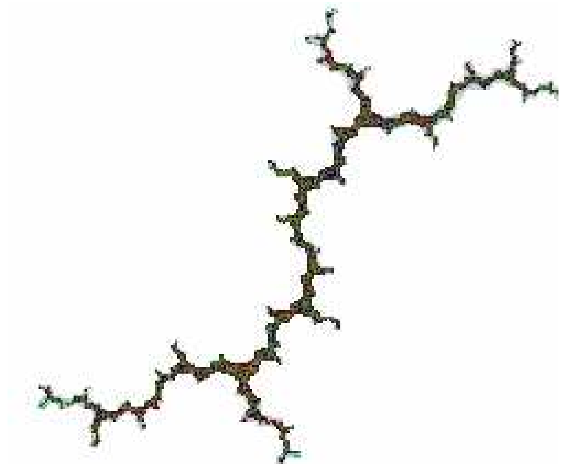


Figura 1.10. Conjunto J para $z_{n+1} = z_n^2 - i$.

Otro subconjunto del plano complejo que ocupa un lugar destacado en la teoría de los sistemas dinámicos y fractales es el llamado **conjunto de Mandelbrot** (en honor a su "descubridor" Benoit Mandelbrot, físico nacido en Polonia en 1924 y quien es considerado el "padre de los fractales"). Para construir el conjunto de Mandelbrot se considera no una sola definición recursiva, sino toda una familia de definiciones recursivas así:

$$z_0 =: 0 \qquad \text{y} \qquad z_{n+1} =: z_n^2 + c, \tag{1.3}$$

donde c es una constante compleja; por ejemplo, si tomamos $c = -\frac{1}{2}\,i$, la definición recursiva para esta valor de c es:

$$z_0 = 0 \qquad \text{y} \qquad z_{n+1} =: z_n^2 - \tfrac{1}{2}\,i. \tag{1.4}$$

Calculemos entonces la órbita de 0:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 0^2 - \tfrac{1}{2}\,i \;=\; -\tfrac{1}{2}\,i;\\
z_2 &= \left(-\tfrac{1}{2}\,i\right)^2 - \tfrac{1}{2}\,i \;= -\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\,i;\\
z_3 &= \left(-\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\,i\right)^2 - \tfrac{1}{2}\,i \;=\; -\tfrac{3}{16} - \tfrac{1}{4}\,i;\\
z_4 &= \left(-\tfrac{3}{16} - \tfrac{1}{4}\,i\right)^2 - \tfrac{1}{2}\,i \;=\; -\tfrac{7}{256} - \tfrac{13}{32}\,i.
\end{aligned}$$

El estudiante puede, con un poco de paciencia y cuidado, verificar los cálculos anteriores, encontrar z_5 y ubicar estos complejos en el plano para observar que esta órbita no se va a "escapar hacia el infinito" sino que se queda encerrada, es decir, es acotada. Entonces el punto $c = -\frac{1}{2}\,i$ va a pertenecer al conjunto de Mandelbrot, que notaremos M, es decir $-\frac{1}{2}\,i \in M$. Cambiemos ahora el valor de c por $c = 1$ de tal forma que la definición recursiva queda como sigue:

$$z_0 = 0 \qquad \text{y} \qquad z_{n+1} =: z_n^2 + 1. \tag{1.5}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0^2 + 1 = 1; \\ z_2 &= 1^2 + 1 = 2; \\ z_3 &= 2^2 + 1 = 5; \\ z_4 &= 5^2 + 1 = 26; \\ z_5 &= 26^2 + 1 = 677. \end{aligned}$$

Se observa claramente como en este caso la órbita de 0 se escapa rápidamente hacia el infinito, **no** es acotada y por tanto $c = 1 \notin M$. Además se puede apreciar que la órbita de 0 se escapa realizando "saltos" cada vez más grandes sobre el eje real (ver Figura 1.11).

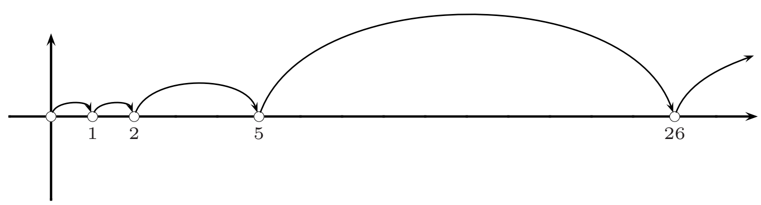


Figura 1.11. Órbita de 0 para $z_{n+1} = z_n^2 + 1$ $(c = 1)$.

Con base en lo anterior, el conjunto M se define de la siguiente manera:

$$M =: \{c \in \mathbb{C} \mid \text{órbita de 0 para } z_{n+1} = z_n^2 + c, \text{ es acotada}\}.$$

Ejercicio 1.7.3. Determine cuáles de los siguientes complejos pertenecen al conjunto de Mandelbrot: 0, i, $1 + i$, $-i$ y $-2i$.

Así como ocurre con los conjuntos de Julia, el conjunto de Mandelbrot sólo se puede visualizar con la ayuda de un computador. En la Figura 1.12 se muestra una imagen de M, obtenida con el programa Fractint.

Al lector inquieto e interesado, le podemos sugerir una interesante lectura sobre el conjunto de Mandelbrot, en el hermoso y revelador libro de R. Penrose, *La nueva mente del emperador* (ver [11]).

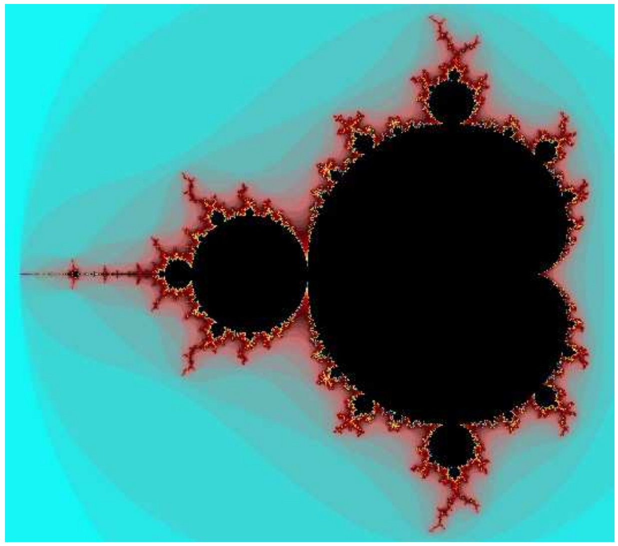


Figura 1.12. Conjunto de Mandelbrot.

Ejercicio 1.7.4.

1. Sea $c \in \mathbb{C}$ y notemos J_c el conjunto lleno de Julia correspondiente a $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Demuestre que si $z \in J_c$ entonces también $-z \in J_c$.

2. Investigue (por ejemplo en internet): si $c \in M$, qué se puede decir del conjunto J_c correspondiente?

Capítulo 2

$\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial

2.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Todos conocemos ecuaciones con variables o incógnitas. En esta sección nos interesaremos por las **ecuaciones lineales**, es decir aquellas en donde las variables o incógnitas van solamente multiplicadas por constantes y sumadas. Por ejemplo, las siguientes son ecuaciones lineales con incógnitas x, y, z:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3z, \\ 2y &= 5, \\ z - y &= 2, \\ x + 4 &= y + 3z, \\ 2x &= 0. \end{aligned}$$

Las siguientes son ecuaciones en las variables x, y, z, pero **no** son ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{sen}(x + z), \\ x^2 + y &= z^2, \\ y &= 2^{(x+y)}, \\ 5xy + 3z &= 1. \end{aligned}$$

Como nos interesa trabajar no sólo con tres variables, a veces no utilizaremos las tradicionales x, y, z, como tales, sino que subindizaremos especialmente la x y estudiaremos ecuaciones lineales en las variables x_1, x_2, x_3, etc., estas variables se suelen escribir en orden al lado izquierdo de la ecuación, dejando el lado derecho para el término independiente (constante). Realmente queremos estudiar **sistemas de ecuaciones lineales**, es decir, estudiar las soluciones comunes a varias ecuaciones con incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. El estudiante debe tener experiencia del bachillerato en resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y de tres ecuaciones con tres variables. Dado un sistema de ecuaciones con incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, entenderemos por una **solución** del sistema, una "n-upla" ordenada $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de números reales, tal que al sustituir x_1 por s_1, x_2 por s_2, …, x_n por s_n, se satisfacen todas las ecuaciones del sistema; la palabra "n-upla" no es castiza, pero significará que se tienen n números ordenados. La solución o **conjunto solución** del sistema es el conjunto de **todas** las soluciones del sistema. Si un sistema de ecuaciones tiene al menos una solución se dice que es **consistente** y en caso contrario se dirá **inconsistente**.

Ejemplo 2.1.1. Una solución del sistema

$$\begin{aligned} 2x + y &= -4 \\ -x - \tfrac{1}{2}y &= 2 \end{aligned}$$

es la pareja $(0, -4)$. Otras soluciones son $(1, -6)$, $(-1, -2)$, $(\frac{1}{2}, -5)$, $(-2, 0)$ y $(\pi, -4 - 2\pi)$ (¡verifíquelo!). ¿Cuántas soluciones tiene este sistema?, ¿cuál es su conjunto solución?

Un sistema general de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

cuando $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ se dice que el sistema es **homogéneo**. Un sistema homogéneo siempre es consistente, ¿por qué?

Muy seguramente el estudiante habrá “manipulado” matrices en algunos de sus cursos de secundaria. Informalmente, una matriz es un arreglo rectangular de números. Al trabajar con sistemas de ecuaciones, es muy conveniente trabajar con ciertas matrices, determinadas por el sistema.

La **matriz del sistema** está conformada por los coeficientes de las variables escritos ordenadamente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

La **matriz ampliada del sistema** incluye como última columna las constantes:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Ejemplo 2.1.2. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales encontraremos la matriz del sistema y la matriz ampliada.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \\ x_2 + 2x_3 &= 7 \\ -x_1 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

La matriz del sistema está dada por:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y la matriz ampliada por:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

un enfoque geométrico]

Figura 2.1. Karl Friedrich Gauss.

El **método de Gauss*** para resolver sistemas de ecuaciones lineales consiste en encontrar, por medio de operaciones elementales entre ecuaciones (ver Definición 3), un sistema equivalente** más sencillo. Se toma la matriz ampliada y se va transformando hasta encontrar una matriz,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} & e_1 \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} & e_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} & e_m \end{array}\right)$$

en donde los d_{ij} sean 0 cuando $i > j$, es decir, los elementos debajo de la diagonal (entendemos por diagonal los elementos de la forma d_{ii})

*Karl Friedrich Gauss (1777-1855), nació en Brunswick, Alemania, en 1777. Ha sido llamado el más grande matemático del siglo XIX y fue reconocido como "el príncipe de las matemáticas". Por fortuna, su genio fue reconocido desde la escuela elemental. Una anécdota cuenta que a la edad de 10 años, Gauss sorprendió a su maestro al sumar los números del 1 hasta el 100 en forma instantánea. Gauss había observado que los números se podían arreglar en 50 pares que sumaban cada uno 101 (1+100, 2+99, etc.), y $50 \times 101 = 5050$. A los 18 años, inventó el método de mínimos cuadrados; y antes de cumplir 19 años, resolvió un problema de dos mil años de antigüedad: Gauss demostró cómo construir, con sólo regla y compás, un polígono regular de 17 lados. Gauss realizó trabajos importantes en astronomía y electricidad, pero la producción matemática es la más asombrosa. Su tesis doctoral de 1799 dio la primera demostración del teorema fundamental del álgebra «que todo polinomio de grado n, tiene, contando multiplicidades, exactamente n raíces». En 1801 su obra *Disquisitiones Arithmeticae* es el libro más influyente sobre la teoría de números. Además, hizo contribuciones al álgebra y la geometría. Gauss fue catedrático de matemáticas en Göttingen en 1807 hasta su muerte en 1855.

Diremos que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

son nulos y además el primer elemento diferente de cero de la fila i está a la derecha del primer elemento diferente de cero de la fila $i-1$ (se entiende que si hay filas que sólo contienen ceros, éstas quedan en la parte inferior de la matriz). Este tipo de matriz recibe el nombre de **triangular superior** o **escalonada** y su sistema correspondiente es muy fácil de resolver. Es de anotar que el método de Gauss (llamado también método de eliminación de Gauss), se puede aplicar y funciona con **cualquier** sistema de ecuaciones lineales.

Definición 3. Hay tres tipos de operaciones elementales entre ecuaciones (o filas):

- Sumarle a una ecuación (fila) un múltiplo de otra ecuación.
- Intercambiar dos ecuaciones (filas).
- Multiplicar una ecuación (filas) por una constante diferente de cero.

De su experiencia de secundaria en resolver sistemas de ecuaciones lineales, el estudiante puede observar y deducir que al efectuar cualquiera de estos tres tipos de operaciones en las ecuaciones de un sistema, este no se altera, en el sentido de que su conjunto solución es el mismo. Simbolizaremos $cf_i + f_j$ la operación de sumar a la fila j, c veces la fila i (c es una constante real); $f_i \leftrightarrow f_j$ la operación de intercambiar las filas i y j, y cf_i la operación de multiplicar la fila i por la constante $c \neq 0$.

Ejemplo 2.1.3. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \\ x_2 + 2x_3 &= 7 \\ -x_1 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Solución. Por el método de Gauss, partiendo de la matriz ampliada, tenemos:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 \leftrightarrow f_3]{} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[2f_1 + f_3]{}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-3)f_2 + f_3]{} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -20 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

la última matriz obtenida es triangular superior y su sistema correspondiente es equivalente al sistema original.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 7 \\ -5x_3 &= -20, \end{aligned}$$

de la tercera ecuación tenemos que $x_3 = 4$, y reemplazamos este valor en las dos primeras ecuaciones, de donde obtenemos, $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$; la solución del sistema se puede ver como la "tripla" $(2, -1, 4)$.

Hay que tener en cuenta que cuando "sobran" variables se reemplazan por parámetros que nos indican la forma de las soluciones. Además si se obtiene una fila de ceros cuyo término constante no es 0, el sistema no tiene solución (es decir es inconsistente); ¿por qué?

Ejemplo 2.1.4. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \\ x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Solución. Por el método de Gauss, partiendo de la matriz ampliada, tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[-f_1+f_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[-f_2+f_3]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \\ x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= -2, \end{aligned}$$

Como la última ecuación no tiene ninguna solución, el sistema es inconsistente.

Según la forma de la matriz escalonada a la que se llegue, un sistema de ecuaciones lineales puede tener una única, infinitas o ninguna solución.

Ejemplo 2.1.5. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que es "casi" igual al del ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \\ x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Solución. Por el método de Gauss, partiendo de la matriz ampliada, tenemos:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[-f_1+f_3]{} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[-f_2+f_3]{}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \\ x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0, \end{aligned}$$

ahora, la última ecuación no nos aporta nada ya que cualquier x_1, x_2, x_3 la cumple entonces el sistema es equivalente al sistema con tres incógnitas y dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \\ x_2 + 2x_3 &= 7, \end{aligned}$$

en este sistema "sobra" una variable que podríamos suponer toma cualquier valor, por ejemplo hagamos $x_3 = t$ (hemos introducido el "parámetro" t) y obtenemos:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= -3 + t \\ x_2 &= 7 - 2t, \end{aligned}$$

al solucionar este nuevo sistema, obtenemos todas las soluciones a nuestro sistema original: $x_3 = t$, $x_2 = 7 - 2t$, $2x_1 = -3 + t - 3x_2 = -3 + t - 3(7 - 2t) = -24 + 7t$, es decir $x_1 = -12 + \frac{7}{2}t$. Así las soluciones al sistema se pueden ver como ternas $(-12 + \frac{7}{2}t, 7 - 2t, t)$, como para cada valor real t tenemos una solución, nuestro sistema original tiene **infinitas soluciones**; y el conjunto solución se puede escribir como sigue: $S = \{(-12 + \frac{7}{2}t, 7 - 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

un enfoque geométrico]

En general, dado un sistema no es posible determinar cuántas soluciones tiene sin haberlo resuelto. Sin embargo, para el caso particular de los sistemas homogéneos tenemos la siguiente:

Proposición 3. *Un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene infinitas soluciones.*

Demostración. Supongamos un sistema homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas y $n > m$. Si el sistema no tiene infinitas soluciones entonces debe tener únicamente la solución trivial, es decir es equivalente al sistema:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ &\vdots \\ x_n &= 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que el sistema debe tener al menos n ecuaciones, o sea, $m \geq n$ lo que contradice $n > m$. $\square$

Ejercicios 2.1

1. Usando el método de eliminación gaussiana encuentre todas las soluciones, si existen, de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$a)$ $\begin{cases} 6x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 18; \end{cases}$

$c)$ $\begin{cases} 2x_2 + 5x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = -2; \end{cases}$

$d)$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 7; \end{cases}$

$e)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$

2. Dé una interpretación geométrica al hecho de solucionar un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned}$$

   Geométricamente, ¿qué significa que el sistema tenga una única solución?, ¿que tenga infinitas soluciones?, ¿que sea inconsistente?

3. Considere el sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= a \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= b \\ 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 &= c, \end{aligned}$$

   demuestre que el sistema es inconsistente si y sólo si $c \neq 2a - b$.

4. ¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c para que el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= a \\ x_1 + x_3 &= b \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= c, \end{aligned}$$

   sea consistente (tenga por lo menos una solución)?

5. Demuestre que el sistema:

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

   tiene un número infinito de soluciones si y sólo si $ad - bc = 0$.

6. Considere el sistema:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ bx + ay &= d. \end{aligned}$$

   a) Encuentre condiciones sobre a y b para que el sistema tenga una única solución.

b) Encuentre condiciones sobre a, b, c y d para que el sistema tenga infinitas soluciones.

7. Hallar el polinomio $p(x)$ de grado 2 (es decir $p(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$), tal que se cumpla: $p(1) = -1$, $p(-1) = 9$ y $p(2) = -3$.

8. Sean x_0, x_1 dos números reales diferentes, entonces para cualesquiera y_0, y_1:

   a) Demostrar que existe un único polinomio $p(x)$ de grado 1 tal que: $p(x_0) = y_0$ y $p(x_1) = y_1$.

   b) Interpretar geométricamente el anterior resultado.

9. Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n + 1$ números reales diferentes entonces para cualesquiera $y_0, y_1, \ldots, y_n$:

   a) Demostrar que existe un único polinomio $p(x)$ de grado n tal que: $p(x_0) = y_0, \; p(x_1) = y_1, \ldots, \; p(x_n) = y_n$.

   b) Interpretar geométricamente el anterior resultado.

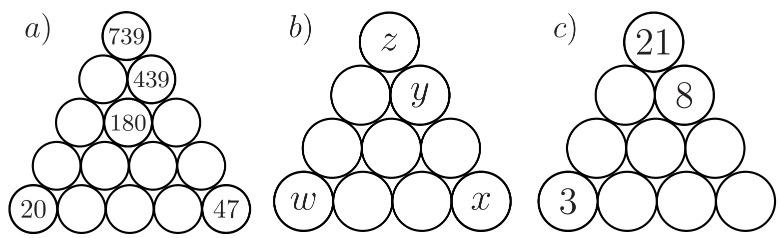
10. Resolver los siguientes problemas:

    a) Una alcancía tiene monedas de tres denominaciones diferentes. Con 8 monedas de la primera denominación más 23 monedas de la segunda denominación, más 17 monedas de la tercera denominación se completarían \$23.300. Además, tener 10 monedas de la primera denominación, más 10 monedas de la segunda denominación sería lo mismo que tener 6 monedas de la tercera denominación, mientras que tener 10 monedas de la segunda denominación más 5 monedas de la tercera denominación sería lo mismo que tener 12 monedas de la primera denominación. ¿Cuáles son las denominaciones de las monedas que contiene la alcancía?

    b) Tres especies de ardillas han sido llevadas a una isla con una población inicial total de 2.000. Después de 10 años, la especie I ha duplicado su población y la especie II ha incrementado su población en un 50 %, la especie III se ha extinguido. Si el incremento en la población de la especie I es igual que el de la especie II y si la población total se ha incrementado en 500, determine la población inicial de las tres especies.

c) Una compañía de construcción ofrece tres tipos de casa. El primer tipo de casa requiere 3 unidades de concreto, 2 unidades de madera para cancelería y 8 unidades de madera para estructuras. Los tipos segundo y tercero requieren 2, 3, 7 y 4, 2, 10 unidades respectivamente. Si cada mes la compañía dispone de 200 unidades de concreto, 150 de madera para cancelería y 550 unidades de madera para estructuras, calcule el número de diferentes tipos de casas que la compañía podrá construir al mes si usa todos los materiales de que dispone.

11. Construya estas pirámides de números. El número cúspide es la suma de los dos números inmediatamente inferiores y así sucesivamente:



2.2. $\mathbb{R}^n$: el espacio donde viven las soluciones a sistemas de ecuaciones con n variables

En la sección anterior se trabajó un método para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. Pero, ¿qué es una solución de un sistema con n variables? ¿Dónde se encuentran esas soluciones? En esta sección introducimos el "mundo" que llamamos $\mathbb{R}^n$; en él habitan las posibles soluciones a los sistemas de ecuaciones con n variables.

$(1, 20)$, $(\pi, 1/2)$, $(0, e)$, etc., son parejas de números reales, mientras que $(1, 2, -1)$, $(2, 2\pi, -1)$ son **triplas** de números reales. Por ejemplo, algunas soluciones de la ecuación

$$2x + y = 1$$

son $(0, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 3)$, $(2, -3)$, etc.; en general, las soluciones de esta ecuación son todas las parejas de la forma

$$(t, 1 - 2t),$$

con t un número real. Algunas soluciones de la ecuación

$$x - y + 2z = 0$$

son $(0, 0, 0)$, $(1, 0, -1/2)$, $(0, 1, 1/2)$, $(1, 1, 0)$, etc. (¿Cómo es la forma general de las soluciones de esta ecuación?).

Como se habrá notado, es conveniente entender una solución de un sistema con dos variables como una pareja ordenada de números reales que satisface las ecuaciones del sistema, una solución de un sistema con tres variables es una tripla ordenada de números reales que satisface todas las ecuaciones del sistema, y en general, una solución de un sistema con n variables será una n-upla ordenada de números reales que satisface todas las ecuaciones del sistema. ¿Por qué es importante el orden en que aparecen los números de la n-upla?

En general consideraremos n-uplas de números reales que notaremos

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

donde cada $x_i \in \mathbb{R}$. Recordemos que la palabra "n-upla" no es castiza, pero la usamos para indicar que se tiene n números ordenados. Esto significa que si tenemos las n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, para que sean iguales es necesario y suficiente que sean iguales componente a componente es decir,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n.$$

Las n-uplas son también llamadas **vectores n-dimensionales**. El término **vector** es inspirado en la interpretación geométrica del caso particular $n = 2$, es decir en los vectores en el plano, seguramente familiares para el estudiante. Cada vector n dimensional tiene entonces n **componentes** que se llaman también **coordenadas** del vector. Los vectores los notaremos con letras mayúsculas. El conjunto de todos los vectores de dimensión n con componentes reales lo notaremos $\mathbb{R}^n$. Así:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^2 &= \{(x_1, x_2) \mid \ x_1 \in \mathbb{R}, \ x_2 \in \mathbb{R}\} \\
\mathbb{R}^3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid \ x_1 \in \mathbb{R}, \ x_2 \in \mathbb{R}, \ x_3 \in \mathbb{R}\} \\
&\vdots \\
\mathbb{R}^n &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \ x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}.
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ se pueden representar geométricamente como el plano cartesiano y el espacio tridimensional respectivamente (ver Figura 2.2). En ambos casos la representación se puede hacer de tres maneras, según la conveniencia:

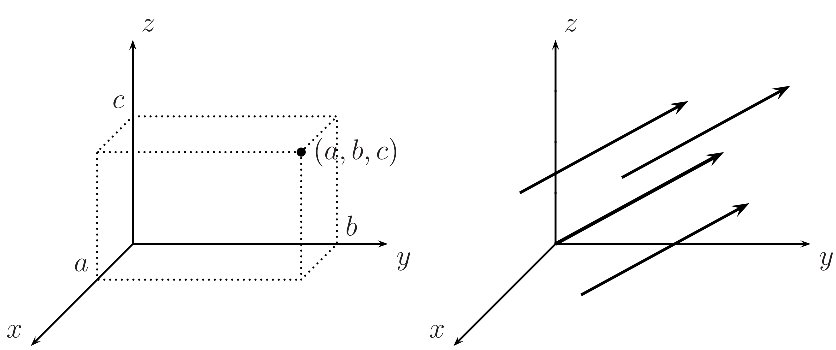


Figura 2.2. Representación geométrica de vectores tridimensionales.

a) Como un punto.

b) Como una flecha que va del origen al punto.

c) Como una flecha de igual longitud y sentido que la de b), pero que parte de cualquier punto.

Nota. Diremos que dos flechas tienen la misma **dirección** si están sobre rectas paralelas (consideraremos que toda recta es paralela a si misma), el **sentido** de una flecha se refiere hacia donde ella apunta, de tal manera que dos flechas pueden tener la misma dirección y el mismo sentido, o la misma dirección pero diferente sentido (ver Figura 2.3).

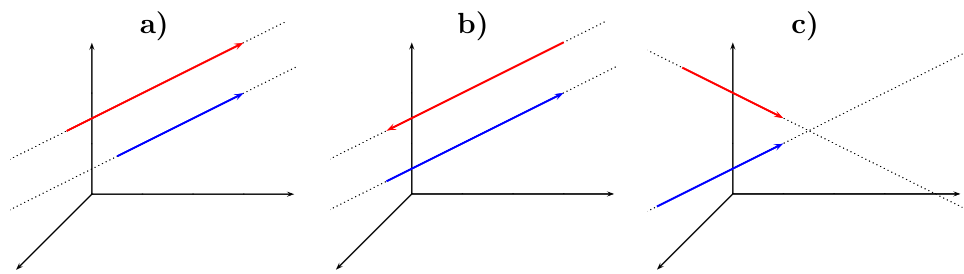


Figura 2.3. **a)** Flechas con igual dirección y sentido. **b)** Flechas con igual dirección y diferente sentido. **c)** Flechas con diferente dirección.

Obsérvese que $\mathbb{R}^2$ se puede entender como el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos visto en el capítulo anterior.

Siendo $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$, definimos la suma vectorial $X + Y \in \mathbb{R}^n$ así:

$$\boxed{X + Y =: (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n);}$$

también definimos αX, cuando α es un número real o escalar, así:

$$\boxed{\alpha X =: (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).}$$

Esta operación se llama **producto por escalar**.

Estas dos operaciones son muy sencillas y naturales: para sumar vectores se suman sus componentes correspondientes, para multiplicar un vector por un escalar se toma cada componente y se multiplica por el escalar, si pensamos en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, ¿cómo se interpretan geométricamente las operaciones de suma y producto por escalar?

Con estas dos operaciones $\mathbb{R}^n$ forma lo que se llama un **espacio vectorial** pues cumple las siguientes propiedades:

EV0: $\mathbb{R}^n$ es cerrado para la suma de vectores y para el producto por escalar, es decir: si $X, Y \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $X + Y \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha X \in \mathbb{R}^n$.

EV1: La suma de vectores es conmutativa, es decir, para todo $X, Y \in \mathbb{R}^n$ se tiene $X + Y = Y + X$.

EV2: La suma de vectores es asociativa: para todo $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ se tiene, $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$.

EV3: La suma de vectores es modulativa: existe $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que para todo $X \in \mathbb{R}^n$ se tiene, $X + 0 = X$, 0 también se llama **vector nulo, módulo** o **elemento neutro** para la suma.

EV4: La suma de vectores es invertiva: para todo $X \in \mathbb{R}^n$ existe $(-X) \in \mathbb{R}^n$ tal que $X + (-X) = 0$, $-X$ se llama el **opuesto** o **inverso aditivo** de X y como en los números $X + (-Y)$ se notará $X - Y$.

EV5: Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y todo $X \in \mathbb{R}^n$, $a(bX) = (ab)X$.

EV6: Para todo $a, b \in \mathbb{R}^n$ y todo $X \in \mathbb{R}^n$, $(a + b)X = aX + bX$.

EV7: Para todo $a \in \mathbb{R}$ y todo $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $a(X + Y) = aX + aY$.

EV8: Para todo $X \in \mathbb{R}^n$, $1X = X$.

$\mathbb{R}^n$ es un ejemplo muy importante de espacio vectorial, pero debemos decir que existen muchos otros, también muy importantes en los cuales no profundizaremos. Todo conjunto en donde se puedan definir operaciones de suma entre sus elementos y producto por escalar y que cumpla las propiedades EV0 a EV8 es un espacio vectorial. Ilustremos, por ejemplo, la propiedad EV7 en el espacio $\mathbb{R}^4$:

Sean $a = \frac{2}{3}$, $X = (9, 0, -3, 1), Y = (2, -6, 0, 3)$. Efectuando $a(X + Y)$ se tiene:

$$\tfrac{2}{3}((9, 0, -3, 1) + (2, -6, 0, 3)) = \tfrac{2}{3}(11, -6, -3, 4) = \left(\tfrac{22}{3}, -4, -2, \tfrac{8}{3}\right)$$

y por otra parte, efectuando $aX + aY$ se tiene:

$$\begin{aligned}\tfrac{2}{3}(9, 0, -3, 1) + \tfrac{2}{3}(2, -6, 0, 3) &= \left(6, 0, -2, \tfrac{2}{3}\right) + \left(\tfrac{4}{3}, -4, 0, 2\right) \\ &= \left(\tfrac{22}{3}, -4, -2, \tfrac{8}{3}\right).\end{aligned}$$

Se observa claramente que los dos resultados son iguales. Mostrar, como acabamos de hacer, un ejemplo muy particular de la propiedad EV7, **no** implica que la propiedad siempre se cumple en cualquier $\mathbb{R}^n$; para poder afirmar esto, se debe hacer una "prueba" o "demostración" mucho más general; algo como lo que sigue:

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dos vectores n-dimensionales cualesquiera. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} a(X+Y) &= a((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)), && \text{reemplazando } X \text{ e } Y; \\ &= a(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), && \text{suma de vectores;} \\ &= (a(x_1 + y_1), \ldots, a(x_n + y_n)), && \text{producto por escalar;} \\ &= (ax_1 + ay_1, \ldots, ax_n + ay_n), && \text{propiedad distributiva} \\ & && \text{de la multiplicación en } \mathbb{R}, \end{aligned}$$

es decir,

$$a(X+Y) = (ax_1 + ay_1, \ldots, ax_n + ay_n). \tag{2.1}$$

Por otra parte veamos qué es $aX + aY$:

$$\begin{aligned} aX + aY &= a(x_1, \ldots, x_n) + a(y_1, \ldots, y_n), && \text{reemplazando } X \text{ e } Y; \\ &= (ax_1, \cdots ax_n) + (ay_1, \ldots, ay_n), && \text{producto por escalar;} \\ &= (ax_1 + ay_1, \ldots, ax_n + ay_n), && \text{suma de vectores,} \end{aligned}$$

es decir,

$$aX + aY = (ax_1 + ay_1, \ldots, ax_n + ay_n). \tag{2.2}$$

Comparando los resultados obtenidos en (2.1) y (2.2) se observa que son iguales y ahora sí podemos afirmar que la propiedad EV7 se cumple **para todo** $a \in \mathbb{R}$ y **todo** $X, Y \in \mathbb{R}^n$; en otras palabras, se ha hecho una **demostración formal** de dicha propiedad. El estudiante puede, a manera de ejercicio, ilustrar con ejemplos cada una de las propiedades (EV0 a EV8), así como escribir una demostración formal de cada una de ellas (ver Ejercicio 10). Con base en estas propiedades se pueden demostrar otras muchas; las más elementales se dejan como ejercicio (Ejercicio 11).

Ejercicios 2.2

1. *a*) Dibújense flechas con punto inicial $(0,0)$, correspondientes a los vectores dados a continuación:

   i) $(1,3)$;
   ii) $(-1,2)$;
   iii) $(1,-2)$;
   iv) $(-3,-2)$.

   b) Dibújense los mismos vectores partiendo del punto (1,2).

2. ¿Cuáles son las coordenadas del vector que parte del punto $(1,5)$ y llega a $(3,1)$?

3. Sea A el vector bidimensional que parte del punto (x_1, y_1) y llega al punto (x_2, y_2). Halle las coordenadas de A (es decir ,las coordenadas del punto final de A cuando se traslada al origen).

4. Sea $A = (5,-2)$, $B = (3,1)$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 3$, escribir las coordenadas de los vectores: $A+B$, $\alpha A + \beta B$, $\alpha A - \beta B$.

5. Sea $A = (1,-2,3)$, $B = (-1,3,1)$, $\alpha = 1/3$, $\beta = 2$, escribir las coordenadas de los vectores: $A+B$, $\alpha A + \beta B$, $\alpha A - \beta B$.

6. Tomando los vectores de $\mathbb{R}^2$ como flechas que parten del origen, interpretar geométricamente los vectores 0, $-X$, la suma y el producto por escalar.

7. Sea $A = (3,-1,2)$, $B = (1,-1,0)$ y $C = (3,1,3)$. Encontrar, si existen, X, Y y Z, tales que: $A+X = 2B$, $C+2Y = A$, $X+2Y-Z = 2C$.

8. Sea $A = (5,-2)$, $B = (3,1)$. Encontrar, si existen, α y β tales que $\alpha A + \beta B = (1,0)$.

9. Sea $A = (5,-2,1,0)$, $B = (3,1,3,-1)$ y $C = (2,-1,0,2)$. Demostrar que no existen α y β tales que $\alpha A + \beta B = C$.

10. Demostrar que $\mathbb{R}^n$ con la suma y el producto por escalar es efectivamente un espacio vectorial, es decir, cumple las propiedades EV0 a EV8.

11. ☛Basándose en las propiedades EV0 a EV8, demostrar:

    a) El módulo de la suma es único.

    b) El inverso aditivo es único.

    c) Multiplicar por el escalar 0 da el vector $\mathbf{0}$.

    d) El inverso aditivo de X es (-1)X.

12. Demostrar usando vectores, que si A, B son puntos diferentes de $\mathbb{R}^3$, el punto medio del segmento determinado por A y B, se puede escribir como $\alpha A + \beta B$ donde $\alpha = \beta = 1/2$.

13. Sea A=(5, -2, -1) y B=(3, 1, 2); encontrar, usando vectores, los puntos que dividen el segmento AB en tres partes iguales.

14. Considere el triángulo determinado por los puntos A, B y C de $\mathbb{R}^3$. Hallar la forma de los puntos de cada una de las medianas.

15. Demostrar vectorialmente que las diagonales de un paralelogramo se cortan en sus puntos medios.

16. Demostrar vectorialmente que el segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al otro lado y mide la mitad de tal lado.

17. Sea $V = \{f \mid f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m\}$ (el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$), defina una suma y un producto por escalar en V de la siguiente manera: dadas $f, g \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

    $$f + g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{y} \quad \alpha f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

    se define:

    $$(f+g)(x) =: f(x) + g(x) \qquad \text{y} \qquad (\alpha f)(x) =: \alpha f(x).$$

    Demuestre que $\langle V, +, \cdot \rangle$ es un espacio vectorial.

2.3. Combinaciones lineales e independencia lineal

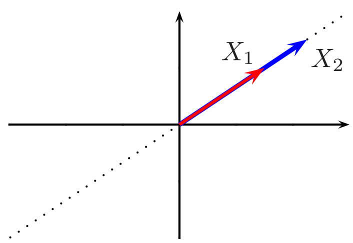
Al aplicar sucesivamente las operaciones que ya conocemos a un conjunto de vectores dados, obtenemos combinaciones lineales de ellos. Así por ejemplo, $3X$ es combinación lineal del vector X, mientras que $2X - 3Y$ es combinación lineal de X e Y y $X - Y + \frac{1}{3}Z + \sqrt{2}W$ es combinación lineal de X, Y, Z y W. Más exactamente, dados los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_k$ de $\mathbb{R}^n$, el vector V será **combinación lineal** de $X_1, X_2, \ldots, X_k$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tales que

$$V = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_k X_k.$$

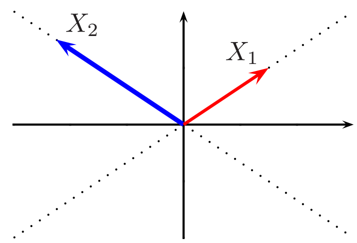
Por ejemplo, $(0, 7)$ es combinación lineal de $(1, 3), (0, 4)$ y $(2, 1)$ (¡verifíquelo!); $(1, -1, 0)$ es combinación lineal de $(1, 1, 2)$ y $(1, 3, 4)$, mientras que $(1, 3, 7)$ **no** es combinación lineal de $(1, 2, 3)$ y $(-1, 0, 1)$ (¡verifíquelo!). También es fácil comprobar que **todo vector** en $\mathbb{R}^2$ es combinación lineal de los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y **todo vector** en $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. En general, cuando **todo vector** en un espacio vectorial V es combinación lineal de un conjunto finito de vectores, decimos que dicho conjunto es un **sistema generador** del espacio vectorial. Al tener un sistema generador de alguna manera se tiene todo el espacio, en el sentido que bastaría hacer todas las posibles combinaciones lineales de los vectores del sistema generador para obtener **todos** los vectores del espacio. Por esto conviene buscar aquellos sistemas de generadores que tengan el menor número posible de vectores, de tal manera que en un sistema de generadores, cada vez que alguno de los vectores del sistema sea una combinación lineal de los otros, entonces dicho vector se puede "descartar" puesto que los vectores que quedan seguirán generando al espacio, así los sistemas de generadores con el menor número posible de vectores, son aquellos en los cuales ninguno de los vectores del sistema es combinación lineal de los otros, es decir, cuyos vectores son "linealmente independientes" concepto que se introduce a continuación, para terminar la sección con los conceptos formales de base y dimensión.

Definición. Un conjunto finito de dos o mas vectores $X_1, X_2, \ldots, X_p$ de $\mathbb{R}^n$ se dice **linealmente dependiente** si alguno de ellos es combinación lineal de los otros. Caso contrario, cuando ninguno puede considerarse como combinación lineal del resto, decimos que los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_p$ son **linealmente independientes**.

El vector nulo 0 es el único vector (estrictamente, conjunto de un sólo vector) que se considera linealmente dependiente. Por tanto todo conjunto de un sólo vector no nulo es linealmente independiente. Un conjunto de dos vectores X_1 y X_2 será linealmente dependiente si se tiene para algún escalar α, bien $X_1 = \alpha X_2$, o bien, $X_2 = \alpha X_1$. De acuerdo con esto, y recordando lo que significa geométricamente multiplicar un vector en el plano por un escalar, podemos afirmar que un conjunto $\{X_1, X_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ (los vectores X_1, X_2 aquí se están considerando como flechas que parten del origen) es linealmente dependiente si y sólo si X_1, X_2 son **colineales**, es decir, si están sobre una misma linea recta (ver Figura 2.4).



X_1 y X_2 son linealmente dependientes



X_1 y X_2 son linealmente independientes

Figura 2.4. Vectores linealmente dependientes e independientes.

De manera análoga, observando que si $X, Y \in \mathbb{R}^3$, son no colineales, entonces $\Pi = \{\alpha_1 X + \alpha_2 Y \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ corresponde al plano generado por los vectores X e Y, ¿cómo se puede interpretar geométricamente la afirmación: $\{X, Y, Z\} \subseteq \mathbb{R}^3$ es un conjunto linealmente independiente? (Ejercicio 4).

De acuerdo con la definición anterior, para determinar si un conjunto de p vectores en $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente, habría que comprobar si alguno de ellos es combinación lineal de los otros, esto es tomar cada uno de los p vectores y averiguar si es o no combinación lineal de los $p-1$ vectores restantes. Esto implicaría en general un trabajo un poco dispendioso.

En la siguiente proposición se establece un criterio mucho más "práctico" que nos permitirá ahorrarnos dicho trabajo.

Proposición 1. *Los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_p$ son linealmente independientes, si y sólo si, dados $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ escalares tales que*

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots, +\alpha_p X_p = 0$$

entonces se puede deducir que los escalares son 0, es decir:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0.$$

Demostración. Ejercicio 12. □

En otras palabras, los vectores son linealmente independientes si y sólo si la única combinación lineal de ellos que produce el vector nulo (tal combinación se llama combinación lineal nula) es la trivial, o sea cuando todos los escalares son cero.

Ejemplo 2.3.1. Dados los vectores $(1, -2, 0),\ (0, 2, -1)$ y $(3, -1, 1)$, determinar si son vectores linealmente independientes o linealmente dependientes.

Solución. Partiendo de la igualdad $\alpha_1(1, -2, 0) + \alpha_2(0, 2, -1) + \alpha_3(3, -1, 1) = (0, 0, 0)$, debemos encontrar los valores de α_1, α_2 y α_3. Aplicando las operaciones de producto por escalar y suma de vectores tenemos:

$$(\alpha_1 + 3\alpha_3,\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3,\ -\alpha_2 + \alpha_3) = (0,\ 0,\ 0)\,,$$

por igualdad de vectores tenemos el siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 3\alpha_3 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Si encontramos la solución al sistema, tenemos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, de donde concluimos que los vectores dados son linealmente independientes.

un enfoque geométrico]

Recordemos el concepto de sistema generador que establecimos al comienzo de esta sección.

Definición. Un conjunto de vectores $\{X_1, X_2, ..., X_p\}$ de un espacio vectorial se dice un **sistema de generadores** (o $X_1, X_2, \ldots, X_p$ generan el espacio), si todo vector del espacio es combinación lineal de ellos.

Ejemplo 2.3.2. Encontremos ahora el conjunto que generan los tres vectores del ejemplo anterior, esto es, el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de ellos. Sea (a, b, c) un vector generado por los tres vectores, entonces existen escalares α_1, α_2 y α_3 tales que cumplen la igualdad:

$$\alpha_1(1, -2, 0) + \alpha_2(0, 2, -1) + \alpha_3(3, -1, 1) = (a, b, c),$$

de donde se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 3\alpha_3 &= a \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 &= b \\ -\alpha_2 + \alpha_3 &= c. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se deduce que para cualesquiera a, b y c el sistema es consistente; entonces concluimos que los vectores generan a todo el espacio $\mathbb{R}^3$.

Definición. Un conjunto de vectores $X_1, X_2, \ldots, X_p$ de un espacio vectorial se dice que es una **base** del espacio si se cumple conjuntamente:

i) los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_p$ son linealmente independientes;

ii) $X_1, X_2, \ldots, X_p$ generan todo el espacio.

El concepto de base permite definir el de dimensión.

Definición. La **dimensión** de un espacio vectorial es el número de elementos de cualquiera de sus bases.

Claro está que para que el concepto de dimensión quede bien definido debemos garantizar que:

Proposición 2. *Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos.*

Demostración. Ejercicio 14. □

Ejemplo 2.3.3. $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, pues $B = \{E_1, E_2\}$ donde $E_1 = (1, 0)$, $E_2 = (0, 1)$ es una base (llamada la **base canónica**) que tiene dos elementos. Análogamente $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, pues la base canónica de $\mathbb{R}^3$ consta de 3 vectores: $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$ y $E_3 = (0, 0, 1)$.

Ejemplo 2.3.4. Con base en la Proposición 2 y en el ejemplo anterior podemos afirmar que todas las bases de $\mathbb{R}^2$ deben tener exactamente dos vectores, de tal manera que cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$ con sólo un vector o con tres o más vectores no podrá ser una base de $\mathbb{R}^2$, mientras que por ejemplo el conjunto $S = \{(2, 1), (-1, 3)\}$ si podrá serlo. ¿Cómo saber si tal S es o no una base de $\mathbb{R}^2$? Pues, en principio tendríamos que verificar si S cumple las dos condiciones para ser una base. Sin embargo, recordando lo que significa geométricamente que dos vectores de $\mathbb{R}^2$ sean linealmente independientes (ver Figura 2.4), podemos deducir inmediatamente que S es linealmente independiente y además por el hecho de no ser colineales, el conjunto de todas sus combinaciones lineales será $\mathbb{R}^2$, luego S **si** es una base de $\mathbb{R}^2$. Obsérvese que, en general para determinar si un conjunto de dos vectores de $\mathbb{R}^2$ es o no base, basta determinar si tal conjunto es o no linealmente independiente, o basta determinar si es o no, un sistema de generadores.

Más generalmente, si se tiene un conjunto de vectores, con tantos elementos como la dimensión del espacio vectorial correspondiente, entonces es suficiente que dicho conjunto sea linealmente independiente o que genere al espacio, para que sea una base. Más precisamente, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3. *Si* $\dim(V) = n$, $S \subseteq V$, S *con* n *vectores, se tiene:*

i) Si S es linealmente independiente entonces S es una base de V.

ii) Si S genera a V entonces S es una base de V.

Demostración. Ejercicio 17. □

Ejercicios 2.3

1. Encuentre 5 combinaciones lineales diferentes de los vectores $(1, 2, -1)$ y $(0, -1, 1)$.

2. ¿$(1, -1, 2)$ es combinación lineal de $(0, 1, -1)$ y $(1, 2, 1)$?

3. Determine si los siguientes conjuntos de vectores son, o no, base del espacio correspondiente:

   a) $(1, 2),\ (2, 4)$;

   b) $(1, 1),\ (2, 1)$;

   c) $(3, -1, 0),\ (1, 0, 1),\ (2, 0, 0)$;

   d) $(1, -1, 0),\ (1, 1, 1),\ (0, 2, -1)$;

   e) $(2, 1),\ (-3, 1),\ (4, 0)$;

   f) $(1, -1, 0),\ (2, 3, 4)$.

4. Interpretar geométricamente:

   a) Los vectores A y B de $\mathbb{R}^2$ son no nulos y linealmente dependientes.

   b) Los vectores A y B de $\mathbb{R}^2$ son linealmente independientes.

   c) Los vectores A, B y C de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes, pero dos cualesquiera de ellos son linealmente independientes.

   d) Los vectores A, B y C de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes.

5. Demostrar que el vector $(1, 3)$ se puede expresar de dos maneras diferentes como combinación lineal de $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(1, -1)$.

6. Sean $E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n$ los vectores de $\mathbb{R}^n$ definidos así: E_j es el vector que tiene 0 en todas sus componentes salvo la j-ésima, que vale 1.

   a) Demostrar que los vectores $E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n$ son linealmente independientes.

   b) Demostrar que todo vector X de $\mathbb{R}^n$ se puede expresar como combinación lineal de $E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n$.

Nota. Los vectores $E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n$ son generalmente llamados **la base canónica** de $\mathbb{R}^n$. ¿Cuál es entonces la dimensión de $\mathbb{R}^n$?

7. Supóngase que $V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_k$ son vectores de $\mathbb{R}^n$, y que A y B son combinaciones lineales de $V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_k$. Demuestre que cualquier combinación lineal de A y B es también combinación lineal de $V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_k$.

8. Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga el vector $(1,1,0)$. Encuentre una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a los vectores $(1,1,-1,1)$ y $(3,5,2,4)$.

9. Generalize el Ejercicio 8: dado un conjunto de k vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$, de una "receta" para encontrar una base de $\mathbb{R}^n$ que contenga dicho conjunto.

10. Supóngase que $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ es una solución a un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con n incógnitas.
    Supóngase además que $(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ es también solución al mismo sistema. Demostrar que cualquier combinación lineal de $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ y $(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ es también solución al sistema. ¿Qué se puede decir si el sistema no es homogéneo?

11. Sean A y B subconjuntos finitos de vectores de $\mathbb{R}^n$, de tal manera que A es subconjunto de B. Demostrar:

    a) Si B es linealmente independiente entonces A también lo es.

    b) Si A es linealmente dependiente entonces B también lo es.

12. Con miras a demostrar la Proposición 1:

    a) Demostrar que si los vectores $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_p$ son linealmente dependientes, existen $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p$ escalares, no todos nulos, tales que:
    $$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_p X_p = 0.$$

    b) Si los vectores $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_p$ son tales que existen escalares, $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p$, no todos nulos, tales que:
    $$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_p X_p = 0;$$
    entonces al menos uno de los vectores se puede escribir como combinación lineal del resto.

   c) Explique por qué a) y b) demuestran la Proposición 1 de esta sección.

13. Probar que un conjunto de m vectores de $\mathbb{R}^n$ con $m > n$ es linealmente dependiente.

14. ☛Con miras a demostrar la Proposición 2:

    a) Demostrar que si B es una base de un espacio vectorial y B tiene n vectores, entonces cualquier conjunto con más de n vectores es linealmente dependiente.

    b) Usando a) deduzca que si B y B' son bases de un espacio vectorial, entonces B y B' tienen el mismo número de elementos.

15. Demuestre que si A, B, C son vectores de $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes, entonces los siguientes conjuntos de vectores también son linealmente independientes:

    a) $A - B,\ A - C$;

    b) $A + B + C,\ A + B,\ A$;

    c) $C - A - B,\ A - B - C,\ B - C - A$.

16. Demuestre que si A, B, C son vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces los siguientes conjuntos de vectores **no** son linealmente independientes:

    a) $A - B,\ A - C,\ 2A - B - C$;

    b) $A + B + C,\ A + B - C,\ A + B$;

    c) $A - B,\ A - B - C,\ B - A$.

17. ☛Demuestre la Proposición 3.

2.4. Planos y rectas en $\mathbb{R}^3$

2.4.1. Ecuaciones paramétricas y cartesianas

Los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ se suelen caracterizar por medio de **ecuaciones paramétricas** cuando se indica la forma de sus puntos por medio de un parámetro. Por ejemplo, cuando hacemos variar $\theta \in [0, 2\pi]$ los puntos de la forma

$$(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta),$$

conforman un círculo de radio 1 alrededor del origen en $\mathbb{R}^2$. Queda entonces descrito este conjunto en términos del parámetro θ. Las **ecuaciones cartesianas** relacionan las coordenadas de los puntos que pertenecen al conjunto que se quiere caracterizar. Por ejemplo, una circunferencia de radio 1 alrededor del origen en $\mathbb{R}^2$ tiene como ecuación cartesiana:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

esta es una condición necesaria y suficiente para que el punto (x, y) pertenezca a la circunferencia. En esta sección queremos obtener una o varias ecuaciones que caractericen rectas y planos en $\mathbb{R}^3$.

2.4.2. Rectas que contienen el origen

Dado un vector no nulo V, el conjunto de todas sus combinaciones lineales, es decir, el conjunto:

$$\{\alpha V \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

al ser visto como un conjunto de puntos, forma una recta (ver Figura 2.5) que contiene al origen (cuando $\alpha = 0$) y al punto V (cuando $\alpha = 1$). V también determina el **sentido de la recta**. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ si $V = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ los puntos de la recta que con dirección V contiene al origen, serán de la forma:

$$(\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \alpha a_3),$$

es decir, $(x,\ y,\ z)$ pertenece a la recta si y sólo si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$x = \alpha a_1;\ y = \alpha a_2;\ z = \alpha a_3,$$

ecuaciones que también se consideran paramétricas. De aquí podemos eliminar α y obtenemos:

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z}{a_3},$$

que son ecuaciones cartesianas (llamadas también simétricas) de la recta. (¿Qué ocurre cuando alguno de los a_i es cero?).

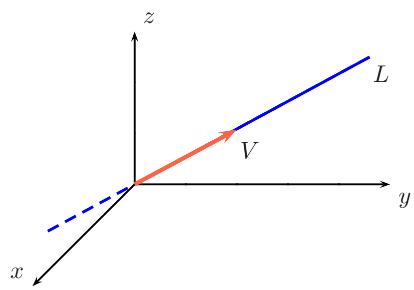


Figura 2.5. Recta que contiene el origen.

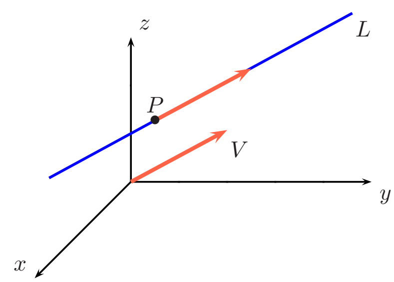


Figura 2.6. Recta trasladada.

2.4.3. Rectas trasladadas

La recta L que pasa por P y tiene sentido V es una recta paralela a la que pasa por el origen con sentido V (ver Figura 2.6). Por tanto, los puntos de L se pueden ver como los de esta recta cuando se les suma P:

$$L = \{\alpha V + P \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

por ejemplo en $\mathbb{R}^3$ si $V = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ y $P = (p_1,\ p_2,\ p_3)$, los puntos de la recta L que con dirección V contiene a P (o pasa por P) serán de la forma:

$$(\alpha a_1 + p_1,\ \alpha a_2 + p_2,\ \alpha a_3 + p_3),$$

es decir, $(x,\ y,\ z)$ pertenece a la recta L si y sólo si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \alpha a_1 + p_1, \\ y &= \alpha a_2 + p_2, \\ z &= \alpha a_3 + p_3, \end{aligned}}$$

ecuaciones que también se consideran paramétricas. De aquí podemos eliminar α y obtenemos,

$$\boxed{\frac{x-p_1}{a_1}=\frac{y-p_2}{a_2}=\frac{z-p_3}{a_3},}$$

que son ecuaciones cartesianas (simétricas) de la recta L. (¿Qué ocurre si alguno de los a_i es cero?).

Haciendo un razonamiento parecido para el plano $\mathbb{R}^2$, se puede deducir que la recta en el plano que pasa por $P=(p_1,p_2)$ y tiene sentido $V=(a_1,a_2)$, queda determinada por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= \alpha a_1 + p_1 \\ y &= \alpha a_2 + p_2, \end{aligned}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, y eliminando el parámetro α se obtiene una ecuación de la forma $ax+by=c$ que corresponde a la conocida ecuación cartesiana de una recta en el plano.

Ejemplo 2.4.1. Encontremos las ecuaciones paramétricas y las simétricas de la recta que pasa por los puntos $P=(2,-1,3)$ y $Q=(1,0,-5)$.

Para encontrar dichas ecuaciones es suficiente conocer un punto y un vector director de la recta; como punto podemos tomar cualquiera de los dos que tenemos y como vector director nos servirá

$$V=\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-1,1,-8).$$

De esta manera las ecuaciones paramétricas, tomando el punto P serán:

$$\begin{aligned} x &= -\alpha + 2 \\ y &= \alpha - 1 \qquad\qquad \alpha \in \mathbb{R}, \\ z &= -8\alpha + 3 \end{aligned}$$

y las ecuaciones simétricas:

$$2-x=y+1=\frac{3-z}{8}.$$

2.4.4. Planos que contienen el origen

Las combinaciones lineales de dos vectores linealmente independientes forman en $\mathbb{R}^3$ un plano que contiene al origen y a los dos vectores (ver Figura 2.7). Si V_1 y V_2, son los dos vectores, el plano se puede describir como el conjunto de puntos:

$$\{\alpha V_1 + \beta V_2 \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Los vectores V_1 y V_2 se llaman **vectores directrices del plano**, o generadores, y hacen el papel que juega el vector de sentido en las rectas. Si $V_1 = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ y $V_2 = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ son los vectores directrices del plano que contiene al origen y si $(x,\ y,\ z)$ es un punto de dicho plano, entonces deben existir α y β tales que:

$$x = \alpha a_1 + \beta b_1,\ y = \alpha a_2 + \beta b_2,\ z = \alpha a_3 + \beta b_3,$$

de estas ecuaciones se pueden eliminar α y β para obtener una ecuación cartesiana de la forma:

$$cx + dy + ez = 0,$$

es decir, una ecuación lineal con tres variables e igualada a cero.

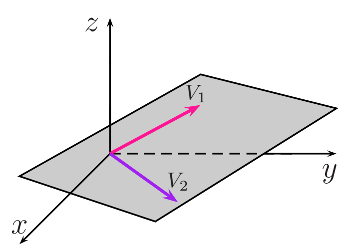


Figura 2.7. Plano que contiene el origen.

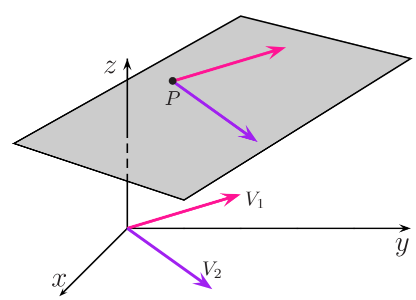


Figura 2.8. Plano trasladado.

2.4.5. Planos trasladados

Para obtener un plano que no necesariamente contenga al origen sino al punto $P = (p_1,\ p_2,\ p_3)$ y con los vectores directrices V_1 y V_2, a cada uno de los puntos del plano que contiene al origen y con los mismos vectores directrices, le sumamos el punto P (ver Figura 2.8). Obtenemos el conjunto:

$$\{\alpha V_1 + \beta V_2 + P \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Este plano es paralelo al que contiene al origen y tiene directrices V_1 y V_2. Si $V_1 = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ y $V_2 = (b_1, b_2, b_3)$ son los vectores directrices y si (x, y, z) es un punto de dicho plano, entonces deben existir α y β tales que:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= p_1 + \alpha a_1 + \beta b_1, \\ y &= p_2 + \alpha a_2 + \beta b_2, \\ z &= p_3 + \alpha a_3 + \beta b_3, \end{aligned}}$$

de estas ecuaciones paramétricas se pueden eliminar α y β para obtener una ecuación cartesiana de la forma:

$$\boxed{cx + dy + ez = f.}$$

Obsérvese que cada ecuación lineal con tres variables, corresponde geométricamente a un plano en el espacio y recíprocamente.

Ejemplo 2.4.2. Encontrar las ecuaciones paramétricas y la cartesiana del plano que tiene vectores directores $V_1 = (0, -2, 1)$, $V_2 = (1, 2, 3)$ y que pasa por el punto de intersección de la recta:

$$\begin{aligned} x &= -1 + \alpha \\ y &= 0 \\ z &= 5\alpha \end{aligned}$$

con el plano $x - 2y + z = 1$.

Encontremos en primer lugar el punto de intersección de la recta y el plano dados, para lo cual reemplazamos las ecuaciones paramétricas de la recta, en la ecuación cartesiana del plano:

$$(-1 + \alpha) - 2(0) + (5\alpha) = 1,$$

de donde se obtiene que $\alpha = \frac{1}{3}$ y reemplazando en las ecuaciones paramétricas de la recta se obtiene el punto $\left(-\frac{2}{3}, 0, \frac{5}{3}\right)$, que es el punto de intersección buscado. De esta manera construimos las ecuaciones paramétricas del plano buscado, usando el punto $\left(-\frac{2}{3}, 0, \frac{5}{3}\right)$ y los vectores directores V_1 y V_2 como sigue:

$$\begin{array}{llll}
(1) & x = & -\frac{2}{3} + \beta & \\
(2) & y = & -2\alpha + 2\beta & \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}. \\
(3) & z = & \frac{5}{3} + \alpha + 3\beta &
\end{array}$$

Despejando el valor de β de la ecuación (1) y reemplazándolo en las ecuaciones (2) y (3) se obtiene:

$$\begin{array}{ll}
(4) & \alpha = x - \frac{1}{2}y + \frac{2}{3} \\
(5) & \alpha = z - 3x - \frac{11}{3}.
\end{array}$$

Igualando (4) y (5) y simplificando se obtiene la ecuación:

$$4x - \tfrac{1}{2}y - z = -\tfrac{13}{3}$$

que sería la ecuación cartesiana del plano buscado.

Ejercicios 2.4

1. Encontrar las ecuaciones paramétricas y la ecuación cartesiana de la recta en $\mathbb{R}^2$ que contiene el origen y tiene dirección $(-1, 2)$.

2. Encontrar las ecuaciones paramétricas y la ecuación cartesiana de la recta en $\mathbb{R}^2$ que contiene el origen y el punto $(1, 1)$.

3. Encontrar las ecuaciones paramétricas y la ecuación cartesiana de la recta en $\mathbb{R}^2$ que contiene el punto $(0, 2)$ y tiene dirección $(-1, 2)$.

4. Encontrar las ecuaciones paramétricas y la ecuación cartesiana de la recta en $\mathbb{R}^2$ que contiene los puntos $(0, 3)$ y $(-1, 2)$.

5. Encontrar las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones cartesianas de la recta en $\mathbb{R}^3$ que contiene el origen y tiene dirección $(-1, 2, -1)$.

6. Encontrar las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones cartesianas de la recta en $\mathbb{R}^3$ que contiene el punto $(2, 1, 0)$ y tiene dirección $(-1, 2, -1)$.

7. Encontrar las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones cartesianas de la recta en $\mathbb{R}^3$ que contiene los puntos $(1, 1, -1)$ y $(-1, 2, -1)$.

8. Encontrar las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones cartesianas de la recta en $\mathbb{R}^3$ que contiene el punto $(1, 2, 0)$ y que es paralela a la recta con ecuaciones $2x - y = 1$; $z - 3y = 5$.

9. Sea L_1 la recta que pasa por $(1, 0, 2)$ y $(1, -1, 1)$ y hagamos L_2 la recta que pasa por $(0, 1, -1)$ y que tiene dirección $(2, 0, 1)$. Determinar si L_1 y L_2 se cortan en algún punto.

10. Encontrar las ecuaciones paramétricas y la ecuación cartesiana del plano en $\mathbb{R}^3$ que contiene el origen y es generado por los vectores $(-1, 2, -1)$ y $(4, 2, 1)$.

11. Encontrar las ecuaciones paramétricas y la ecuación cartesiana del plano en $\mathbb{R}^3$ que contiene a $(1, -1, 2)$ y es generado por los vectores $(-1, 2, -1)$ y $(4, 2, 1)$.

12. Encontrar las ecuaciones paramétricas y la ecuación cartesiana del plano en $\mathbb{R}^3$ que contiene los puntos $(1, -1, 2)$, $(-1, 2, -1)$ y $(4, 2, 1)$.

13. ¿Qué significa geométricamente resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas?; ¿de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas?; ¿qué posibilidades tiene entonces el conjunto solución?

14. Sea L la recta que contiene a $(2, 3, 0)$ y con dirección $(1, -1, 3)$; sea P el plano que contiene el origen y es generado por los vectores $(-1, 2, -1)$ y $(4, 2, 1)$. Determine los puntos comunes de P y L.

15. Sea L la recta que contiene a $(2, 3, 0)$ y $(1, -1, 3)$; sea P el plano con ecuación cartesiana $2x - y + z = 2$. Determine los puntos comunes de P y L.

16. Determine la dirección de la recta que es la intersección de los planos $2x - y + z = 1$ y $x + 2y - z = 0$.

2.5. Subespacios vectoriales y subespacios afines de $\mathbb{R}^n$

Consideremos por ejemplo en el plano una recta S que pasa por el origen; si nos concentramos en el conjunto S, con las operaciones de suma y producto por escalar que "hereda" de $\mathbb{R}^2$, no será difícil verificar que $\langle S, +, \cdot\rangle$ satisface las propiedades EV0 a EV8 de los espacios vectoriales. Así $\langle S, +, \cdot\rangle$ es un espacio vectorial contenido en uno "mayor" ($\mathbb{R}^2$). Un **subespacio vectorial** de $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ que cumple los axiomas de espacio vectorial vistos en la sección 2.2. Como $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial lo más importante es ver que las operaciones (suma y producto por escalar) están bien definidas en S. Esto nos lo asegura la siguiente proposición.

Proposición 4. *Un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial si y sólo si se cumple:*

i) *S no es vacío.*

ii) *Si $X, Y \in S$ entonces $X + Y \in S$ (es decir, S es cerrado para la suma).*

iii) *Si $X \in S$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha X \in S$ (es decir, S es cerrado para el producto por escalar).*

Demostración. Ejercicio 1. □

Es claro que el conjunto unitario $\{0\}$ y el mismo $\mathbb{R}^n$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$, a veces llamados subespacios triviales.

Ejemplo 2.5.1. Sea $S = \{(x, y, z) \mid -3x = \frac{y}{2} = z\}$, determinar si S es un subespacio vectorial.

Solución. i) S no es vacío ya que $(0, 0, 0) \in S$.

ii) Sean (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2) \in S$, luego cumplen la igualdad,

$$-3x_1 = \frac{y_1}{2} = z_1 \quad \text{y} \quad -3x_2 = \frac{y_2}{2} = z_2,$$

como

$$-3x_1 - 3x_2 = \tfrac{y_1}{2} + \tfrac{y_2}{2} = z_1 + z_2,$$

que es lo mismo que

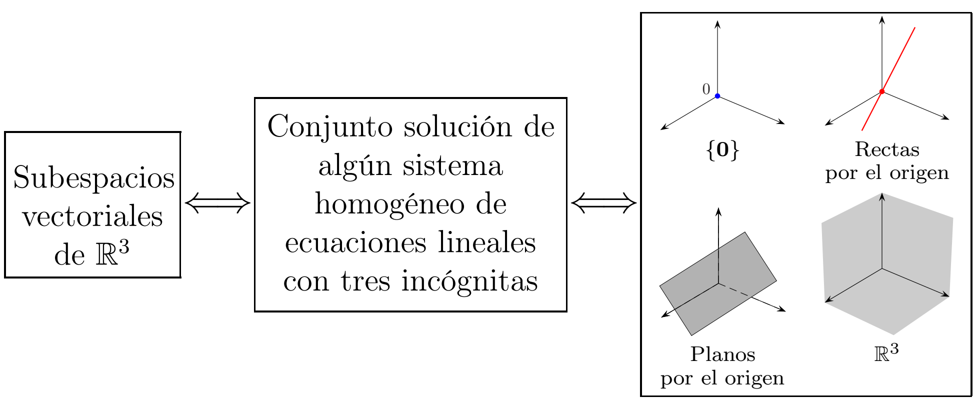
$$-3(x_1 + x_2) = \tfrac{y_1+y_2}{2} = z_1 + z_2,$$

entonces $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in S$. Luego S es cerrado para la suma.

iii) Sea $(x_1, y_1, z_1) \in S$, entonces cumple la igualdad $-3x_1 = \frac{y_1}{2} = z_1$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \in S$, ya que $-3\alpha x_1 = \frac{\alpha y_1}{2} = \alpha z_1$.

Como S cumple i), ii) y iii) concluimos que S es un subespacio vectorial. Obsérvese que S constituye una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen.

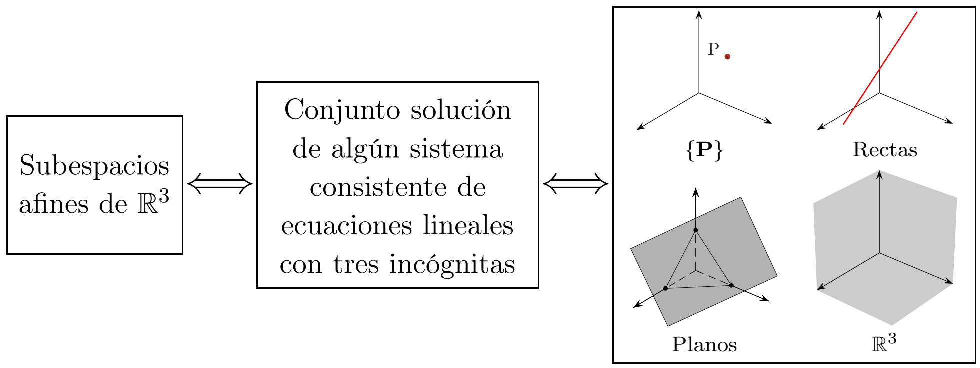
Como aplicación de la Proposición 4 se puede demostrar que los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ son exactamente aquellos subconjuntos que son solución de algún sistema homogéneo de ecuaciones. Así en $\mathbb{R}^3$ los subespacios vectoriales son: $\{0\}$, rectas que contienen el origen, planos que contienen el origen y el mismo $\mathbb{R}^3$. ¿Cuáles son los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$?



Los subespacios vectoriales al ser trasladados producen **subespacios afines**. Es decir, si S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y $P \in \mathbb{R}^n$ entonces:

$$S + P = \{X + P \mid X \in S\},$$

es un subespacio afín. Los subespacios afines de $\mathbb{R}^n$ son exactamente aquellos subconjuntos que son solución de algún sistema consistente de ecuaciones con n incógnitas. Así en $\mathbb{R}^3$ los subespacios afines son: conjuntos de un sólo punto, rectas, planos y el mismo $\mathbb{R}^3$. (¿Cuáles son los subespacios afines en $\mathbb{R}^2$?).



El número mínimo de parámetros que se necesitan para expresar los elementos de un subespacio afín W, nos determinan la **dimensión** de W (ver Ejercicio 12). Por eso, los puntos son de dimensión 0, las rectas de dimensión 1, los planos de dimensión 2.
En general, un subespacio afín W de $\mathbb{R}^n$ de dimensión m será un conjunto de la forma:

$$W = \{P + \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_m V_m \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\},$$

donde $V_1, V_2, \ldots, V_m$ son vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicios 2.5

1. Demostrar la Proposición 4.

2. En cada caso, mostrar un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^3$ que cumpla las condiciones:

   a) Sea subespacio vectorial.

   b) Sea subespacio afín pero no subespacio vectorial.

   c) No sea subespacio afín.

3. a) Demostrar que el plano de $\mathbb{R}^3$ determinado por la ecuación $x + y + z = 0$ es un subespacio vectorial. Encuentre una base para este espacio.

   b) Demostrar que la recta $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y encuentre una base para este.

4. Demostrar que la intersección de dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial. ¿Qué se puede decir de la unión?

5. Demostrar que si V es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ entonces su dimensión es menor o igual que n.

6. Demostrar que si S es un subconjunto finito de vectores de $\mathbb{R}^n$ entonces el conjunto T de todas las combinaciones lineales de los elementos de S, es un subespacio vectorial.

7. a) Demostrar que el conjunto de vectores $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ que son solución a una ecuación lineal homogénea forma un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ (esta es una generalización del Ejercicio 3 de esta sección; véase también el Ejercicio 10 sección 2.3).

   b) Con base en el ejercicio 7a) y aplicando el resultado del ejercicio 4, deducir que el conjunto de soluciones a cualquier sistema homogéneo de ecuaciones con n incógnitas es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

   c) Demostrar que el conjunto de soluciones a cualquier sistema consistente de ecuaciones con n incógnitas es un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$.

8. Sean A y B dos puntos diferentes de la recta L y sea X un punto de la forma:

$$\alpha A + \beta B = X$$

   a) Demostrar que X pertenece a L si y sólo si $\alpha + \beta = 1$.

   b) Si X pertenece a la recta L, X puede estar antes de A y B, entre A y B, o bien después de A y B. Determine cómo deben ser α y β en cada caso.

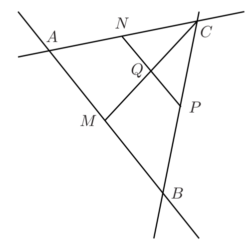
9. Sean A, B y C tres puntos no colineales del plano π que está en $\mathbb{R}^3$ y sea X un punto de la forma:

$$\alpha A + \beta B + \Gamma C = X$$

   a) Demostrar que X pertenece al plano π si y sólo si $\alpha + \beta + \Gamma = 1$.

   b) Determine en cuál región del plano de las determinadas por las rectas AB, BC y AC se encuentra X, según los signos de α, β y Γ.

10. En la gráfica M, N y P son los puntos medios de los segmentos AB, AC, BC respectivamente y Q es la intersección de los segmentos NP con MC. Exprese en términos de A, B y C los puntos M, N, P y Q.



11. Sea F un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k. Demostrar que en F existen $k+1$ puntos $P_0, P_1, \ldots, P_k$, tales que los puntos de F son exactamente aquellos de $\mathbb{R}^n$ que se pueden escribir de la forma:

$$a_0 P_0 + a_1 P_1 + \ldots + a_k P_k = X,$$

donde los a_i cumplen $a_0 + a_1 + \ldots + a_k = 1$.

12. Sea V un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$:

   a) Demostrar que la dimensión de V como subespacio afín coincide con su dimensión como subespacio vectorial.

   b) Demostrar que la dimensión de $V + P$ (como subespacio afín) es la dimensión de V.

Nota. Para el espacio trivial $\{0\}$ se asume que el conjunto vacío ($\emptyset$) es una base, por lo cual su dimensión como espacio vectorial es 0.

Capítulo 3

Transformaciones lineales y matrices

3.1. Transformaciones lineales

Nota. Se supone para lo que sigue, familiaridad con la estructura de espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y con los conceptos de función entre dos conjuntos, dominio, recorrido, función uno a uno $(1-1)$, función sobre, inversa de una función, etc.

Por otra parte, en adelante notaremos cada vector indistintamente en forma de vector fila o en forma de vector columna según la conveniencia. Así,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Definición. Una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una **transformación lineal** si se cumple:

a) para todo $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$;

b) para todo $X \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(\alpha X) = \alpha f(X)$.

Esto quiere decir que las transformaciones lineales son aquellas funciones que respetan la suma vectorial y el producto por escalar. Estas dos condiciones se pueden reemplazar por una sola. Podemos decir:

Una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal si y sólo si se cumple: para todo $X,\ Y \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha X + Y) = \alpha f(X) + f(Y),$$

(¡demostrarlo!).

Ejemplo 3.1.1. Dada la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x + y + z$, verificar que f es una transformación lineal.

Solución. Claramente f es función pues a cada tripla $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ le corresponde una y sólo una imagen $f(X) = x_1 + x_2 + x_3 \in \mathbb{R}$. Veamos ahora que f cumple las dos condiciones para ser transformación lineal.

a) Sean $X, Y \in \mathbb{R}^3$ entonces $X = (x_1, x_2, x_3)$ y $Y = (y_1, y_2, y_3)$. Encontrando

$$\begin{aligned} f(X+Y) &= f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1+y_1) + (x_2+y_2) + (x_3+y_3), \end{aligned}$$

y por otra parte,

$$\begin{aligned} f(X) + f(Y) &= f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1+x_2+x_3) + (y_1+y_2+y_3), \end{aligned}$$

utilizamos las propiedades asociativa y conmutativa de la suma en los números reales y concluimos que:

$$(x_1+y_1) + (x_2+y_2) + (x_3+y_3) = (x_1+x_2+x_3) + (y_1+y_2+y_3),$$

luego $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$.

b) Sea $X \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $X = (x_1, x_2, x_3)$.
Encontrando

$$f(\alpha X) = f\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix} = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3$$

y

$$\alpha f(X) = \alpha f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha(x_1 + x_2 + x_3),$$

utilizamos la propiedad distributiva de la multiplicación en los números reales y concluimos que:

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 = \alpha(x_1 + x_2 + x_3),$$

luego $f(\alpha X) = \alpha f(X)$. Así, f es una transformación lineal.

La definición de una transformación lineal implica ciertas propiedades inmediatas; por ejemplo que si una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal se cumple: $f(0) = 0$ y $f(-X) = -f(X)$. Además, conociendo los valores de $f(V_1), f(V_2), \ldots, f(V_k)$ podemos conocer $f(X)$ para todo $X \in \mathbb{R}^n$ que sea combinación lineal de $V_1, V_2, \ldots, V_k$ (ver Ejercicio $3a$).

Ejemplo 3.1.2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Encontrar el valor de $f(3, 2, 0)$ sabiendo que $f(-1, 4, 2) = (0, -6)$ y $f(1, 3, 1) = (-4, 1)$.

Solución. Debemos encontrar los escalares α y β tales que el vector $(3, 2, 0)$ se pueda escribir como combinación lineal de los vectores $(-1, 4, 2)$ y $(1, 3, 1)$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de aquí se obtienen tres ecuaciones con dos incógnitas, resolviendo tenemos que $\alpha = -1$ y $\beta = 2$. Reemplazando y usando que f es transformación lineal, llegamos a la transformación del vector $(3, 2, 0)$:

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= -1f\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -1\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejercicios 3.1

1. Decir si las siguientes aplicaciones son o no transformaciones lineales. Justificar su respuesta.

   a) $f(x, y) = x^2 + y^2$;

   b) $f(x) = (0, x)$;

   c) $f(x) = 4x$;

   d) $f(x, y) = 2x + y^2$;

   e) $f(x, y) = 3x + 2y + 5$;

   f) $f(x, y) = x^2 + 1$;

   g) $f(x, y) = (x, 2x, y)$;

   h) $f(x, y, z) = (x - y, z + x)$;

   i) $f(x, y, z) = (1 - y, z + 1)$;

   j) $f(x, y, z) = (2z, -y, 1)$.

2. Sea L una recta con sentido V y f una transformación lineal tal que $f(V)$ no es cero. Demuestre que la imagen de L por intermedio de f, es decir, $f[L] = \{f(x) \mid x \in L\}$, es también una recta. ¿Qué sucede si $f(V) = 0$?

3. *a*) Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Demostrar que $f(0) = 0$, $f(-X) = -f(X)$, y que si se conocen $f(V_1), f(V_2), \ldots, f(V_k)$, entonces se conoce $f(X)$ para todo X que sea combinación lineal de $V_1, V_2, \ldots, V_k$. En particular si se conocen las imágenes de los elementos de una base de $\mathbb{R}^n$, entonces se conoce la imagen de cualquier otro vector del dominio. ¿Por qué?

   b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal. Encontrar los valores $f(2, 0)$, $f(1, 3)$ y $f(1, 2)$ sabiendo que:

      i) $f(1, 0) = (3, -1, 2)$; $f(0, 1) = (1, -1, 2)$, *ii)* $f(1,-1)=(5,1,2);\ f(2,-1)=(0,-1,2)$.

4. *a*) Demuestre que si $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ son transformaciones lineales y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $f+g:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $\alpha f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ son también transformaciones lineales. Ilustre con un ejemplo.

   b) Considere el espacio vectorial V de las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ (recuerde el Ejercicio 17 de la sección 2.2) y defina el conjunto $\mathcal{L}_{nm}$ por:

   $$\mathcal{L}_{nm} =: \{f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{es transformación lineal}\},$$

   claramente $\mathcal{L}_{nm} \subseteq V$. De acuerdo a la parte a) de este ejercicio, ¿qué se puede concluir respecto al conjunto $\mathcal{L}_{nm}$?

5. Demuestre que si $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ son transformaciones lineales entonces $g\circ f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ es también transformación lineal. Ilustre con un ejemplo.

6. Demuestre que si $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal inversible entonces la inversa f^{-1} también es una transformación lineal. Ilustre con un ejemplo.

7. Sean $f_1:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f_2:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dos transformaciones lineales, definimos $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ así: $f(X)=(f_1(X),f_2(X))$. Demostrar que f es una transformación lineal. Ilustre con un ejemplo.

8. Encuentre las fórmulas de las transformaciones lineales del Ejercicio 3*b*).

9. Demuestre geométricamente que un giro del plano $\mathbb{R}^2$ alrededor del origen es una transformación lineal, ¿cuál es su fórmula?

3.2. Representación de transformaciones lineales por medio de matrices

En el capítulo anterior se introdujo el concepto de matriz, se asociaron las matrices a sistemas de ecuaciones lineales y se usaron para resolver estos sistemas por el método de Gauss. Ahora profundizaremos en el concepto de matriz analizando la íntima relación que guardan con las transformaciones lineales. El lector puede comprobar que siendo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal tal que:

$$\begin{aligned} f(E_1) &= f(1,\ 0, \ldots, 0) = (a_{11},\ a_{21},\ \ldots a_{m1}) \\ f(E_2) &= f(0,\ 1, \ldots, 0) = (a_{12},\ a_{22},\ \ldots a_{m2}) \\ &\vdots \\ f(E_n) &= f(0,\ 0 \ldots,\ 1) = (a_{1n},\ a_{2n},\ \ldots a_{mn}), \end{aligned}$$

entonces, si $X = (x_1\ x_2, \ldots x_n)$ se tiene que el valor

$$f(X) = f(x_1E_1 + x_2E_2 + \ldots + x_nE_n)$$

está dado por:

$$(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n, \ldots,\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n).$$

Esta es la forma general de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. ¡Nótese la similitud con las ecuaciones lineales! Para simplificar esta notación se utiliza el lenguaje de las matrices. La matriz de f se forma tomando los valores de $f(E_1),\ f(E_2),\ \ldots, f(E_n)$ y escribiéndolos como columnas de la matriz que notaremos M_f. Es decir:

$$M_f = (f(E_1)\downarrow, f(E_2)\downarrow, \ldots, f(E_n)\downarrow)$$

Así, para la transformación f la matriz M_f será:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

que tiene m filas y n columnas. Siendo $X = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ por conveniencia lo escribimos como vector columna y lo notamos así:

$$X{\downarrow}= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

entonces definimos el producto de la matriz M_f por la columna $X{\downarrow}$ como el valor de $f(X)$, colocado como columna. Ecuación que escribimos así:

$$f(X){\downarrow}=: M_f X{\downarrow}\ .$$

Esta asociación (a cada transformación lineal una matriz) es biunívoca pues recíprocamente, si A es una matriz de orden $m \times n$, digamos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

entonces A define una transformación lineal f_A así:

$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por:

$$f_A(X) = AX =: \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

siendo $X = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, (ver Ejercicio 9).

Nota. Recuérdese que $\mathcal{M}_{m\times n}$ denota la familia de todas las matrices de orden $m \times n$ con componentes reales y $\mathcal{L}_{m\times n}$ denota la familia de todas las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Más adelante al finalizar la sección 3.4 y una vez realizado el Ejercicio 1 de dicha sección, quedará establecido que $\mathcal{M}_{m\times n}$ y $\mathcal{L}_{m\times n}$ son espacios vectoriales *isomorfos* (es decir, son espacios vectoriales entre los cuales se puede definir una transformación lineal uno a uno y sobre). Esto, expresado de una manera informal, nos dice que *las matrices y las transformaciones lineales son esencialmente lo mismo.*

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{\begin{array}{c}\text{Matrices}\\ \mathcal{M}_{m\times n}\end{array}} & \approx & \boxed{\begin{array}{c}\text{Transformaciones}\\ \text{Lineales } \mathcal{L}_{m\times n}\end{array}}\\
A & \longrightarrow & f_A\\
M_f & \longleftarrow & f
\end{array}$$

Las matrices y las transformaciones lineales son "esencialmente lo mismo"

Esta asociación nos da otra interpretación al problema de hallar todas las soluciones a un sistema de ecuaciones lineales. En efecto, obsérvese que resolver un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones con n incógnitas es encontrar todos los $X \in \mathbb{R}^n$ tales que:

$$f(X) = B,$$

donde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal cuya matriz es la matriz del sistema y B es un vector columna de $\mathbb{R}^m$ formado por los términos constantes de las ecuaciones. En términos de matrices, si A es la matriz de f, resolver el sistema es resolver la ecuación matricial:

$$AX{\downarrow} = B{\downarrow}\ .$$

Para el caso particular de transformaciones del plano en el plano, o del espacio tridimensional en sí mismo, es posible, útil e interesante (¡además de divertido!), interpretar el efecto geométrico de la transformación, es decir, describir qué le hace la transformación a determinados subconjuntos del plano (o de $\mathbb{R}^3$). Así podemos hablar de transformaciones lineales (o equivalentemente matrices) que hacen un cambio de escala, giros, reflexiones, etc. Para este análisis es conveniente recordar que las columnas de la matriz M_f son las imágenes de los vectores de la base canónica E_1 y E_2 para el caso $\mathbb{R}^2$ y $E_1,\ E_2$ y E_3 en el caso $\mathbb{R}^3$. Ilustremos lo anterior con algunos ejemplos.

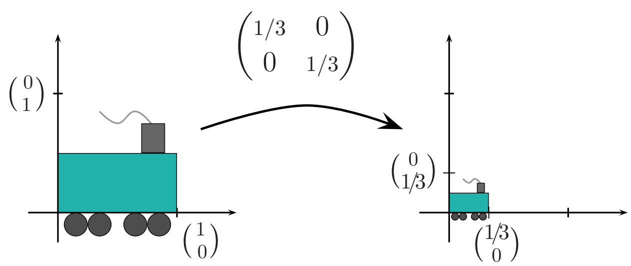
Ejemplo 3.2.1. Dada la transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/3\\ y/3\end{pmatrix},$$

la matriz asociada a la transformación es:

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}$$

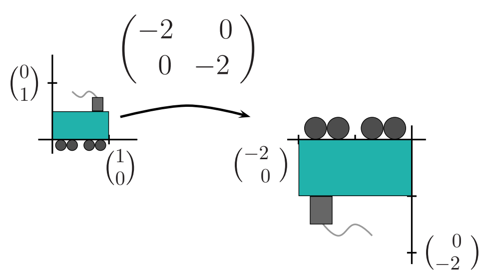
y observando entonces las columnas de esta matriz, podemos describir el efecto geométrico de f como una "reducción" o "contracción" con factor de escala $\frac{1}{3}$; este efecto lo podemos ilustrar mediante una figura como la siguiente:



Ejemplo 3.2.2. La transformación lineal cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

realiza una "ampliación" o "dilatación", con factor de escala 2 y una reflexión con respecto al origen. Esto se ilustra en la siguiente figura:

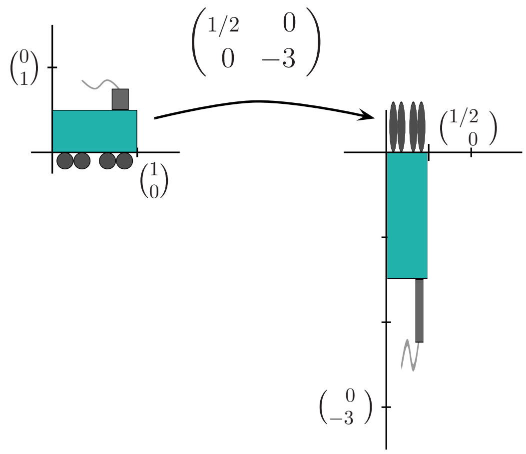


Los ejemplos 3.2.1 y 3.2.2 se generalizan en el Ejercicio 1.

Ejemplo 3.2.3. Una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

realiza un cambio de escala en sentido horizontal, con factor de escala $|a|$ (y reflexión con respecto al eje Y, si $a < 0$), y un cambio de escala en sentido vertical, con factor de escala $|b|$ (y con reflexión respecto al eje X, si $b < 0$). En la siguiente figura se ilustra el caso particular en que $a = \frac{1}{2}$ y $b = -3$.



Ejemplo 3.2.4. Un giro (al rededor del origen) un ángulo θ se puede realizar mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(ver Ejercicio 9 de la sección 3.1).

Ejemplo 3.2.5. Dada la transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix},$$

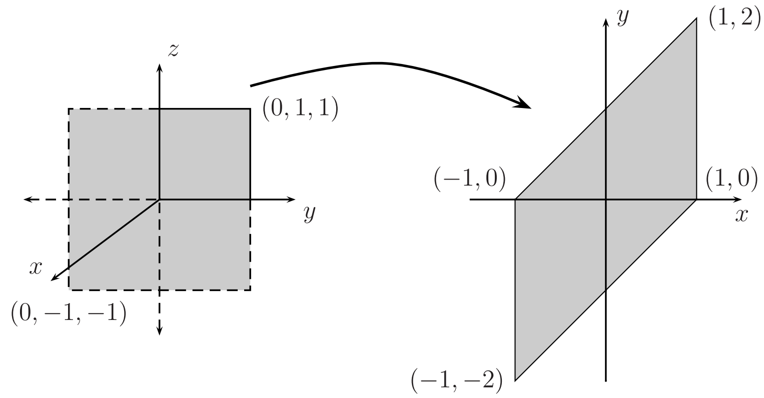
la matriz asociada a la transformación es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ya que,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix}.$$

Si aplicamos la transformación anterior a un cuadrado de vértices $(0,1,1)$, $(0,1,-1)$, $(0,-1,-1)$ y $(0,-1,1)$, entonces hallando la transformación de cada vértice del cuadrado encontramos que su imagen es un paralelogramo de vértices $(1,2)$, $(1,0)$, $(-1,-2)$ y $(-1,0)$, como vemos en la figura que sigue:



Ejercicios 3.2

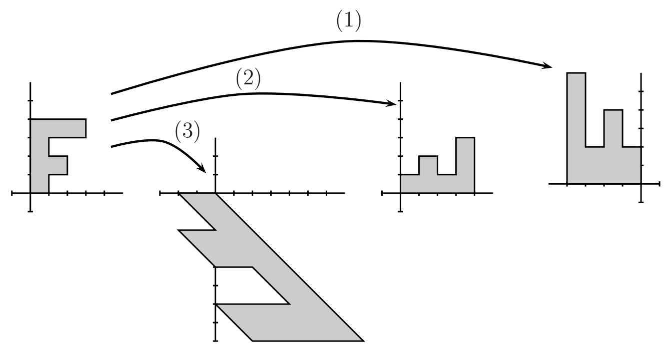
1. Describir, "en palabras" y mediante dibujos, el efecto geométrico que produce una matriz de la forma $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ cuando:

   a) $k < -1$;
   b) $k = -1$;
   c) $-1 < k < 0$;
   d) $0 < k < 1$;
   e) $k = 0$;
   f) $k = 1$;
   g) $k > 1$.

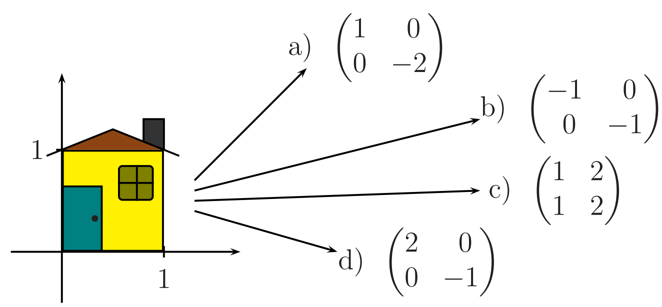
2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación dada por la matriz A. Describa la transformación f en términos geométricos:

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
   c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
   d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
   e) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
   f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

3. Encontrar las matrices de las transformaciones que ejecutan cada una de las acciones mostradas en la figura. ¿Qué es en cada caso $f(x, y)$?



4. Dibujar cómo queda la casita de la figura al aplicarle cada una de las transformaciones representadas por las matrices:



5. Para cada una de las siguientes matrices 2×2 encontrar la transformación asociada, diciendo a qué es igual $f(x, y)$:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; *c)* $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; *d)* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Representar gráficamente cada una de las transformaciones lineales del ejercicio anterior, mostrando en qué se convierte el eje X, el eje Y, una recta paralela al eje X, otra paralela al eje Y y un círculo de radio 1 y centro en $(1, 0)$.

[Aproximación al álgebra lineal:

7. Hallar el dominio, el recorrido y una fórmula analítica para cada una de las transformaciones representadas por las matrices siguientes:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; *c*) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; *e*) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$;

   b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; *d*) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; *f*) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. *a*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la reflexión del plano sobre la recta $y = x$. Encontrar la fórmula de f.

   b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la reflexión del plano sobre la recta $y = 2x$. Encontrar la fórmula de f.

   c) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la reflexión del plano sobre la recta $y = ax$. Encontrar la fórmula de f.

9. Dadas $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ matriz $m \times n$ y $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por:

$$f_A(X) = AX =: \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

   siendo $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, demuestre que f_A es una transformación lineal.

10. Usando lo visto en la sección 3.2 y el ejercicio anterior, demuestre que la función $F : \mathcal{M}_{m\times n} \longrightarrow \mathcal{L}_{nm}$, definida por $F(A) =: f_A$ para cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, es una biyección; (con $\mathcal{M}_{m\times n}$ estamos notando la familia de todas las matrices de orden $m \times n$, con componentes reales). Deduzca que para cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $M_{f_A} = A$, y para cada $f \in \mathcal{L}_{nm}$, $f_{M_f} = f$.

3.3. El núcleo y la imagen de una transformación lineal

Estos dos conjuntos (núcleo e imagen) relacionados con cada transformación lineal nos dan una idea de su comportamiento y su relación con los sistemas correspondientes de ecuaciones lineales. Siendo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal el **núcleo de** f, que notaremos $Nu(f)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ formado por todos los vectores cuya imagen por intermedio de f es $0 \in \mathbb{R}^m$. Es decir,

$$\mathrm{Nu}(f) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid f(X) = 0\}.$$

El lector debe comprobar que $\mathrm{Nu}(f)$, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ que comprende exactamente los vectores que son solución al sistema homogéneo de ecuaciones lineales correspondiente a la matriz de f. Es decir, si A es la matriz de f, el núcleo es la solución a la ecuación matricial

$$AX{\downarrow} = 0{\downarrow} \ .$$

Por otra parte, si el sistema no es homogéneo, el conjunto solución o es vacío, o es un espacio afín asociado a $\mathrm{Nu}(f)$. Es decir el conjunto solución al sistema:

$$AX{\downarrow} = B{\downarrow},$$

es un subespacio afín de la forma:

$$\mathrm{Nu}(f) + P,$$

donde $P \in \mathbb{R}^n$ es alguna solución al sistema, o es vacío, si no existe tal P.

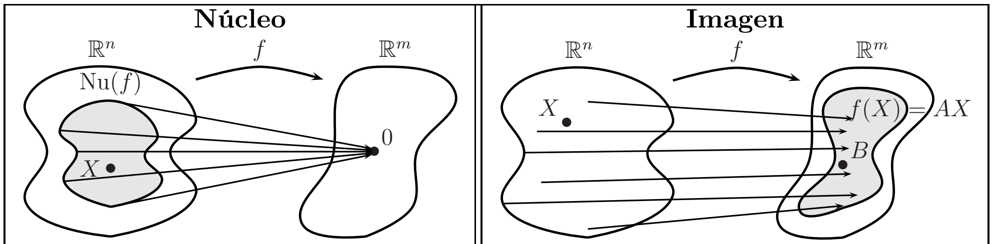
Siendo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal **la imagen de** f, que notaremos $\mathrm{Im}(f)$ o también $f[\mathbb{R}^n]$ es el subconjunto de $\mathbb{R}^m$ formado por todos los vectores que son imagen por intermedio de f de algún $X \in \mathbb{R}^n$. Es decir,

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(X) \in \mathbb{R}^m \mid X \in \mathbb{R}^n\},$$

y es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$; comprende todos los $B \in \mathbb{R}^m$ tales que el sistema:

$$AX{\downarrow} = B{\downarrow},$$

es consistente cuando A es la matriz de f.



$\mathrm{Nu}(f) =: \{X \in \mathbb{R}^n \mid f(X) = 0\} =$ Conjunto solución del sistema homogéneo $AX = 0$

$\mathrm{Im}(f) =: \{f(X) \in \mathbb{R}^m \mid X \in \mathbb{R}^n\} = \{B \in \mathbb{R}^m \mid$ el sistema $AX = B$ es consistente$\}$

Proposición 5 (Teorema de la dimensión)**.** *Siendo* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una transformación lineal se cumple:*

$$\dim \mathrm{Nu}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = n.$$

Demostración. Ejercicio 7. □

La dimensión del núcleo de f, se suele llamar **nulidad de** f y se denota $n(f)$, mientras que la dimensión de la imagen se suele llamar **el rango de** f, y lo denotamos $R(f)$, es decir:

$$n(f) =: \dim \mathrm{Nu}(f) \quad \text{(nulidad)}; \qquad R(f) =: \dim \mathrm{Im}(f) \quad \text{(rango)}.$$

Con esta notación, veamos cómo se pueden usar el núcleo y la imagen de una transformación lineal para determinar si ésta es inyectiva o sobreyectiva.

Proposición 6. *Sea* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una transformación lineal, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) f *es inyectiva;* *ii)* $\mathrm{Nu}(f) = \{0\}$*;* *iii)* $n(f) = 0$.

Demostración. Ejercicio 9a). □

Proposición 7. *Sea* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una transformación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) f *es sobreyectiva;* *ii)* $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^m$*;* *iii)* $R(f) = m$.

Demostración. Ejercicio 9b). □

Ejemplo 3.3.1. Encontrar el núcleo y la imagen de la transformación lineal representada por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución. El núcleo es el conjunto de vectores que son solución al sistema homogéneo de ecuaciones lineales correspondiente a la matriz A, por lo tanto tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-3f_1+f_3]{-2f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-2f_2+f_3]{f_2+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow\ x = -3z,\ -y = -z$. Si $z = t$ entonces $x = -3t,\ y = t$ y $z = t$.

Luego $\mathrm{Nu}(f) = \{(-3t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. ¿Geométricamente qué es, en este ejemplo, $\mathrm{Nu}(f)$? Luego, ¿$\dim \mathrm{Nu}(f) =$? ¿Es f inyectiva?

La imagen está dada por el espacio que generan los vectores columna de la matriz A, luego:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 2 & 0 & 6 & y \\ 3 & 2 & 7 & z \end{array}\right) \xrightarrow[-3f_1+f_3]{-2f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -2 & 2 & -2x+y \\ 0 & -1 & 1 & -3x+z \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & 1 & -3x+z \\ 0 & -2 & 2 & -2x+y \end{array}\right) \xrightarrow[-2f_2+f_3]{f_2+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -2x+z \\ 0 & -1 & 1 & -3x+z \\ 0 & 0 & 0 & 4x+y-2z \end{array}\right)$$

para que el sistema tenga solución se debe cumplir que $4x + y - 2z = 0$. Luego $\mathrm{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + y - 2z = 0\}$. ¿Geométricamente qué es $\mathrm{Im}(f)$? Luego, ¿$\dim \mathrm{Im}(f) =$? ¿Es f sobreyectiva?

Ejercicios 3.3

1. Conteste falso o verdadero y justifique brevemente.

   a) Toda transformación lineal es 1-1.

   b) Para toda transformación lineal f, $f(0) = 0$.

   c) Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ está definida por:

   $$f(x, y, z) = (-x, y, z),$$

   entonces f es una reflexión sobre el eje X.

   d) Una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ puede tener inversa a derecha pero a izquierda nunca.

   e) Una inversa a derecha de la transformación

   $$f(x, y, z) = (y, x)$$

   es la transformación $g(x, y) = (y, x, 0)$.

2. Sea f la transformación definida por:

   $$f(x, y, z) = (-x, y + z, x - y - z).$$

   Encontrar todos los vectores (x, y, z) tales que:

   a) $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$;

   b) $f(x, y, z) = (1, 2, 2)$;

   c) $f(x, y, z) = (1, 2, -3)$.

3. En el ejercicio anterior determine qué conjuntos se forman en cada caso (vacío, rectas, planos, etc.).

4. ¿Para qué valores de a, b y c el siguiente sistema es consistente?

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

5. Hallar el núcleo, la imagen, verificar el teorema de la dimensión y determinar inyectividad y sobreyectividad para cada una de las transformaciones lineales representadas por las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Determine si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas y justifique brevemente:

   a) Siendo A la matriz que representa una transformación lineal que es sobreyectiva entonces el sistema de ecuaciones lineales representado por la ecuación matricial $AX = B$, no tiene solución o su solución es única.

   b) Si en el sistema de ecuaciones lineales representado por la ecuación matricial $AX = 0$, los vectores fila de la matriz A son dependientes entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

   c) Siendo A la matriz que representa una transformación lineal que es $1-1$ entonces el sistema de ecuaciones lineales representado por la ecuación matricial $AX = B$, no tiene solución o su solución es única.

7. ☛Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal,

   a) Demuestre que el núcleo y la imagen de f son subespacios de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente.

   b) Supóngase que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es una base de $\mathrm{Nu}(f)$. Use el Ejercicio 9 de la sección 2.3 para "completar" esta base a $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\{f(v_{k+1}), \ldots, f(v_k)\}$ es base de $\mathrm{Im}(f)$.

   c) De lo anterior concluya el teorema de la dimensión.

8. Sean $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ transformaciones lineales tales que $gf(X) = 0$ para todo $X \in \mathbb{R}^n$, demostrar que esto sucede si y sólo si la imagen de f está contenida en el núcleo de g.

9. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal:

   a) Demostrar que f es $1-1$ (o inyectiva) si y sólo si el núcleo de f se reduce al vector 0 de $\mathbb{R}^n$, si y sólo si la nulidad de f es cero.

   b) Demostrar que f es sobre (o sobreyectiva) si y sólo si la imagen de f es todo el espacio $\mathbb{R}^m$, si y sólo si $R(f) = m$.

10. Sea f la transformación definida por:

$$f(x, y, z) = (-x, y + z, x - z).$$

    Encuentre todos los X de $\mathbb{R}^3$ tales que $f(X) = X$.

11. Utilice el teorema de la dimensión para demostrar que:

    a) Un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene infinitas soluciones.

    b) Un sistema con más incógnitas que ecuaciones es inconsistente o tiene infinitas soluciones.

3.4. Álgebra de matrices

3.4.1. Suma y producto por escalar

Hasta ahora sólo sabemos multiplicar una matriz de m filas y n columnas (matriz $m \times n$) por un vector columna de n componentes (matriz $n \times 1$) obteniendo un vector columna de m componentes (matriz $m \times 1$), como se definió en la sección 3.2. Este producto está íntimamente relacionado con calcular $f(X)$ siendo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la transformación lineal correspondiente a la matriz y X el vector columna de n componentes. Este producto también está naturalmente relacionado con los sistemas de ecuaciones correspondientes a la matriz.

Otra de las bondades de la asociación entre matrices y transformaciones lineales consiste en que nos permite definir, entre matrices, operaciones que son muy naturales para las funciones.

Recordemos que en el Ejercicio $4b$) de la sección 3.1 se estableció que el conjunto $\mathcal{L}_{mn}$ de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, es un espacio vectorial con las operaciones de suma de funciones y producto de un escalar por una función. Recordemos también que en el Ejercicio 10 de la sección 3.2, se estableció una correspondencia biunívoca entre $\mathcal{L}_{mn}$ y $\mathcal{M}_{m\times n}$. De esta manera, las dos operaciones que hacen de $\mathcal{L}_{mn}$ un espacio vectorial se pueden "transmitir" al conjunto de las matrices $m \times n$: dadas A y B dos matrices $m\times n$, sabemos que ellas definen dos transformaciones lineales f_A y f_B y que la suma $f_A + f_B$ es también una transformación lineal, por tanto le corresponde su matriz asociada $M_{f_A+f_B}$. Es natural pensar entonces en esta matriz como la **suma de las matrices** A y B, que obviamente se notará $A + B$, es decir, sería natural definir: $A + B =: M_{f_A+f_B}$. Veamos como se calcularía esta suma (por sección 3.2):

$$\begin{aligned} M_{f_A+f_B} &= ((f_A + f_B)(E_1)\downarrow \quad (f_A + f_B)(E_2)\downarrow \quad \cdots \quad (f_A + f_B)(E_n)\downarrow); \\ &= (f_A(E_1)\downarrow + f_B(E_1)\downarrow \quad \cdots \quad f_A(E_n)\downarrow + f_B(E_n)\downarrow); \end{aligned}$$

la última igualdad se tiene por la definición de suma de funciones. Observando esta última matriz y recordando (sección 3.2, Ejercicio 10) que:

$$A = M_{f_A} = (f_A(E_1)\downarrow \quad f_A(E_2)\downarrow \quad \cdots \quad f_A(E_n)\downarrow)$$

y

$$B = M_{f_B} = (f_B(E_1){\downarrow} \quad f_B(E_2){\downarrow} \quad \cdots \quad f_B(E_n){\downarrow}),$$

podemos concluir que las columnas de la matriz $A+B$ se obtienen simplemente sumando cada vector columna de A con el correspondiente vector columna de B o, en otras palabras, sumando "componente a componente". Por esta razón si $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$ entonces su suma se puede definir por

$$\boxed{A + B =: (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n};}$$

de manera análoga se puede deducir (Ejercicio 1) que si A es una matriz $m \times n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, al definir el **producto del escalar** α **por** A, notado αA, como la matriz $\alpha A = M_{\alpha f_A}$, entonces αA resulta ser una matriz $m \times n$ cuyas componentes se obtienen multiplicando cada componente de A por el escalar α. Esto es, si $A = (a_{ij})_{m\times n}$ entonces

$$\boxed{\alpha A =: (\alpha a_{ij})_{m\times n}.}$$

Ejemplo 3.4.1.

$$2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1/2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 10 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 10 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 1 \\ 2 & 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

Las operaciones $A + B$ y αA definidas anteriormente dotan a $\mathcal{M}_{m\times n}$ de la estructura de espacio vectorial (Ejercicio 2).

3.4.2. Multiplicación

Otra operación importante que se puede ejecutar entre funciones es la **composición**. Siendo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ transformaciones lineales, definimos una nueva transformación lineal $gf : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ así: para cada $X \in \mathbb{R}^n$, $(gf)(X) =: g(f(X))$. El lector debe comprobar que, en efecto, gf es una transformación lineal (Ejercicio 5 de la sección 3.1); gf se llama la **composición** de f y g.

Surge una pregunta natural: ¿cómo se traduce a matrices la operación de composición en transformaciones lineales?

La composición entre transformaciones lineales nos genera una operación entre matrices que, en principio, no parece natural: el **producto matricial**. Siendo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ transformaciones lineales, el producto de las matrices M_g y M_f está definido como la matriz de la transformación lineal $gf : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Es decir,

$$M_g M_f =: M_{gf}.$$

Obsérvese que para poder efectuar la composición gf, el codominio de f debe ser igual al dominio de g, en términos de matrices para poder efectuar el producto definido $M_g M_f$, el número de columnas de M_g debe ser igual al número de filas de M_f.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow[M_f]{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow[M_g]{g} \mathbb{R}^p.$$

Veamos el problema ubicándonos en el mundo de las matrices. Sean A una matriz $p \times m$ y B una matriz $m \times n$. Definimos el **producto matricial** AB como la matriz asociada a la composición $f_A f_B$, o sea, $AB =: M_{f_A f_B}$; de acuerdo a los visto en la sección 3.2 esta matriz será:

$$M_{f_A f_B} = ((f_A f_B)(E_1)\!\downarrow\ \ (f_A f_B)(E_2)\!\downarrow\ \ \ldots\ \ (f_A f_B)(E_n)\!\downarrow),$$

ahora, por la definición de la composición de funciones

$$M_{f_A f_B} = (f_A(f_B(E_1))\!\downarrow\ \ f_A(f_B(E_2))\!\downarrow\ \ \ldots\ \ f_A(f_B(E_n))\!\downarrow),$$

pero $f_A(X) = M_{f_A} X,\ \ \forall X \in \mathbb{R}^m$, en consecuencia

$$M_{f_A f_B} = (M_{f_A} f_B(E_1)\!\downarrow\ \ M_{f_A} f_B(E_2)\!\downarrow\ \ \ldots\ \ M_{f_A} f_B(E_n)\!\downarrow),$$

y puesto que $M_{f_A} = A$ se obtiene:

$$M_{f_A f_B} = (A f_B(E_1)\!\downarrow\ \ A f_B(E_2)\!\downarrow\ \ \ldots\ \ A f_B(E_n)\!\downarrow).$$

Observando la última matriz y recordando que:

$$B = M_{f_B} = (f_B(E_1)\!\downarrow\ \ \ldots\ \ f_B(E_n)\!\downarrow),$$

podemos concluir que las columnas de la matriz AB se obtienen multiplicando la matriz A por cada columna de B, es decir AB es la matriz

$p \times n$ cuya columna j es el producto de la matriz A por la columna j de B. Notando $A_{i.}$ la *i-ésima* fila de A y $A_{.j}$ la *j-ésima* columna de A tenemos:

$$AB = (AB_{.1}\downarrow \ \ AB_{.2}\downarrow \ \ \ldots \ \ AB_{.n}\downarrow)$$

y recordando cómo se multiplica una matriz por un vector columna podemos escribir:

$$\boxed{AB = (c_{ij})_{p\times n}, \qquad \text{donde} \qquad c_{ij} = A_{i.}B_{.j} =: \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}.}$$

Ejemplo 3.4.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 3(-1) & 1\cdot 1 + 3\cdot 5 & 1\cdot 0 + 3\cdot 2 & 1(-3) + 3\cdot 7 \\ -2\cdot 2 + 0(-1) & -2\cdot 1 + 0\cdot 5 & -2\cdot 0 + 0\cdot 2 & (-2)(-3) + 0\cdot 7 \\ 4\cdot 2 + \frac{1}{2}(-1) & 4\cdot 1 + \frac{1}{2}5 & 4\cdot 0 + \frac{1}{2}2 & 4(-3) + \frac{1}{2}7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 16 & 6 & 18 \\ -4 & -2 & 0 & 6 \\ \frac{15}{2} & \frac{13}{2} & 1 & -\frac{17}{2} \end{pmatrix}.$$

La definición del producto matricial como la matriz asociada a una composición de transformaciones lineales, nos explica algunas propiedades de esta operación que en general aparecen como caprichosas. Entre otras:

a) las columnas de AB se obtienen multiplicando A por cada columna de B.

b) Para que AB exista se necesita que el número de columnas de A coincida con el número de filas de B.

c) El producto de matrices es asociativo.

d) El producto de matrices en general no es conmutativo.

e) El producto de matrices es distributivo con respecto a la suma.

f) Para cada n existe una matriz identidad (de orden n: n filas y n columnas), que notamos I_n y actúa como módulo del producto.

El estudiante puede verificar con ejemplos cada una de las propiedades anteriores.

Ejemplo 3.4.3. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

hallar todas las matrices B tales que $BA = I_2$.

Solución. Sea $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, tal que:

$$BA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 3a-b & 2a+2c \\ 3d-e & 2d+2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde se obtienen las ecuaciones

$$3a-b=1, \quad 2a+2c=0, \quad 3d-e=0 \quad \text{y} \quad 2d+2f=1.$$

Tenemos cuatro ecuaciones con seis incógnitas, luego las soluciones son todas las matrices de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} t & 3t-1 & -t \\ s & 3s & \frac{1-2s}{2} \end{pmatrix},$$

donde $s, t \in \mathbb{R}$. Más adelante llamaremos a la matriz B, inversa a izquierda de A.

3.4.3. Inversa de una matriz

Ante la existencia de I_n que actúa como módulo para el producto, surge una pregunta natural: ¿existen inversos multiplicativos? Esto sería útil por ejemplo al considerar un sistema de ecuaciones lineales con ecuación matricial $AX = B$, pues permitiría "despejar X" como si fuera una ecuación con coeficientes reales, esto es, multiplicando los dos miembros de la ecuación por A^{-1}, y obteniendo $X = A^{-1}B$.

Para una matriz A de m filas y n columnas pueden o no existir matrices C y D tales que:

$$AB = I_m \quad \text{o} \quad CA = I_n;$$

en tal caso, B sería **inversa a derecha** de A, mientras C sería **inversa a izquierda** de A. Si ambas matrices existen entonces, necesariamente, $n = m$ y $C = B$, en este caso $C = B$ se nota A^{-1}, y es la **inversa multiplicativa** de A, en cuanto:

$$A(A^{-1}) = (A^{-1})A = I_n.$$

Para ver si una matriz cuadrada A de orden n, tiene inversa A^{-1} y encontrarla, se deben resolver n sistemas de ecuaciones con n^2 incógnitas. Pero cada uno de estos sistemas tiene a A como matriz de coeficientes. Resolver estos sistemas por el método de Gauss-Jordan se puede abreviar, colocando al lado derecho de A la matriz idéntica I_n y por medio de operaciones elementales entre filas, "trasladar" I_n al lado izquierdo. Cuando esto se ha logrado, la matriz que aparece al lado derecho es A^{-1}:

$$[A \mid I_n] \rightsquigarrow [I_n \mid A^{-1}].$$

Ejemplo 3.4.4. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Encontrar, si existe, la inversa de A.

Solución. Colocando I_2 al lado derecho de la matriz A, tenemos:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1 + f_2}$$

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_2 + f_1} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

luego la inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos así:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cuando la matriz A tiene inversa, cualquier sistema asociado se puede resolver multiplicando la ecuación matricial

$$AX{\downarrow} = B{\downarrow}$$

por A^{-1} a la izquierda, obteniendo:

$$X{\downarrow} = (A^{-1})B{\downarrow}$$

solución única para el sistema.

Ejemplo 3.4.5. Resolver el siguiente sistema, encontrando la matriz inversa de la matriz asociada al sistema.

$$\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ -2y + 4z &= 3 \\ -x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Solución. El sistema es equivalente a la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Encontramos A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1+f_3]{} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}f_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-4f_2+f_3]{-3f_2+f_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 6 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{9}f_3]{} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 6 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 & 2/9 & 1/9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-6f_3+f_1]{2f_3+f_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/6 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/9 & -1/18 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 & 2/9 & 1/9 \end{array}\right).$$

La solución del sistema esta dada por:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & -2/3 \\ 2/9 & -1/18 & 2/9 \\ 1/9 & 2/9 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/18 \\ 7/9 \end{pmatrix}.$$

Como en este ejemplo existe A^{-1} podemos afirmar que para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, el sistema

$$\begin{aligned} x + 3y &= a \\ -2y + 4z &= b \\ -x + y + z &= c \end{aligned}$$

tiene solución única.

Ejercicios 3.4

1. Si A es una matriz $m \times n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, recuerde que definimos la matriz αA por: $\alpha A =: M_{\alpha f_A}$ (la matriz asociada a la transformación lineal αf_A). Deduzca que αA resulta ser una matriz $m \times n$ cuyas componentes se obtienen multiplicando cada componente de A por el escalar α.

2. Demostrar que:

   a) las matrices de m filas y n columnas (lo que notamos $\mathcal{M}_{m\times n}$) con las operaciones de suma y producto por escalar definidas, forman un espacio vectorial.

   b) la biyección $F : \mathcal{M}_{m\times n} \longrightarrow \mathcal{L}_{nm}$ definida en el Ejercicio 10 de la sección 3.2, es una transformación lineal.

3. Demuestre que:

   a) la matriz asociada a la función idéntica $id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es I_n.

   b) Si f es una transformación lineal invertible, entonces la matriz asociada a su inversa, es la inversa de la matriz de f, es decir $M_{f^{-1}} = (M_f)^{-1}$.

4. Encontrar los valores de x e y:

   a) $\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 1 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$;

   b) $\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 1 & 2x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & x+y \\ x-y & 3 \end{pmatrix}$.

5. Sea A la matriz asociada a la transformación lineal

$$f(x, y, z) = (x + y, y - z, z)$$

   y sea B la matriz asociada a

$$g(x, y, z) = (x - z, y - z, y + z),$$

   encuentre:

   a) $BB - 4A + 2B$; *b*) $2AA - 3AB + BA$.

6. Sea y el valor de $\begin{pmatrix} x & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -4 \end{pmatrix}$. Encuentre los valores de x para que $y > 22$.

7. Demostrar que las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

al multiplicarlas entre sí conmutan y se obtiene una matriz del mismo tipo (es decir, las matrices antisimétricas son cerradas para el producto).

8. ¿Cómo deben ser a, b, c y d si las matrices:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

conmutan?

9. Sea A la matriz
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Encuentre, si existen, todas las B tal que AB sea la idéntica 2×2.

10. Las siguientes proposiciones son todas falsas, justifique cada una con un contraejemplo:

a) Si en el sistema de ecuaciones lineales representado por la ecuación matricial $AX = B$, A no es invertible, entonces el sistema es inconsistente.

b) Sea $n > m$; un sistema homogéneo de n ecuaciones con m incógnitas tiene infinitas soluciones.

c) Si A y B son matrices $n \times n$, entonces
$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2.$$

d) Si A, B son matrices y AB es la matriz de ceros, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

e) Si A, B y C son matrices y $AB = AC$ entonces $B = C$.

f) Si A y B son matrices $n \times n$ entonces
$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

g) Si A es una matriz y $A^2 = 0$, entonces $A = 0$.

h) Si A y B son matrices invertibles, entonces
$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

11. Demuestre que si A y B son matrices invertibles, y k es un real distinto de cero, entonces:

    a) A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.

    b) kA es invertible y $(kA)^{-1} = (1/k)A^{-1}$.

    c) Si el producto AB existe, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

12. Demuestre, por inducción sobre p, que si $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_p$ son matrices invertibles del mismo orden entonces el producto $A_1A_2\ldots A_p$ es invertible y $(A_1A_2\ldots A_p)^{-1} = A_p^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

13. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

    encuentre $A^{-1},\ B^{-1},\ (AB)^{-1},\ A^{-1}B^{-1}$ y $B^{-1}A^{-1}$.

14. Dado el sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 0 \\ x + y + z &= 1 \\ -x - y + 2z &= 5, \end{aligned}$$

    encuentre:

    a) la matriz inversa de la matriz de coeficientes asociada al sistema.

    b) La solución del sistema utilizando el método visto en esta sección.

15. Si A es una matriz invertible y AB también es invertible demuestre que B también es invertible.

16. Demuestre que $\begin{pmatrix} x & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -4 \end{pmatrix} > -32$, para todo x real.

[Aproximación al álgebra lineal:

17. Dado que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, hallar la matriz A.

18. Halle las matrices de las siguientes transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$:

    a) Reflexión con respecto a L, si L es la recta de $\mathbb{R}^2$ que forma un ángulo de 45 grados con el eje X y contiene el origen.

    b) Reflexión con respecto a L, si la recta L de $\mathbb{R}^2$, forma un ángulo de θ grados con el eje X y contiene el origen. (Ayuda: a veces conviene el camino más largo).

    c) Giro que envía la recta $x = ay$ en el eje X.

    d) Giro que envía el eje X en la recta $x = ay$.

    e) Reflexión respecto a la recta $x = ay$.

19. Para matrices cuadradas se define la traza de A como la suma de los elementos de la diagonal, es decir,

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

    a) Demostrar que $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$.

    b) Si C es de orden $n \times m$ y D de orden $m \times n$, demostrar que $\operatorname{tr}(CD) = \operatorname{tr}(DC)$.

20. Demostrar que una matriz cuadrada de orden 2 conmuta con cualquier matriz de orden dos, si y sólo si conmuta con cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

21. Para $i \neq j$ sea $E_{ij}(k)$ la matriz $n \times n$ que en la diagonal tiene unos, en el puesto ij tiene k y el resto de sus componentes es 0. Demostrar que:

    a) si A es una matriz $m \times n$ entonces $AE_{ij}(k)$ es la matriz que resulta al tomar A y a la columna j-ésima sumarle la i-ésima multiplicada por el escalar k.

b) Si B es una matriz $n \times m$ entonces $E_{ij}(k)B$ es la matriz que resulta al tomar B y a la fila i-ésima sumarle la j-ésima multiplicada por el escalar k.

22. Demuestre por inducción que:

a) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -n-1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} r & -r^2/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \dfrac{1}{2^n} \begin{pmatrix} (n+1)r^n & -(n/2)r^{n+1} \\ 2nr^{n-1} & -(n-1)r^n \end{pmatrix}$.

3.5. Transformaciones afines

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal y $P \in \mathbb{R}^m$. Entonces cualquier función $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida para cada $X \in \mathbb{R}^n$ por:

$$g(X) = f(X) + P,$$

se dice que es una **transformación afín** de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. También decimos que f es **la transformación lineal asociada a la transformación afín** g. Esta definición indica que las transformaciones afines se obtienen de las lineales al componer éstas con un traslado (sumar P); equivalentemente, una transformación afín es una transformación lineal seguida de un desplazamiento.

Las transformaciones afines son exactamente aquellas funciones $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que a cada recta L de $\mathbb{R}^n$ envían, en un punto de $\mathbb{R}^m$, o bien en una recta de $\mathbb{R}^m$. Más generalmente, podemos asegurar que son aquellas que respetan la estructura de subespacio afín: la imagen de un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio afín de $\mathbb{R}^m$.

Ejemplo 3.5.1. La transformación

$$T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

es lineal y las aplicaciones:

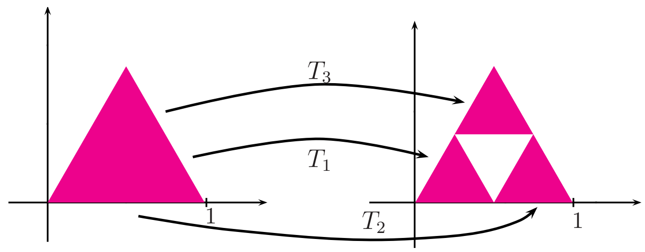
$$T_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$T_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

son transformaciones afines, que al aplicarlas conjuntamente en un triángulo equilátero de lado 1, lo transforma en un triángulo dividido en 4 triángulos pequeños iguales, pero sustraído el triángulo medio. Podemos representar esto gráficamente así:

un enfoque geométrico]



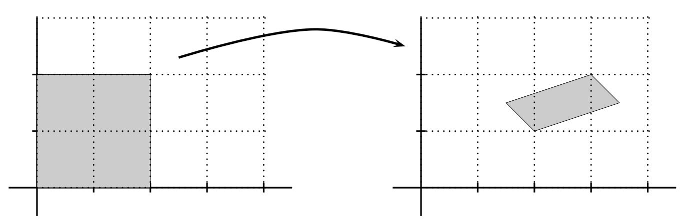
Si a la figura obtenida, llamémosla S_1, le aplicamos de nuevo las tres transformaciones T_1, T_2, T_3 conjuntamente, ¿qué figura se obtiene?; llamemos S_2 a esta nueva figura y apliquemos de nuevo T_1, T_2 y T_3, obteniendo otra figura S_3 y así sucesivamente (recuerde el Ejercicio 6*a* de la sección 1.3). Se obtiene una sucesión de figuras $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La "figura límite" (intente dar un significado intuitivo a la expresión "figura límite") de esta sucesión se llama **Triángulo de Sierpiński**[*] y es un ejemplo clásico de lo que hoy se conoce como **conjunto fractal**.

Ejercicios 3.5

1. ¿Cuáles de las siguientes transformaciones son afines? Justifique su respuesta indicando cuál es la transformación lineal asociada:

   a) $f(x, y) = x^2 + y^2$;
   b) $f(x) = (3, x + \pi)$;
   c) $f(x) = 4$;
   d) $f(x, y) = 2x + y + 2$;
   e) $f(x, y) = (3x,\ 2y + 5)$;
   f) $f(x, y) = x^2 + 1$.

2. Encuentre la fórmula de la transformación afín que modifica el plano como se indica en la figura:



[*]Waclaw Sierpiński, matemático nacido en Varsovia (Polonia), 1882-1969.

3. *a*) Encuentre todas las transformaciones afines $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $g(0) = 1$ y $g(1) = 0$.

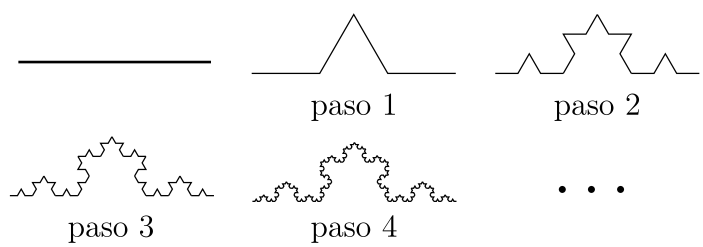
   b) Muestre un ejemplo de una transformación afín $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que el eje Y sea enviado por intermedio de g en la recta $y = 2$.

   c) Encuentre todas las transformaciones afines $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tales que $g(0,0) = (1,1)$, $g(1,0) = (3,1)$ y $g(0,1) = (1,0)$.

   d) Demostrar que si A, B y C son tres puntos de $\mathbb{R}^2$ no colineales (esto es $A - B$ y $C - B$ son linealmente independientes), entonces existe una única transformación afín $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $g(0,0) = A$, $g(1,0) = B$ y $g(0,1) = C$.

4. Sea f la transformación lineal asociada a la transformación afín g. Demostrar que g es 1-1 (inyectiva), si y sólo si, el núcleo de f es $\{0\}$.

5. Encuentre las cuatro transformaciones afines que se deben aplicar a cada figura, para obtener la siguiente:



Este ejercicio es análogo al Ejemplo 3.5.1; en este caso la "figura límite" de la sucesión de figuras obtenida, se llama la **curva de Koch**[*] y es también un ejemplo clásico de un fractal.

[*]Niels Fabian Helge Von Koch, matemático nacido en Estocolmo (Suecia), 1870–1924.

Capítulo 4

$\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial euclídeo

En el capítulo 2 se estudió $\mathbb{R}^n$ viéndolo como espacio vectorial; en este capítulo introducimos otra operación que nos permitirá estudiar a $\mathbb{R}^n$ desde un punto de vista más "geométrico".

4.1. Producto interno

Un espacio vectorial V es un **espacio euclídeo** si se tiene definida, además de las operaciones suma y producto por escalar, la operación **producto interno** que a cada par de vectores $X, Y \in V$ le hace corresponder un escalar notado $X \cdot Y$ con las siguientes propiedades:

para cualesquier $X,\ Y,\ Z \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

PI1: $X \cdot X \geq 0$ y $X \cdot X = 0$ si y sólo si $X = 0$;

PI2: $X \cdot Y = Y \cdot X$;

PI3: $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$;

PI4: $(\alpha X) \cdot Y = \alpha(X \cdot Y)$.

El producto interno también se llama **producto escalar**, **producto interior** o **producto punto**.

En $\mathbb{R}^n$, que ya sabemos es un espacio vectorial, existen varias maneras de definir un producto interno, la forma usual que es la que usaremos en adelante, es definir $X \cdot Y$ como la suma de los productos de las respectivas componentes, es decir, si $X = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ e $Y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$:

$$X \cdot Y =: x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

El lector puede comprobar fácilmente que este producto cumple realmente las propiedades PI1 a PI4.

Se acostumbra escribir X^2 en lugar de $X \cdot X$ pero nótese que X^3 no tiene sentido, ¿por qué?

Ejercicios 4.1

1. Sea $A = (5, -2)$, $B = (3, 1)$. Encontrar el valor de: $A \cdot B$, $(2A) \cdot B$ y $(A + B) \cdot B$.

2. Demostrar las siguientes propiedades del producto punto en cualquier espacio euclídeo:

   a) $(\alpha A + B) \cdot C = \alpha(A \cdot C) + B \cdot C$;

   b) $A \cdot A > 0$, si A no es nulo;

   c) $(A + B) \cdot (A + B) = A \cdot A + B \cdot B + 2A \cdot B$;

   d) $(A + B) \cdot (A - B) = A \cdot A - B \cdot B$.

3. Demostrar que el producto punto definido para $\mathbb{R}^n$ realmente es un producto interior, es decir, cumple PI1, PI2, PI3 y PI4.

4. Sea A un vector de $\mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(X) = A \cdot X$ para cada $X \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que f es transformación lineal.

5. ☛Utilizando las propiedades del producto interior demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz* que establece que para todo par de vectores $X,\ Y \in V$ se tiene:

$$(X \cdot Y)^2 \leq (X \cdot X)(Y \cdot Y),$$

y que la igualdad se tiene si y sólo si X, Y son linealmente dependientes. (Ayuda: desarrolle $(X - \alpha Y) \cdot (X - \alpha Y) > 0$ y de la ecuación cuadrática resultante sobre α, analice su discriminante).

6. Utilice la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el hecho de que $\mathbb{R}^n$ es un espacio euclídeo, para demostrar que si $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$ y $y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n$ pertenecen a $\mathbb{R}$, entonces

$$\left(\sum x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum {x_i}^2\right)\left(\sum {y_i}^2\right).$$

*Augustin Louis Cauchy, matemático francés, 1789-1857.
Hermann Amandus Schwarz, matemático nacido en Hermsdorf, Silesia (hoy Polonia), 1748-1921.

4.2. Longitudes, ángulos, distancias y proyecciones

La **longitud** o **norma** de un vector $X \in V$, cuando V es un espacio euclídeo se define como la raíz cuadrada de $X \cdot X$, que siempre existe en virtud de PI1 y se denota

$$\|X\| =: \sqrt{X \cdot X}.$$

Es fácil ver que la norma cumple las siguientes propiedades que hace que todo espacio euclídeo sea un espacio normado,*

EN1: para todo $X \in V$, $\|X\| \geq 0$ y $\|X\| = 0 \Longleftrightarrow X = 0$;

EN2: para todo $X \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha X\| = |\alpha|\|X\|$;

EN3: para todo $X \in V$, $Y \in V$, $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ (desigualdad triangular).

De EN2 se tiene que $\|-X\| = \|X\|$, y de EN3 que

$$\|X - Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

Para el caso concreto del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ la norma de un vector $X = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ esta dada por $\|X\| =: (\sum {x_i}^2)^{1/2}$, y en los casos $n = 2$ y $n = 3$ se interpreta como la distancia del punto al origen, o sea, la longitud del vector X visto como flecha. Esto se justifica fácilmente aplicando el teorema de Pitágoras.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz (Ejercicio 5 de la sección anterior) en términos de la norma nos asegura que la expresión:

$$\frac{A \cdot B}{\|A\|\|B\|},$$

tiene valor absoluto menor o igual que 1. Esto nos permite definir esta expresión como $\cos\theta$ y decir que θ es el ángulo entre A y B. Más precisamente definimos el **ángulo entre** A y B, siendo A y B vectores en $\mathbb{R}^n$

* formalmente un **espacio normado** es un espacio vectorial V junto con una función $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface las propiedades EN1, EN2 y EN3.

($A \neq 0$ y $B \neq 0$), como el ángulo θ, tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ y $\cos\theta = \frac{A \cdot B}{\|A\|\|B\|}$. La motivación de la definición dada está en los casos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, pues utilizando el teorema del coseno (ver Ejercicio 6) se puede deducir:

$$\frac{A \cdot B}{\|A\|\|B\|} = \cos\theta.$$

Diremos que dos vectores A y B son **perpendiculares** u **ortogonales** si el ángulo entre ellos es $\theta = \pi/2$. Lo notaremos $A \perp B$, y se deduce fácilmente que: $A \perp B$ si y sólo si $A \cdot B = 0$, lo que corresponde, como era de esperarse, en los casos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, a que los vectores A y B forman un ángulo recto.

El introducir los conceptos de longitud y ángulo para vectores de cualquier dimensión nos permite hacer proyecciones, medir distancias, perímetros y, en general, copiar la geometría de nuestro espacio tridimensional a espacios más abstractos como $\mathbb{R}^n$ y cualquier espacio euclídeo.

Distancia entre dos puntos: por medio de la norma podemos hallar la distancia entre dos puntos P y Q que será simplemente $\|P - Q\|$, (ver Figura 4.1).

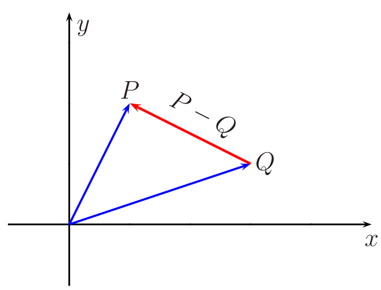


Figura 4.1. Distancia entre los puntos P y Q.

Así, por ejemplo, la distancia entre los puntos $P = (2, 1, -1, 4, 0)$ y $Q = (0, 2, 3, 1, -1)$ será:

$$d(P, Q) = \|P - Q\| = \|(2, -1, -4, 3, 1)\| = \sqrt{31}.$$

Proyección de un vector sobre otro: notaremos P_{AB} la proyección del vector A sobre el vector B (véase la Figura 4.2). Si W es el vector que se indica en la Figura 4.3, llamado la **componente de A ortogonal** a B entonces tenemos:

un enfoque geométrico]

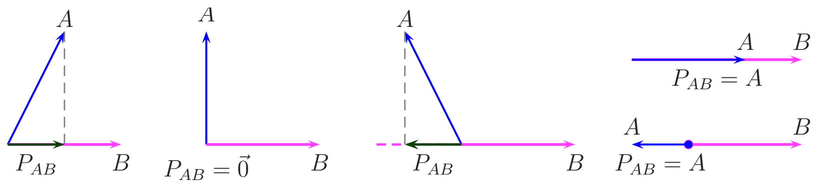


Figura 4.2. Proyección de un vector sobre otro.

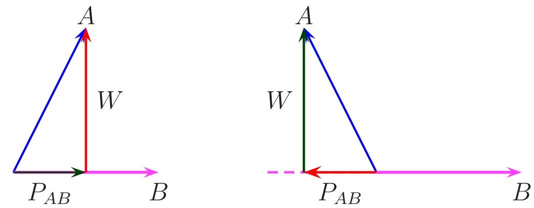


Figura 4.3. Componente de A ortogonal a B.

$$P_{AB} = \alpha B \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

$$P_{AB} + W = A; \tag{4.2}$$

$$W \cdot B = 0. \tag{4.3}$$

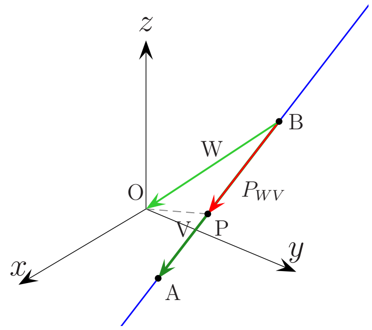
De (4.2)

$$\begin{aligned}
& (P_{AB} + W) \cdot B = A \cdot B \\
\Longrightarrow \quad & P_{AB} \cdot B + W \cdot B = A \cdot B \\
\Longrightarrow \quad & P_{AB} \cdot B = A \cdot B; \qquad \text{usando (4.3)} \\
\Longrightarrow \quad & (\alpha B) \cdot B = A \cdot B; \qquad \text{usando (4.1)} \\
\Longrightarrow \quad & \alpha = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2}, \qquad \text{y reemplazando en (4.1) :}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P_{AB} = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2} B.}$$

Ejemplo 4.2.1. Siendo L la recta que contiene a $(1, 1, 0)$ y $(-1, 1, 1)$, encuentre el punto de L que es más cercano al origen y calcule la distancia de L al origen.

Solución. Llamemos $A = (1, 1, 0)$, $B = (-1, 1, 1)$ y $O = (0, 0, 0)$; encontremos los vectores $V = A - B = (2, 0, -1)$ y $W = O - B = (1, -1, -1)$, como se muestra en la figura que sigue.



Hallemos $P_{WV} = \frac{W \cdot V}{\|V\|^2} V = \frac{3}{5}(2, 0, -1) = (\frac{6}{5}, 0, -\frac{3}{5})$, sea P el punto final del vector P_{WV}, es decir, $P_{WV} = P - B$, luego tenemos que:

$$P = P_{WV} + B = \left(\tfrac{6}{5}, 0, -\tfrac{3}{5}\right) + (-1, 1, 1) = \left(\tfrac{1}{5}, 1, \tfrac{2}{5}\right),$$

que es el punto de la recta L más cercano al origen. Podemos comprobar que P efectivamente pertenece a la recta L, encontrando las ecuaciones de L y verificando que P cumple estas ecuaciones.

Como el punto P es el más cercano al origen, entonces la distancia de la recta L al origen será la distancia del punto P al origen, es decir, $\left\|\left(\frac{1}{5}, 1, \frac{2}{5}\right)\right\| = \frac{\sqrt{30}}{5}$.

El método que se presentó para solucionar el ejercicio anterior no es el único, también se puede llegar a la solución teniendo en cuenta que el vector que genera la recta debe ser perpendicular al vector que va desde el punto de la recta, más cercano del origen, hasta el origen.

Ecuación de un plano: el vector N es **normal** al plano Π si N es perpendicular a cualquier segmento de recta que yace en Π. Es fácil ver (Ejercicio $10a$) que si el plano Π contiene además el origen 0 y $N = (a, b, c)$ entonces la ecuación cartesiana de Π está dada por

$$ax + by + cz = 0,$$

también se puede ver (Ejercicio $10b$) que si el plano Π es normal a $N = (a, b, c)$ y contiene al punto P entonces la ecuación de Π está dada por

$$ax + by + cz = d,$$

donde $d = P \cdot N$.

un enfoque geométrico]

Ejemplo 4.2.2. Encuentre la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $(1, -1, 2)$ y es paralelo al plano $3x + 2y - z = 0$.

Solución. Como los planos son paralelos comparten el vector normal $N = (3, 2, -1)$ y como $P = (1, -1, 2)$ es un punto del plano entonces la ecuación del plano es: $3x + 2y - z = (3, 2, -1) \cdot (1, -1, 2) = -1$, es decir, $3x + 2y - z = -1$.

Ejercicios 4.2

1. Sean A, B y C vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^3$, determinar la veracidad de cada enunciado, justificando su respuesta.

   a) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

   b) Si A es perpendicular a B y a C, entonces A es perpendicular a $B + C$;

   c) Si A es perpendicular a B, entonces $B - C$ es perpendicular a A;

   d) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

2. Encuentre la longitud de los siguientes vectores: $(1, -3)$, $(1, -3, 0)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1, 2)$.

3. ¿Qué valor debe tener k para que $\|(k, 3k, k, 2k)\| = 2$?

4. Demuestre que:

   a) $\|A\| = 0$ si y sólo si $A = 0$.

   b) Al multiplicar un vector por un escalar, la norma se multiplica por el valor absoluto de ese escalar.

   c) Al multiplicar un vector por el inverso de su norma se obtiene un vector unitario (de norma 1) con el mismo sentido.

   d) $\|A + B\| = \|A - B\|$ implica que $A \cdot B = 0$.

5. *a*) Basándose en la desigualdad de Cauchy-Schwarz demostrar la desigualdad triangular

   $$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

   ¿cuándo se tiene la igualdad?, ¿por qué se llama triangular?

b) Demostrar la siguiente versión del teorema de Pitágoras: si $A \cdot B = 0$ entonces $\|A\|^2 + \|B\|^2 = \|A - B\|^2$.

6. En $\mathbb{R}^2$ utilizando el teorema del coseno para el triángulo OAB y siendo θ el ángulo entre los vectores A y B deducir:

$$\frac{A \cdot B}{\|A\|\|B\|} = \cos\theta.$$

7. Sean $A = (1, -2, 3)$ y $B = (-1, 2, 0)$,

   a) ¿Cuál es el coseno del ángulo entre A y B?

   b) Encuentre la proyección de A sobre B y su longitud.

   c) Siendo L la recta que contiene a A y a B, encuentre el punto de L que es más cercano al origen y calcule la distancia de L al origen.

   d) Encuentre el punto más cercano a B que yace en la recta que contiene a A y tiene dirección $(1, 2, -1)$ y calcule la distancia de B a dicha recta.

   e) Encuentre el punto del plano $2x - y + z = 3$ más cercano a B y calcule la distancia de B a dicho plano.

   f) Encuentre el área y el perímetro del triángulo determinado por O (el origen) A y B.

8. Sea $A = (1, -1, 3, 2)$ y $B = (2, -1, 3, 1)$,

   a) ¿Cuál es el coseno del ángulo entre A y B?

   b) Encuentre la proyección de A sobre B y su longitud.

   c) Siendo L la recta que contiene a A y a B, encuentre el punto de L que es más cercano al origen y calcule la distancia de L al origen.

   d) Encuentre el punto más cercano de B que yace en la recta que contiene a A y tiene dirección $(1, 0, -1, 0)$ y calcule la distancia de B a dicha recta.

   e) Encuentre el punto del hiperplano $2x + y - z + w = 3$ más cercano a B y calcule la distancia de B a dicho hiperplano.

f) Encuentre el área y el perímetro del triángulo determinado por O (el origen) A y B.

9. Sean A, B y C vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^3$, determinar la veracidad de cada enunciado, justificando su respuesta:

   a) Si $\|A\| = \|B\|$ podemos deducir $\|A\| + \|C\| = \|B\| + \|C\|$.

   b) Si $\|A\| = \|B\|$ podemos deducir que $A + B$ y $A - B$ son perpendiculares.

   c) Si $\|A + B\| = \|A - B\|$ podemos deducir que $A = B = 0$.

   d) $\|A\| = \|B\|$ si y sólo si $A \cdot B = 0$.

10. *a*) Demostrar que si el plano Π contiene el origen O y $N = (a, b, c)$ es su vector normal, entonces la ecuación cartesiana de Π está dada por
$$ax + by + cz = 0.$$

    b) Demostrar si el plano Π es normal a $N = (a, b, c)$ y contiene al punto P entonces la ecuación de Π está dada por
$$ax + by + cz = d,$$
    donde $d = P \cdot N$.

11. Demuestre que la distancia del punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ al plano $ax + by + cz = d$ está dada por
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\|(a, b, c)\|}.$$

12. El ángulo entre dos planos se mide por el ángulo entre su vectores normales.

    a) Demostrar que la distancia entre los planos paralelos $ax + by + cz = d$ y $ax + by + cz = e$ está dada por
$$\frac{|d - e|}{\|(a, b, c)\|}.$$

    b) Encontrar la ecuación cartesiana del plano de $\mathbb{R}^3$ que contiene al eje X y forma con el plano $z = 0$ un ángulo de 60º.

13. Calcule la distancia entre las rectas $L_1 : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$ y $L_2 : \dfrac{x+2}{-4} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+2}{1}$.

14. Demostrar vectorialmente:

    a) las diagonales de un paralelogramo se cortan en sus puntos medios.

    b) El segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

    c) Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí y bisectan los ángulos correspondientes.

    d) Todo triángulo inscrito en una semicircunferencia (esto es, uno de sus lados es un diámetro de la circunferencia) es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el diámetro.

    e) Las tres medianas de un triángulo se cortan en un mismo punto y ese punto divide cada mediana en dos segmentos, el uno de doble longitud que el otro.

15. Sean A, B vectores de $\mathbb{R}^2$ y θ el ángulo entre A y B. Demuestre que:

    a) $0 \leq \theta < \pi/2 \Longleftrightarrow A \cdot B > 0$;

    b) $\theta = \pi/2 \Longleftrightarrow A \cdot B = 0$;

    c) $\pi/2 < \theta \leq \pi \Longleftrightarrow A \cdot B < 0$.

16. *a*) Sea B tal que $B \perp A_i$, $\forall i = 1, 2, 3, \ldots, m$. Demostrar que $B \perp C$ si C es cualquier combinación lineal de $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

    b) Suponga $(X - (\alpha A + \beta B)) \perp A$ y $(X - (\alpha A + \beta B)) \perp B$, demuestre que $\forall \gamma,\ \delta$,

    $$(\gamma A + \delta B) \perp (X - (\alpha A + \beta B))$$

    y aplicando el teorema de Pitágoras demuestre que:

    $$\|X - (\gamma A + \delta B)\| \geq \|X - (\alpha A + \beta B)\|.$$

    Interprete geométricamente este resultado.

4.3. Producto cruz

En $\mathbb{R}^3$ además de las operaciones definidas tenemos otra operación llamada **producto cruz** o **producto vectorial**. Esta operación toma dos vectores de $\mathbb{R}^3$ y produce un tercer vector también en $\mathbb{R}^3$ que es perpendicular a los dos dados. Si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ el producto cruz que se nota $A \times B$ está definido así:

$$A \times B =: (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1).$$

A continuación enumeramos las principales propiedades del producto cruz.

Proposición 8. *Siendo A, B y C vectores de $\mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene:*

PC1*: $A \cdot (A \times B) = 0$;*

PC2*: $B \cdot (A \times B) = 0$;*

PC3*: $A \times B = -(B \times A)$;*

PC4*: $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$;*

PC5*: $\alpha(A \times B) = (\alpha A) \times B = A \times (\alpha B)$;*

PC6*: $A \times A = 0$.*

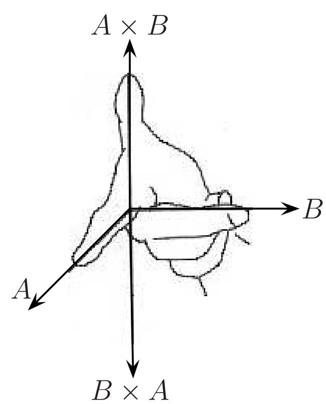


Figura 4.4. Regla de la mano derecha.

Ilustremos, por ejemplo, la propiedad $PC3$, con $A = (2, -1, 0)$ y $B = (1, 3, 1)$. Tenemos que $A \times B = (-1, -2, 7)$ y por otra parte $B \times A =$

$(1, 2, -7)$. El lector puede de manera parecida ilustrar con ejemplos cada propiedad.

Si A y B son vectores, la regla de la mano derecha determina la dirección de $A \times B$.

En la Figura 4.4 podemos observar que si se coloca la mano derecha de manera que el índice apunte en la dirección de A y el dedo medio en la dirección de B, entonces el pulgar apuntará en la dirección de $A \times B$.

Las propiedades del producto cruz se demuestran aplicando la definición de producto cruz al igual que la siguiente propiedad.

Igualdad de Lagrange[*]: siendo A y B vectores de $\mathbb{R}^3$ se tiene:

$$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2\|B\|^2 - (A \cdot B)^2.$$

La igualdad de Lagrange sirve para demostrar una fórmula para el seno del ángulo entre los vectores A y B. En efecto, si θ es dicho ángulo se tiene:

$$\begin{aligned} \|A \times B\|^2 &= \|A\|^2\|B\|^2 - (\|A\|\|B\|\cos\theta)^2 \\ &= \|A\|^2\|B\|^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= \|A\|^2\|B\|^2 \operatorname{sen}^2\theta, \end{aligned}$$

luego, como $\operatorname{sen}\theta \geq 0$ y $\|A \times B\| = \|A\|\|B\|\operatorname{sen}\theta$, entonces

$$\frac{\|A \times B\|}{\|A\|\|B\|} = \operatorname{sen}\theta,$$

fórmula que nos permite deducir que el área del paralelogramo determinado por A y B es precisamente $\|A \times B\|$.

Ejemplo 4.3.1. Encuentre el área del paralelogramo con vértices consecutivos en $P = (1, 1, 2)$, $O = (0, 0, 0)$ y $Q = (-1, 4, 0)$.

Solución. En la figura se puede observar que el área del paralelogramo es igual a $\|Q\|\|P\|\operatorname{sen}\theta$ y además $\|Q\|\|P\|\operatorname{sen}\theta = \|Q \times P\|$, por lo tanto el área del paralelogramo es $\|Q \times P\| = \|(-8, -2, 5)\| = \sqrt{93}$.

[*]Joseph-Louis Lagrange, matemático nacido en Turin, Sardinia-Piedmont (hoy Italia), 1736-1813.

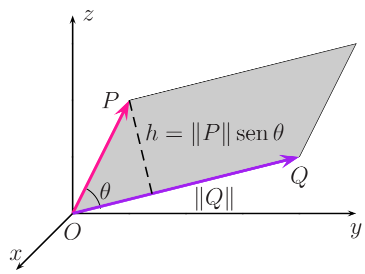


Figura 4.5. $\|Q \times P\| = \|Q\|\|P\| \operatorname{sen}\theta$.

Ejercicios 4.3

1. Si $A = (2, -1, 0)$, $B = (1, 1, -2)$ y $C = (0, -1, 3)$, encontrar:

   a) $A \times B$;

   b) $B \times A$;

   c) $A \times C$;

   d) $(A + B) \times C$;

   e) $A \times B + B \times C$;

   f) $A \times C + B \times C$;

   g) $(A \times B) \times C$;

   h) $A \times (B \times C)$.

2. Demuestre todas las propiedades enunciadas del producto cruz.

3. Sean A, B y C vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^3$. Determine la veracidad de cada enunciado y justifique su respuesta:

   a) $(A \times B) \cdot A = (A \times B) \cdot B$;

   b) $(A \times B) \cdot C = (C \times B) \cdot A$;

   c) $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$;

   d) $((A \times B) \cdot (A - B)) \cdot C = 0$;

   e) $(A + B) \times (A - B) = -2A \times B$;

   f) Si A es perpendicular a B y a C, entonces A es perpendicular a $B \times C$.

4. Demuestre que si A es perpendicular a B y a C entonces A y $B \times C$ son paralelos.

5. Demuestre que siendo θ el ángulo formado entre A y B entonces $\tan\theta = \|A \times B\|/A \cdot B$.

6. Sean $A = (2, -1, 1)$, $B = (1, 2, 1)$ y $C = (-1, 1, 0)$. Utilizando el producto cruz determine el área del triángulo ABC y la ecuación del plano que lo contiene.

7. Demostrar que si A, B y C son vectores de $\mathbb{R}^3$, entonces
$$(A \times B) \times C = (A \cdot C)B - (B \cdot C)A.$$

8. Demostrar que el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores A, B y C de $\mathbb{R}^3$ está dada por
$$|A \cdot (B \times C)|.$$

4.4. Similitudes e isometrías

Una transformación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice **ortogonal** si para cualesquier $A,\ B \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$f(A) \cdot f(B) = A \cdot B.$$

Es fácil ver (Ejercicio 2) que para que una transformación lineal sea ortogonal es necesario y suficiente que conserve distancias.

Una noción un poco más general es la siguiente: una transformación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dirá **transformación de semejanza** si existe un $r \in \mathbb{R}$, tal que para cualesquier $X, Y \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$f(A) \cdot f(B) = r^2 A \cdot B.$$

El escalar r se llama **factor de escala** de f. Es fácil ver que en este caso los vectores columna de la matriz de f deben ser ortogonales y de longitud $|r|$. Esta es una condición necesaria y suficiente para que la transformación sea ortogonal. De igual manera, es fácil ver (Ejercicio 3) que las transformaciones lineales de semejanza son exactamente aquellas en las que las longitudes de todos los segmentos se multiplican por un mismo número $|r|$. De igual manera se puede probar (Ejercicio 4) que las transformaciones lineales de semejanza conservan los ángulos. Cuando $n = 2$ se demuestra que la matriz de f debe ser o bien de la forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad \text{o bien de la forma} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

En general las **similitudes** son las funciones del espacio en él mismo que conservan los ángulos entre segmentos, es decir, si g es una similitud entonces $\sphericalangle PQR = \sphericalangle g(P)g(Q)g(R)$; y las **isometrías** son las funciones que conservan las distancias. De esta manera una transformación afín es similitud si su transformación lineal asociada es de semejanza, el factor de escala de la transformación lineal asociada es el factor de escala de la similitud. Cuando además $r = 1$ se obtiene una isometría. Diremos que un conjunto A es **autosimilar** si existen similitudes $w_1,\ w_2, \ldots,\ w_n$ tales que

$$A = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \ldots \cup w_n(A),$$

en la naturaleza aparecen muchos conjuntos autosimilares.

Ejercicios 4.4

1. Dé ejemplos de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que sean ortogonales y de otras que no lo sean.

2. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) f es ortogonal;

   b) f conserva distancias (es decir, para cualesquier X, $Y \in \mathbb{R}^n$, $\|f(X) - f(Y)\| = \|X - Y\|$);

   c) f conserva distancias y conserva ángulos (que conserva ángulos significa que si θ es el ángulo entre X e Y, entonces el ángulo entre $f(X)$ y $f(Y)$ también es θ).

3. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y sea $k \geq 0$ un número real. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) f es de semejanza con factor de escala k;

   b) para cualesquier X, $Y \in \mathbb{R}^n$, $\|f(X) - f(Y)\| = k\|X - Y\|$;

   c) los vectores columna de la matriz de f son ortogonales y de longitud k.

4. Demuestre que las transformaciones lineales de semejanza conservan ángulos.

5. Determine cuáles de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ son similitudes y en caso afirmativo encuentre su factor de escala:

   a) $f(x, y) = (x + y, x - y + 1)$; *c*) $f(x, y) = (6x + 1,\ 6x - 1)$;

   b) $f(x, y) = (2x, y)$; *d*) $f(x, y) = (2x + 3y - 1,\ 3x - 2y + 3)$.

6. *a*) Dé ejemplos de transformaciones lineales ortogonales y de otras que no lo sean.

   b) Demuestre que f es transformación lineal ortogonal si los vectores columna de su matriz asociada son de longitud 1 y perpendiculares entre sí.

   c) Demuestre que f es transformación lineal ortogonal si su matriz asociada M_f cumple que $M_f^{-1} = M_f^t$. (Si A es una matriz, A^t denota la **transpuesta** de A, es decir, la matriz que se obtiene de A, intercambiando filas por columnas).

7. *a*) Demostrar que toda transformación afín que es similitud, es 1-1 y sobre.

   b) Por a) toda transformación afín que es similitud tiene inversa, demuestre que ésta también es una transformación afín que es similitud.

8. *a*) Demuestre que la composición de dos similitudes es también similitud, ¿cuál es su factor de escala?

   b) Demuestre que la composición de dos isometrías es otra isometría.

9. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función se dice que f preserva A si $f(A) = A$.

   a) Encuentre todas las transformaciones afines que son isometrías y que preservan el cuadrado con vértices $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,1)$ y $(1,-1)$.

   b) Encuentre todas las transformaciones afines que son isometrías y que preservan la "N" de vértices $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ y $(1,1)$.

10. El triángulo de Sierpiński se forma dividiendo un triángulo de partida en cuatro por medio de los segmentos que unen los puntos medios de los lados. De estos cuatro triángulos se elimina el del centro. Esta operación se vuelve a aplicar a los triángulos que quedan, y así sucesivamente. El triángulo de Sierpiński es el conjunto que se obtiene como límite del proceso.

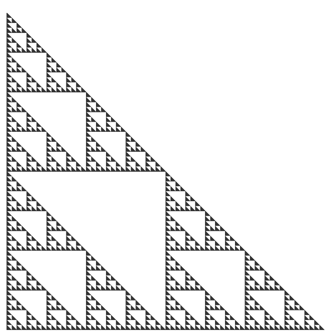
    

    Figura 4.6. Triángulo de Sierpiński.

    Colocando coordenadas determine tres similitudes que hacen del triángulo de Sierpiński un conjunto autosimilar (obsérvese que el triángulo de Sierpiński de la Figura 4.6 es una versión diferente a la presentada en el Ejemplo 3.5.1, aunque en cierta forma los dos conjuntos son esencialmente iguales).

Capítulo 5

La función determinante

5.1. Áreas y volúmenes orientados

El saber si un conjunto de n vectores de $\mathbb{R}^n$ dado (que se puede identificar con una matriz $n \times n$), es o no linealmente independiente es muy importante por cuanto esto nos indica el tipo de soluciones del sistema correspondiente o, lo que es lo mismo, nos da importantes características de la transformación lineal asociada.

La función determinante es un buen mecanismo teórico que nos indicará si n vectores dados de $\mathbb{R}^n$ son, o no, linealmente independientes.

Hay muchas formas de definir y construir la función determinante. Nosotros utilizaremos un método de construcción que se basa en exigir ciertas propiedades (axiomas) que corresponden a lo que esperamos, y en base a dichas propiedades, que llamamos propiedades fundamentales del determinante, obtenemos métodos para calcular la función y demostramos otras propiedades[*].

Nuestra fuente de inspiración es el llamado producto mixto para tres vectores de $\mathbb{R}^3$. El lector recordará que dados $A,\ B,\ C$ vectores de $\mathbb{R}^3$, el valor absoluto de $A \cdot (B \times C)$ nos indica el volumen del paralelepípedo formado por A, B y C (Ejercicio 8 de la sección 4.3). Este volumen es diferente de 0 si y sólo si $A,\ B$ y C son linealmente independientes (recuerde cómo se interpreta geométricamente el hecho de que tres vectores

[*]Nuestro enfoque es basado en APÓSTOL Tom, Vol. II, capítulo 3.

de $\mathbb{R}^3$ sean linealmente independientes). Así, el "volumen orientado", que a tres vectores de $\mathbb{R}^3$ los envía en su producto mixto $A \cdot (B \times C)$, es un buen modelo de lo que se quiere con la función determinante. El problema es definir "volumen orientado" para n vectores de $\mathbb{R}^n$.

Para el caso particular de $\mathbb{R}^2$ existe el concepto de "área orientada" que a los vectores (a, b) y (c, d) les asocia el número $ad - bc$. Su valor absoluto es el área del paralelogramo determinado por los vectores (a, b) y (c, d) (Ejercicios 2 y 3). El signo de $ad - bc$ determina el sentido con que se tomen los vectores.

El lector, que quizá conozca las fórmulas para calcular determinantes de matrices 2×2 y 3×3, puede ahora justificarlas como mecanismos que miden áreas y volúmenes orientados de objetos determinados por los vectores fila (o columna) de las respectivas matrices.

¿Qué propiedades debemos exigir a nuestro "volumen orientado" para n vectores de $\mathbb{R}^n$? Básicamente las mismas que cumple el producto mixto de tres vectores en $\mathbb{R}^3$ y que también cumple el área orientada de dos vectores en $\mathbb{R}^2$. En el Ejercicio 4 se pide demostrar algunas de estas propiedades en el caso del producto mixto. En el Ejercicio 5 se busca visualizar algunas de estas propiedades para áreas de $\mathbb{R}^2$. En la próxima sección seleccionaremos de éstas propiedades unas básicas (axiomas), de tal manera que de ellas se puedan deducir todas las demás.

Ejercicios 5.1

1. Demuestre que $ad - bc = 0$, si y sólo si los vectores (a, b) y (c, d) son linealmente dependientes.

2. Los vectores (a, b) y (c, d) de $\mathbb{R}^2$ se pueden identificar con los vectores $(a, b, 0)$ y $(c, d, 0)$ de $\mathbb{R}^3$. Utilice el producto cruz para demostrar que el área del paralelogramo determinado por (a, b) y (c, d) en $\mathbb{R}^2$ es el valor absoluto de $ad - bc$.

3. Se puede ver gráficamente que el área del paralelogramo determinado por (a, b) y (c, d) en $\mathbb{R}^2$ es el valor absoluto de $ad - bc$ así:

   i) dibuje dos vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^2$.

ii) Determine el rectángulo 1 con base a y altura d.

iii) Determine el rectángulo 2 con base c y altura b.

iv) Determine el paralelogramo correspondiente a los dos vectores.

v) Observe, trasladando áreas, que el área del paralelogramo es la diferencia de áreas entre los rectángulos.

4. Para $A,\ B,\ C \in \mathbb{R}^3$ definimos $V_0(A,B,C) = A\cdot(B\times C)$, demostrar:

a) $V_0(A,B,C) \in \mathbb{R}$.

b) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha V_0(A,B,C) = V_0(\alpha A,B,C) = V_0(A,\alpha B,C) = V_0(A,B,\alpha C).$$

c) Si $A,\ B,\ C,\ D \in \mathbb{R}^3$ entonces:

$$\begin{aligned} V_0(A+D,B,C) &= V_0(A,B,C) + V_0(D,B,C); \\ V_0(A,B+D,C) &= V_0(A,B,C) + V_0(A,D,C); \\ V_0(A,B,C+D) &= V_0(A,B,C) + V_0(A,B,D). \end{aligned}$$

d) Si $A = B$, o, $B = C$, o, $A = C$ entonces $V_0(A,B,C) = 0$.

e) $V_0(A,B,C) = -V_0(B,A,C) = V_0(B,C,A) = -V_0(A,C,B) = V_0(C,A,B) = -V_0(C,B,A)$.

f) $$\begin{aligned} V_0(A,B,C) &= V_0(A+B,B,C) = V_0(A,B+A,C) \\ &= V_0(A,B,C+B) = V_0(A,B+C,C) \\ &= V_0(A+C,B,C) = V_0(A,B,C+A). \end{aligned}$$

g) $V_0(E_1,E_2,E_3) = 1$.

5. Dibuje A y B, dos vectores de $\mathbb{R}^2$.

a) Muestre gráficamente que el área del paralelogramo determinado por $2A$ y B es el doble del área correspondiente al paralelogramo determinado por A y B.

b) Muestre gráficamente que el área del paralelogramo determinado por A y $B+A$, es la misma del paralelogramo determinado por A y B.

5.2. Axiomas del determinante

Como se estableció en la sección anterior, a cada par de vectores de $\mathbb{R}^2$ se le puede asignar un único número (área orientada) y a cada tripla de vectores de $\mathbb{R}^3$ se le puede asignar un único número (volumen orientado), esta asignación da la idea de una función y por esto se habla de función determinante.

Primero establezcamos el dominio de la función. La función determinante se aplica sobre n vectores de $\mathbb{R}^n$ o, lo que es lo mismo (colocando tales vectores como columnas en una matriz), sobre matrices $n \times n$ o transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ pero todo sería equivalente si lo hiciéramos sobre filas. La función tiene como recorrido los reales.

$$\begin{aligned} \det : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A_1{\downarrow}, A_2{\downarrow}, \ldots, A_n{\downarrow}) &\rightsquigarrow \det(A_1{\downarrow}, A_2{\downarrow}, \ldots, A_n{\downarrow}). \end{aligned}$$

Hablaremos también del determinante de una matriz cuadrada y utilizaremos la notación que reemplaza los paréntesis por barras. Así:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Las propiedades enunciadas en los ejercicios 4b y 4c de la sección anterior, las podemos resumir diciendo que el producto mixto es lineal en cada una de sus variables. Esta propiedad será el primer axioma para la función determinante:

AD1: El determinante es una función lineal en cada una de sus variables.

Este axioma por sí solo tiene muchas implicaciones. Su significado comprende dos aspectos:

i) **Homogeneidad:** si la columna j es multiplicada por un escalar α, el valor del determinante se multiplica por α.

$$\det(A_1{\downarrow}, A_2{\downarrow}, \ldots, \alpha A_j{\downarrow}, \ldots, A_n{\downarrow}) = \alpha \det(A_1{\downarrow}, A_2{\downarrow}, \ \ldots, \ A_n{\downarrow}).$$

ii) **Aditividad**: el determinante distribuye la suma en cualquier columna j quedando fijas las demás.

$$\det(A_1{\downarrow}, \ldots, A_j{\downarrow} + B_j{\downarrow}, \ldots, A_n{\downarrow}) =$$
$$\det(A_1{\downarrow}, \ldots, A_j{\downarrow}, \ldots, A_n{\downarrow}) + \det(A_1{\downarrow}, \ldots, B_j{\downarrow}, \ldots, A_n{\downarrow}).$$

De estos dos axiomas se deduce inmediatamente la siguiente proposición.

Proposición 9. *AD1 implica:*

i) *si una matriz cuadrada tiene una columna de sólo ceros su determinante es 0.*

ii) *Si I_n es la matriz idéntica $n \times n$, y A es una matriz diagonal total (es decir $A = (a_{ij})_{n \times n}$ con $a_{ij} = 0\ \forall i \neq j$) entonces el valor $\det(A)$ es el producto de los elementos de la diagonal por $\det(I_n)$.*

Demostración.

i) Aplicamos homogeneidad con $\alpha = 0$.

ii) Ver Ejercicio 4. □

El siguiente axioma tiene que ver con la orientación que llevan los vectores y está inspirado en el Ejercicio 4e) de la sección anterior: cuando dos de los vectores se intercambian el determinante cambia de signo.

AD2: (**Alternancia**) Si se intercambian dos variables, el determinante cambia de signo.

Ya con este axioma podemos ampliar nuestros conocimientos sobre la función determinante. Primero la siguiente propiedad clave:

Proposición 10. *Si en una matriz, dos columnas tienen iguales valores entonces su determinante es nulo.*

un enfoque geométrico]

Demostración. Si A es una matriz que tiene las columnas i y j iguales entonces al intercambiar las columnas i y j se obtiene la misma matriz A. Por la propiedad de alternancia:

$$\det(A) = -\det(A)$$

lo que obliga a que $\det(A) = 0$. $\square$

Esta propiedad en combinación con AD1 nos permite empezar a hacer operaciones entre filas (o columnas) que dejan invariante el valor del determinante.

Proposición 11. *Si a una columna se le suma otra multiplicada por un escalar el determinante no cambia.*

Demostración. Supongamos que A' se obtiene de la matriz A sumándole a la columna i-ésima k veces la columna j-ésima. Por AD1 el determinante de la matriz A' será la suma del determinante de la matriz A con k veces el determinante de una matriz B que se repite en la i-ésima columna, la j-ésima columna. Es decir,

$$\det(A') = \det(A) + k\det(B).$$

Pero por la Proposición 10 el último sumando es cero y

$$\det(A) = \det(A'). \qquad \square$$

Proposición 12. *Si en la matriz A hay una columna que es combinación lineal de otras entonces* $\det(A) = 0$*.*

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la primera columna de A es combinación lineal de otras, digamos:

$$A_1{\downarrow} = \alpha_{i_1} A_{i_1}{\downarrow} + \alpha_{i_2} A_{i_2}{\downarrow} + \ldots + \alpha_{i_k} A_{i_k}{\downarrow}$$

entonces:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(\alpha_{i_1} A_{i_1}{\downarrow} + \alpha_{i_2} A_{i_2}{\downarrow} + \cdots + \alpha_{i_k} A_{i_k}{\downarrow} \;\; A_2{\downarrow} \;\; \cdots \;\; A_n{\downarrow}) \\ &= \alpha_{i_1}\det(A_{i_1}{\downarrow} \cdots A_{i_1}{\downarrow} \cdots A_n{\downarrow}) + \alpha_{i_2}\det(A_{i_2}{\downarrow} \cdots A_{i_2}{\downarrow} \cdots A_n{\downarrow}) \\ &\quad + \cdots + \alpha_{i_k}\det(A_{i_k}{\downarrow} \cdots A_{i_k}{\downarrow} \cdots A_{i_n}{\downarrow}) \\ &= \alpha_{i_1} \cdot 0 + \alpha_{i_2} \cdot 0 + \cdots \alpha_{i_k} \cdot 0 = 0. \qquad \square\end{aligned}$$

Corolario. Si las columnas de la matriz A conforman un conjunto de vectores linealmente dependientes entonces $\det(A) = 0$.

Consideremos ahora una matriz triangular superior de orden 3×3, es decir de la forma
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$
y calculemos $\det(A)$:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \\
&= a_{11} \det \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, && \text{usando AD1.i)} \\
&\overset{-a_{12}c_1+c_2}{\underset{-a_{13}c_1+c_3}{=}} a_{11} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, && \text{por la Proposición 11} \\
&= a_{11}a_{22} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, && \text{de nuevo AD1.i)} \\
&\overset{-a_{23}c_2+c_3}{=} a_{11}a_{22} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, && \text{por la Proposición 11} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, && \text{AD1.i)} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} \det(I_3).
\end{aligned}$$

El lector puede hacer un cálculo parecido pero tomando A matriz triangular inferior de orden 3×3, es decir de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

para llegar al mismo resultado.

Observando detenidamente el procedimiento anterior, se ve que éste se puede extender a cualquier matriz $n \times n$ triangular superior (inferior) y obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 13. *Cualquier matriz A que sea triangular superior (o inferior) tiene como determinante el producto de los elementos de la diagonal por* $\det(I_n)$.

Cálculo por Triangularización

La Proposición 13 es poderosa por cuanto sabemos que cualquier matriz se puede convertir con operaciones elementales entre columnas en una matriz triangular superior o inferior y, según la Proposición 11, estas operaciones son, con cierto cuidado, "compatibles" con el valor del determinante. Así, nos queda determinar el valor de la función en las matrices idénticas I_n. En el Ejercicio $4g$ de la sección anterior se establece que $V_0(E_1, E_2, E_3) = 1$, esto inspira el tercer y último axioma para la función determinante.

AD3: El determinante de la matriz identidad es 1.

Ahora nos proponemos elaborar el algoritmo para calcular el valor de nuestra función en cualquier matriz cuadrada. Recordemos las operaciones elementales entre columnas (filas):

1. sumarle a una columna (fila) los valores de otra columna (fila) multiplicados por una constante.
2. Intercambiar dos columnas (filas).
3. Multiplicar una columna (fila) por una constante distinta de cero.

Por los resultados anteriores tendremos:

1. al sumarle a una columna (fila) los valores de otra columna (fila) multiplicados por una constante, el determinante no cambia.

2. Al intercambiar dos columnas (filas) el determinante cambia de signo.

3. Al multiplicar una columna (fila) por una constante el determinante se multiplica por la constante.

Con estas herramientas podemos calcular el determinante de cualquier matriz cuadrada:

1. se toma la matriz y por medio de operaciones elementales entre columnas (filas) se convierte en una triangular superior (o inferior), teniendo en cuenta que cuando se intercambien columnas (filas) el determinante cambia de signo y que si se multiplica una columna (fila) por una constante $k \neq 0$, el determinante debe multiplicarse por $\frac{1}{k}$ (para no alterar el resultado).

2. Una vez obtenida la matriz triangular superior (o inferior) se multiplican los elementos de la diagonal y éste es el valor del determinante.

Ejemplo 5.2.1. Evaluemos el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Mediante operaciones entre filas, tenemos que:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{3f_1+f_3}{\overset{2f_1+f_2}{=}} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & 6 & 13 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{-3f_2+f_3}{\overset{(-1/2)f_2+f_4}{=}}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & 11 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} \end{vmatrix} \overset{(-9/16)f_3+f_4}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{59}{16} \end{vmatrix} = -59.$$

Ejemplo 5.2.2. Calculemos el determinante de

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

mediante operaciones entre columnas:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} \overset{c_1 \leftrightarrow c_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \underset{-3c_1+c_3}{\overset{2c_1+c_2}{=}}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 11 & -16 \\ -3 & -6 & 13 \end{vmatrix} \overset{\frac{1}{11}c_2}{=} -11 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -16 \\ -3 & -\frac{6}{11} & 13 \end{vmatrix} \overset{16c_2+c_3}{=}$$

$$-11 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{6}{11} & \frac{47}{11} \end{vmatrix} = -47.$$

Unicidad de la función determinante

Hemos definido la función determinante basados en tres axiomas y con esos tres axiomas podemos calcular el determinante de cualquier matriz cuadrada. La pregunta es ¿será posible que exista otra función que también cumpla los tres axiomas? La respuesta (afortunadamente) es NO, la única función que cumple AD1, AD2 y AD3 es det. De esta respuesta, en principio natural, se deducen importantes resultados.

Proposición 14. *Cualquier función*

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

que cumpla los axiomas AD1 y AD2, es invariante por operaciones elementales entre columnas, es decir, si A es una matriz $n \times n$ y A' se obtiene:

i) *sumándole a una columna de A otra columna multiplicada por cualquier constante, entonces $f(A') = f(A)$;*

ii) *intercambiando dos columnas de A entonces $f(A') = -f(A)$.*

Demostración. Para i) esta es la misma demostración de la Proposición 11 que sólo se basa en AD1 y AD2. La propiedad ii) es el mismo axioma AD2. $\square$

Corolario. Si f es una función

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

que cumple los axiomas AD1 y AD2, el valor de f en una matriz dada puede ser calculado por triangularización, una vez se conozca $f(I_n)$.

Demostración. Al triangularizar la matriz se puede hacer el mismo razonamiento que se hizo para establecer la Proposición 13, sólo que cambiamos det por f. $\square$

Proposición 15. *Cualquier función*

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

que cumpla los axiomas AD1 y AD2 es de la forma:

$$f(A_1\!\downarrow,\ A_2\!\downarrow, \ldots, A_n\!\downarrow) = \det(A_1\!\downarrow,\ A_2\!\downarrow, \ldots, A_n\!\downarrow) f(I_n).$$

Demostración. Sea A la matriz en cuestión y A' una matriz triangular superior que se obtiene de A haciendo posiblemente algunos cambios de columnas y sumando a columnas otras multiplicadas por escalar. Entonces $f(A) = \pm f(A') = \pm d\, f(I_n)$, donde d es el producto de los elementos de la diagonal de A', pero entonces también tenemos que $\det(A) = \pm d \cdot \det(I_n) = \pm d$ y, por tanto, $f(A) = \det(A) f(I_n)$. $\square$

Ahora es inmediato el siguiente resultado:

Proposición 16. *La función determinante es la única que cumple las propiedades AD1, AD2 y AD3.*

un enfoque geométrico]

Ejercicios 5.2

1. Explique por qué el producto interno entre vectores es también una función lineal en cada variable.

2. Sea f la función $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que evaluada en la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

es por definición $f(A) = ad - bc$. Demostrar que f cumple las propiedades AD1, AD2 y AD3.

3. A continuación se dan diferentes definiciones de la función $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ evaluándola en la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Determinar cuáles de las propiedades AD1, AD2 y AD3, f no cumple.

a) $f(A) = ab - cd$; *b*) $f(A) = ab + cd$;

c) $f(A) = ac - bd$; *d*) $f(A) = a - d$;

e) $f(A) = b - cd$.

4. Utilizando únicamente el axioma AD1 i); demostrar que si I_n es la matriz idéntica $n \times n$ y A es una matriz diagonal total entonces

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}\det(I_n).$$

5. Sea f cualquier función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A_1\downarrow, A_2\downarrow, \ldots, A_n\downarrow) &\rightsquigarrow f(A_1\downarrow, A_2\downarrow, \ldots, A_n\downarrow) \end{aligned}$$

que cumple el axioma AD1; demostrar que si I_n es la matriz idéntica $n \times n$ y A es una matriz diagonal total entonces

$$f(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}f(I_n).$$

6. Sea f cualquier función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A_1\!\downarrow, A_2\!\downarrow, \ldots, A_n\!\downarrow) &\rightsquigarrow f(A_1\!\downarrow, A_2\!\downarrow, \ldots, A_n\!\downarrow) \end{aligned}$$

   que cumple los axiomas AD1 y AD2; demostrar que si las columnas de la matriz A conforman un conjunto de vectores linealmente dependientes entonces $f(A) = 0$.

7. Calcule por triangularización los determinantes de las siguientes matrices:

   a) $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$;

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

   c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Defina matriz diagonal por bloques. Demuestre que el determinante de una matriz de éstas es el producto de los determinantes de cada bloque.

9. ☚Siendo A y B matrices $n \times n$ demostraremos que

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B).$$

   Fija la matriz A, sea f la función

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

   definida por

$$f(X_1\!\downarrow, X_2\!\downarrow, \ldots, X_n\!\downarrow) = \det(AX_1\!\downarrow, AX_2\!\downarrow, \ldots, AX_n\!\downarrow).$$

   a) Demostrar que f cumple las propiedades AD1 y AD2.

   b) Basándose en la Proposición 15 se tiene:

$$f(X_1\!\downarrow, X_2\!\downarrow, \ldots, X_n\!\downarrow) = \det(X_1\!\downarrow, X_2\!\downarrow, \ldots, X_n\!\downarrow) f(I_n).$$

c) Calculando $f(B_1 \downarrow, B_2 \downarrow, \ldots, B_n \downarrow)$, y teniendo en cuenta lo anterior, demostrar que:

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B).$$

10. Utilizando el resultado del Ejercicio 9, demostrar que si A es una matriz invertible entonces

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}.$$

11. Recuerde que ciertas matrices al multiplicarlas en determinada forma por cualquiera, intercambian filas. Así mismo las operaciones entre filas se pueden ver como multiplicar la matriz por otra cuyo determinante es fácil de calcular y es 1.

    a) Utilizando el resultado del Ejercicio 9, demostrar que cuando se intercambian dos filas el determinante cambia de signo.

    b) Deducir que:

    $$\det(A^t) = \det(A);$$

    recuérdese que A^t denota la **transpuesta** de A, es decir, la matriz que se obtiene de A intercambiando filas por columnas y, por tanto, todas las propiedades con respecto a las columnas son válidas con respecto a las filas.

5.3. La regla de Cramer

La Regla de Cramer* nos ofrece un útil método para resolver sistemas lineales con igual número de ecuaciones que incógnitas. Nos interesa, además, por lo que de ella se puede deducir. En efecto, aplicando la regla de Cramer obtenemos un método para calcular la inversa de una matriz y para calcular determinantes, como se verá más adelante.

En términos de matrices, si A es la matriz del sistema y $B\downarrow$ es el vector de términos independientes, resolver el sistema como se vio en el capítulo 3, es resolver la ecuación matricial

$$AX\downarrow = B\downarrow$$

que consiste en encontrar escalares $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ tales que

$$x_1 A_1\downarrow + x_2 A_2\downarrow + \ldots + x_n A_n\downarrow = B\downarrow,$$

o abreviadamente

$$\sum x_i A_i\downarrow = B\downarrow;$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\det(A_1\downarrow, \ldots, \underset{col.j}{B\downarrow}, \ldots, A_n\downarrow) &= \det(A_1\downarrow, \ldots, \underset{col.j}{\sum x_i A_i\downarrow}, \ldots, A_n\downarrow) \\
&= \sum x_i \det(A_1\downarrow, \ldots, \underset{col.j}{A_i\downarrow}, \ldots, A_n\downarrow) \\
&= x_j \det(A_1\downarrow, \ldots, \underset{col.j}{A_j\downarrow}, \ldots, A_n\downarrow) \\
&= x_j \det(A).
\end{aligned}$$

(Justifique cada una de las igualdades anteriores). De esto se deduce el siguiente resultado:

Proposición 17. *La ecuación matricial*

$$AX\downarrow = B\downarrow$$

tiene solución única $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *si* $\det(A) \neq 0$*, en tal caso se tiene:*

$$\boxed{x_j = \det(A_1\downarrow, \ldots, \underset{col.j}{B\downarrow}, \ldots, A_n\downarrow)/\det(A).}$$

*Gabriel Cramer, matemático suizo, 1704-1752.

Si $\det(A) = 0$, de la ecuación

$$\det(A_1\downarrow, \ldots, \underset{col.j}{B\downarrow}, \ldots, A_n\downarrow) = x_j \det(A)$$

se deduce que, o bien,

$$\det(A_1\downarrow, \ldots, \underset{col.j}{B\downarrow}, \ldots, A_n\downarrow) \neq 0$$

y entonces no existe x_j, o bien,

$$\det(A_1\downarrow, \ldots, \underset{col.j}{B\downarrow}, \ldots, A_n\downarrow) = 0$$

y entonces cualquier x_j sirve. En todo caso la solución no es única; por tanto, tenemos:

Proposición 18. *La ecuación matricial*

$$AX\downarrow = B\downarrow$$

tiene solución única si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Demostración. Ejercicio 3. □

Ejemplo 5.3.1. Aplique la regla de Cramer para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ -2y + 4z &= 3 \\ -x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Solución. La matriz asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculemos $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{f_1+f_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{2f_2+f_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -18.$$

Ahora notaremos $A^{(j)}$ la matriz que se obtiene de A, sustituyendo la columna j por el vector $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Tenemos:

$$|A^{(1)}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{-3f_1+f_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{f_2 \leftrightarrow f_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & 4 \end{vmatrix} \overset{11f_2+f_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 15 \end{vmatrix} = -15.$$

Análogamente se obtiene

$$|A^{(2)}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{y} \quad |A^{(3)}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -14$$

y aplicando la regla de Cramer obtendremos:

$$x_1 = \frac{-15}{-18} = \frac{5}{6}; \qquad x_2 = \frac{-1}{-18} = \frac{1}{18}; \qquad x_3 = \frac{-14}{-18} = \frac{7}{9}.$$

Ejercicios 5.3

1. Aplique la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

   a) $\begin{aligned} 3x + y &= 2 \\ x - 2y &= 1; \end{aligned}$

   b) $\begin{aligned} y - 2z + 3 &= 0 \\ z - x - y &= 2 \\ z - x &= 3. \end{aligned}$

2. Aplicando la regla de Cramer, en cada caso decidir para qué valores de h y k cada uno de los siguientes sistemas tienen solución única:

   a) $\begin{aligned} 3x + 2y &= h \\ x - y &= k; \end{aligned}$

   b) $\begin{aligned} 3x + 2hy &= h \\ 2x + ky &= 1; \end{aligned}$

   c) $\begin{aligned} x - y + kz &= 1 \\ hy - kz &= 2 \\ kx + 2z &= 3. \end{aligned}$

3. ☛Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y notemos M_f su matriz correspondiente. Demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) $\det(M_f)$ es no nulo.

b) El sistema $M_f X\!\downarrow = B\!\downarrow$ tiene solución única para todo $B\!\downarrow$ de $\mathbb{R}^n$.

c) f es biyectiva.

d) $\operatorname{Nu} f = \{O\}$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal, un vector $X \in \mathbb{R}^n$ no nulo, se dice que es un **vector propio** de f si existe un escalar α tal que $f(X) = \alpha X$, es decir, f al actuar sobre X lo multiplica por α, escalar que se denomina **valor propio** de f.

   a) $f(x, y) = (x + y, x - y)$ tiene como valores propios $\alpha = \sqrt{2}$ y $\alpha = -\sqrt{2}$, ¿cuáles son los vectores propios correspondientes?

   b) Demuestre que α es valor propio de f si y sólo si $\det(M_f - \alpha I_n)$ es nulo.

   c) Utilice el resultado anterior para encontrar los valores propios de $f(x, y) = (2x,\ y + x)$. Encuentre los correspondientes vectores propios.

5.4. Inversa por cofactores

Si A es una matriz cuadrada, recordemos que encontrar la inversa de la matriz A es encontrar una matriz B del mismo orden que A tal que

$$AB = I,$$

esto significa que se deben resolver n sistemas con n ecuaciones lineales y n incógnitas cada sistema, como ya se vio en el capítulo 3. Todos los n sistemas tienen la misma matriz asociada A. Si B_j es la j-ésima columna de B se debe tener:

$$AB_j{\downarrow} = E_j{\downarrow},$$

donde E_j es el vector j-ésimo de la base canónica. La solución i-ésima a la anterior ecuación, es decir b_{ij}, por la regla de Cramer es:

$$b_{ij} = \det(A_1{\downarrow}, \ldots, \underset{col.i}{E_j{\downarrow}}, \ldots, A_n{\downarrow}) / \det(A), \tag{5.1}$$

el numerador de esta expresión es llamado el **cofactor** j**,** i que notamos c_{ji}.

$$c_{ji} = \det(A_1{\downarrow}, \ldots, \underset{col.i}{E_j{\downarrow}}, \ldots, A_n{\downarrow}).$$

En el Ejercicio 1 se pide demostrar que c_{ji} se puede calcular hallando el determinante a la matriz que resulta al eliminar la j-ésima fila y la i-ésima columna de la matriz A multiplicado por $(-1)^{j+i}$. De (5.1) deducimos que la inversa de la matriz A es la transpuesta de la matriz de cofactores multiplicada por el inverso multiplicativo del determinante de A que debe ser no nulo. Es decir,

$$A^{-1} = (1/\det(A))C^t \tag{5.2}$$

que es una "fórmula" para hallar la inversa de una matriz y que en otras palabras significa que

$$AC^t = \det(A).I_n; \tag{5.3}$$

¡importantísimo resultado! Nos indica que:

- al hacer el producto interno entre los términos de una fila por los cofactores de otra, se obtiene 0.

$$i \neq j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{kj} = 0.$$

- Al hacer el producto interno entre los términos de una fila por los cofactores correspondientes, se obtiene el determinante de A, es decir para cada i,
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij}.$$
Esto nos proporciona un método para calcular el determinante: desarrollo por la fila i-ésima.

Ejemplo 5.4.1. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, por ejemplo, el cofactor c_{23} es
$$c_{23} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -4.$$
La matriz de cofactores es
$$C = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -2 \\ -3 & 1 & -4 \\ 12 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$
Calculando el determinante de A por la segunda fila obtenemos: $\det(A) = 0 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 + 4(-4) = -18$, y la inversa de A será:
$$A^{-1} = \frac{1}{-18} \begin{pmatrix} -6 & -4 & -2 \\ -3 & 1 & -4 \\ 12 & -4 & -2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -12 \\ 4 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$
Muchos libros tienen la fea costumbre de empezar por este método su exposición de los determinantes. Es como viajar en Jet: se gana tiempo pero no se disfruta el paisaje.

Ejercicios 5.4

1. Demuestre que
$$\det(A_1\!\downarrow, \ldots, \underset{col.i}{E_i\!\downarrow}, \ldots, A_n\!\downarrow)$$
se puede calcular hallando el determinante a la matriz que resulta al eliminar la j-ésima fila y la i-ésima columna de la matriz A, multiplicado por $(-1)^{j+i}$.

2. Demuestre que $\det(C^t) = (\det(A))^{n-1}$ (A es una matriz $n \times n$).

3. Calcule por cofactores los determinantes de las siguientes matrices y las respectivas matrices inversas si existen:

   a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

   b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

   c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. De (5.3) deducir el método para calcular el determinante por cofactores desarrollando la j-ésima columna.

5. Demuestre en base a la fórmula (5.2) y usando el Ejercicio 2, que $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

6. Una matriz es ortonormal si sus vectores columna son ortogonales entre sí y de longitud 1. Demuestre que el determinante de una matriz ortonormal es ± 1.

Respuestas a los ejercicios

Ejercicios 1.1

1. c) es falsa.

2. Si tal número existiera entonces su siguiente sería mayor, lo que contradice que tal número es mayor que todos los demás.

Ejercicios 1.3

1. b) $0! = 1$; $n! = (n-1)!\, n$ para todo $n \geq 1$.

5. *a*) corresponde a IV; *c*) corresponde a III; *e*) corresponde a II; *b*) corresponde a VI; *d*) corresponde a I; *f*) corresponde a V.

Ejercicios 1.4

1. *a*) 91; *b*) -10; *c*) 46; *d*) 945; *e*) 9; *f*) 18.

2. $n! = \prod_{i=1}^{n} i$.

4. a) $\prod_{i=1}^{n}(a_i \times b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i \times \prod_{i=1}^{n} b_i$; b) $\prod_{i=1}^{n} k a_i = k^n \prod_{i=1}^{n} a_i$;

   c) $\prod_{i=1}^{n} k = k^n$; d) $\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{a_n}{a_0}$ (propiedad telescópica);

   e) $\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{p} a_i \times \prod_{i=p+1}^{n} a_i$, donde $p \in \mathbb{Z}$, tal que $1 \leq p \leq n$; f) $\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^p = \prod_{i=1}^{n} a_i^p$;

g) $\prod_{i=1}^{n}\prod_{i=1}^{m} a_i b_j = \prod_{i=1}^{n} a_i^m \times \prod_{j=1}^{m} b_j^n$.

5. *a*) n^2; *b*) $n(3n-1)$; *c*) $\dfrac{n(5n+1)}{2}$.

6. *a*) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; *b*) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$; *c*) $n!$.

7. *a*) $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$; *b*) $\dfrac{n}{n+1}$.

8. *a*) $n!\ k^n$; *b*) $\dfrac{1}{n}$; *c*) $\dfrac{n+1}{2n}$.

9. $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

Ejercicios 1.5

1. *a*) 1; *b*) 50; *c*) 1140.

3. a) $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$;

   b) $m^7-7m^6n+21m^5n^2-35m^4n^3+35m^3n^4-21m^2n^5+7mn^6-n^7$;

   c) $2187x^7-20412x^6y+81648x^5y^2-181440x^4y^3+241920x^3y^4-193536x^2y^5+86016xy^6-16384y^7$.

4. $\frac{200!}{101!\ 99!}2^{99}3^{101}$.

Ejercicios 1.6

1. *a*) $7-4i$; *b*) $\frac{42}{29}-\frac{40}{29}i$; *c*) $2-2i$; *d*) $-\frac{1}{25}+\frac{32}{25}i$;

   e) 67; *f*) $2+2i$; *g*) 1; *h*) $-i$.

5. *a)* $3e^{\frac{\pi}{2}i}$; *d)* $2\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$;

   b) $\sqrt{13}e^{123{,}69i}$; *e)* $\sqrt{2(1+\cos\alpha)}e^{i\arctan\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}\right)}$;

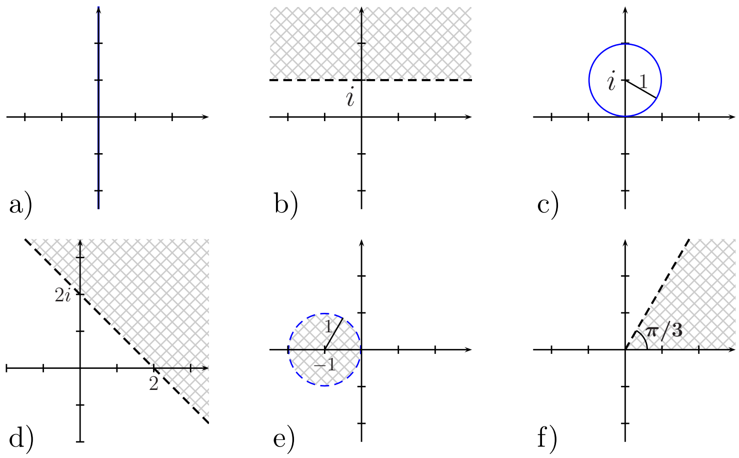
   c) $e^{\frac{\pi}{4}i}$; *f)* $e^{-\alpha i}$.

6. *a)* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; *c)* $\left(-\frac{3}{2},\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$; *e)* $(0,-4)$;

   b) $(-1,\sqrt{3})$; *d)* $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

10. *a*) $-\frac{23}{29}+\frac{15}{29}i$; *b*) $-\frac{5}{4}+\frac{i}{4}$; *c*) $-\frac{3}{4}-\frac{i}{4}$.

11.



12. *a*) $z_1=e^{\frac{3\pi}{4}i},\ z_2=e^{\frac{7\pi}{4}i}$; *c*) $z_1=2e^{\frac{5\pi}{6}i},\ z_2=2e^{\frac{11\pi}{6}i}$.
b) $z_1=2e^{\frac{\pi}{6}i},\ z_2=2e^{\frac{7\pi}{6}i}$;

13. *a*) $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_2=-1,\ z_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;
b) $z_1=0,988+0,157i,\ z_2=0,157+0,988i,$
$z_3=-0,89+0,45i,\ z_4=-0,71-0,71i,$
$z_5=0,45-0,89i$;
c) $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ z_3=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ z_4=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$

Ejercicios 2.1

1. *a*) $x_1=\frac{67}{50},\ x_2=-\frac{41}{25},\ x_3=-\frac{3}{5}$;
b) $x_1=0,\ x_2=\frac{39}{4},\ x_3=\frac{11}{4}$;
c) $x_1=-\frac{40}{3},\ x_2=\frac{74}{3},\ x_3=-\frac{26}{3}$;
d) Tiene infinitas soluciones: $S=\left\{\left(-1,\frac{t+5}{2},t\right)\mid t\in\mathbb{R}\right\}$;
e) No tiene solución.

4. $a+b-c=0$.

6. *a*) $a^2\neq b^2\neq 0$; *b*) $a^2=b^2$ y $bc=ad$.

7. $P(x)=x^2-5x+3$.

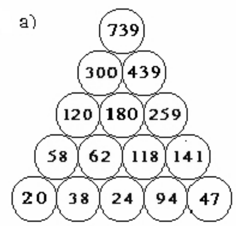
8. b) Dados dos puntos (distintos) en el plano, existe una única recta que los contiene.

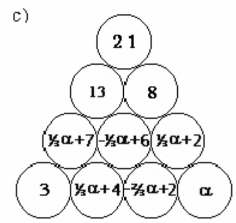
10. *a*) 500, 100 y 1000.

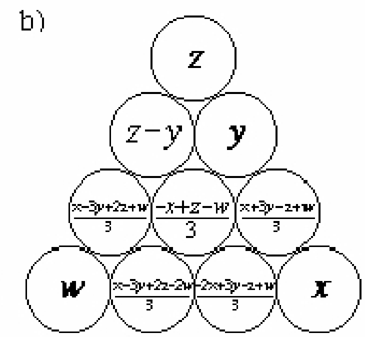
 b) 500, 1000 y 500 de las especies I, II y III respectivamente.

 c) $60 - \frac{8}{5}t, 10 + \frac{2}{5}t, t$ donde $t \in \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$.

11.







Ejercicios 2.2

2. $(2, -4)$.

3. $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

4. $A + B = (8, -1)$; $\alpha A + \beta B = \left(\frac{23}{2}, 2\right)$; $\alpha A - \beta B = \left(-\frac{13}{2}, -4\right)$.

5. $A + B = (0, 1, 4)$; $\alpha A + \beta B = \left(-\frac{5}{3}, \frac{16}{3}, 3\right)$; $\alpha A - \beta B = \left(\frac{7}{3}, -\frac{20}{3}, -1\right)$.

7. $X = (-1, -1, -2)$; $Y = (0, -1, -\frac{1}{2})$; $Z = (-7, -5, -9)$.

8. $\alpha = \frac{1}{11}$; $\beta = \frac{2}{11}$.

13. $\left(\frac{13}{3}, -1, 0\right)$ y $\left(\frac{11}{3}, 0, 1\right)$.

14. Los puntos de la mediana correspondiente al lado AB son de la forma $\frac{1-\alpha}{2}A + \frac{1-\alpha}{2}B + \alpha C$, donde $0 < \alpha < 1$.

Ejercicios 2.3

1. $(1,1,0)$; $(1,3,-2)$; $(2,2,0)$; $(-1,-3,2)$; $(4,7,-3)$ (hay infinitas posibilidades de respuesta).

2. No.

3. *a*) No; *b*) Sí; *c*) Sí; *d*) Sí; *e*) No; *f*) No.

Ejercicios 2.4

1. Paramétricas: $x=-\alpha$, $y=2\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$; cartesiana: $y=-2x$.

2. Paramétricas: $x=\alpha$, $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$; cartesiana: $y=x$.

3. Paramétricas: $x=-\alpha$, $y=2+2\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$;
cartesiana: $y=-2x+2$.

4. Paramétricas: $x=\alpha$, $y=3+\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$; cartesiana: $y=x+3$.

5. $-x=\frac{y}{2}=-z$ o equivalente $2x+y=0$ y $y+2z=0$.

6. $2-x=\frac{y-1}{2}=-z$ o equivalente $2x+y=5$ y $y+2z=1$.

7. $\frac{x-1}{2}=1-y$ y $z=-1$ o equivalente $x+2y=3$ y $z=-1$.

8. $1-x=\frac{2-y}{2}=\frac{-z}{6}$ o equivalente $2x-y=0$ y $6y-2z=12$.

9. No se cortan.

10. $4x-3y-10z=0$.

11. $4x-3y-10z=-13$.

12. $6x-11y-15z=-13$.

14. $\left\{\left(\frac{45}{23},\frac{70}{23},-\frac{3}{23}\right)\right\}$.

15. $\left\{\left(\frac{9}{5},\frac{11}{5},\frac{3}{5}\right)\right\}$.

16. El sentido de la recta es $\left(-\frac{1}{5},\frac{3}{5},1\right)$.

Ejercicios 2.5

2. a) $\{(x, y, z) \mid 2x + y - z = 0\}$.

   b) $\{(x, y, z) \mid 2x + y - z = 5\}$.

   c) Toda curva que no sea lineal. Ejemplo: el conjunto de puntos de una circunferencia.

3. a) Base: $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

   b) Base: $\{(2, 1, 3)\}$.

Ejercicios 3.1

1. *a*) No; *b*) Sí; *c*) Sí; *d*) No; *e*) No; *f*) No; *g*) Sí; *h*) Sí; *i*) No.

2. f transforma la recta en un punto.

3. b) i) $f(2, 0) = (6, -2, 4)$; $f(1, 3) = (6, -4, 8)$; $f(1, 2) = (5, -3, 6)$.

   ii) $f(2, 0) = (-10, -4, 0)$; $f(1, 3) = (-35, -11, -6)$; $f(1, 2) = (-25, -8, -4)$.

4. *b*) Que $\mathcal{L}_{nm}$ es un subespacio vectorial de V.

8. *i)* $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ -x - y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$; *ii)* $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x - 10y \\ -2x - 3y \\ -2y \end{pmatrix}$.

9. $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta \\ x\cos\theta + y \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$.

Ejercicios 3.2

1. *a*) Ampliación con factor de escala $|k|$ y reflexión respecto al origen.

   b) Reflexión respecto al origen.

   c) Reducción con factor de escala $|k|$ y reflexión respecto al origen.

   d) Reducción con factor de escala $|k|$.

   e) Anulación (todo se transforma en el origen).

   f) Identidad (todo queda igual).

   g) Ampliación con factor de escala $|k|$.

2. *a*) Reflexión con respecto al plano XZ.

   b) Proyección sobre el plano XY.

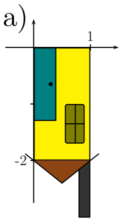
   c) Reflexión con respecto al origen.

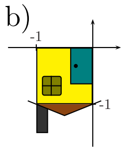
   d) Rotación de 180º alrededor del eje Z.

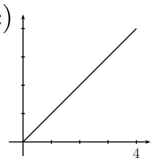
   e) Rotación alrededor del eje Z.

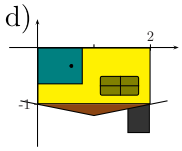
   f) Rotación alrededor del eje X.

3. (1). $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (2). $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (3). $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4. a) 

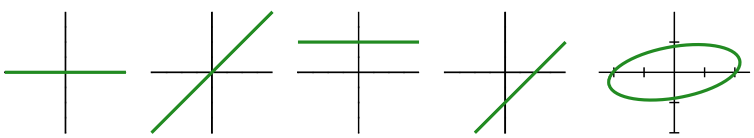
b) 

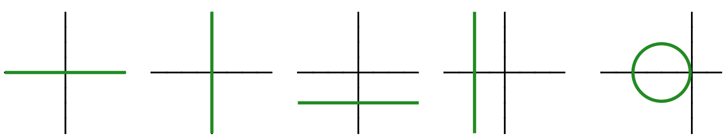
c) 

d) 

5. *a*) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ y \end{pmatrix}$; *c*) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$;

   b) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ -x \end{pmatrix}$; *d*) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2x \end{pmatrix}$.

6. a) 

   c) 

7. *a*) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x+y \\ y \end{pmatrix}$;

   b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-z \\ x-y+3z \end{pmatrix}$;

   c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y-z \\ 5x+y+2z \\ 4x+z \end{pmatrix}$;

d) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y+z \\ 2x+y+4z \end{pmatrix}$;

e) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x) = \begin{pmatrix} x \\ 4x \\ 0 \end{pmatrix}$;

f) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x+y+z.$

8. *a*) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$;

   b) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y \\ \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y \end{pmatrix}$;

   c) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-a^2}{1+a^2}x+\frac{2a}{1+a^2}y \\ \frac{2a}{1+a^2}x+\frac{a^2-1}{1+a^2}y \end{pmatrix}$.

Ejercicios 3.3

1. a) Falso, b) Verdadero, c) Falso, d) Verdadero, e) Verdadero.

2. a) $\{(0,-t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, b) No existen,
   c) $\{(-1,2-t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

3. a) Recta que pasa por el origen, b) Vacío,
   c) Recta que no pasa por el origen.

4. $a-b+c=0$.

5. *a*) $\mathrm{Nu}(f) = \{(0,0)\}$; $\mathrm{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+z=0\}$,
   $\dim \mathrm{Nu}(f) = 0$ y $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$.

   b) $\mathrm{Nu}(f) = \left\{\left(\frac{1}{3}t, \frac{10}{3}t, t\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$; $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$,
   $\dim \mathrm{Nu}(f) = 1$ y $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$.

   c) $\mathrm{Nu}(f) = \{(0,0,0)\}$; $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$,
   $\dim \mathrm{Nu}(f) = 0$ y $\dim \mathrm{Im}(f) = 3$.

   d) $\mathrm{Nu}(f) = \{(-t,-2t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$; $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$,
   $\dim \mathrm{Nu}(f) = 1$ y $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$.

   e) $\mathrm{Nu}(f) = \{0\}$; $\mathrm{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x-y=0 \text{ y } z=0\}$,
   $\dim \mathrm{Nu}(f) = 0$ y $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$.

f) $\mathrm{Nu}(f) = \{(s+t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$; $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$,
$\dim \mathrm{Nu}(f) = 2$ y $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$.

6. a) Falso, b) Falso, c) Verdadero.

10. $\{(0, t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicios 3.4

4. a) $x = 4$; $y = -1$.
   b) No existen valores x, y que cumplan las igualdades.

5. a) $BB - 4A + 2B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

   b) $2AA - 3AB + BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

6. $\{x \mid x < 4 - \sqrt{22} \text{ o } x > 4 + \sqrt{22}\}$.

8. $a = d$ y $c = -b$.

9. Todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} (-5t-2)/3 & (3-5s)/3 \\ (1+t)/3 & s/3 \\ t & s \end{pmatrix}$; $t, s \in \mathbb{R}$.

10. d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

    e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

13. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

    $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix}$; $A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

14. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5/3 & -4/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$; b) $\{(4, -5, 2)\}$.

17. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5/2 \\ -1 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$.

Ejercicios 3.5

1. Las transformaciones afines son: b, c, d y e.

2. $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. a) $g(x) = -x+1$; b) Una transformación afín es $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$;

   c) $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ 1-y \end{pmatrix}$.

5. $T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;

   $T_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cos 60 & -\frac{1}{3}\operatorname{sen} 60 \\ \frac{1}{3}\operatorname{sen} 60 & \frac{1}{3}\cos 60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$;

   $T_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cos(-60) & -\frac{1}{3}\operatorname{sen}(-60) \\ \frac{1}{3}\operatorname{sen}(-60) & \frac{1}{3}\cos(-60) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$;

   $T_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicios 4.1

1. $A \cdot B = 13$; $(2A) \cdot B = 26$; $(A+B) \cdot B = 23$.

Ejercicios 4.2

1. a) Verdadero, b) Falso, c) Falso, d) Falso.

2. $\|(1,3)\| = \sqrt{10}$, $\|(1,-3,0)\| = \sqrt{10}$,
   $\|(1,1,2)\| = \sqrt{6}$, $\|(1,2,1,2)\| = \sqrt{10}$.

3. $k = \frac{2\sqrt{15}}{15}$ o $k = -\frac{2\sqrt{15}}{15}$.

7. a) $\cos\theta = \frac{-\sqrt{70}}{14}$.

   b) $P_{AB} = (-1,2,0)$, $\|P_{AB}\| = \sqrt{5}$.

   c) $P = \left(-\frac{9}{29}, \frac{18}{29}, \frac{30}{29}\right)$, $D = \frac{3\sqrt{145}}{29}$.

   d) $P = \left(\frac{5}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$, $D = \frac{\sqrt{62}}{2}$.

e) $P = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right)$, $\qquad D = \frac{7\sqrt{6}}{6}$.

f) $A_\triangle = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ y $P_\triangle = \sqrt{14} + \sqrt{5} + \sqrt{29}$.

8. *a*) $\cos\theta = \frac{14}{15}$,

   b) $P_{AB} = \left(\frac{28}{15}, -\frac{14}{15}, \frac{14}{5}, \frac{14}{15}\right)$, $\qquad \|P_{AB}\| = \frac{14\sqrt{15}}{15}$.

   c) $P = \left(\frac{3}{2}, -1, 3, \frac{3}{2}\right)$, $\qquad D = \frac{\sqrt{58}}{2}$.

   d) $P = \left(\frac{3}{2}, -1, \frac{5}{2}, 2\right)$, $\qquad D = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

   e) $P = \left(\frac{18}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{19}{7}, \frac{9}{7}\right)$, $\qquad D = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

   f) $A_\triangle = \frac{\sqrt{29}}{2}$ y $P_\triangle = 2\sqrt{15} + \sqrt{2}$.

9. a) Verdadero, b) Verdadero, c) Falso, d) Falso.

12. b) $\{(x, y, z) \mid -\sqrt{3}y + z = 0\}$.

13. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ejercicios 4.3

1. *a*) $(2, 4, 3)$, *b*) $(-2, -4, -3)$, *c*) $(-3, -6, -2)$, *d*) $(-2, -9, -3)$, *e*) $(3, 1, 2)$, *f*) $(-2, -9, -3)$, *g*) $(15, -6, -2)$, *h*) $(1, 2, -5)$.

3. *a*) Verdadero, *b*) Falso, *c*) Verdadero, *d*) Verdadero, *e*) Verdadero, *f*) Falso.

6. $A_\triangle = \frac{\sqrt{59}}{2}$ y la ecuación del plano $3x + y - 7z = -2$.

Ejercicios 4.4

1. Dos ejemplos de transformaciones lineales de semejanza:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x + y \end{pmatrix}; \qquad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

   Dos ejemplos de transformaciones lineales que no son de semejanza:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ -x - y \end{pmatrix}; \qquad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -x + y \end{pmatrix}.$$

5. *a*) Con factor de escala $\sqrt{2}$ y *d*) con factor de escala $\sqrt{13}$.

6. a) Dos ejemplos de transformaciones lineales ortonormales:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \qquad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

9. *a*) 4 Rotaciones:
   $f(x,y) = (x,y)$; $\quad f(x,y) = (-y,x)$;
   $f(x,y) = (-x,-y)$; $\quad f(x,y) = (y,-x)$.

   4 Reflexiones:
   $f(x,y) = (x,-y)$; $\quad f(x,y) = (-x,y)$;
   $f(x,y) = (y,x)$; $\quad f(x,y) = (-y,-x)$.

   b) 2 Rotaciones:
   $f(x,y) = (x,y)$; $\quad f(x,y) = (-x,-y)$.

Ejercicios 5.2

3. *a*) No cumple AD1 ni AD3;
   b) No cumple AD1, AD2 ni AD3;
   c) No cumple AD3;
   d) No cumple AD1, AD2 ni AD3;
   e) No cumple AD1, AD2 ni AD3.

7. a) $ad - bc$, b) -7, c) -15.

Ejercicios 5.3

1. *a*) $\{x = \frac{5}{7}, \quad y = -\frac{1}{7}\}$; *b*) $\{x = -1, \quad y = 1, \quad z = 2\}$.

2. *a*) Tiene solución para todo $h, k \in \mathbb{R}$;
   b) $k \neq 4h/3$; *c*) $2h + k^2 - hk^2 \neq 0$.

4. *a*) Vectores propios correspondientes a $\sqrt{2}$: $\left\{\left(t, \frac{t}{1+\sqrt{2}}\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$.
   Vectores propios correspondientes a $-\sqrt{2}$: $\left\{\left(t, \frac{t}{1-\sqrt{2}}\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$.

   b) Valores propios: 1 y 2;
   Vectores propios correspondientes a 1: $\{(0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
   Vectores propios correspondientes a 2: $\{(t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Lecturas recomendadas

[1] H. Anton. *Elementary Linear Algebra.* John Wiley-New York, 6th edition, 1991.

[2] T. Apostol. *Calculus, Vol.I y Vol II.* Reverté-Barcelona, 2a. ed., 1974.

[3] B. Fraleigh B y R. Beauregard. *Álgebra lineal.* Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.

[4] S. I. Grossman. *Álgebra lineal.* McGraw-Hill/Interamericana de Mexico, 5a. ed., 1991.

[5] K. Hoffman y R. Kunze. *Álgebra lineal.* Prentice Hall, 1971.

[6] John L. Kelley. *Introducción moderna al álgebra.* Norma, 1968.

[7] Bernard Kolman. *Álgebra lineal con aplicaciones y Matlab.* Pearson education, 6a. ed., 1999.

[8] S. Lang. *Introducción al álgebra lineal.* Addison-Wesley Iberoamericana, 2a. ed., 1990.

[9] A.I. Máltsev. *Fundamentos de álgebra lineal.* Moscú, 3a. ed. 1978.

[10] E. Nering. *Linear Algebra and Matrix Theory.* John Wiley, 6th. edition, 1970.

[11] R. Penrose. *La nueva mente del emperador.* Grijalbo, 1991.

[12] S. Singh. *El último teorema de Fermat.* Grupo Editorial Norma, 1999.

[13] S. Strang. *Álgebra lineal y sus aplicaciones.* Fondo Educativo Interamericano, 1982.

[14] A. Takahashi. *Álgebra lineal.* Universidad Nacional de Colombia, 1993.

[15] J. A. Walsh. *Fractals in linear algebra.* The College Mathematics Journal, Vol. 27, No. 4, 1996.

Índice alfabético

álgebra de matrices, 94
ángulo entre vectores, 114
áreas y volúmenes orientados, 129
axiomas
  de Peano, 2
  del determinante, 132–136

base canónica, 59

Cauchy-Schwarz, 113
coeficiente binomial, 19
combinación lineal, 55
combinaciones lineales
  e independencia lineal, 55–59
combinatoria y teorema del binomio, 19–20
componentes, 49
composición de funciones, 95
curva de Koch, 109

definiciones recursivas, 11
desigualdad triangular, 118
dimensión, 58
dinámicas complejas, 32
distancia entre dos puntos, 115

ecuación de un plano, 117
ecuaciones
  cartesianas, 63
  con n variables, 48
  lineales, 37
  paramétricas, 63
el núcleo y la imagen, 88–90
espacio
  euclídeo, 114
  vectorial, 50, 111

fórmula de De Moivre, 29
factorial, 11
forma polar, 26
función determinante, 129

Gauss, 40
Giusseppe Peano, 2
Gottfried Leibniz, 23

igualdad de Lagrange, 123
inducción matemática, 3, 4, 11
inversa de una matriz, 99
inversa por cofactores, 147
isometrías, 126

longitud de vectores, 114

método de Gauss, 40
matriz, 39
  ampliada, 39
  asociada a un sistema, 39
  escalonada, 41
  transpuesta, 127, 142, 147
multiplicación
  de complejos, 25, 28
  de matrices, 95

números
- complejos, 23, 24
- imaginarios, 23
- naturales, 1, 3, 4

norma de un vector, 114

Peano, 3
planos
- que contienen el origen, 66
- trasladados, 66

producto
- cruz, 122
- interno, 111
- matricial, 96
- por escalar, 50

propiedades de campo, 26
proyección de un vector
- sobre otro, 115

Rafaello Bombelli, 23
rectas
- que contienen el origen, 63
- trasladadas, 64

regla de Cramer, 143
representación de
- transformaciones, 80–85

similitudes, 126
sistema
- de ecuaciones lineales, 37
- generador, 55
- homogéneo, 44

subespacio
- afín, 71
- vectorial, 70

suma de complejos, 25
sumatoria y productoria, 14

teorema
- de la dimensión, 89
- del binomio, 19

transformación ortogonal, 126
transformaciones
- afines, 107
- lineales, 75–78

triángulo de Sierpiński, 108, 128

unicidad de la función
- determinante, 138

valor propio, 146
vectores
- n-dimensionales, 49
- dependientes, 55
- directrices, 66
- independientes, 56
- ortogonales, 115
- propios, 146