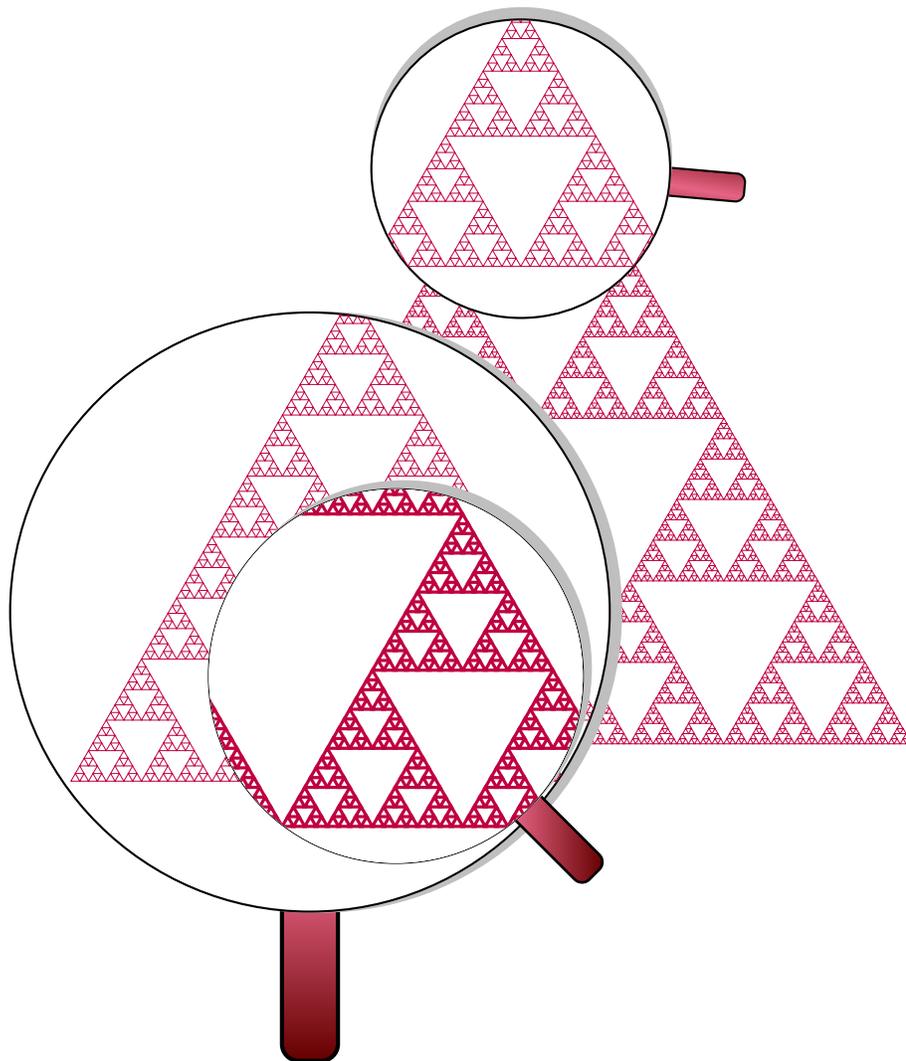


# ***Una introducción a la geometría fractal***



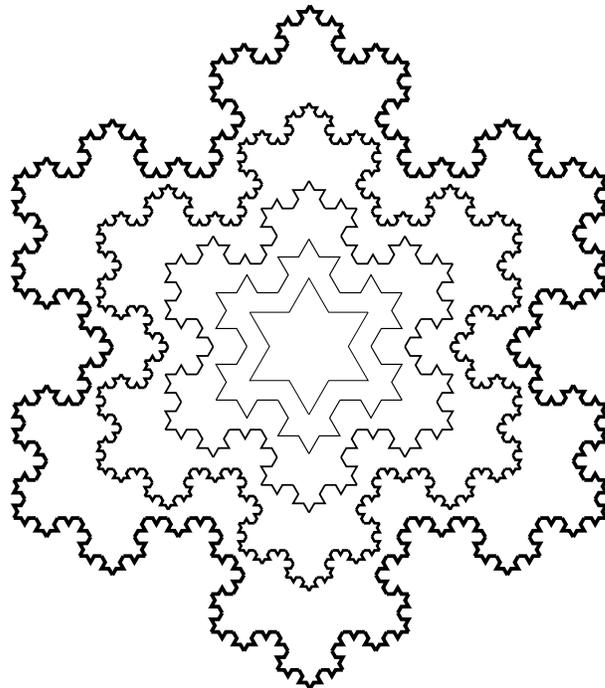
*Sonia SABOGAL & Gilberto ARENAS*



---

# Una introducción a la geometría fractal

---



---

Sonia SABOGAL & Gilberto ARENAS

Escuela de Matemáticas  
Universidad Industrial de Santander  
Bucaramanga, 2008



*Por hacerla*



# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1. Generalidades</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.1.1. La autosimilitud . . . . .	5
1.1.2. La dimensión extraña . . . . .	8
1.2. Algunos datos históricos . . . . .	11
1.3. Cuatro ejemplos clásicos de conjuntos fractales . . . . .	16
1.3.1. El conjunto de Cantor . . . . .	16
1.3.2. La carpeta de Sierpiński . . . . .	17
1.3.3. La curva de Koch . . . . .	18
1.3.4. La esponja de Menger . . . . .	18
1.4. Ejercicios . . . . .	19
<b>2. Nociones de espacios métricos</b>	<b>21</b>
2.1. Definición y ejemplos . . . . .	22
2.1.1. Subespacio métrico . . . . .	27
2.2. Noción de convergencia . . . . .	28
2.3. Sucesiones de Cauchy, espacios métricos completos, punto adherente, bolas, conjuntos cerrados . . . . .	31
2.4. Conjuntos abiertos . . . . .	40
2.5. Conjuntos compactos, conjuntos acotados y totalmente acotados, puntos de acumulación y puntos frontera . . . . .	42
2.6. Continuidad en espacios métricos . . . . .	51
2.7. Contracciones en espacios métricos . . . . .	55
2.8. El teorema del punto fijo para espacios métricos completos . . . . .	58
2.9. Ejercicios . . . . .	60
<b>3. El espacio <math>(\mathcal{H}(X), h)</math>: el espacio donde viven los fractales</b>	<b>67</b>
3.1. El conjunto $\mathcal{H}(X)$ y la métrica de Hausdorff . . . . .	67
3.2. Completez del espacio $\mathcal{H}(X)$ . . . . .	73
3.3. Ejercicios . . . . .	83

<b>4. Sistemas iterados de funciones</b>	<b>85</b>
4.1. Sistema Iterado de Funciones (SIF), atractor de un SIF . . . . .	85
4.2. SIF's con condensación . . . . .	89
4.3. La función de direccionamiento . . . . .	91
4.4. Sobre el triángulo de Sierpiński . . . . .	98
4.4.1. SIF's triangulares y una caracterización de $\mathcal{S}$ . . . . .	100
4.4.2. $\mathcal{S}$ es mucho más de lo que parece . . . . .	107
4.4.3. Una caracterización de $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ . . . . .	109
4.5. Transformaciones geométricas del atractor de un SIF en el plano . . . . .	113
4.5.1. Transformación de similaridad, homotecia centrada en el origen . . . . .	113
4.5.2. Traslado del atractor de un SIF . . . . .	118
4.5.3. SIF rígido y rotación del atractor de un SIF rígido . . . . .	119
4.6. Ejercicios . . . . .	121
<b>5. Breve visita a los sistemas dinámicos discretos</b>	<b>125</b>
5.1. Dinámica de las funciones lineales en $\mathbb{R}$ . . . . .	126
5.2. La dinámica se complica: <b>la Tienda</b> . . . . .	129
5.3. Puntos periódicos y el teorema de Sharkovskii . . . . .	130
5.4. Transitividad topológica . . . . .	135
5.5. La definición de caos según R. L. Devaney . . . . .	138
5.6. El conjunto de los puntos atrapados . . . . .	141
5.7. Equivalencia topológica . . . . .	149
5.8. Conjuntos invariantes repulsores . . . . .	151
5.9. Un ejemplo en el plano . . . . .	153
5.10. Ejercicios y algunos comentarios . . . . .	156
<b>6. Talleres</b>	<b>159</b>
Taller 1: Manejo básico de WinLogo . . . . .	160
Taller 2: Creando Fractales con WinLogo . . . . .	164
Taller 3: Transformaciones afines y autosemejanza—Parte <b>I</b> . . . . .	168
Taller 4: Transformaciones afines y autosemejanza—Parte <b>II</b> . . . . .	172
Taller 5: El juego de la semilla y la producción . . . . .	176
Taller 6: Generando fractales con FRACLIN . . . . .	178
Taller 7: Movimientos del atractor de un SIF . . . . .	180
<b>A. La desigualdad de Cauchy–Schwarz</b>	<b>181</b>
<b>B. Algunas propiedades del conjunto de Cantor</b>	<b>183</b>
<b>C. Algunas propiedades del triángulo de Sierpiński</b>	<b>185</b>
<b>Lecturas recomendadas</b>	<b>187</b>

# Introducción

El creciente interés e importancia que existe actualmente en diversos campos de la ciencia por la geometría fractal y sus muy diversas aplicaciones, conlleva a la necesidad de divulgar los conceptos básicos de esta geometría entre los estudiantes de ciencias e ingenierías de nuestras universidades. En el presente texto se pretende hacer un acercamiento a los fractales por el camino de los Sistemas Iterados de Funciones (SIF's) y por consiguiente estudiando formalmente la noción de autosimilitud (o autosemejanza) en el contexto de los espacios métricos, haciendo énfasis en el tratamiento formal y riguroso de los conceptos y teoremas de la matemática que sustentan esta teoría y proponiendo talleres para ser desarrollados por los estudiantes y haciendo uso, en algunos de ellos, de un programa computacional.

La geometría fractal nace en la década de los setenta del siglo pasado y se enmarca en las áreas del análisis matemático, la geometría, la topología y la matemática aplicada. Por otra parte, dado que en esta geometría la interacción con el computador es indispensable, dadas también las muy diversas aplicaciones que se le vienen encontrando, y dada la vistosidad de las figuras que en ella se estudian y su proximidad con objetos y fenómenos de la naturaleza, se puede afirmar que los fractales constituyen actualmente una interesante alternativa de trabajo en el campo de la educación matemática.

En el ámbito de la Universidad Industrial de Santander (UIS) se ha venido impartiendo desde el año 1992 y de manera casi ininterrumpida, un curso de introducción a la geometría fractal como contenido de la asignatura Geometría Moderna, ofrecida por la Escuela de Matemáticas. El texto que aquí presentamos corresponde en buena parte a la recopilación, análisis y organización de las “notas de clase” de dicho curso, recopilación, análisis y organización que han sido posibles gracias al año sabático que la UIS concedió a la autora durante el año 2007.

El presente trabajo ha sido escrito con el objetivo de servir como texto guía para el desarrollo de un curso de introducción a la geometría fractal a nivel universitario y con un tratamiento formal desde el punto de vista matemático. Pretendemos de esta manera contribuir a la divulgación, estudio e investigación de la geometría fractal en la UIS y también, por qué no, en universidades de otras latitudes de habla hispana. Existen ya actualmente varios libros introductorios a la geometría fractal, sin embargo la mayoría de ellos son principalmente de

tipo divulgativo, y los que hacen un tratamiento más formal están en el idioma inglés.

Por otra parte se incluyen en nuestro texto algunos resultados originales como el ejemplo de una bola no convexa (Ejemplo 2.3.11(7)) obtenido por el profesor G. Arenas (ver [2]); también en el capítulo 4, más exactamente en la sección 4.4 aparecen algunos resultados relativos al ya muy conocido triángulo de Sierpiński. La idea esencial de la Proposición 4.4.19 es debida al excelente matemático, especialista en Sistemas Dinámicos, colega y amigo el Dr. Héctor Méndez Lango, profesor de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), quien como parte de su año sabático, estuvo acompañándonos durante los meses de agosto de 2007 a enero de 2008, realizando una estancia académica en la UIS. El Dr. Méndez Lango es además autor del capítulo 5 del presente texto, como lo comentaremos de nuevo más adelante. La Proposición 4.4.13 es debida al también excelente matemático, colega y amigo, el profesor Heber Mesa Palomino, distinguido egresado de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS, M.Sc. de la Universidad del Valle (UNIVALLE) y actualmente profesor en la UNIVALLE; dicha proposición es parte de su trabajo de monografía de la Licenciatura (ver [25]) y aparece también publicado en [26].

Además, en el trabajo que estamos aquí presentando, el orden y tratamiento de algunos temas se desarrollan de manera un poco diferente a como se hace en la mayoría de los textos; este desarrollo un poco diferente se basa principalmente en la experiencia que hemos tenido con los estudiantes de los diversos cursos que se han impartido desde el año 1992. De esta manera esperamos que todo lo anteriormente expresado justifique plenamente la presentación de este trabajo.

Hemos distribuido nuestra exposición en seis capítulos. El primer capítulo “*Generalidades*” se ha escrito a manera de introducción al tema, presentando algunas ideas muy generales pero también básicas y por tanto muy importantes. Algunos datos históricos interesantes no solo proporcionan una breve reseña histórica de la geometría fractal, sino que aportan elementos que ayudan a entender el proceso de gestación, nacimiento y evolución que ha venido teniendo este tipo de geometría. También en este capítulo nos detenemos un poco en hacer una descripción informal de cuatro fractales clásicos: el conjunto de Cantor, la carpeta de Sierpiński, la curva de Koch y la esponja de Menger, esto principalmente con el ánimo de ilustrar varias de las ideas generales presentadas.

En el segundo capítulo “*Nociones de espacios métricos*” pasamos a abordar directamente los conceptos y resultados formales de lo que podríamos llamar “la topología de los espacios métricos”, y que se van a necesitar para los capítulos siguientes. Es aquí donde un estudiante que ha aprobado ya un curso de análisis matemático, tendría cierta ventaja. Sin embargo, procuramos hacer el desarrollo de este capítulo muy detalladamente, pensando que los estudiantes sólo han visto un primer curso de cálculo. En todo caso corresponde a cada profesor determinar, de acuerdo al nivel en que se encuentren sus alumnos, el ritmo y profundidad con

que desarrollaría este capítulo.

Habiendo estudiado las nociones y resultados básicos de la teoría de los espacios métricos, iniciamos, en el capítulo tres “*El espacio  $(\mathcal{H}(X), h)$ : el espacio donde viven los fractales*” el estudio de un espacio métrico en particular: es el espacio que M. Barnsley (ver [5, 4]), uno de los pioneros en el estudio de la geometría fractal ha llamado “el espacio donde viven los fractales” y que es en realidad un hiperespacio en cuanto sus “puntos” son los subespacios compactos no vacíos de un espacio métrico completo.

El capítulo cuatro “*Sistemas iterados de funciones*” es de gran importancia pues por una parte constituye la justificación de los capítulos anteriores, es decir prácticamente toda la teoría que se ha visto hasta el capítulo tres, se incluye porque se necesita para la completa y cabal comprensión del capítulo cuatro, y por otra parte en este capítulo se expone con todo detalle, el proceso de construcción de fractales mediante SIF’s, lo cual a su vez permite presentar una definición plenamente formal desde el punto de vista matemático, de la noción de autosemejanza. Se incluye además en este capítulo una sección dedicada exclusivamente a la ubicua curva triangular de Sierpiński, y hacia el final, una sección titulada “*Transformaciones geométricas del atractor de un SIF en el plano*”, la cual, aunque tal vez no es tan importante como las anteriores, no deja de ser interesante, pues muestra cómo se puede cambiar el tamaño o girar o desplazar un fractal en el plano, lo cual puede ser muy útil desde el punto de vista computacional. Es importante resaltar aquí que esta sección corresponde al tema de trabajo de monografía de una estudiante egresada de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS (ver [31]), trabajo que realizó bajo la orientación del profesor Rafael Isaacs, colega nuestro en la Escuela de Matemáticas, y destacado integrante del Grupo Fractales.

El capítulo cinco “*Breve visita a los sistemas dinámicos discretos*” se ha incluido por la estrecha relación que existe entre los fractales y los sistemas dinámicos en cuanto estos últimos proporcionan otro “método” para obtener fractales. Como ya se comentó anteriormente, este capítulo ha sido elaborado por el Dr. Héctor Méndez Lango, quien durante su estancia en nuestra Escuela de Matemáticas, orientó la mayoría de las sesiones semanales de nuestro seminario de Fractales y con quien además tuvimos otras muy agradables reuniones de trabajo.

Finalmente se proponen varios talleres en el capítulo seis, para ser desarrollados paralelamente a la teoría de la siguiente forma: los talleres **1** a **5** apoyan y complementan los tres primeros capítulos, mientras que los talleres **6** y **7** corresponderían a los capítulos **4** y **5**. Debemos mencionar aquí, que buena parte de estos talleres fue elaborada junto con el profesor Rafael Isaacs, y que otra parte se basa en el trabajo de monografía de una estudiante egresada de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS (ver [7]).

Incluimos además en cada capítulo, excepto en el último, una lista de ejercicios, y al final tres pequeños apéndices que en algún momento consideramos necesarios.

Queremos agradecer muy profunda y sinceramente a varias personas y entidades que contribuyeron en una u otra forma con la elaboración y buen término de este trabajo: la UIS, la Escuela de Matemáticas, todos los estudiantes que en algún momento de su carrera tomaron el curso de Geometría Moderna, todos los asistentes y participantes, permanentes y pasajeros, del Seminario de Fractales que venimos realizando hace ya varios años en la Escuela de Matemáticas de la UIS, también a Leidy Yadira Velasco y Camilo Ramírez, quienes colaboraron con la digitación de parte del presente documento.

Esperamos entonces que el material que estamos ofreciendo se convierta en una buena alternativa de apoyo para el desarrollo de un curso introductorio de geometría fractal a nivel universitario.

Los autores

Bucaramanga, diciembre de 2009

# Capítulo 1

## Generalidades

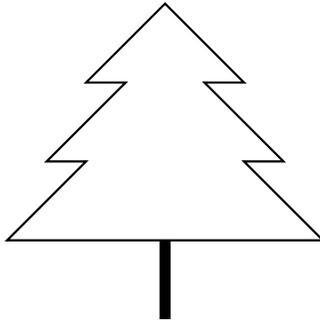
### 1.1. Introducción

Naturalmente podemos ubicar la geometría fractal en ese gran continente del mundo de la matemática llamado geometría, junto a la geometría proyectiva, la geometría euclidiana, las no euclidianas y la topología. La palabra geometría viene del griego *geo*: tierra y *metrein*: medir. La geometría euclidiana es la geometría clásica que empezamos a estudiar desde la escuela primaria; es punto de partida para las otras clases de geometría y la primera en orden cronológico. Casi tan antigua como el hombre mismo, dado que su gestación es, en buena parte, consecuencia de la necesidad e inquietud natural del ser humano por conocer, analizar y medir lo que encuentra en el mundo, la geometría en general busca, de una u otra manera, el modelar objetos y fenómenos de la naturaleza; hallar un orden en el universo.

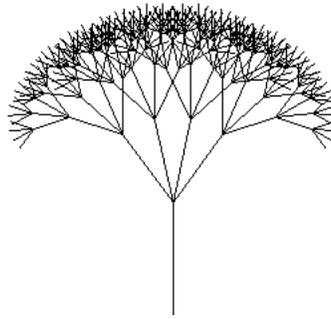
Sin embargo las formas y figuras que estudia la geometría euclidiana son bastante ideales, suaves, regulares, es decir más bien alejadas de lo que realmente se encuentra en la naturaleza. Como afirma el propio B. Mandelbrot, considerado padre de los fractales:

*“Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las líneas costeras no son circunferencias y la corteza de un árbol no es lisa, como tampoco es cierto que la luz viaje en línea recta”.* (B. Mandelbrot, [22]).

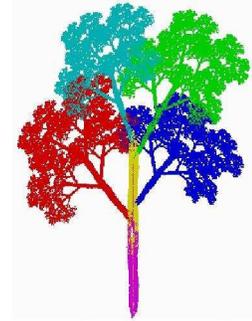
La geometría fractal pretende acercarse un poco más a las formas, objetos y fenómenos de la naturaleza; de hecho uno de los libros clásicos de B. Mandelbrot lleva el sugestivo título: “The Fractal Geometry of Nature” [22]. Pensemos por ejemplo en un árbol. Quizá una representación aproximada de un árbol, usando figuras de la geometría euclidiana, sería como la que se muestra en la Figura 1.1, mientras que usando los principios básicos de la geometría fractal, una representación de un árbol sería como la de la Figura 1.2. La Figura 1.3 corresponde a una representación de un árbol, obtenida (computacionalmente), aplicando el método que explicaremos en el capítulo 4 del presente libro.



**Figura 1.1:** Geometría euclidiana

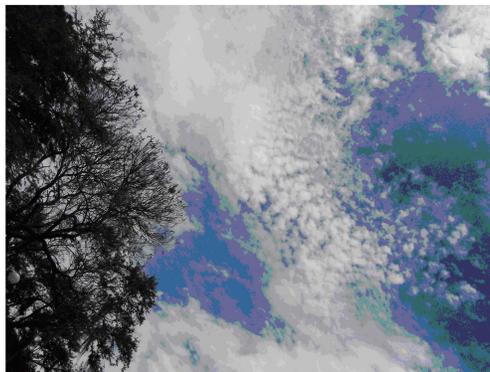


**Figura 1.2:** Geometría fractal



**Figura 1.3:** Árbol fractal

Justamente esta característica (la de constituir una geometría más cercana a la naturaleza), es una de las razones por las cuales la geometría fractal actualmente llama la atención. Existen, en nuestro concepto, al menos otros tres atractivos que posee esta geometría a saber: la belleza o vistosidad de las figuras que estudia, las numerosas aplicaciones que se le vienen encontrando en muy diversas ramas de la ciencia y aún del arte (física, biología, química, geología, medicina, pintura, arquitectura, música, literatura, diseño, entre otras), y por otra parte, dado que constituye un área de estudio relativamente nueva, se encuentra aún en ella una buena cantidad de problemas abiertos y preguntas sin respuestas conocidas, hecho que por sí sólo constituye un fuerte atractivo para quien se precie de ser un amante de la matemática.



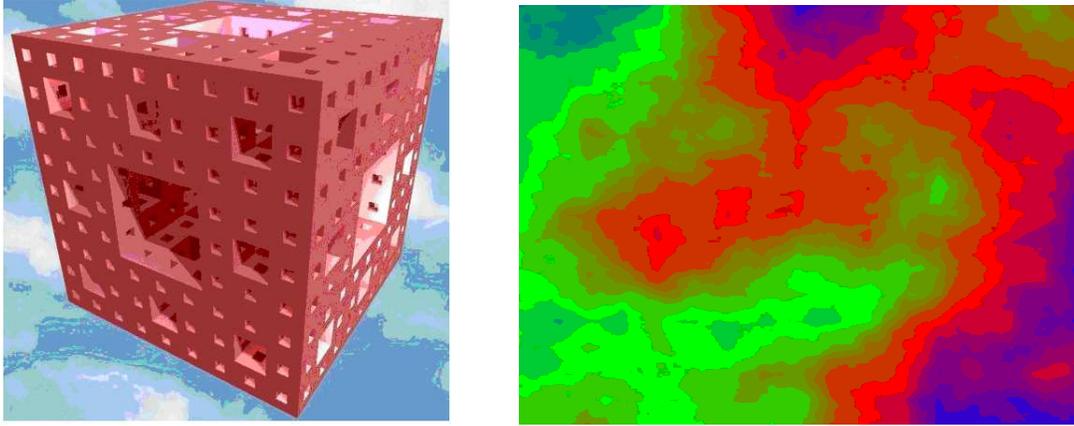
**Figura 1.4:** Fractales en la naturaleza.

Bien, pero, ¿qué es un fractal?; debemos aclarar en primer lugar, que aún NO existe una definición formal (desde el punto de vista matemático) y universalmente aceptada de lo que es un fractal. En [23], el primer gran ensayo en el que Mandelbrot expone su teoría de los fractales, y que constituye por tanto un documento histórico, el padre de los fractales incluye, en el capítulo 13, una lista de neologismos, de la cual extraemos los siguientes:

**Escalante.** *Adj. Dícese de una figura geométrica o de un objeto natural cuyas partes tienen la misma forma o estructura que el todo, salvo que están a diferente escala y pueden*



Figura 1.5: Fractales en el arte.



**Figura 1.6:** Fractales en la matemática.

*estar ligeramente deformadas. Advertencia: El término *scaling*, tomado del inglés, está ya tan arraigado que es mejor no alejarse demasiado de él buscando un neologismo que lo sustituya.*

**Fractal.** *Adj. Sentido intuitivo. Que tiene una forma, bien sea sumamente irregular, bien sumamente interrumpida o fragmentada, y sigue siendo así a cualquier escala que se produzca el examen. Que contiene elementos distintivos cuyas escalas son muy variadas y cubren una gama muy amplia. Razones de su necesidad: Desde hará unos cien años, los matemáticos se habían ocupado de algunos de esos conjuntos, pero no habían edificado ninguna teoría acerca de ellos, y no habían necesitado, por lo tanto, ni la necesidad de un término específico para designarlos. Una vez que el autor ha demostrado que en la naturaleza abundan objetos cuyas mejores representaciones son conjuntos fractales, es necesario disponer de una palabra apropiada que no sea compartida con ningún otro significado.*

**Fractal.** *n.f. Configuración fractal; conjunto u objeto fractal. Advertencia: La palabra fractal no distingue, adrede, entre conjuntos matemáticos (la teoría) y objetos naturales (la realidad): se emplea en los casos en que su generalidad, y la ambigüedad deliberada que resulta de ello sean bien deseadas, bien aclaradas por el contexto, o no lleven inconvenientes asociados.*

**Dimensión fractal.** *Sentido genérico: Número que sirve para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto geométrico o de un objeto natural. La dimensión fractal no es necesariamente entera. Sentido específico: Se aplica a veces a la dimensión de Hausdorff y Besicovitch, pero ya no se recomienda tal uso.*

**Conjunto fractal.** *Definición provisional. Conjunto cuya dimensión fractal es mayor o igual*

*que su dimensión ordinaria (topológica).*

**Objeto fractal.** *Objeto natural que resulta razonablemente útil representarlo matemáticamente por un conjunto fractal.*

Es claro que ninguno de los neologismos anteriores, salvo el de conjunto fractal, corresponde a una definición formal desde el punto de vista matemático. Y es que en verdad Mandelbrot hace un tratamiento muy informal de su teoría. Por ejemplo en relación con la definición misma del término fractal, escribe:

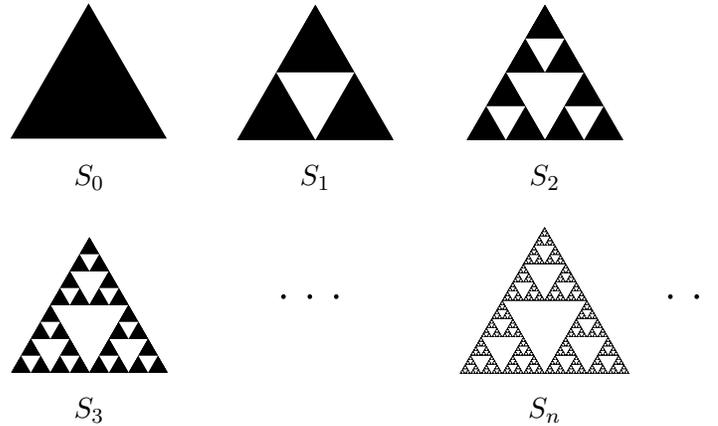
*“¿Hace falta definir de manera rigurosa lo que es una figura fractal para luego decir que un objeto real es fractal si lo es la figura que conforma su modelo? pensando que tal formalismo sería prematuro, he adoptado un método distinto basado en una caracterización abierta, intuitiva, y procediendo por toques sucesivos.” [23, pág. 13]*

Ciertamente existen dos propiedades fundamentales que de alguna forma identifican lo que es un fractal y son: la autosimilitud (o autosemejanza) y la dimensión “extraña”. Lo que haremos en lo que resta de esta sección, es intentar explicar en qué consisten estas dos propiedades, a partir de un ejemplo concreto, para finalmente mostrar una definición tentativa del término fractal.

### 1.1.1. La autosimilitud

Consideremos un triángulo cualquiera junto con su interior, es decir “relleno”. Unamos los puntos medios de los lados del triángulo de modo que su interior queda dividido en cuatro triángulos, de los cuales eliminamos el triángulo central. En cada uno de los tres triángulos que quedan repetimos la misma construcción (unir los puntos medios de los lados y eliminar el triángulo central) obteniéndose nueve triangulitos, (véase la Figura 1.7), en cada uno de los cuales repetimos la construcción para obtener 27 triangulitos y así sucesivamente. De esta manera obtenemos una sucesión de figuras  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n \dots$  y la “última” figura es la que se conoce con el nombre de **triángulo de Sierpiński**.

En realidad no es correcto decir la “última” figura puesto que, en teoría, el proceso de construcción descrito anteriormente nunca va a terminar, sin embargo la sucesión de figuras si parece “acercarse” a una figura en particular y es posible y correcto hablar de la “figura límite”, que intuitivamente es la figura hacia la cual tiende o se acerca nuestra sucesión  $(S_n)_n$ . Uno de los objetivos del presente texto es proporcionar una definición formal de lo que aquí estamos llamando figura límite y obtenerla efectivamente como el límite matemático de una cierta sucesión en un cierto espacio métrico; esto lo haremos en el capítulo cuatro y se necesitará para ello todo el contenido de los dos capítulos anteriores. Sin embargo sí podemos



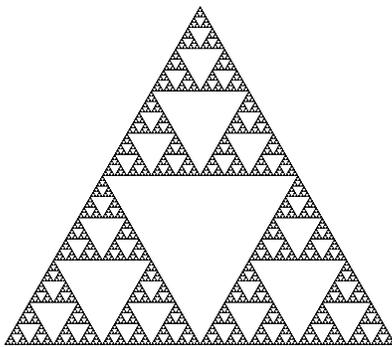
**Figura 1.7:** Construcción geométrica del triángulo de Sierpiński.

en este momento definir formalmente el triángulo de Sierpiński, como conjunto, mediante la intersección de la familia  $\{S_n\}_n$ , es decir, si notamos  $\mathcal{S}$  al triángulo de Sierpiński, entonces definimos,

$$\mathcal{S} := \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Este fractal lleva su nombre en honor al matemático polaco Waclaw Sierpiński<sup>1</sup> quien lo presentó en el año 1916 (véase [34]).

Aunque hay infinitos pasos en la construcción del conjunto  $\mathcal{S}$ , ya a partir de los pasos 4 o 5 se empieza a tener una idea clara de cómo es la figura límite y en pocos pasos posteriores ya no se perciben diferencias, a simple vista, entre un paso y el siguiente.



**Figura 1.8:** Triángulo de Sierpiński

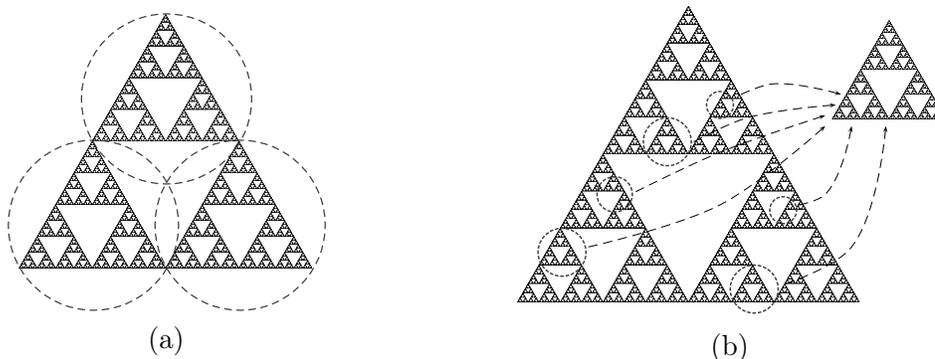
Una buena representación de cómo sería la figura límite o triángulo de Sierpiński  $\mathcal{S}$ , se muestra en la Figura 1.8. Ahora, observando detenidamente este conjunto, inmediatamente se aprecian en él “muchísimas” copias más pequeñas de sí mismo. En realidad si recordamos el proceso de construcción de  $\mathcal{S}$  concluimos que son infinitas copias. De esta forma podemos afirmar que el triángulo de Sierpiński *está formado por infinitas copias de sí mismo, solo que reducidas y colocadas en diferente posición*. Esta propiedad es llamada autosimilitud o autosemejanza y es la primera propiedad que debemos destacar como una propiedad esencial de los fractales.

La noción intuitiva de autosemejanza en realidad es muy sencilla y natural; muy seguramente todos la hemos percibido en algún momento y de alguna manera en muy diversos contextos: por

<sup>1</sup>SIERPIŃSKI Waclaw (1882–1969). Matemático polaco, nacido en Varsovia. Miembro fundador de la escuela matemática polaca moderna, junto con Janiszewski y Mazurkiewicz, que contribuyó al progreso de la teoría de conjuntos y de la topología y favoreció la consolidación de los fundamentos lógicos de las matemáticas. Llevó a cabo importantes investigaciones sobre teoría de números.

ejemplo al observar diferentes objetos de la naturaleza como algunas clases de plantas, árboles, una cabeza de coliflor o una de brócoli, las nubes, las olas del mar, un relámpago, entre muchos otros. Se encuentra también, claro está, en el contexto de las matemáticas: algunas fracciones continuas, conjuntos cuyos elementos son conjuntos, filtros cuyos elementos son filtros, la categoría de las categorías, la estructura algebraica de  $\text{Top}(X)^2$ , y numerosos conjuntos, hoy ejemplos clásicos de conjuntos autosemejantes como el triángulo de Sierpiński, del cual ya algo hablamos, o el conjunto de Cantor, la curva de Koch, el tetraedro de Sierpiński, la esponja de Menger, de los cuales hablaremos un poco más adelante. En todos los entes anteriores se percibe de alguna forma y en mayor o menor grado la siguiente característica: *el todo esta formado por varias copias de sí mismo, sólo que reducidas y puestas en diferente posición*; o, dicho de otra manera: *el todo es igual a sus partes, salvo un factor de escala*.

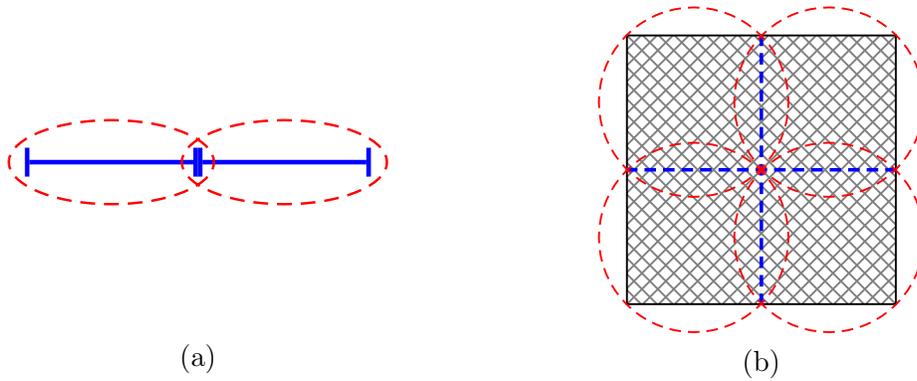
Volviendo a nuestro triángulo de Sierpiński, es claro que de las infinitas copias que  $\mathcal{S}$  contiene de sí mismo, hay tres de ellas que son “maximales” (véase la Figura 1.9(a)). Cada una de estas tres copias está a su vez formada por otras tres subcopias, y cada una de estas por tres “subsubcopias” etc. etc. Otra manera de visualizar la propiedad de autosemejanza es imaginando que se pone una lupa o efecto de “zoom” en cualquier parte o región de  $\mathcal{S}$ , y observar que, no importa lo pequeña que sea la región observada, siempre se encontrará una copia reducida del conjunto total  $\mathcal{S}$  (Figura 1.9(b)).



**Figura 1.9:** Autosimilitud en el triángulo de Sierpiński.

Sin embargo notemos que un conjunto de la geometría clásica euclidiana también puede ser autosemejante; por ejemplo un segmento de recta se puede ver como la unión de dos copias de sí mismo, o un cuadrado como la unión de cuatro copias de sí mismo, como se puede apreciar en la Figura 1.10. Entonces, ¿en dónde radica la diferencia entre los objetos de la geometría fractal y los objetos de la geometría euclidiana clásica? Aquí es donde abordaremos la segunda propiedad esencial de los fractales.

<sup>2</sup>Muy posiblemente aquí aparecen algunos conceptos desconocidos para el estudiante. La idea es que investigue algo al respecto ya sea consultando en libros o preguntándole al profesor.

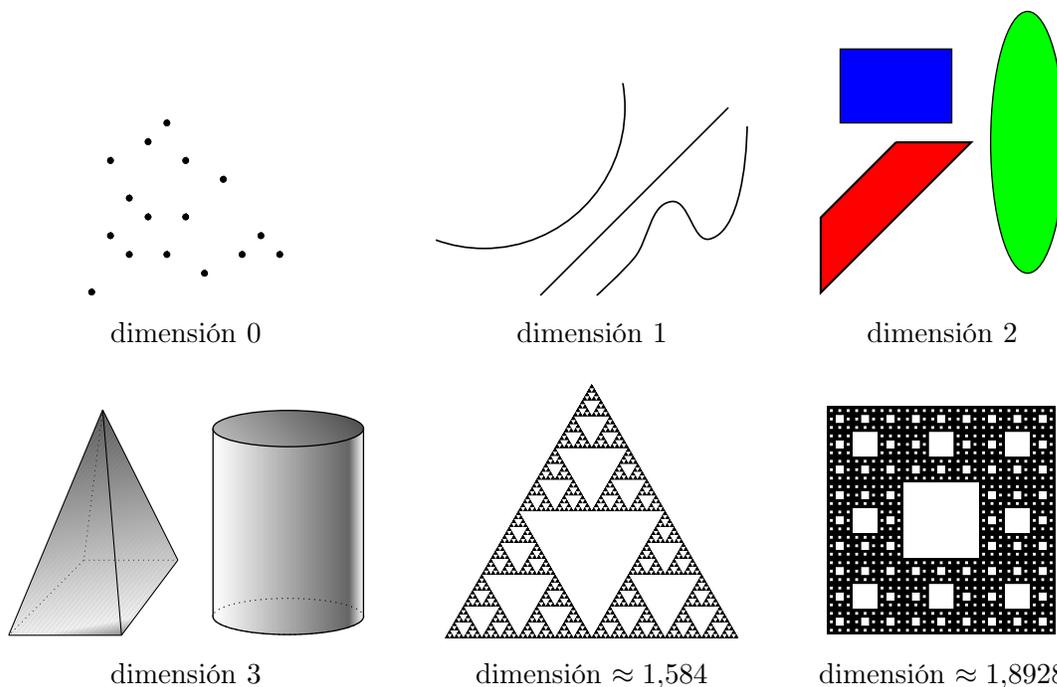


(a) (b)  
**Figura 1.10:** Autosimilitud en un segmento y en un cuadrado.

### 1.1.2. La dimensión extraña

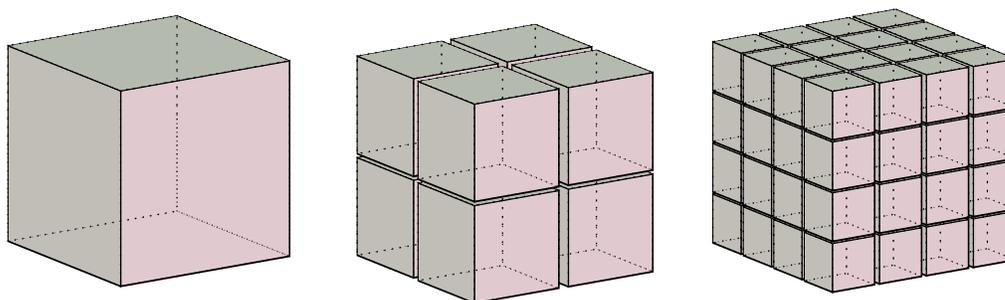
Para la mayoría de las personas, de acuerdo a lo aprendido en la escuela primaria y secundaria, es intuitivamente claro y natural que las figuras o conjuntos geométricos tienen dimensión 0, 1, 2 o 3. Así un punto o un conjunto discreto de puntos tiene dimensión 0, una línea dimensión 1, una figura en el plano como un cuadrado o un triángulo (con su interior) tiene dimensión 2, y las figuras en el espacio como una esfera o un cubo tienen dimensión 3. En principio, para la mayoría de las personas éstas serían las únicas posibilidades que puede tomar el valor de la dimensión de un objeto o ente geométrico. ¿Qué pensaría usted si le dijeran que un conjunto tiene dimensión 0,458?, o dimensión 1,753, por ejemplo? Seguramente le parecería al menos un poco extraño. Pues bien, nuestro triángulo de Sierpiński tiene dimensión aproximadamente igual a 1,584 (más exactamente su dimensión es  $\ln 3 / \ln 2$ ). Justificar plenamente esta afirmación requeriría tener unos buenos conocimientos de teoría de la medida y teoría de la dimensión, que ciertamente constituyen campos relativamente “sofisticados” de la matemática, fuera del alcance del presente texto.

Intentaremos de todas maneras, dar una pequeña explicación que al menos nos aproxime un poco a este fenómeno. En primer lugar debemos aclarar que existen varias clases de dimensión; por ejemplo la dimensión topológica, la dimensión de Hausdorff y la llamada precisamente dimensión fractal. Analicemos un poco lo que ocurre con un segmento o con un cuadrado. El segmento lo podemos “romper” en dos segmentos congruentes, y cada uno de ellos se puede ampliar por un factor de 2 para obtener el segmento original (ver Figura 1.10(a)). Claro que también se puede romper en 4 segmentos congruentes de modo que cada uno de ellos al ampliarlo por un factor de 4, reproduce el original y, en general podríamos romper el segmento en  $n$  segmentos congruentes y con un factor de ampliación de  $n$ , obtener el segmento original. El caso de un cuadrado es un poco diferente. Podemos descomponer un cuadrado en 4 cuadrados congruentes y el factor de la ampliación es 2 (Figura 1.10(b)). Alternativamente podemos descomponer el cuadrado en 9 cuadrados congruentes con el factor de ampliación



**Figura 1.11:** Algunos objetos y su dimensión.

3, o 25 pedazos con factor 5. Así, en general el cuadrado se puede descomponer en  $n^2$  copias de sí mismo, cada una de las cuales se puede ampliar por un factor  $n$  para alcanzar la figura original. Finalmente podemos descomponer un cubo en  $n^3$  “pedazos iguales”, cada uno de los cuales tiene factor de ampliación  $n$  (ver Figura 1.12).



**Figura 1.12:** Autosimilitud en un cubo.

En todos los casos se cumple la siguiente “fórmula”,

$$n^D = N$$

donde  $n$  es el factor de ampliación,  $N$  el número de copias y  $D$  la dimensión. En consecuencia,

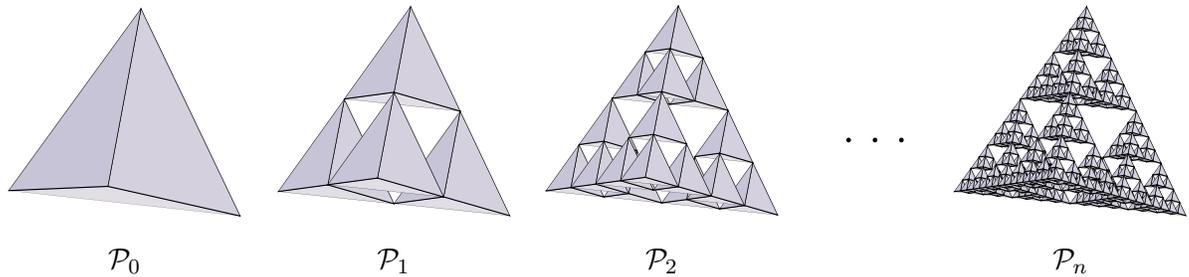
$$D = \frac{\ln N}{\ln n} = \frac{\ln(\text{número de copias semejantes a la figura original})}{\ln(\text{factor de ampliación para obtener la figura original})}. \quad (1.1)$$

Así, para nuestro triángulo de Sierpiński tenemos que  $N = 3$  y  $n = 2$ , y por tanto,

$$D_S = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,584.$$

De esta manera  $1 < D_S < 2$ , lo que puede interpretarse como que el triángulo de Sierpiński no es exactamente ni una curva clásica, ni una superficie, sino “algo intermedio” entre estos dos entes; expresado de manera informal e intuitiva,  $\mathcal{S}$  llena el espacio más que una curva clásica, pero menos que una superficie.

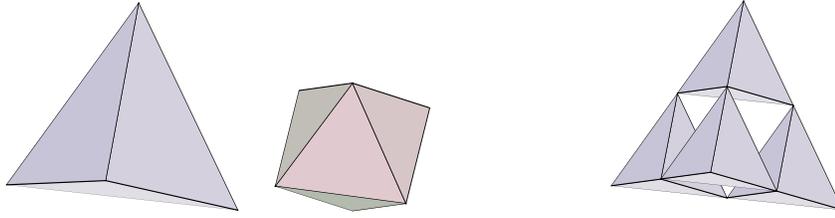
Sin embargo, teniendo en cuenta que una buena cantidad de personas piensa que todos los fractales tienen dimensión no entera, debemos en este momento hacer una aclaración importante. Consideremos un fractal también clásico y que podría verse de alguna manera como la versión en  $\mathbb{R}^3$  del triángulo de Sierpiński, se llama justamente la *pirámide o tetraedro de Sierpiński* y lo notaremos  $\mathcal{P}$ . Se construye como sigue: tomemos un tetraedro regular  $\mathcal{P}_0$  con longitud de arista  $a$ . Ubiquemos los puntos medios de cada arista y conectémoslos. Conservamos los cuatro nuevos tetraedros formados por los vértices y removemos el restante de  $\mathcal{P}_0$  (octaedro de longitud de arista  $a/2$ ). La figura obtenida consta de cuatro tetraedros semejantes a  $\mathcal{P}_0$ , figura que denotaremos  $\mathcal{P}_1$ . El proceso se repite para cada tetraedro semejante a  $\mathcal{P}_0$  es decir se ubican los puntos medios de cada arista (en cada tetraedro por separado), y se conectan. Conservamos los 16 tetraedros de arista  $a/4$  formados en este proceso y removemos lo restante (cuatro octaedros de arista  $a/4$ ).



**Figura 1.13:** Construcción geométrica de la pirámide de Sierpiński

Obsérvese que para obtener el primer paso  $\mathcal{P}_1$  de la construcción anterior hemos quitado del tetraedro un octaedro como se muestra en la Figura 1.14.

La figura obtenida la llamaremos  $\mathcal{P}_2$ , así sucesivamente construiremos  $\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5, \dots$  lo cual nos genera una sucesión  $(\mathcal{P}_n)_n$  de figuras cuya “figura límite”, (en el mismo sentido en que la describimos para el triángulo de Sierpiński), la llamaremos la pirámide o tetraedro de Sierpiński y la notaremos como ya lo escribimos con la letra  $\mathcal{P}$ . Claramente nuestra pirámide de Sierpiński es autosemejante; podemos identificar en ella cuatro copias maximales de sí misma, siendo 2 el factor de ampliación para obtener de cada copia maximal el conjunto total.



**Figura 1.14:** Primer paso de la construcción de la pirámide de Sierpiński

Aplicando entonces (1.1) a nuestro fractal  $\mathcal{P}$ , tenemos

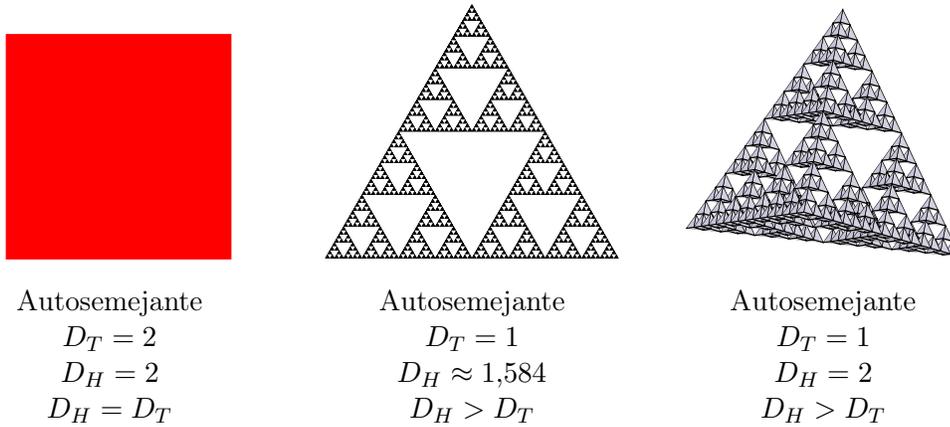
$$D_{\mathcal{P}} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2.$$

Lo que “muestra”, quizá sorpresivamente, que no todos los conjuntos de tipo fractal tienen dimensión no entera. Pero entonces estaríamos regresando a la pregunta planteada al final de la sección anterior: ¿en donde radica la diferencia entre los objetos de la geometría fractal y los objetos de la geometría euclidiana clásica? Veamos: decíamos antes que existen varias clases de dimensión, entre ellas una llamada dimensión topológica y otra llamada dimensión de Hausdorff y no entraremos a definir tales conceptos así que el lector tendrá que hacer un “acto de fé” y creer que en el caso de un segmento las dos dimensiones (la topológica y la de Hausdorff) coinciden en el valor de 1, en el cuadrado también coinciden pero en el valor de 2, para el triángulo de Sierpiński la dimensión topológica es 1 mientras que la de Hausdorff es  $\ln 3 / \ln 2$ , y para la pirámide de Sierpiński la dimensión topológica también es 1, mientras que la de Hausdorff es 2. Lo que ocurre, en el caso de los conjuntos que tienen características fractales, es que su dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica, y hecha esta observación, pasamos entonces a escribir una definición relativamente aceptable, aunque todavía no plenamente formal, desde el punto de vista matemático:

*Un fractal es un conjunto autosemejante y cuya dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica.*

## 1.2. Algunos datos históricos

La mención explícita quizá más remota en la historia sobre el fenómeno de autosemejanza, se remonta al siglo V a. de J.C. al examinar las ideas del filósofo jonio **Anaxágoras de Clazoméne** (¿500?-428 a. de J.C.). Según Anaxágoras, el universo fué un caos de innumerables semillas (*spermata*), al cual la mente (*nus*), mediante un movimiento de rotación (*perichoresis*), dió orden y forma. Estas “semillas” no son elementos pues *cada una es tan compleja como el todo*. La alusión a la autosemejanza es clara, según Anaxágoras, “*todo el universo*



**Figura 1.15:** En estas figuras  $D_T$  significa dimensión topológica y  $D_H$ , dimensión de Hausdorff.

y sus partes, por pequeñas que sean, son homogéneas; sus diferencias son sólo diferencia de tamaño, no de composición”. Así cada semilla o *spermata*, no es más simple que el resto, ni esencialmente distinta en su composición ([33, pag. 297]).

Ejemplos de conjuntos autosemejantes se conocen desde hace mucho tiempo. A una buena parte de ellos se les denomina actualmente conjuntos fractales. La prehistoria de este tipo de conjuntos se remonta a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, con el descubrimiento de fenómenos como el movimiento browniano y de conjuntos “extraños” o situaciones que en esa época fueron consideradas “patológicas”, tales como *el conjunto de Cantor* (1883), *el triángulo de Sierpiński* (1916), *las funciones continuas y nunca diferenciables* (1872), *la curva de Von Koch* (1904), *las curvas de Peano que llenan el espacio* (1890), entre otros. En el momento de aparecer este tipo de conjuntos y fenómenos, muchos de ellos fueron subestimados y sencillamente “dejados a un lado”. En 1919 **Hausdorff**<sup>3</sup> proporciona la herramienta fundamental para medir estos conjuntos tan particulares, al introducir lo que hoy se conoce como **medidas y dimensión de Hausdorff** y durante la década de los veinte se sigue desarrollando la teoría geométrica de la medida, cuyo papel es fundamental en el estudio de este tipo de conjuntos. En 1918 **Gaston Julia** (1893-1978) publica sus trabajos sobre sistemas dinámicos complejos y lo mismo hace en 1926 el matemático francés **Pierre Joseph Louis Fatou** (1878-1929). En los años veinte los trabajos de Julia y Fatou fueron de reconocida importancia, pero posteriormente quedaron en el olvido hasta que, en la década de los setenta **Benoit Mandelbrot** (1924- ), rescata dichos trabajos con la ayuda importante de los computadores. Basado en estos trabajos y en ejemplos como los que mencionamos anteriormente, Mandelbrot logra, con una visión particular muy geométrica, detectar ciertas características comunes, (autoseme-

<sup>3</sup>Félix Hausdorff (1868–1942) Topólogo alemán, estableció los fundamentos de la topología general; desarrolló las nociones básicas de límite, continuidad, conexión y compacidad, piezas fundamentales de muchas estructuras matemáticas, una de sus ideas revolucionarias fué la de espacio de dimensión no entera. Fué también filósofo y escritor.

janza, dimensión extraña), en objetos, situaciones y fenómenos de naturaleza muy diversa: el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la curva de Koch, el movimiento browniano, las curvas de Peano, la medición de la longitud de una costa (en este caso fueron importantes los trabajos de **Lewis Fry Richardson**), las fluctuaciones en las líneas de transmisión de datos entre ordenadores, la turbulencia en fluidos, la distribución de las galaxias en el universo, las variaciones de los precios en la bolsa de valores, etc., etc. Crea entonces el término “fractal” para agrupar bajo él esta gran variedad de fenómenos, y expone sus ideas y teorías al respecto principalmente en dos libros que son quizá sus dos obras más importantes en lo que se refiere a la geometría fractal: *Les Objets Fractals: Forme, hasard et dimension* [21] y *The Fractal Geometry of Nature* [22]. El primero, publicado en 1975, es un ensayo en el cual, a través de una serie de pequeños capítulos sobre diversos temas de la ciencia, Mandelbrot expone las ideas fundamentales de sus teorías acerca de los fractales (irregularidad, azar, autosimilitud, dimensión fractal, etc.). En una de las traducciones al español de este libro [23], Mandelbrot cita a **Perrin**, quien en 1913 había escrito lo siguiente:

*“... Todos sabemos como, antes de dar una definición rigurosa, se hace observar a los principiantes que ellos mismos tienen ya la idea de continuidad. Se traza ante ellos una curva bien clara, y se dice, aplicando una regla contra su contorno: “Veis como en cada punto hay una tangente”. O también, para sentar la noción más abstracta de la verdadera velocidad de un móvil en un punto de su trayectoria, se dirá: “Estáis de acuerdo, verdad, con que la velocidad media entre dos puntos próximos de esta trayectoria acaba por no variar apreciablemente cuando dichos puntos se acercan entre sí indefinidamente”. Y, en efecto, son muchos los que, recordando que para ciertos movimientos usuales parece que es así, no ven que esto entraña grandes dificultades.*

*Los matemáticos, sin embargo, han comprendido muy bien la falta de rigor de estas consideraciones geométricas, y lo pueril de, por ejemplo, intentar demostrar, trazando una curva, que toda función continua admite una derivada. Si bien las funciones derivables son las más simples, las más fáciles de manejar, constituyen a su vez, la excepción; o bien, si se prefiere un lenguaje geométrico, las curvas que no admiten tangente son la regla, y las curvas regulares, tales como el círculo, son casos interesantísimos, pero particularísimos ... .. Y como ocurre la mayoría de las veces, aquellos a quienes se habla de curvas sin tangente o de funciones sin derivada empiezan pensando que la naturaleza no presenta tales complicaciones y que, evidentemente, no nos sugiere esas ideas. Sin embargo, lo cierto es lo contrario, y la lógica de los matemáticos les ha mantenido más cerca de la realidad que las representaciones prácticas empleadas por los físicos ... .. Observamos, por ejemplo, uno de esos copos blancos que se obtienen al salar el agua jabonosa.*

*De lejos, su contorno puede parecer claro, pero tan pronto como uno se acerca un poco, esa claridad desaparece. El ojo no consigue ya determinar la tangente en un punto cualquiera: una recta que lo pareciera a primera vista, pareciera también, con un poco más de atención, perpendicular u oblicua al contorno. Si uno toma una lupa, o un microscopio, la incertidumbre no se desvanece, pues cada vez que se incrementa el aumento, se ven aparecer nuevas anfractuosidades, sin que se llegue nunca a sentir la impresión tranquilizadora y clara que da, por ejemplo, una bola de acero pulido. De manera que si dicha bola da una idea útil de la continuidad clásica, lógicamente también nuestro copo puede sugerir la noción más general de las funciones continuas sin derivada.*

*Y lo que hay que tener muy en cuenta es que la incertidumbre en la posición del plano tangente en un punto del contorno no es de hecho del mismo orden que la incertidumbre que habría para determinar la tangente en un punto del litoral de Bretaña, según se utilizara para ello un mapa de tal o cual escala. Según la escala, la tangente cambiaría, pero cada vez habría una. El mapa es un dibujo convencional, en el que, por la propia construcción, cada línea tiene tangente. Por el contrario, la característica esencial de nuestro copo (igual que el resto del litoral, si en vez de estudiarlo con un mapa se lo mirara directamente de más o menos lejos) es que, a cualquier escala, se suponen, sin verlos del todo bien, detalles que impiden definitivamente determinar una tangente.*

*Seguiremos aún en la realidad experimental si, mirando por el microscopio, observamos el movimiento browniano que agita cualquier pequeña partícula en suspensión en un fluido. Para fijar una tangente a su trayectoria, tendríamos que encontrar un límite, por lo menos aproximado, a la dirección de la recta que une las posiciones de dicha partícula en dos instantes sucesivos muy próximos. Ahora bien, hasta donde permite llegar la experiencia, esta dirección varía localmente cuando se disminuye el tiempo transcurrido entre ambos instantes. De modo que lo que este análisis sugiere al observador sin prejuicios es la función sin derivada y no, en absoluto, la curva con tangente ...". [23, pág. 15–16].*

Aunque Mandelbrot cita a Perrin, aclara también que fué la obra de **Norbert Wiener**, su principal fuente de inspiración. Veamos lo que exactamente escribe Mandelbrot al respecto:

*“... Dejemos la lectura de Perrin (que se puede continuar en *Les Atomes*, o en mi edición de 1975), para describir la importancia histórica de estas últimas observaciones. Hacia 1920 deberían trastornar al joven Norbert Wiener y lo estimularían en la construcción de su modelo probabilístico del movimiento browniano. Hablaremos mucho de ello en este ensayo. Y desde ahora tomaremos de Wiener un térmi-*

*no al que tenía afición para denominar una forma extrema del desorden natural. La palabra es “caos” y nos permite apreciar que Perrin hizo dos observaciones distintas. Por una parte, que la geometría de la naturaleza es caótica y está mal representada por el orden perfecto de las formas usuales de Euclides o del cálculo diferencial. Por otra parte, que dicha geometría más bien evoca la complicación de las matemáticas creadas hacia 1900. Desgraciadamente, la influencia de estas observaciones de Perrin parece haber terminado con su efecto sobre Wiener. Es la obra de Wiener la que ha sido mi principal fuente de inspiración, y la filosofía de Perrin no me ha llegado más que cuando este ensayo estaba siendo sometido a las últimas correcciones. Como ocurre a veces, el dominio fractal había emergido (sin nombre) cuando abordé ciertos fenómenos caóticos completamente modestos por medio de técnicas matemáticas reputadas de “avanzadas”, con las que el azar me había familiarizado . . . ”. [23, pag. 17–18].*

Este libro *Les Objets Fractals: Forme, hasard et dimension*. [21], muy informal, poco riguroso y dirigido a públicos dispares, finalmente genera una especie de “explosión” de publicaciones, investigaciones y discusiones alrededor de los fractales en diversos campos de la ciencia. Constituye, como ya se había anotado, una de las principales obras de Mandelbrot, y un documento histórico.

El segundo libro, *The Fractal Geometry of Nature* reemplaza ampliamente su ensayo original de 1975, conserva aproximadamente el mismo estilo de *Los Objetos Fractales* aunque abarca más temas y constituye también una obra fundamental de Mandelbrot.

Por supuesto existen esfuerzos importantes de formalización matemática y elaboración de una teoría unificada de los fractales. En particular en relación con la noción de autosemejanza **John E. Hutchinson**, en 1981 publica su artículo *Fractals and Self-Similarity* [18], en el cual, a partir de las ideas de B. Mandelbrot expone una teoría muy formal y bien fundamentada de los que él llama conjuntos estrictamente autosimilares. Allí hace un estudio riguroso de la noción de autosimilitud en espacios métricos, usando conceptos y herramientas de la teoría de la medida. Es este un artículo muy importante en lo que a geometría fractal se refiere, puesto que constituye uno de los trabajos pioneros formales y rigurosos en cuanto al tratamiento matemático del tema.

A partir de este artículo, y usando las definiciones allí establecidas, se genera una enorme cantidad de trabajos y publicaciones alrededor de los fractales, sus aplicaciones y la noción de autosimilitud; para el lector interesado mencionamos en las referencias varias de estas publicaciones.

### 1.3. Cuatro ejemplos clásicos de conjuntos fractales

En esta sección presentamos una descripción muy general de cuatro conjuntos que ocupan un lugar destacado en la familia de los fractales.

#### 1.3.1. El conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor es un ejemplo clásico de conjunto no numerable con el mismo cardinal del continuo, pero a pesar de ello tiene longitud nula. Fué presentado por el matemático Georg Cantor<sup>4</sup> en 1883. Se construye como sigue:

Partimos del intervalo unidad  $C = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Dividimos dicho intervalo en tres partes iguales descartamos la parte central y consideramos los dos intervalos cerrados de los extremos (Figura 1.16)

$$C_{11} = [0, 1/3], \quad C_{12} = [2/3, 1]$$

cada uno de ellos de longitud  $1/3$ .

Cada uno de estos intervalos se divide a su vez en tres intervalos iguales. Descartamos los intervalos centrales que resultan de tal división y consideramos los cuatro intervalos cerrados

$$C_{21} = [0, 1/9], \quad C_{22} = [2/9, 1/3], \quad C_{23} = [2/3, 7/9], \quad C_{24} = [8/9, 1]$$

cada uno de ellos de longitud  $1/9$ .

Si continuamos indefinidamente de esta forma, en la etapa  $j$ -ésima habremos obtenido  $2^j$  intervalos cerrados  $C_{jk}, k = 1, 2, \dots, 2^j$  cada uno de ellos de longitud  $3^{-j}$ .



**Figura 1.16:** Descripción de la construcción del *conjunto de Cantor*.

Para cada  $j = 1, 2, \dots$  sea

$$C_j = \bigcup_{k=1}^{2^j} C_{jk}.$$

Observamos que los conjuntos  $C_j, j = 1, 2, \dots$  forman una sucesión decreciente, eso es

$$C_{j+1} \subset C_j, \quad \forall j.$$

<sup>4</sup>CANTOR Georg (1854-1918). Matemático alemán de origen ruso. Se le considera el creador de la llamada teoría de conjuntos y de la teoría de números transfinitos. Su obra impulsó una revisión en profundidad de los fundamentos de las matemáticas.

El “conjunto límite” de este proceso, es decir:

$$\mathcal{C} = \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$$

se denomina *conjunto ternario de Cantor*.

Aunque en este caso la “figura límite” no es tan vistosa como por ejemplo para el caso del triángulo de Sierpiński descrito en la primera sección de este capítulo, el conjunto de Cantor constituye un ejemplo muy importante en matemáticas, particularmente en análisis y topología. Es claro que  $\mathcal{C}$  está formado por dos copias maximales de sí mismo (autosimilitud) y que cada copia debe ser multiplicada por un factor de 3 para restablecer todo el conjunto  $\mathcal{C}$ . De esta manera su dimensión de Hausdorff está dada por

$$D_H = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63093,$$

y por otra parte la dimensión topológica  $D_T$  de  $\mathcal{C}$ , es cero, de modo que se cumple la condición  $D_H > D_T$ .

En el Apéndice B se establecen algunas propiedades del conjunto de Cantor.

### 1.3.2. La carpeta de Sierpiński

La carpeta de Sierpiński se forma partiendo de un cuadrado (con su interior), que se divide en nueve cuadrados iguales y se descarta el cuadrado central; después a cada uno de los ocho cuadrados que quedan se le aplica el mismo proceso, y así sucesivamente (ver Figura 1.17). Se obtiene la sucesión de figuras  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_k, \dots$  y se define la carpeta de Sierpiński  $\mathcal{A}$  por

$$\mathcal{A} = \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathcal{A}_j$$

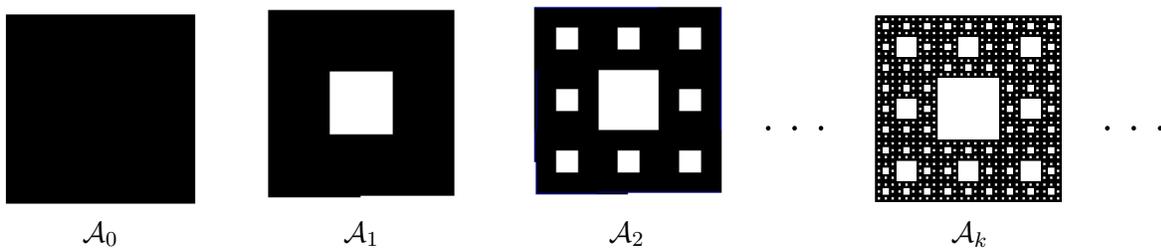


Figura 1.17: Descripción de la construcción de la *carpeta de Sierpiński*.

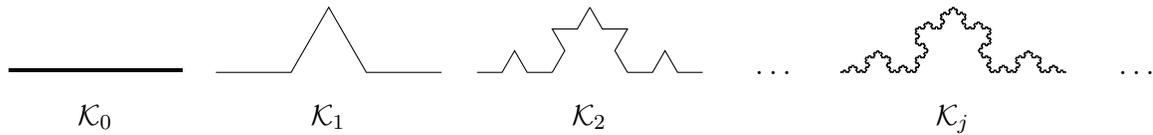
En cuanto a la autosemejanza es claro que  $\mathcal{A}$  está formado por 8 copias maximales de sí misma, con un factor de ampliación 3, luego su dimensión de Hausdorff es,

$$D_H = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,89279$$

mientras que su dimensión topológica es 1, así, se tiene que  $D_H > D_T$ . Recordando que la dimensión del triángulo de Sierpiński es aproximadamente 1,584, podríamos afirmar que la carpeta  $\mathcal{A}$ , “llena” un poco más el espacio que el triángulo  $\mathcal{S}$ .

### 1.3.3. La curva de Koch

La curva de Koch debe su nombre al matemático Helge Von Koch<sup>5</sup> quien la construyó por primera vez en 1904. Se forma partiendo de un segmento unidad  $\mathcal{K}_0$ , el cual se divide en tres partes iguales. La parte central se sustituye por dos segmentos del mismo tamaño que el eliminado, que junto con dicha parte anulada, formaría un triángulo equilátero; se obtiene así la poligonal  $\mathcal{K}_1$  (ver Figura 1.18). A continuación se repite el proceso por cada segmento formado y se obtiene entonces una sucesión  $(\mathcal{K}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ . El “límite” de esta sucesión, denotado  $\mathcal{K}$ , se llama *curva de Koch*.



**Figura 1.18:** Descripción de la construcción de la *curva de Koch*.

Nuevamente se percibe la autosimilitud de la figura límite y se detectan cuatro copias máximas y un factor de ampliación igual a tres, de modo que su dimensión de Hausdorff es

$$D_H = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26186$$

mientras que la dimensión topológica es  $D_T = 1$ .

### 1.3.4. La esponja de Menger

Este bonito fractal creado por Karl Menger<sup>6</sup> en 1926, se puede pensar como una versión en  $\mathbb{R}^3$  de la carpeta de Sierpiński. Se construye partiendo de un cubo  $\mathcal{M}_0$ , el cual se divide en 27 cubitos y se elimina el cubito central de cada cara y el que queda en exactamente el centro del cubo, es decir en total se eliminan 7 cubitos, quedando 20 y obteniéndose  $\mathcal{M}_1$  (ver

<sup>5</sup>KOCH Helge Von (1870-1924) matemático sueco, nacido en Estocolmo. Tras los estudios de escuela elemental acudió a estudiar matemáticas en la Universidad de Estocolmo con el famoso matemático sueco Magnus Gösta Mittag-Leffler, quien fue su guía y consejero. Von Koch escribió muchos artículos sobre teoría de números.

<sup>6</sup>MENGER Karl (1902-1985). Matemático austriaco nacido en Viena. Elaboró una importante teoría de curvas y de dimensión. Su libro: “Dimension theorie” publicado en 1928, constituye un documento histórico. Estuvo interesado en la economía, hizo contribuciones a la mecánica cuántica, en 1951 introdujo el concepto de “conjunto confuso” que fué redescubierto posteriormente y renombrado “conjunto difuso”. Intentó una reforma del cálculo y se caracterizó por su espíritu original e independiente.

Figura 1.19). En cada uno de los 20 cubitos que quedan se repite el mismo proceso (dividir en 27 cubitos y eliminar 7) y así sucesivamente. Se obtiene la sucesión de figuras  $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_j, \dots$  y se define la esponja  $\mathcal{M}$  por

$$\mathcal{M} = \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}_j$$

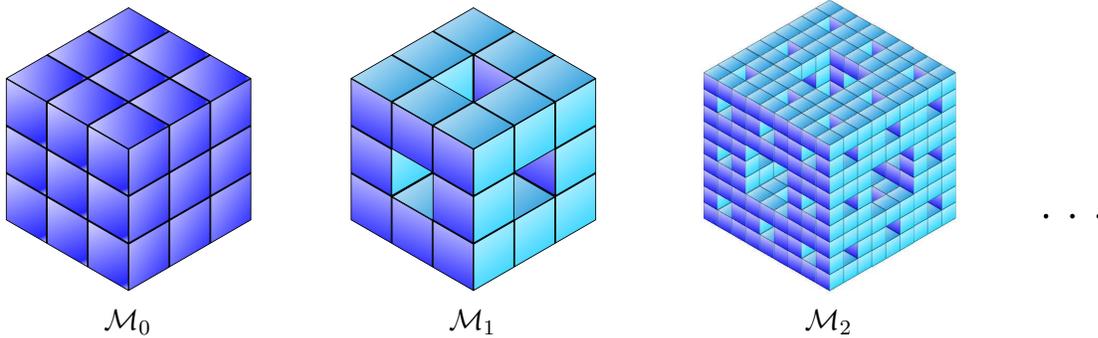


Figura 1.19: Descripción de la construcción de la esponja de Menger.

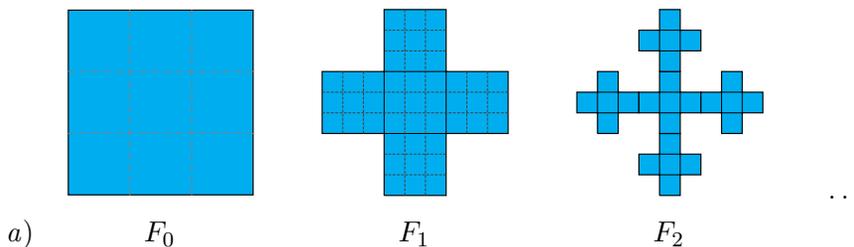
En cuanto a la autosemejanza es claro que  $\mathcal{M}$  está formado por 20 copias maximales de sí misma, con un factor de ampliación 3, luego su dimensión de Hausdorff es,

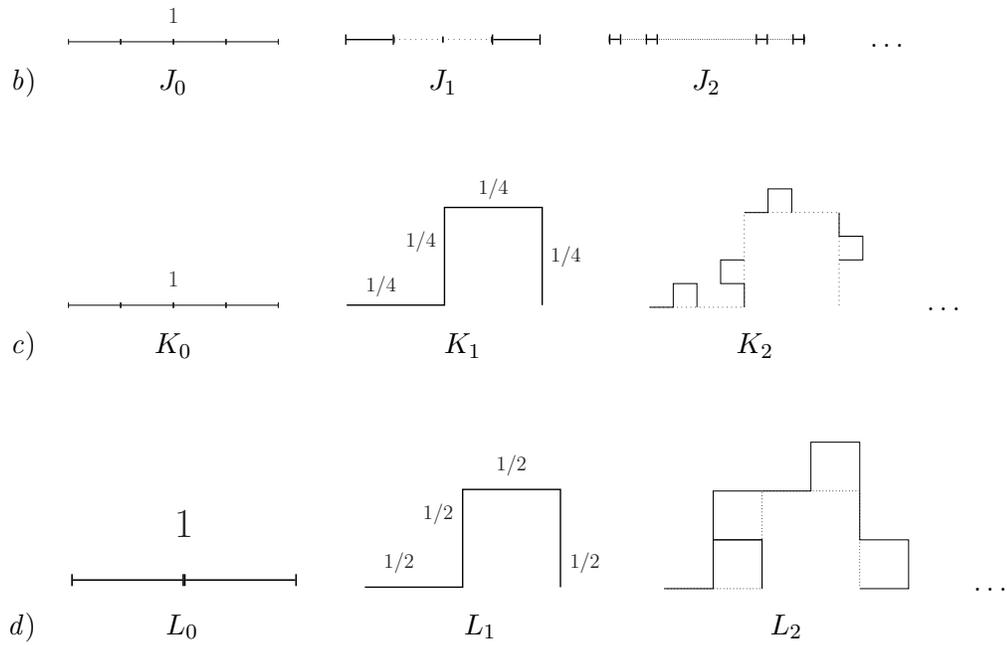
$$D_H = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2,7268$$

mientras que su dimensión topológica es 2, así que de nuevo  $D_H > D_T$ . Este valor 2,7268 nos indicaría que  $\mathcal{M}$  no es una superficie, pero tampoco es un sólido, sino algo intermedio entre ellos.

### 1.4. Ejercicios

1. Dé al menos tres ejemplos (distintos a los que se mencionan en este capítulo), de objetos o fenómenos de la naturaleza que en su opinión sean autosemejantes.
2. Para cada una de las siguientes sucesiones de figuras, haga un dibujo aproximado de la “figura límite”, analice su autosemejanza y calcule su dimensión de Hausdorff:





3. Discuta con sus compañeros el siguiente párrafo (tomado de [29]):

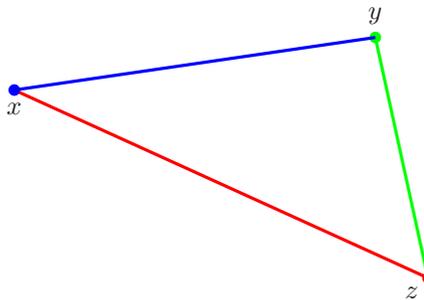
*“Enraizadas profundamente en la realidad, el arte y la matemática comparten la libertad absoluta de la abstracción. En vaivén constante entre imaginación y realidad, tanto el artista como el matemático se ocupan en construir signos siempre cambiantes que intentan captar y expresar lo vislumbrado.”*

## Capítulo 2

# Nociones de espacios métricos

La historia de la matemática nos muestra cómo, hacia finales del siglo XIX, uno de los problemas principales en los fundamentos del análisis, era formalizar la idea de que “algo”, estuviese arbitrariamente cerca de otro “algo”: la idea de magnitudes tan pequeñas como se quisiera, (noción además muy importantes en el cálculo y la geometría). Esto claramente involucra el concepto de distancia, ya que la posibilidad de medir distancias, permite distinguir entre puntos cercanos y lejanos.

Intuitivamente un espacio métrico es un conjunto en el cual tiene sentido “medir distancias”, es decir en el cual, dados dos elementos cualesquiera del conjunto, digamos  $x$  e  $y$ , entonces se puede calcular la “distancia entre” ellos, que notaremos  $d(x, y)$ . Naturalmente se esperaría que  $d(x, y)$  sea un número real positivo, o podría ser igual a cero en el caso (extremo) en que  $x = y$  y solamente en este caso. Otra propiedad importante del número  $d(x, y)$  es que es igual al número  $d(y, x)$  (es claro que, por ejemplo, la distancia que hay entre Bogotá y Bucaramanga, es igual a la distancia que hay entre Bucaramanga y Bogotá).



**Figura 2.1:** Desigualdad triangular.

Por otra parte, recordando un teorema de la geometría euclidiana, según el cual en todo triángulo cada lado es menor que la suma de los otros dos, podemos escribir:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \quad (\text{ver Figura 2.1}).$$

Esta desigualdad se conoce con el nombre de desigualdad triangular (¿Cuándo se cumple la igualdad?).

Formalizamos en el presente capítulo el concepto de distancia y otros conceptos relacionados.

## 2.1. Definición y ejemplos

**Definición 2.1.1** (Espacio métrico). Un **espacio métrico** es un conjunto no vacío  $X$ , de objetos que llamaremos **puntos**, dotado de una función

$$\begin{aligned} d: X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned}$$

(llamada **métrica** o **distancia** en el espacio), que satisface los dos siguientes axiomas:

$$\text{EM1: } \forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

$$\text{EM2: } \forall x, y, z \in X, d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z).$$

Usando estos axiomas se puede probar (Ejercicio 2.9.1) que, no importa cuáles sean los puntos  $x, y, z \in X$ , se cumple  $d(x, y) \geq 0$  (la distancia es no negativa),  $d(x, y) = d(y, x)$  (simetría) y  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (desigualdad triangular).

### Ejemplo 2.1.2.

1. El conjunto de los números reales con la distancia definida por  $d_u(x, y) := |x - y|$  (**distancia usual** o **euclidiana** sobre  $\mathbb{R}$ ) forma el espacio métrico  $(\mathbb{R}, d_u)$ , llamado **espacio euclídeo de una dimensión**. En efecto: sean  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\text{EM1: } d_u(x, y) = |x - y| = 0 \iff |x - y| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y.$$

EM2:

$$\begin{aligned} d_u(x, y) &= |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \\ &\leq |x - z| + |z - y| \\ &= |x - z| + |y - z| \\ &= d_u(x, z) + d_u(y, z). \end{aligned}$$

2. En general sobre un conjunto podemos definir varias distancias, por ejemplo, sobre el conjunto de los números reales además de la distancia usual podemos definir la distancia  $d_{\ln}$  por:

$$d_{\ln}(x, y) := \ln(1 + |x - y|);$$

o podemos definir la distancia  $m$  por  $m(x, y) := |x^3 - y^3|$ . No es difícil verificar que  $(\mathbb{R}, d_{\ln})$  y  $(\mathbb{R}, m)$  son espacios métricos (Ejercicio 2.9.2).

3. El conjunto de parejas ordenadas de números reales,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  (o  $\mathbb{R}^2$ ) con la distancia

$$d_u((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2},$$

llamada **distancia usual** o **euclidiana** sobre  $\mathbb{R}^2$ , se denomina **espacio euclídeo de dos dimensiones**,  $(\mathbb{R}^2, d_u)$ . Veamos que en efecto  $d_u$  es una métrica.

EM1: Para cualesquiera  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$  tenemos

$$\begin{aligned} d_u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (y_1 - x_1)^2 = (y_2 - x_2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow y_1 = x_1 \wedge y_2 = x_2 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}. \end{aligned}$$

EM2: Para probar la desigualdad triangular haremos uso de otra desigualdad conocida como la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*, cuya demostración puede consultarse en el Anexo A, y que establece:

Para cualesquiera  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  se cumple

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2). \quad (\text{Desigualdad de Cauchy-Schwarz})$$

De esta desigualdad es inmediato que:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq |a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}. \quad (2.1)$$

Por otra parte tenemos:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 &= (a_1^2 + a_2^2) + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) + (b_1^2 + b_2^2) \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2) + 2 \left( \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \right) + (b_1^2 + b_2^2); \quad \text{usando (2.1)} \\ &= \left( \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \right)^2. \end{aligned}$$

De esta manera, tomando  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$  y  $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$  elementos cualesquiera de  $\mathbb{R}^2$  y tomando además:  $a_1 = z_1 - x_1$ ,  $a_2 = z_2 - x_2$ ,  $b_1 = y_1 - z_1$  y  $b_2 = y_2 - z_2$ , tenemos:  $a_1 + b_1 = y_1 - x_1$  y  $a_2 + b_2 = y_2 - x_2$ , y por tanto:

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \leq \left( \sqrt{(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2} \right)^2$$

de donde

$$\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \leq \sqrt{(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}$$

es decir:  $d_u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_u(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d_u(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ , como se quería ver.  $\square$

Los ejemplos 1 y 3 ( $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^2$ ) se pueden generalizar para obtener el espacio euclídeo de  $n$  dimensiones, siendo

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Considere  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$d_u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (2.2)$$

En adelante siempre que hablemos de  $\mathbb{R}^n$  como espacio métrico, sin especificar la métrica, se entenderá que es la métrica  $d_u$  definida en (2.2) y llamada la **distancia usual** o **euclidiana** sobre  $\mathbb{R}^n$ .

4. Tomando un conjunto arbitrario  $X$ , se define para  $x, y \in X$ ,

$$d_{disc}(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y, \end{cases}$$

entonces  $(X, d_{disc})$  es un espacio métrico denominado *espacio métrico discreto*, (ejercicio 3).

5. El *espacio de los códigos*<sup>1</sup>. Sean  $N$  un entero positivo fijo y  $\Sigma = \{1, 2, \dots, N\}$

$$\Sigma^{\mathbb{N}} := \{\mathbf{x} = x_1x_2x_3 \dots \mid x_i \in \Sigma, i \in \mathbb{N}\}.$$

Los elementos de  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  los llamaremos *códigos* o *palabras semi-infinitas*.

**Ilustración:** si  $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ , un elemento de  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  sería por ejemplo:

$$\mathbf{x} = 2113231231313131 \dots = 21132312\overline{31} \in \Sigma^{\mathbb{N}}.$$

La barra sobre los números indica que ese “grupito” de números se repetirá indefinidamente (periodo).

Ahora, en  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  se define la distancia entre los códigos  $\mathbf{x} = x_1x_2x_3 \dots$  e  $\mathbf{y} = y_1y_2y_3 \dots$  por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i}. \quad (2.3)$$

**Ilustración:** si  $\mathbf{x} = 21\overline{2}$ ,  $\mathbf{y} = 321\overline{3}$  son códigos en  $\{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$  entonces

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{|2-3|}{4} + \frac{|1-2|}{4^2} + \frac{|2-1|}{4^3} + \frac{|2-3|}{4^4} + \frac{|2-3|}{4^5} + \dots \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{1-1/4} - 1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Para estudiantes que han visto los conceptos básicos de series.

Veamos que en efecto  $d$  es una métrica sobre  $\Sigma^{\mathbb{N}}$ . En primer lugar debemos probar que la serie en (2.3) es siempre convergente. Como  $1 \leq x_i, y_i \leq N$ , para todo  $i = 1, 2, 3, \dots$ , entonces  $|x_i - y_i| < N$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ , luego

$$\frac{|x_i - y_i|}{(N + 1)^i} < \frac{N}{(N + 1)^i},$$

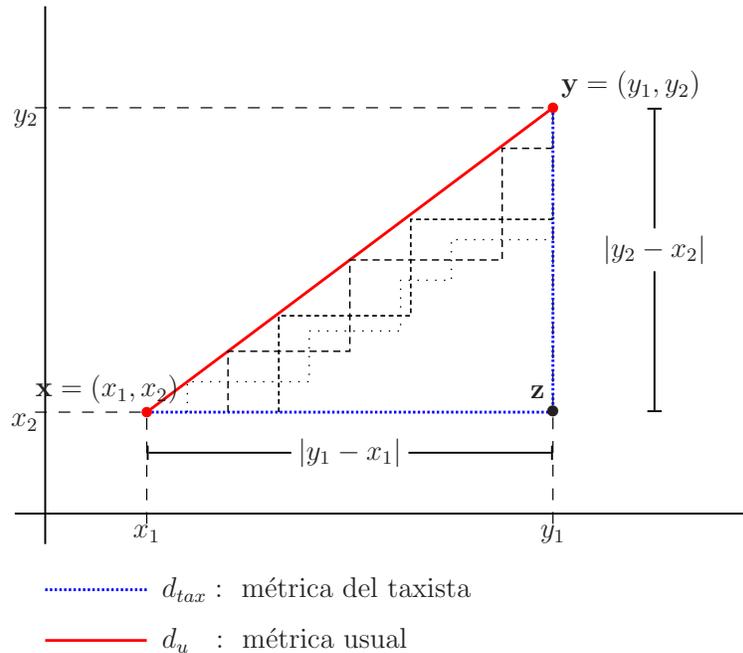
lo que implica

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N + 1)^i} < N \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(N + 1)^i}$$

y basta entonces usar el criterio de comparación para concluir que  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  siempre existe. Las propiedades (EM1) y (EM2) se demuestran fácilmente y lo dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 2.9.4).

6. Obsérvese que la métrica usual en  $\mathbb{R}^2$  (Ejemplo 3), en efecto mide la distancia en el sentido cotidiano usual de distancia que separa los puntos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , (esto es consecuencia del teorema de Pitágoras), es decir calcula la medida del segmento que une dichos puntos. Sin embargo, pensemos en  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  como dos puntos en el plano de una ciudad. Si tomamos un taxi en el punto  $\mathbf{x}$  para trasladarnos hasta el punto  $\mathbf{y}$ , la trayectoria del taxi difícilmente será el segmento que une los dos puntos ya que el taxi tendrá que desplazarse por “calles y carreras”, de manera que la distancia total recorrida será la suma de las medidas de los segmentos  $\overline{\mathbf{x}\mathbf{z}}$  y  $\overline{\mathbf{z}\mathbf{y}}$  como en la Figura 2.2, lo que podemos escribir así:

$$d_{tax}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|. \tag{2.4}$$



**Figura 2.2:** Comparación entre métrica usual y métrica del taxista.

Se puede probar entonces (Ejercicio 2.9.5) que (2.4) define una métrica en  $\mathbb{R}^2$ , que llamaremos la **métrica del taxista**.

7. En el conjunto de parejas ordenadas de números reales,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  (o  $\mathbb{R}^2$ ), se define el **producto interior** entre dos elementos  $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  como

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

se define también la norma de un elemento  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  como

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

y el **ángulo**  $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  **entre**  $\mathbf{x}$  **e**  $\mathbf{y}$  como

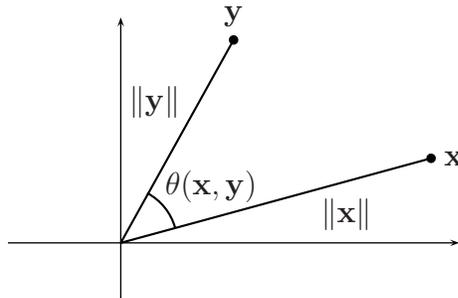
$$\theta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto \theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} 0, & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}; \\ \pi/2, & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{0} \vee \mathbf{y} = \mathbf{0}; \\ \arccos \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}, & \text{si } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \wedge \mathbf{y} \neq \mathbf{0}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Utilizando las definiciones anteriores introducimos la métrica  $d_*$  como sigue:

$$d_* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto d_*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \left| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \right| + \theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2.6)$$



**Figura 2.3:** La métrica  $d_*$ .

Verifiquemos que la métrica  $d_*$  está correctamente definida.

- EM1: 1) Si  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , de (2.6) se sigue inmediatamente que  $d_*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ .
- 2) Si  $d_*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , entonces  $\left| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \right| + \theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , pero como cada término de la suma es no negativo, si su suma da 0 es porque cada uno de ellos es 0, y por lo tanto  $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ , por un lado, y por otro  $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$  para algún  $\alpha > 0$ , así que  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

EM2: Demostremos que

$$d_*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_*(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d_*(\mathbf{y}, \mathbf{z}). \quad (2.7)$$

En efecto, observemos primero que si  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$  con el producto interior definido, se tiene la desigualdad

$$\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \theta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \theta(\mathbf{y}, \mathbf{z}). \quad (2.8)$$

Aplicando (2.8) en (2.6) tenemos

$$\begin{aligned} d_*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \left| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \right| + \theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\leq \left| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{z}\| \right| + \theta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \left| \|\mathbf{y}\| - \|\mathbf{z}\| \right| + \theta(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ &= d_*(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d_*(\mathbf{y}, \mathbf{z}). \end{aligned}$$

Por tanto, se satisface la desigualdad (2.7).

Por consiguiente, de *EM1* y *EM2* tenemos que  $(\mathbb{R}^2, d_*)$  es un espacio métrico correctamente definido.

### 2.1.1. Subespacio métrico

Dado un espacio métrico cualquiera  $(X, d)$ , él automáticamente determina una gran cantidad de espacios métricos ya que cada  $S \subseteq X$ , “hereda” la estructura de espacio métrico, al restringir a  $S$ , la métrica definida en  $X$ .

Más exactamente tenemos lo siguiente:

**Definición–Afirmación 2.1.3** (Subespacio métrico). Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $S \subseteq X$ . La función  $d$  restringida a  $S \times S$ ,  $d|_S$ , es una métrica y el espacio  $(S, d|_S)$  se llama *subespacio métrico*.

$$\begin{aligned} d: X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y), \end{aligned}$$

como  $S \subseteq X$ , entonces  $S \times S \subseteq X \times X$ ,

$$\begin{aligned} d|_S: S \times S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d|_S(x, y) = d(x, y). \end{aligned}$$

*Demostración.* Es inmediato que si  $d$  satisface (EM1) y (EM2) en  $X$ , entonces siguen satisfaciéndose estos axiomas en  $S \subseteq X$ . □

**Ejemplo 2.1.4.** Sea  $X = \mathbb{R}^2$  con la métrica usual y  $S = [0, 1] \times [0, 1]$ .  $(S, d_u)$  es un subespacio métrico de  $(\mathbb{R}^2, d_u)$ .

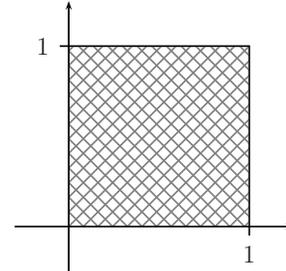


Figura 2.4:  $S = [0, 1] \times [0, 1]$

## 2.2. Noción de convergencia

El concepto de sucesión será muy importante en nuestro trabajo. Intuitivamente una sucesión es una “lista ordenada” de elementos u objetos, por ejemplo:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$



Formalmente una **sucesión** en  $X$  es una función  $s : \mathbb{N} \rightarrow X$ . Por ejemplo  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $s(n) := \frac{1}{n}$ . Como lo que más nos interesa de esta función son los valores que va tomando, es decir, su imagen o recorrido, se acostumbra a identificar la función  $s$  con su recorrido,

$$s := \{s(n) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

de manera que la sucesión definida anteriormente quedaría:

$$s := \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}.$$

Puesto que el orden en que se escriben los elementos o *términos* de la sucesión, es importante, entonces el recorrido se puede pensar más como un conjunto ordenado, por lo que usaremos la siguiente notación:

$$s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots)$$

o simplemente  $(s_n)_n$ .

**Nota.** Obsérvese que para simplificar la notación estamos escribiendo  $s_n$  en lugar de  $s(n)$ .

### Ejemplo 2.2.1.

1. Los siete primeros términos de la sucesión  $(s_n)_n$  definida por:

$$\begin{cases} s_1 = s_2 = 1 \\ s_n = s_{n-2} + s_{n-1}, & \forall n \geq 3 \end{cases}$$

son: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 (Esta sucesión lleva el nombre de un matemático importante del siglo XVII. Investigue: ¿cómo se llama?).

2. Si  $\mathcal{P}\mathbb{R}$  denota la familia de todos los subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , definimos la sucesión  $(\mathcal{C}_n)_n$  en  $\mathcal{P}\mathbb{R}$  como sigue:

$$\mathcal{C}_1 = : [0, 1]$$

$\mathcal{C}_n =$  : conjunto que se obtiene de  $\mathcal{C}_{n-1}$ , eliminando el “tercio medio” de cada uno de los  $2^{n-2}$  intervalos que conforman a  $\mathcal{C}_{n-1}$ .

Los tres primeros términos de  $(\mathcal{C}_n)_n$  son:

$$[0, 1], [0, 1/3] \cup [2/3, 1], [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1].$$

(Dibuje los conjuntos  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ ; ¿a cuál ejemplo del capítulo 1 corresponde esta sucesión?).

Con el fin de precisar varios conceptos como compacidad, continuidad o la noción misma de fractal, es necesario definir la noción de convergencia en un espacio métrico. (Decimos que  $(x_n)_n$  es una sucesión en un espacio métrico  $(X, d)$  si esta es una sucesión en el conjunto  $X$ ).

**Definición 2.2.2 (Sucesión convergente).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $(s_n)_n$  una sucesión en  $X$ . Diremos que  $(s_n)_n$  *converge* si y sólo si existe  $S \in X$ , tal que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N$  implica  $d(s_n, S) < \varepsilon$ .  $S$  se llama *límite* de la sucesión, y lo notaremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)_n = S \quad \text{o} \quad (s_n)_n \rightarrow S.$$

Si la sucesión converge a un elemento  $S \in X$ , se dice que la sucesión es *convergente* en  $X$ , en caso contrario diremos que *no converge* en  $X$  o que es *divergente*.

Al analizar un poco la Definición 2.2.2 se observa que se está formalizando la idea de que los términos de una sucesión se van acercando cada vez más a un determinado punto  $S \in X$ , es decir, a medida que “avanzamos” en los términos de la sucesión, estos se acercan arbitrariamente al valor de  $S$ , de modo que la distancia  $d(s_n, S)$  se puede hacer “tan pequeña como se quiera”.

### Ejemplo 2.2.3.

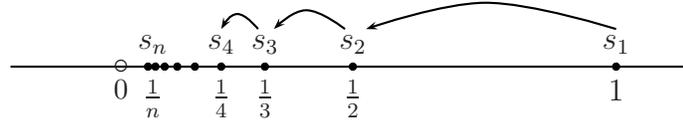
1. La sucesión  $(\frac{1}{n})_n$  es convergente en el espacio métrico  $(\mathbb{R}, d_u)$  ya que  $(\frac{1}{n})_n \rightarrow 0$ . (Ver Figura 2.5).

En efecto: dado  $\varepsilon > 0$ , sabemos por la propiedad arquimediana<sup>2</sup> que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $N\varepsilon > 1$ , es decir,  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ . De esta manera siempre que  $n \geq N$  tendremos:

$$d_u\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

---

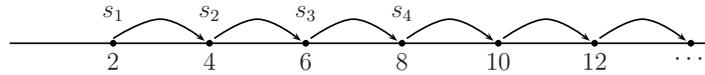
<sup>2</sup>**Propiedad arquimediana:** sean  $x, y \in \mathbb{R}$ , con  $x > 0$ , entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $Nx > y$ .



**Figura 2.5:** Los términos de  $(\frac{1}{n})_n$  se “acercan cada vez más” a cero.

De modo que, según la Definición 2.2.2 concluimos que  $(\frac{1}{n})_n \rightarrow 0$ .

2. La sucesión  $(2n)_n$  no converge en  $(\mathbb{R}, d_u)$ . Esto es intuitivamente claro al observar la Figura 2.6. Una demostración formal de este hecho sería como sigue: supongamos que existe un  $L \in \mathbb{R}$  tal que  $(2n)_n \rightarrow L$ .



**Figura 2.6:** Sucesión  $(2n)_n$ .

Observemos que para cualesquiera naturales  $n$  y  $m$ , con  $n \neq m$  se tiene que  $|m - n| \geq 1$ . Tomemos por ejemplo  $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ . Como estamos suponiendo  $(2n)_n \rightarrow L$  debe existir  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N$  implique  $|2n - L| < \frac{1}{2}$ .

Tomemos cualquier  $M > N$ , entonces

$$2 \leq 2|N - M| = |2N - 2M + L - L| \leq |2N - L| + |2M - L| < 1$$

lo cual claramente es absurdo.

Volviendo a nuestro ejemplo 1, donde demostramos que  $(\frac{1}{n})_n \rightarrow 0$ , podemos preguntarnos si, ¿es posible que exista otro valor  $L$  tal que  $(\frac{1}{n})_n \rightarrow L$ ? La respuesta es *NO*, como lo garantiza el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.4** (Unicidad del límite). *Si  $(s_n)_n$  converge, entonces lo hace a un único punto límite.*

*Demostración.* (Por contradicción)

Supongamos que  $(s_n) \rightarrow a$ ,  $(s_n) \rightarrow b$  y  $a \neq b$ , entonces  $d(a, b) > 0$ .

Sea  $\varepsilon = \frac{d(a, b)}{2}$ .

Como  $(s_n)_n \rightarrow a$ , existe  $N_1 \in \mathbb{N} : n \geq N_1 \rightarrow d(s_n, a) < \varepsilon$ .

Como  $(s_n)_n \rightarrow b$ , existe  $N_2 \in \mathbb{N} : n \geq N_2 \rightarrow d(s_n, b) < \varepsilon$ .

Sea  $n = \max\{N_1, N_2\}$ . Para todo  $n \geq N$  se tendrá

$$0 \leq d(a, b) \leq d(a, s_n) + d(b, s_n) < \frac{d(a, b)}{2} + \frac{d(a, b)}{2}.$$

Luego  $d(a, b) < d(a, b)$ , contradicción! □

Otro concepto que necesitamos es el de subsucesión.

**Definición 2.2.5** (Subsucesión). Sea  $(x_n)_n$  una sucesión en  $X$ . Sea  $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una función creciente (e.d.  $n_1 \leq n_2$  implica  $k(n_1) \leq k(n_2)$ ). La función compuesta  $x \circ k : \mathbb{N} \rightarrow X$  se llama una *subsucesión* de  $(x_n)_n$ .

Analicemos un poco esta definición: se tiene

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{k} & \mathbb{N} & \xrightarrow{x} & X \\ n & \mapsto & k_n & \mapsto & x_{k_n} \end{array}$$

De esta manera  $x \circ k$  es una sucesión en  $X$  cuyos términos  $x_{k_n}$  son “extraídos” de la sucesión original  $(x_n)_n$ , pero extraídos no de cualquier manera puesto que la condición,

$$n \leq m \implies k_n \leq k_m \quad (\text{e.d. } k \text{ es creciente})$$

significa que de  $(x_n)_n$  se van tomando términos  $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m}, \dots$  pero conservando el orden.

**Ejemplo 2.2.6.** Dada la sucesión  $(\sqrt{n})_n$  entonces  $(\sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{12}, \sqrt{14}, \dots)$  es una subsucesión de ella, pero  $(1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{12}, \sqrt{10}, \sqrt{14}, \dots)$  no lo es, (¿por qué?).

**Proposición 2.2.7.** Sea  $(x_n)_n$  sucesión en un espacio métrico. Entonces  $(x_n)_n \rightarrow L$  si y sólo si toda subsucesión de  $(x_n)_n$  también converge a  $L$ .

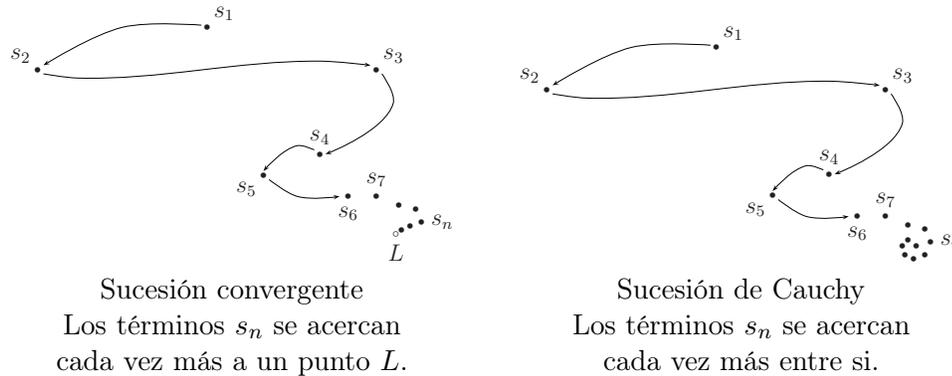
*Demostración.* Si toda subsucesión de  $(x_n)_n$  converge a  $L$  entonces es inmediato que  $(x_n)_n \rightarrow L$  pues la sucesión completa es subsucesión de sí misma. Recíprocamente, supongamos que  $(x_n)_n \rightarrow L$  y sea  $(x_{k_n})_n$  subsucesión de  $(x_n)_n$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que,  $n \geq N$  implica  $d(x_n, L) < \varepsilon$ . En particular para cada  $k_n > N$  se tendrá  $d(x_{k_n}, L) < \varepsilon$ . □

## 2.3. Sucesiones de Cauchy, espacios métricos completos, punto adherente, bolas, conjuntos cerrados

Cuando en una sucesión en un espacio métrico, ocurre que al ir “avanzando” en los términos de la sucesión, se encuentra que dichos términos se van acercando cada vez más entre sí, se dice que esta es una sucesión de Cauchy. Formalmente tenemos la siguiente definición.

**Definición 2.3.1** (Sucesión de Cauchy). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $(s_n)_n$  una sucesión en  $X$ . Diremos que  $(s_n)_n$  es de Cauchy si:  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n \geq N$  implica  $d(s_m, s_n) < \varepsilon$ .

Comparando los conceptos de sucesión de Cauchy y sucesión convergente, percibimos que hay cierta semejanza en las dos definiciones, que nos hace plantear la pregunta: ¿cuál es exactamente la relación o la diferencia entre los dos conceptos? Hay un elemento que aparece en uno de ellos y en el otro no y es el elemento límite  $L$ .



**Figura 2.7:**

Si los términos de la sucesión se acercan cada vez más a un punto  $L$  (sucesión convergente), es intuitivamente claro que entonces estos términos se estarán también acercando entre si cada vez más (sucesión de Cauchy). Sin embargo, el hecho de que los términos se acerquen cada vez más entre si, no parece implicar que necesariamente exista el punto límite  $L$ . Veamos esto formalmente mediante algunos ejemplos y un teorema.

**Ejemplo 2.3.2.**

1. Consideremos el conjunto  $X = (0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ . En el espacio métrico  $((0, \infty), d_u)$ , (subespacio del espacio euclídeo  $\mathbb{R}$ ),

$$\left(\frac{1}{n}\right)_n \text{ es de Cauchy pero } \left(\frac{1}{n}\right)_n \text{ no converge en } X.$$

En efecto: sea  $\varepsilon > 0$ ; por propiedad arquimediana, existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ . Sean  $m, n \geq N$ , podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $m \geq n$ ; esto implica que  $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n}$ , y esta desigualdad implica que  $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \geq 0$ .

Luego  $\forall m, n \geq N$  se cumple:

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Por tanto,  $\left(\frac{1}{n}\right)_n$  es de Cauchy.

Ahora veamos que  $(\frac{1}{n})_n$  no converge en  $X$ . Supongamos que si, es decir que existe  $L \in X = (0, \infty)$ , tal que  $(\frac{1}{n})_n \rightarrow L$ , luego  $L \neq 0$  y  $L \in \mathbb{R}$ .

Pero ya habíamos demostrado (Ejemplo 2.2.3) que  $(\frac{1}{n})_n \rightarrow 0$  en  $\mathbb{R}$ , de modo que existirían dos números reales,  $L$  y  $0$ , que son límite de la sucesión, contradiciendo esto el teorema de la unicidad del límite.

2.  $(s_n)_n = (1, 1, 4, 1, 41, 1, 414, 1, 4142, \dots)$  es una sucesión en  $\mathbb{Q}$  (se entiende que con la métrica usual).

$(s_n)_n$  es de Cauchy y no converge en  $\mathbb{Q}$ .

3. Si  $(s_n)_n$  es la sucesión de Fibonacci (Ejemplo 2.2.1(1)), entonces se puede definir la sucesión  $q_n = \frac{s_n}{s_{n+1}}$ . Obsérvese que  $(q_n)_n$  es una sucesión en  $\mathbb{Q}$ , la cual converge a  $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \notin \mathbb{Q}$  (el número  $\phi$  se llama la razón dorada).

**Proposición 2.3.3.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $(s_n)_n$  una sucesión convergente en  $X$ , entonces  $(s_n)_n$  es de Cauchy.

*Demostración.* Sea  $(s_n)_n$  una sucesión convergente en  $X$  y sea  $L$  el límite de dicha sucesión. Sea  $\varepsilon > 0$ . Por hipótesis, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N$  implica  $d(s_n, L) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Sean  $m, n \geq N$ , entonces  $d(s_n, s_m) \leq d(s_n, L) + d(s_m, L) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

De esta manera se concluye que  $(s_n)_n$  es de Cauchy. □

Se ha demostrado entonces que, en cualquier espacio métrico, toda sucesión convergente es de Cauchy, pero lo recíproco no se cumple, como lo hicimos notar en el ejemplo 2.3.2 para el caso  $(0, \infty)$  y  $\mathbb{Q}$ . Sin embargo si existen espacios métricos en los cuales toda sucesión de Cauchy es convergente y serán precisamente estos espacios los que nos van a interesar.

**Definición 2.3.4 (Espacio métrico completo).** Diremos que un espacio métrico  $(X, d)$  es *completo*, si toda sucesión de Cauchy en  $X$ , converge en  $X$ .

**Ejemplo 2.3.5.** 1.  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n$  son completos. Esto es un resultado clásico del análisis y su demostración puede encontrarse por ejemplo en [1].

2.  $(0, \infty)$ ,  $(0, 1]$ ,  $\mathbb{Q}$  son no completos (ver ejemplo 2.3.2).

3.  $[0, 1]$ ,  $[a, b]$ ,  $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ ,  $[0, \infty)$  son completos. Esto quedará plenamente justificado más adelante, una vez se demuestre la Proposición 2.3.18.

**Definición 2.3.6 (Punto adherente).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $S \subseteq X$  y  $x \in X$ . Diremos que  $x$  es un *punto de adherencia* de  $S$  (o punto adherente a  $S$ ) si existe una sucesión  $(s_n)_n$  en  $S$  tal que  $(s_n)_n \rightarrow x$ .

**Ejemplo 2.3.7.** Sean  $X = \mathbb{R}$ ,  $S = (0, 1]$ . 0 es un punto de adherencia de  $S$  pues existe  $(\frac{1}{n})_n$  sucesión en  $S$  tal que  $(\frac{1}{n})_n \rightarrow 0$ .

Obsérvese que  $0 \notin S$ . También  $\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}$ , son puntos de adherencia de  $S$ . ¿Cuáles son exactamente todos los puntos de adherencia de  $S$ ?

**Definición 2.3.8 (Adherencia de un conjunto).** El conjunto de todos los puntos de adherencia de un conjunto  $S$ , se llama la *adherencia* o *clausura* de  $S$ , se notará  $\overline{S}$  o  $adh(S)$ .

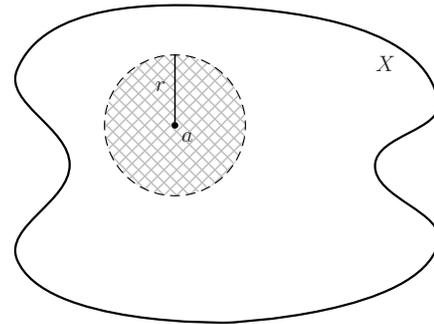
Es decir  $\overline{S} = \{x \in X \mid x \text{ es punto de adherente de } S\}$ .

**Ejemplo 2.3.9.**  $\overline{(0, 1]} = [0, 1]$  ;  $\overline{[0, \infty)} = [0, \infty)$ ;  $\overline{(0, 1) \cup \{2\}} = [0, 1] \cup \{2\}$ .

Una forma alternativa de caracterizar los puntos adherentes a un conjunto, es usando el concepto de “bola”, el cual es también muy útil en el contexto general de los espacios métricos. Lo definimos a continuación.

**Definición 2.3.10 (Bola).** Sean  $(X, d)$  espacio métrico,  $a \in X$  y  $r \in \mathbb{R}^+$ . Se define la *bola* de centro  $a$  y radio  $r$  notada  $B_r^d(a)$  o  $B_d(a; r)$  por

$$B_r^d(a) \equiv B_d(a; r) := \{x \in X \mid d(x, a) < r\}.$$



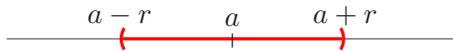
**Figura 2.8:** Bola de centro  $a$  y radio  $r$ .

Si no hay lugar a confusión se puede omitir la “ $d$ ” y notar simplemente:  $B_r(a)$  o  $B(a; r)$ .

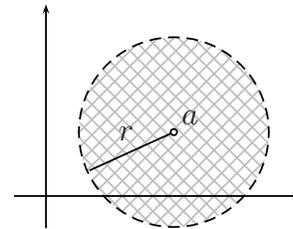
**Ejemplo 2.3.11.**

1. En  $(\mathbb{R}, d_u)$  :  $B_r(a) = (a - r, a + r)$ . Justifique esta igualdad. (Figura 2.9).
2. En  $\mathbb{R}^2$  :  $B_r((a_1, a_2)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} < r\}$   
 $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2\}$ .

Por tanto en  $\mathbb{R}^2$  las bolas son discos abiertos. (Figura 2.10).



**Figura 2.9:** Bolas en  $(\mathbb{R}, d_u)$ .



**Figura 2.10:** Bolas en  $(\mathbb{R}^2, d_u)$ .

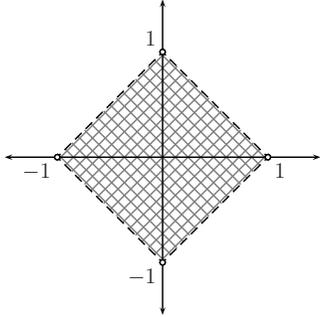
3. Veamos como sería la bola  $B_{d_{tax}}((0, 0); 1)$ . Recordemos que la métrica del taxista (en  $\mathbb{R}^2$ ) está definida por:

$$d_{tax}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) =: |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

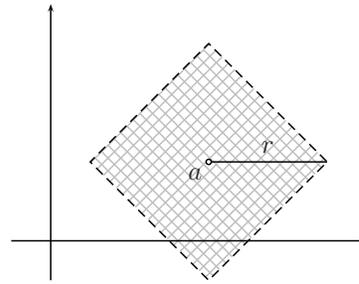
de modo que,

$$\begin{aligned} B_{d_{tax}}((0,0); 1) &= \{(x,y) \mid d_{tax}((x,y), (0,0)) < 1\} \\ &= \{(x,y) \mid |x| + |y| < 1\}. \end{aligned}$$

La gráfica de la desigualdad  $|x| + |y| < 1$  es un rombo (abierto) con vértices los puntos  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(-1,0)$  y  $(0,-1)$  (ver Figura 2.11). En general una bola con centro  $a = (a_1, a_2)$  y radio  $r$  con la métrica del taxista es un rombo con centro  $a$  y diagonal  $2r$  (ver Figura 2.12).



**Figura 2.11:** Bola de centro  $(0,0)$  y radio 1 según la métrica del taxista.



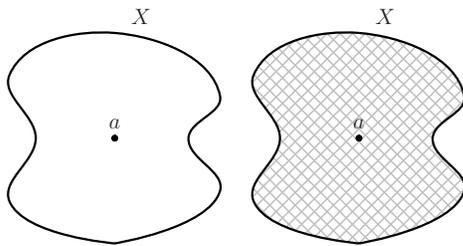
**Figura 2.12:** Bolas en  $(\mathbb{R}^2, d_{tax})$ .

4. En un espacio discreto  $(X, d_{disc})$  se puede verificar que dados  $a \in X$  y  $r \in \mathbb{R}^+$  entonces:

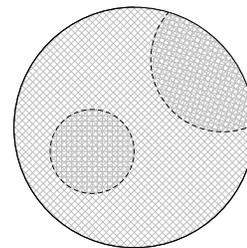
$$B_{d_{disc}}(a; r) = \begin{cases} \{a\}, & \text{si } r \leq 1 \\ X, & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

(Ver Figura 2.13).

5. Consideremos  $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  como subespacio de  $\mathbb{R}^2$ . Las bolas en  $D$  corresponden a las bolas en  $(\mathbb{R}^2, d_u)$ , intersectadas con  $D$  (ver Figura 2.14).



**Figura 2.13:** Bolas en  $(X, d_{disc})$



**Figura 2.14:** Bolas en  $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

**Nota.** Generalmente las bolas son conjuntos convexos (esto es, para cualquier par de elementos de la bola, el segmento<sup>3</sup> que los une queda totalmente contenido en la bola).

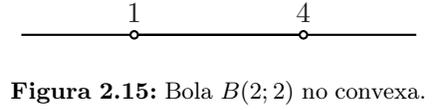
<sup>3</sup>La definición del segmento entre dos puntos  $a$  y  $b$  depende de la métrica del espacio y es

$$\overline{a,b} = \{x \in X \mid d(a,x) + d(x,b) = d(a,b)\}.$$

Pero hay excepciones; veamos a continuación un par de ejemplos.

6. Se define en  $\mathbb{R}$  la siguiente métrica.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y; \\ 1, & \text{si } x \neq y \wedge (x \neq 2y \wedge y \neq 2x); \\ 2, & \text{si } x \neq y \wedge (x = 2y \vee y = 2x). \end{cases}$$



**Figura 2.15:** Bola  $B(2; 2)$  no convexa.

(Demuestre que en efecto  $d$  es una métrica). Si se considera la bola  $B(2; 2)$ , se verifica fácilmente que 3 y 6 son elementos de la bola, pero el número 4, que pertenece al segmento entre 3 y 6, no está dentro de la misma<sup>4</sup>. (Ver Figura 2.15).

7. (Para estudiantes que han visto coordenadas polares). Consideremos el espacio métrico  $(\mathbb{R}^2, d_*)$  definido en la ecuación (2.6), y la bola con centro en  $(\pi, 0) = c$  y de radio  $\pi$ :

$$B_{d_*}(c; \pi) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_*(c, x) < \pi\}. \quad (2.9)$$

Abreviando  $\theta(c, x)$  simplemente como  $\theta$ , desmenucemos la condición de (2.9) según (2.6):

$$\begin{aligned} d_*(c, x) < \pi &\Leftrightarrow \left| \|c\| - \|x\| \right| + \theta(c, x) < \pi \\ &\Leftrightarrow \left| \pi - \|x\| \right| + \theta < \pi \\ &\Leftrightarrow \left| \pi - \|x\| \right| < \pi - \theta \\ &\Leftrightarrow -\pi + \theta < \pi - \|x\| < \pi - \theta \\ &\Leftrightarrow -2\pi + \theta < -\|x\| < -\theta \\ &\Leftrightarrow \theta < \|x\| < 2\pi - \theta. \end{aligned}$$

Si denotamos  $\|x\| = r$ , tendremos que los puntos que constituyen la bola (2.9) son aquellos cuya norma  $r$  es mayor que el valor  $\theta$  del ángulo que hacen con el punto  $c$ , pero menor que  $2\pi - \theta$ :

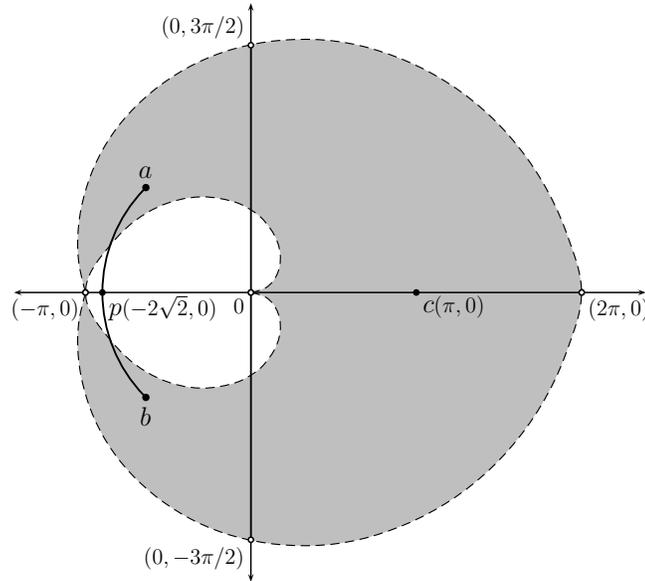
$$\theta < r < 2\pi - \theta. \quad (2.10)$$

Construyamos ahora sobre el plano cartesiano el modelo de la bola (2.9) empleando las desigualdades polares (2.10).

Teniendo en cuenta que  $\theta \in [0, \pi]$ , la primera desigualdad de (2.10) nos da la zona del semiplano superior que se encuentra “por fuera” de la espiral  $r = \theta$ , junto con su correspondiente reflejo en el semiplano inferior.

Análogamente, la segunda desigualdad de (2.10) nos da la zona del semiplano superior que está “por dentro” de la espiral  $r = 2\pi - \theta$ , junto con su reflejo en el semiplano inferior.

<sup>4</sup>En este caso:  $d(3, 4) + d(4, 6) = 1 + 1 = 2 = d(3, 6)$  y  $d(4, 2) = 2 \not< 2$ .



**Figura 2.16:** Bola  $B_{d_*}(c; \pi)$  en  $(\mathbb{R}^2, d_*)$ .

La intersección de los dos modelos anteriores nos dá el modelo de la bola  $B_{d_*}(c; \pi)$  que se muestra en la Figura 2.16. El segmento<sup>5</sup> que une los puntos  $a(-2, 2)$  y  $b(-2, -2)$  no está completamente contenido en  $B_{d_*}(c; \pi)$  por lo tanto dicha bola no es convexa<sup>6</sup>.

Veamos como se puede caracterizar la adherencia de un conjunto, usando el concepto de bola.

**Proposición 2.3.12.** Sean  $(X, d)$  espacio métrico,  $S \subseteq X$  y  $x \in X$ . Entonces  $x \in \bar{S}$  si y sólo si toda bola con centro en  $x$  interseca a  $S$ . En símbolos:

$$x \in \bar{S} \iff (\forall r > 0) (B_r(x) \cap S \neq \emptyset).$$

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ) Por hipótesis existe  $(s_n)_n$  sucesión en  $S$  tal que  $(s_n) \rightarrow x$ .

Sea  $r > 0$ , como  $(s_n)_n \rightarrow x$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\begin{aligned} n \geq N &\rightarrow d(s_n, x) < r, & n \geq N &\rightarrow s_n \in B_r(x), \\ n \geq N &\rightarrow s_n \in B_r(x) \cap S \neq \emptyset. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ ) Para cada  $r_n = \frac{1}{n}$ ,  $(n \in \mathbb{N})$  existe  $s_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap S$ , luego  $(s_n)_n$  es una sucesión en  $S$  y

$$d(s_n, x) < \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

de modo que  $(s_n)_n \rightarrow x$ , por tanto  $x \in \bar{S}$ . □

<sup>5</sup>En este espacio métrico el segmento  $\overline{a, b}$  corresponde al arco entre  $a$  y  $b$  de la circunferencia con centro en el origen y radio  $\|a\| = 2\sqrt{2}$ .

<sup>6</sup>Por ejemplo el punto  $p = (-2\sqrt{2}, 0) \in \overline{a, b} - B_{d_*}(c; \pi)$ .

Ya sea usando directamente la definición de punto adherente, o la proposición anterior, se obtiene el siguiente lema de manera inmediata.

**Lema 2.3.13.** *Sea  $(X, d)$  espacio métrico. Para todo  $S \subseteq X$  se cumple  $S \subseteq \overline{S}$ .*

En el ejemplo 2.3.9 se estableció que  $\overline{(0, 1]} = [0, 1]$  y  $\overline{(0, 1) \cup \{2\}} = [0, 1] \cup \{2\}$  (en  $(\mathbb{R}, d_u)$ ), lo cual demuestra que, en general, la contención  $\overline{S} \subseteq S$  no se tiene. Cuando sí se cumple esta contención, se dice que el conjunto es cerrado. Es decir, tenemos la siguiente definición:

**Definición 2.3.14** (Conjunto cerrado). Sean  $(X, d)$  espacio métrico y  $S \subseteq X$ . Diremos que  $S$  es *cerrado* si  $S = \overline{S}$ .

**Ejemplo 2.3.15.** Observando el ejemplo 2.3.9 podemos concluir que en  $(\mathbb{R}, d_u)$ ,  $[0, 1]$  y  $[0, \infty)$  son ejemplos de conjuntos cerrados, mientras que  $(0, 1]$  y  $(0, 1) \cup \{2\}$  son **no** cerrados. Otros ejemplos de conjuntos cerrados en este espacio son: cualquier intervalo de la forma  $[a, b]$ ,  $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  y cualquier conjunto finito.

**Ejemplo 2.3.16.** En  $(\mathbb{R}^2, d_u)$  el conjunto  $S = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, 0)\}$  es cerrado. ¡Justifique!

**Ejemplo 2.3.17.** Dada una bola  $B(a; r)$  en un espacio métrico  $(X, d)$ , se define la **bola cerrada**  $\overline{B}(a; r)$  por:

$$\overline{B}(a; r) := \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}.$$

$\overline{B}(a; r)$  es en efecto un conjunto cerrado ya que si  $x$  es un punto adherente de  $\overline{B}(a; r)$  entonces existe una sucesión  $(a_n)_n$  de puntos de  $\overline{B}(a; r)$  tal que  $(a_n)_n \rightarrow x$ ; probemos que  $x \in \overline{B}(a; r)$ .

Supongamos que  $d(x, a) > r$ . Entonces para  $\varepsilon = d(x, a) - r > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que:  $n \geq N \rightarrow d(x, a_n) < \varepsilon$ . Por tanto,  $n \geq N \rightarrow d(x, a) \leq d(x, a_n) + d(a_n, a) < \varepsilon + r$ , de donde se tendría:  $\varepsilon < \varepsilon$ , absurdo. De esta manera  $d(x, a) \leq r$ , luego  $x \in \overline{B}(a; r)$  como se quería ver.

Recordemos el ejemplo 2.3.5 en el cual se afirmó que en  $\mathbb{R}$ , los conjuntos  $[0, 1]$ ,  $[a, b]$ ,  $[0, \infty)$  y  $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  son completos. Esta afirmación es una consecuencia directa de la siguiente proposición que garantiza que en un espacio completo, los subespacios que “heredan” la completitud, son exactamente los subespacios cerrados.

**Proposición 2.3.18.** *Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $S \subseteq X$ .  $S$  es cerrado si y sólo si  $S$  es completo.*

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ) Sea  $(s_n)_n$  una sucesión de Cauchy en  $S$ . Debemos demostrar que  $(s_n)$  converge en  $S$ .

Tenemos que  $(s_n)_n$  converge en  $X$  ya que  $X$  es completo, luego existe  $x \in X$  tal que

$$(s_n)_n \rightarrow x.$$

Claramente  $x \in \overline{S} = S$  ( $S$  es cerrado) de modo que  $(s_n)_n$  converge en  $S$ .

$\Leftarrow$ ) Para probar que  $S$  es cerrado, basta probar que  $\overline{S} \subseteq S$ .

Sea  $x \in \overline{S}$ . Existe  $(s_n)_n$  sucesión en  $S$  tal que

$$(s_n)_n \rightarrow x. \quad (2.11)$$

Como  $(s_n)_n$  es convergente, entonces es de Cauchy y como  $S$  es completo entonces  $(s_n)_n$  converge en  $S$ , es decir, existe  $s \in S$  tal que

$$(s_n)_n \rightarrow s. \quad (2.12)$$

De (2.11) y (2.12) y por la unicidad del límite se concluye que:  $x = s$  y por tanto  $x \in S$ , como se quería probar.  $\square$

**Proposición 2.3.19.**  $(s_n)_n \rightarrow s$ . Entonces  $\overline{\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}} = \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{s\}$ .

*Demostración.* Denotemos  $D = \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , de modo que lo que queremos demostrar es  $\overline{D} = D \cup \{s\}$ . La contención  $D \cup \{s\} \subseteq \overline{D}$  es inmediata recordando que  $D \subseteq \overline{D}$  y además la definición de punto adherente. Recíprocamente, sea  $x \in \overline{D}$ . Entonces existe una sucesión  $(s_{n_k})_k$  de elementos de  $D$  tal que  $(s_{n_k})_k \rightarrow x$ . Si  $\{s_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$  es finito, debe existir un  $t \in \mathbb{N}$  tal que:  $s_{n_t} = s_{n_{t+1}} = s_{n_{t+2}} = \dots$ ; es decir la sucesión  $(s_{n_k})_k$  es “casi constante” (ver Ejercicio 2.9.13), de modo que  $(s_{n_k})_k \rightarrow s_{n_t}$ . Pero  $(s_{n_k})_k \rightarrow x$ , luego, por el teorema de unicidad del límite,  $s_{n_t} = x$  y así  $x \in D \subseteq D \cup \{s\}$ . Ahora, si  $\{s_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$  es infinito, entonces debe existir una sucesión creciente de naturales:  $n_{k_1} < n_{k_2} < \dots < n_{k_t} < \dots$  tal que los elementos  $s_{n_{k_1}}, s_{n_{k_2}}, \dots, s_{n_{k_t}}, \dots$  son distintos dos a dos. Se tiene así que  $(s_{n_{k_t}})_t$  es una subsucesión de  $(s_{n_k})_k$ , por lo tanto

$$(s_{n_{k_t}})_t \rightarrow x. \quad (2.13)$$

Pero también  $(s_{n_{k_t}})_t$  es una subsucesión de  $(s_n)_n$ , de modo que

$$(s_{n_{k_t}})_t \rightarrow s. \quad (2.14)$$

Finalmente de (2.13) y (2.14), y de nuevo la unicidad del límite, se concluye que  $x = s \in D \cup \{s\}$ .  $\square$

## 2.4. Conjuntos abiertos

Usando el concepto de bola, definiremos la noción de conjunto abierto el cual a su vez proporciona formas alternativas de caracterizar conceptos ya definidos como el de conjunto cerrado, o que se definirán más adelante, como el de conjunto compacto.

**Definición 2.4.1** (Conjunto abierto). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $S \subseteq X$ . Diremos que  $S$  es **abierto** si para todo elemento  $s \in S$ , existe una bola que contiene a  $s$  y que está contenida en  $S$ . En símbolos:

$$S \text{ es abierto} \iff (\forall s \in S) (\exists B, B \text{ bola}) (s \in B \subseteq S).$$

Si para el punto  $s$  existe una bola  $B$  tal que  $s \in B \subseteq S$ , se dice que  $s$  es un **punto interior** de  $S$ . El conjunto de todos los puntos interiores de  $S$  se llama el **interior** de  $S$  y se nota  $S^\circ$ .

En realidad, es posible seleccionar una bola centrada precisamente en el punto  $s$ . Es decir, tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 2.4.2.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $S \subseteq X$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

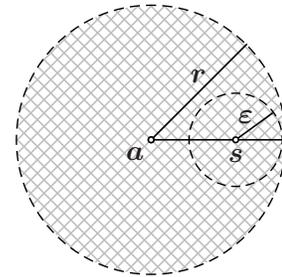
- (i)  $S$  es abierto;
- (ii) para todo  $s \in S$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(s; \varepsilon) \subseteq S$ ;
- (iii)  $S = S^\circ$ .

*Demostración.*

(i)  $\rightarrow$  (ii): Si  $S$  es abierto y  $s \in S$ , existe (por definición) una bola  $B$  tal que  $s \in B \subseteq S$ . Sean  $a$  el centro de  $B$  y  $r$  el radio de  $B$ . Entonces  $d(a, s) < r$ . Sea  $\varepsilon = r - d(a, s)$  (ver Figura 2.17). Se tiene:  $B(s; \varepsilon) \subseteq B(a; r) \subseteq S$ .

En efecto: si  $x \in B(s; \varepsilon)$ ,

$$\begin{aligned} d(a, x) &\leq d(x, s) + d(a, s) < \varepsilon + d(a, s) \\ &\leq r - d(a, s) + d(a, s) = r. \end{aligned}$$



**Figura 2.17:**

(ii)  $\rightarrow$  (iii): La contención  $S^\circ \subseteq S$  siempre se cumple, debido a la definición misma de punto interior. La otra contención se obtiene de manera inmediata usando la hipótesis y la definición de conjunto abierto.

(iii)  $\rightarrow$  (i): Si  $S = S^\circ$  entonces  $S \subseteq S^\circ$ , lo cual significa que  $S$  es abierto.  $\square$

De la demostración anterior se obtiene como consecuencia inmediata:

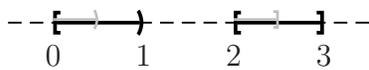
**Corolario 2.4.3.** *Toda bola  $B(a; r)$  es un conjunto abierto.*

**Ejemplo 2.4.4.** En  $\mathbb{R}$  los conjuntos  $(0, 1)$ ,  $(0, \infty)$ ,  $(a, b)$ ,  $(2, 3) \cup (5, 7)$ ,  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n + 1)$  son abiertos; mientras que  $[0, 1)$ ,  $[0, 1]$ ,  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ,  $(-\infty, a]$ ,  $\mathbb{N}$ , no son abiertos.

Se puede verificar mediante ejemplos que, riñendo un poco con el lenguaje cotidiano, un conjunto puede ser simultáneamente abierto y cerrado, o puede ser abierto y no cerrado, o cerrado y no abierto, o ni abierto ni cerrado. Veamos:

**Ejemplo 2.4.5.** Consideremos el espacio métrico  $X = [0, 1) \cup [2, 3]$ . En este espacio tenemos que:

- $[0, 1)$  es abierto y cerrado, ( $[2, 3]$  también).
- $[0, \frac{1}{2})$  es abierto pero no cerrado.
- $[0, \frac{1}{2}]$  es cerrado pero no abierto.
- $(2, \frac{5}{2}]$  no es abierto, ni cerrado.



Sin embargo, existe una relación importante entre los conceptos de abierto y cerrado, la cual establecemos en la siguiente proposición.

**Proposición 2.4.6.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $S \subseteq X$ .  $S$  es abierto si y sólo si  $S^c$  es cerrado.*

*Demostración.* Suponga que  $S$  es abierto. Sea  $x \in \overline{S^c}$  (si  $\overline{S^c} = \emptyset$  entonces  $S^c = \emptyset$  y  $\emptyset$  es cerrado). Queremos probar que  $x \in S^c$ . Por contradicción supongamos que  $x \notin S^c$ , entonces  $x \in S$  y puesto que  $S$  es abierto, existe una bola  $B$  tal que  $x \in B \subseteq S$ , pero esto implica que  $x \in B$  y  $B \cap S^c = \emptyset$ , lo que contradice que  $x \in \overline{S^c}$  (véase Proposición 2.3.12). De esta manera se concluye que  $\overline{S^c} \subseteq S^c$  de modo que  $S^c$  es cerrado.

Ahora recíprocamente, si  $S^c$  es cerrado, veamos que  $S$  es abierto. Sea  $x \in S$  (si  $S = \emptyset$  ya es abierto), entonces  $x \notin S^c$  luego  $x \notin \overline{S^c}$  (pues  $\overline{S^c} = S^c$ ), lo cual significa que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(x; \varepsilon) \cap S^c = \emptyset$  o equivalentemente tal que  $B(x; \varepsilon) \subseteq S$ . □

En la siguiente proposición se caracterizan los abiertos de un subespacio de un espacio  $X$ , como las “trazas” o intersecciones de los abiertos de  $X$ , con el subespacio.

**Proposición 2.4.7.** *Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $S \subseteq X$  y  $G \subseteq S$ .  $G$  es abierto en el subespacio  $S$  si y sólo si  $G = O \cap S$  para algún  $O$  abierto de  $X$ .*

*Demostración.* Si  $G$  es abierto en  $S$ , para cada  $x \in G$  existe una bola  $B_x$  tal que  $x \in B_x \subseteq G$ , donde

$$B_x = \{y \in S \mid d(y, x) < r\},$$

siendo  $a$  y  $r$  el centro y el radio de la bola, respectivamente. Obsérvese que:

$$B_x = \{y \in X \mid d(y, a) < r\} \cap S = \mathcal{B}_x \cap S$$

siendo  $\mathcal{B}_x$  una bola (y por tanto un abierto) del espacio  $X$ . Se tiene entonces:  $G = \left( \bigcup_{x \in G} \mathcal{B}_x \right) \cap S$ , luego basta tomar  $O := \bigcup_{x \in G} \mathcal{B}_x$  y usar la parte (b) del Ejercicio 2.9.16.

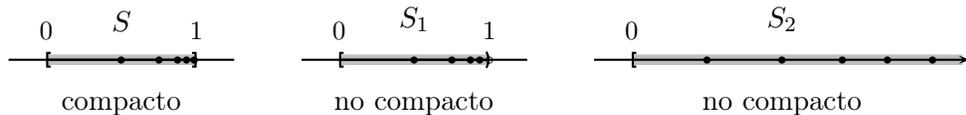
Recíprocamente, si  $G = O \cap S$  para algún  $O$  abierto de  $X$ , veamos que  $G$  es abierto en  $S$ . Sea  $x \in G$ : entonces  $x \in O$  y  $x \in S$ . Existe una bola  $\mathcal{B}$  (de  $X$ ) tal que  $x \in \mathcal{B} \subseteq O$ , de donde  $x \in \mathcal{B} \cap S \subseteq O \cap S = G$ . Como  $\mathcal{B} \cap S$  es una bola en  $S$ , se concluye que  $G$  es abierto en  $S$ .  $\square$

## 2.5. Conjuntos compactos, conjuntos acotados y totalmente acotados, puntos de acumulación y puntos frontera

De la familia de los cerrados de un espacio métrico, nos interesarán principalmente aquellos que cumplen la propiedad de ser compactos, propiedad que definimos a continuación:

**Definición 2.5.1** (Compacto). Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $S \subseteq X$ . Diremos que  $S$  es *compacto*, si toda sucesión en  $S$  admite una subsucesión convergente en  $S$ .

**Ejemplo 2.5.2.** En  $X = \mathbb{R}$ , sean  $S = [0, 1]$ ,  $S_1 = [0, 1)$  y  $S_2 = [0, \infty)$ . Entonces  $S$  es compacto (esto parece intuitivamente claro si pensamos en las sucesiones de  $S$ , sin embargo esta compacidad quedará plenamente justificada más adelante, con la Proposición 2.5.5), mientras que el conjunto  $S_1 = [0, 1)$  **no** es compacto ya que, por ejemplo, la sucesión  $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $S_1$  que **no** admite subsucesión convergente en  $S_1$  y finalmente  $S_2 = [0, \infty)$  tampoco es compacto; por ejemplo la sucesión  $(n)_n$  no admite subsucesiones convergentes. Obsérvese que  $S_1$  no es cerrado, mientras que  $S_2$  si lo es.



**Figura 2.18:** Ejemplos de compacidad.

En el caso particular de los espacios euclidianos  $\mathbb{R}^n$ , existe una caracterización de los subespacios compactos que puede ser muy “útil”, pero antes debemos definir el concepto de conjunto acotado.

**Definición 2.5.3** (Conjunto acotado). Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $S \subseteq X$ . Diremos que  $S$  es *acotado* si existen  $a \in X$  y  $r \in \mathbb{R}^+$  tales que  $S \subseteq B_d(a; r)$ .

En palabras, un conjunto es acotado si es posible “encerrarlo” dentro de una bola.

**Ejemplo 2.5.4.** Para los conjuntos  $S$ ,  $S_1$  y  $S_2$  del ejemplo 2.5.2 se tiene que  $S$  y  $S_1$  son acotados, mientras que  $S_2$  no lo es.

La siguiente proposición es un resultado clásico del análisis y su demostración puede encontrarse en [1].

**Proposición 2.5.5.** *Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , entonces  $S$  es compacto si y sólo si  $S$  es cerrado y acotado.*

Esta equivalencia entre “ser compacto” y “ser cerrado y acotado” en general no es válida en el contexto general de los espacios métricos. Veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 2.5.6.**

1. Sea  $X = \mathbb{Q} \cap [1, 2] \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ .

$X$  es cerrado:  $\overline{X} \subseteq X$  porque  $X$  es todo el espacio, es el “universo”.

$X$  es acotado:  $X \subseteq B\left(\frac{3}{2}; 1\right) = \{x \in X : |x - \frac{3}{2}| < 1\} = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ .

$X$  no es compacto:  $(1, 1,4, 1,41, \dots)$  es una sucesión en  $X$  que no admite subsucesión convergente en  $X$ .

2. Sea  $X$  un conjunto infinito con métrica discreta,  $(X, d_{disc})$  es cerrado y acotado pero no compacto. En efecto:  $X$  es cerrado porque es el universo; es acotado porque claramente  $X \subseteq B_{d_{disc}}(a; 2)$  para cualquier  $a \in X$ . Ahora, como  $X$  es infinito podemos escoger  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subseteq X$  con  $x_i \neq x_j$  para todo  $i \neq j$ , de modo que  $(x_n)_n$  es sucesión en  $X$  y si suponemos por un momento que  $X$  es compacto, entonces  $(x_n)_n$  debe admitir una subsucesión  $(x_{k_n})_n$  convergente, pero esto implicaría, por tratarse de un espacio discreto (ver Ejercicio 2.9.13) que  $(x_{k_n})_n$  es “casi constante”, lo que contradice la condición:  $x_i \neq x_j$  para todo  $i \neq j$ .

Así, en general, en un espacio métrico, ser cerrado y acotado no implica ser compacto. Sin embargo lo recíproco si se cumple. Para probarlo veamos antes un lema.

**Lema 2.5.7.** *Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $S \subseteq X$ .  $S$  está contenido en una bola si y sólo si está contenido en la unión de un número finito de bolas.*

*Demostración.* Si  $S$  está contenido en una bola entonces el resultado es inmediato (una bola se puede ver como la unión de un número finito de bolas). Recíprocamente, supongamos que

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(a_i; r_i).$$

Sea  $r = \max\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$  y  $t = \max\{d(a_i, a_j) : i, j = 1, 2, \dots, k\}$ . Seleccionemos uno cualquiera de los centros de las bolas cuya unión recubre a  $S$ , digamos  $a_1$ , y probemos que:

$$S \subseteq B(a_1; r + t).$$

Sea  $s \in S$ ; entonces  $s \in B(a_i; r_i)$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Tenemos:

$$d(s, a_1) \leq d(s, a_i) + d(a_1, a_i) < r_i + t \leq r + t. \quad \square$$

**Proposición 2.5.8.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $S \subseteq X$ . Si  $S$  es compacto entonces  $S$  es cerrado y acotado.

*Demostración.* Supongamos que  $S$  es compacto. Veamos que  $\overline{S} \subseteq S$ . Sea  $x \in \overline{S}$ . Existe una sucesión  $(s_n)_n$  en  $S$ , tal que:

$$(s_n)_n \rightarrow x.$$

Como  $S$  es compacto,  $(s_n)_n$  admite una subsucesión convergente, luego existe  $(s_{k_n})_n$  subsucesión de  $(s_n)_n$  tal que:

a)  $(s_{k_n})_n \rightarrow s$  donde  $s \in S$ .

Como  $(s_{k_n})_n$  es subsucesión de  $(s_n)_n$  y

b)  $(s_n)_n \rightarrow x$  entonces  $(s_{k_n})_n \rightarrow x$ . (Proposición 2.2.7).

De a) y b) se tiene que  $x = s$  luego  $x \in S$ .

Veamos que  $S$  es acotado. Por contradicción.

Supongamos que  $S$  no es acotado. Sea  $s_1 \in S$ . (Si fuera  $S = \emptyset$  ya está acotado). Tenemos:

$$\begin{aligned} S \not\subseteq B(s_1; 1) &\Leftrightarrow \exists s_2 \in S \text{ tal que } s_2 \notin B(s_1, 1) \\ &\Leftrightarrow s_2 \in S \text{ y } d(s_1, s_2) \geq 1. \end{aligned}$$

Tenemos:

$$S \not\subseteq B(s_1; 1) \cup B(s_2; 1) \quad (\text{Lema 2.5.7})$$

de modo que existe  $s_3 \in S$  tal que  $s_3 \notin B(s_1; 1) \cup B(s_2; 1)$ , es decir, tal que  $d(s_3, s_1) \geq 1$  y  $d(s_3, s_2) \geq 1$ . De esta manera podemos continuar y en el paso  $n$  obtendríamos:

$$S \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n B(s_i; 1)$$

de modo que debe existir  $s_{n+1} \in S$  tal que  $d(s_{n+1}, s_i) \geq 1 \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

De manera inductiva se ha construido una sucesión  $(s_n)_n$  en  $S$  con la propiedad de que

$$d(s_i, s_j) \geq 1, \quad \forall i \neq j. \tag{2.15}$$

Pero  $S$  es compacto, lo que implica que  $(s_n)_n$  admite una subsucesión convergente, digamos  $(s_{k_n})_n$ , lo cual es imposible pues contradice la propiedad (2.15). Por lo tanto  $S$  debe ser acotado.  $\square$

De esta manera, en el contexto general de los espacios métricos se tiene:

$$S \text{ compacto} \iff S \text{ cerrado y acotado.}$$

Sin embargo, en el contexto más particular de los espacios métricos completos, si es posible obtener una equivalencia, sustituyendo la propiedad de ser acotado, por la propiedad de ser totalmente acotado que se definirá más adelante (Definición 2.5.11). Necesitamos ahora las nociones de recubrimiento, recubrimiento abierto y subrecubrimiento.

**Definición 2.5.9.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\mathcal{F} = \{S_i\}_{i \in I}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Diremos que  $\mathcal{F}$  es un *recubrimiento* de  $X$  o que  $\mathcal{F}$  *recubre* a  $X$  si  $X \subseteq \bigcup_{i \in I} S_i$ ; y diremos que  $\mathcal{F}$  es un *recubrimiento abierto* de  $X$ , si es un recubrimientos de  $X$  y cada elemento  $S_i$  es un conjunto abierto.

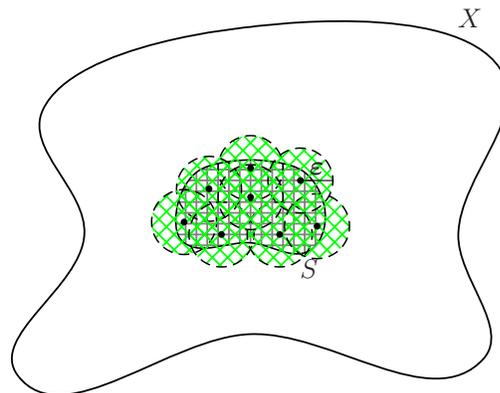
**Ejemplo 2.5.10.**  $\{[n, n + 1)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es un recubrimiento (no abierto) de  $\mathbb{R}$  y  $\{(n - 1, n + 1)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es un recubrimiento abierto de  $\mathbb{R}$ .

Ahora, si  $\{S_i\}_{i \in I}$  es un recubrimiento (abierto) de  $X$ , entonces llamaremos *subrecubrimiento (abierto)* a cualquier subfamilia de  $\{S_i\}_{i \in I}$  que también recubre a  $X$ .

Definamos ahora si, lo que es un conjunto totalmente acotado.

**Definición 2.5.11 (Conjunto totalmente acotado).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $S \subseteq X$ . Diremos que  $S$  es *totalmente acotado* si para todo  $\epsilon > 0$ , existe una  $\epsilon$ -red que recubre a  $S$ .

Entenderemos por  $\epsilon$ -red un número finito de bolas de radio  $\epsilon$ .



**Figura 2.19:** Noción de  $\epsilon$ -red.

**Ejemplo 2.5.12.** 1.  $[0, 1)$  es totalmente acotado. En efecto: dado  $\epsilon > 0$ , por la propiedad arquimediana existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $N(2\epsilon) > 1$ , de modo que es posible “recubrir” el

intervalo  $[0, 1)$  con  $N$  intervalos abiertos de longitud  $2\epsilon$ , o lo que es lo mismo con  $N$  bolas de radio  $\epsilon$ .

2.  $[0, \infty)$  no es totalmente acotado. Si fuese totalmente acotado estaría contenido en un intervalo de la forma  $(a, b)$  lo cual claramente es imposible.

Veamos la relación que existe entre los conceptos: acotado y totalmente acotado:

**Proposición 2.5.13.**  $(X, d)$  espacio métrico  $S \subseteq X$ . Si  $S$  es totalmente acotado entonces  $S$  es acotado. Lo recíproco, en general no es cierto.

*Demostración.* Por definición,  $S$  está contenido en la unión de un número finito de bolas, basta entonces usar el Lema 2.5.7 y se obtiene el resultado.

Ahora veamos un ejemplo para mostrar que lo recíproco, en general no es cierto. Tomemos  $X$  cualquier conjunto infinito con la métrica discreta. Claramente  $X \subseteq B(a; 2)$  para cualquier  $a \in X$ , así que  $X$  es acotado; pero no existe por ejemplo una  $\epsilon = \frac{1}{2}$ -red que recubra a  $X$ , pues de lo contrario se tendría  $X = \bigcup_{i=1}^k B(a_i; \frac{1}{2}) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ , lo que contradice que  $X$  es infinito. Se concluye entonces que  $X$  no es totalmente acotado.  $\square$

**Teorema 2.5.14.** Sean  $(X, d)$  espacio métrico completo y  $S \subseteq X$ .  $S$  es compacto si y sólo si  $S$  es cerrado y totalmente acotado.

*Demostración.* Si  $S$  es compacto ya sabemos (Proposición 2.5.8) que entonces  $S$  es cerrado. Veamos que es totalmente acotado. Sea  $\epsilon > 0$ . Si no existiese una  $\epsilon$ -red que recubre a  $S$ , entonces se puede construir una sucesión  $(x_n)_n$  en  $S$  tal que

$$d(x_i, x_j) \geq \epsilon, \quad \forall i \neq j. \quad (2.16)$$

Como  $S$  es compacto,  $(x_n)_n$  admite una subsucesión  $(x_{k_n})_n$  convergente, por lo tanto  $(x_{k_n})_n$  es de Cauchy, pero esto contradice la desigualdad (2.16). Por lo tanto existe una  $\epsilon$ -red que recubre a  $S$ . Recíprocamente, supongamos que  $S$  es cerrado y totalmente acotado. Sea  $(x_n)_n$  una sucesión en  $S$ . Si  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  es finito entonces existe un término de la sucesión, digamos  $x_k$ , que se repetirá indefinidamente, es decir, tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  es posible encontrar  $N \geq n$  tal que  $x_N = x_k$ . De esta manera la sucesión constante  $(x_k, x_k, \dots, x_k, \dots)$  es una subsucesión convergente de  $(x_n)_n$ . Ahora si  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  es infinito, tomamos una colección finita de bolas cerradas de radio 1, tal que  $S$  está contenida en la unión de esas bolas. Una de estas bolas, digamos  $B_1$ , contiene infinitos puntos de la sucesión  $(x_n)_n$ . Escojamos  $N_1$  tal que  $x_{N_1} \in B_1$ . Como  $B_1 \cap S$  también resulta totalmente acotado, tomamos una colección finita de bolas cerradas de radio  $1/2$  tal que  $B_1 \cap S$  está contenido en la unión de esas bolas. Nuevamente como  $B_1 \cap S$  contiene infinitos términos de la sucesión  $(x_n)_n$ , entonces alguna de

estas bolas, digamos  $B_2$ , debe contener infinitos términos de la sucesión. Escojamos  $N_2 > N_1$  tal que  $x_{N_2} \in B_2$ . Así continuamos, hasta obtener una sucesión “decreciente” de cerrados:

$$B_1 \cap S \supset B_2 \cap S \supset B_3 \cap S \supset \cdots \supset B_n \cap S \supset \cdots$$

donde cada  $B_n$  tiene radio  $1/2^{n-1}$  y  $(N_n)_n$  es una sucesión creciente de enteros tal que  $x_{N_n} \in B_n \cap S$ . Si  $m \geq n$  entonces  $B_{N_m} \cap S \subset B_{N_n} \cap S$ , de modo que  $x_{N_n}, x_{N_m} \in B_{N_m}$  y por tanto:

$$d(x_{N_n}, x_{N_m}) < \frac{1}{2^{m-2}}$$

(el diámetro de la bola  $B_{N_m}$ ), lo cual implica que  $(x_{N_n})_n$  es una sucesión de Cauchy. Como  $S$  es cerrado y  $X$  es completo entonces  $S$  es completo (Proposición 2.3.18) luego  $(x_{N_n})_n$  converge a un punto en  $S$ . De esta manera obtenemos que  $S$  es compacto.  $\square$

En el caso particular de los espacios euclidianos  $\mathbb{R}^n$  se tiene que ser acotado es equivalente a ser totalmente acotado.

**Proposición 2.5.15.** *Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $S$  es acotado si y sólo si  $S$  es totalmente acotado.*

La demostración de esta proposición debemos posponerla para después de demostrar la Proposición 2.5.20.

**Definición 2.5.16** (Puntos de acumulación y puntos frontera). Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $S \subseteq X$  y  $x \in X$ .

1. Diremos que  $x$  es un *punto de acumulación* de  $S$  si toda bola con centro en  $x$ , interseca a  $S$ , en un punto distinto de  $x$ . Es decir,  $x$  es punto de acumulación de  $S$  si y sólo si

$$(\forall \epsilon > 0) ((B(x; \epsilon) - \{x\}) \cap S \neq \emptyset).$$

El conjunto de todos los puntos de acumulación de  $S$  se llama el *derivado* de  $S$  y se denota  $S'$ .

2. Diremos que  $x$  es un *punto frontera* de  $S$  si toda bola con centro en  $x$ , interseca a  $S$  y a  $X - S = S^c$ . Es decir,  $x$  es punto frontera de  $S$  si y sólo si

$$(\forall \epsilon > 0) (B(x, \epsilon) \cap S \neq \emptyset \text{ y } B(x, \epsilon) \cap S^c \neq \emptyset).$$

El conjunto de todos los puntos frontera de  $S$  se llama la *frontera* de  $S$  y se denota  $Fr(S)$  o  $\partial S$ .

**Ejemplo 2.5.17.** En  $\mathbb{R}$ :

$S_i$	$\overline{S}_i$	$S'_i$	$\partial S_i$
$[0, 1)$	$[0, 1]$	$[0, 1]$	$\{0, 1\}$
$(0, \infty)$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$	$\{0\}$
$\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$	$\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$	$\{0\}$	$\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
$\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$	$\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$	$\{0\}$	$\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
$[0, 1) \cup \{2\}$	$[0, 1] \cup \{2\}$	$[0, 1]$	$\{0, 1, 2\}$
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\emptyset$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathcal{C}$ (Conjunto de Cantor)	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$ (Véase el Apéndice B)
$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$	$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$	$\emptyset$	$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$

**Proposición 2.5.18.** Sean  $(X, d)$  espacio métrico y  $S \subseteq X$ . Entonces:

1.  $\overline{S} = S \cup S'$ .
2.  $S$  es cerrado si y sólo si  $\partial S \subseteq S$ .

*Demostración.*

1. Sea  $x \in \overline{S}$ . Si  $x \notin S$  veamos que entonces  $x \in S'$ .

Sea  $\epsilon > 0$ , entonces  $B(x, \epsilon) \cap S \neq \emptyset$ , luego, existe  $y \in B(x, \epsilon) \cap S$ , lo cual implica que  $y \in B(x, \epsilon)$  e  $y \in S$ , de modo que  $x \neq y$ , en consecuencia  $y \in (B(x, \epsilon) - \{x\}) \cap S$ . Así  $\overline{S} \subseteq S \cup S'$ .

Recíprocamente:

Sea  $x \in S$ , entonces  $x \in \overline{S}$  (dado que  $S \subseteq \overline{S}$ ).

Si  $x \in S'$ , entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que  $(B(x, \epsilon) - \{x\}) \cap S \neq \emptyset$ , luego  $B(x, \epsilon) \cap S \neq \emptyset$ , y en consecuencia  $x \in \overline{S}$ , así  $S \cup S' \subseteq \overline{S}$ .

2.  $\Rightarrow$ ) Si  $S$  es cerrado, sea  $x \in \partial S$  y veamos que  $x \in S$ . Dado  $\epsilon > 0$  se tiene que  $B(x, \epsilon) \cap S \neq \emptyset$  y  $B(x, \epsilon) \cap S^c \neq \emptyset$ ; en particular  $B(x, \epsilon) \cap S \neq \emptyset$  entonces  $x \in \overline{S} = S$  luego  $x \in S$ .

$\Leftarrow$ ) Para probar que  $S$  es cerrado, demostramos que  $\overline{S} \subseteq S$ .

Sea  $x \in \overline{S}$ , veamos que  $x \in S$ . Por contradicción supongamos que  $x \notin S$  entonces  $x \notin \partial S$  (hipótesis), luego existe  $\epsilon > 0$ , tal que

$$\text{a) } B(x, \epsilon) \cap S = \emptyset \qquad \text{ó} \qquad \text{b) } B(x, \epsilon) \cap S^c = \emptyset$$

Como  $x \in \overline{S}$  entonces a) es imposible, de modo que se debe tener b) o sea  $B(x, \epsilon) \subseteq S$ , lo que implicaría  $x \in S \Rightarrow \Leftarrow$ .  $\square$

Veamos una caracterización de la noción de compacidad, en términos de recubrimientos abiertos. Pero antes introduzcamos la noción de diámetro de un conjunto.

**Definición 2.5.19.** Sean  $(X, d)$  espacio métrico y  $A \subseteq X$ ,  $A$  acotado y no vacío. Se define el *diámetro* de  $A$  por:

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}.$$

Observe que como  $A$  es acotado y no vacío, entonces el conjunto  $\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$  es un conjunto de reales, no vacío y acotado superiormente de modo que la definición anterior está bien formulada.

**Proposición 2.5.20.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.  $X$  es compacto si y sólo si todo recubrimiento abierto de  $X$  se puede reducir a un subrecubrimiento finito.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Si  $X$  es compacto, sea  $\mathcal{A}$  un recubrimiento abierto de  $X$ . Demostremos que existe  $\delta > 0$  tal que cada conjunto de diámetro menor que  $\delta$ , está contenido en un elemento de  $\mathcal{A}$ . Por contradicción, supongamos que no existe tal  $\delta$ . Entonces para cada entero positivo  $n$ , existe un conjunto  $C_n$  con diámetro menor que  $1/n$  que no está contenido en ningún elemento de  $\mathcal{A}$ . Tomemos un  $x_n \in C_n$  para cada  $n$ . Por hipótesis existe una subsucesión  $(x_{n_j})_n$  de la sucesión  $(x_n)_n$ , que converge a un punto  $a \in X$ . Existe un  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $a \in A$ . Como  $A$  es abierto, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_d(a; \epsilon) \subseteq A$ . Tomemos  $j$  suficientemente grande para que  $\frac{1}{n_j} < \frac{\epsilon}{2}$ , de modo que  $C_{n_j} \subseteq B_d(x_{n_j}; \epsilon/2)$  (pues si  $y \in C_{n_j}$ , como  $x_{n_j} \in C_{n_j}$ , entonces  $d(y, x_{n_j}) \leq \text{diam}(C_{n_j}) < \frac{1}{n_j} < \frac{\epsilon}{2}$ ). También podemos escoger  $j$  suficientemente grande para que  $d(x_{n_j}, a) < \epsilon/2$ . De esta manera obtendríamos, para  $j$  suficientemente grande,  $C_{n_j} \subseteq B_d(a; \epsilon)$ ; luego  $C_{n_j} \subseteq A$  lo que contradice que cada  $C_n$  no está contenido en ningún elemento de  $\mathcal{A}$ .

Ahora, demostremos que  $X$  es totalmente acotado. Sea  $\epsilon > 0$ . Supongamos que  $X$  **no** se puede cubrir con un número finito de bolas de radio  $\epsilon$ . Sea  $x_1 \in X$ . Como  $X \not\subseteq B_d(x_1; \epsilon)$ , escogemos  $x_2 \in X$  tal que  $d(x_1, x_2) \geq \epsilon$ . Como  $X \not\subseteq B_d(x_1; \epsilon) \cup B_d(x_2; \epsilon)$ , escogemos  $x_3 \in X$  tal que  $d(x_3, x_i) \geq \epsilon$ ,  $i = 1, 2$ . Así sucesivamente, hasta construir una sucesión  $(x_n)_n$  en  $X$  que **no** puede admitir una subsucesión convergente (por la condición  $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ ,  $\forall i \neq j$ ). Por lo tanto  $X$  es totalmente acotado.

Para el  $\delta > 0$ , encontrado anteriormente consideremos  $\epsilon = \delta/3$ . Existe un cubrimiento finito de  $X$  por  $\epsilon$ -bolas. Cada bola tiene diámetro  $2\epsilon = \frac{2}{3}\delta < \delta$ , de modo que cada bola

de estas, está contenida en un elemento de  $\mathcal{A}$ . Digamos que estas bolas son  $B_1, B_2, \dots, B_N$  y  $B_i \subseteq A_i, A_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, \dots, N$ . Así,  $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$  es un subcubrimiento finito de  $X$ .

$\Leftrightarrow$ ) Supongamos que todo recubrimiento abierto de  $X$  se puede reducir a un subcubrimiento finito y sea  $(x_n)_n$  una sucesión en  $X$ . Si el conjunto  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  es finito, entonces existe un punto  $x$  tal que  $x = x_n$  para un número infinito de valores de  $n$  y en tal caso la sucesión  $(x_n)_n$  tiene una subsucesión que es constante y, por tanto, convergente. Ahora, si  $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  es infinito, probemos que entonces  $A$  tiene un punto de acumulación. Por contradicción: si  $A' = \emptyset$  entonces  $\overline{A} = A \cup A' = A \cup \emptyset = A$ , luego  $A$  es cerrado. Además, para cada  $x_n \in A$ ,  $x_n$  **no** es punto de acumulación de  $A$ , lo que significa que para cada  $x_n$ , existe una bola  $B(x_n; r_n)$  tal que

$$(B(x_n; r_n) - \{x_n\}) \cap A = \emptyset. \quad (2.17)$$

Ahora,  $X = A \cup (X - A) \subseteq \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_n; r_n) \right) \cup (X - A)$ , de modo que  $\{B_n(x_n; r_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{X - A\}$  es un recubrimiento abierto de  $X$  y podemos aplicar la hipótesis para extraer un subcubrimiento finito. Como claramente  $X - A$  no interseca a  $A$  entonces  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(x_{n_i}; r_{n_i})$  para algún  $N \in \mathbb{N}$ , pero además cada bola interseca a  $A$ , solamente en su centro (por (2.17)), de modo que esta última contención implicaría que  $A$  es finito  $\Rightarrow \Leftarrow$ .

Sea entonces  $x$  un punto de acumulación de  $A$ . Construiremos una subsucesión de  $(x_n)_n$  convergente a  $x$ , como sigue: elegimos  $x_{n_1} \in B(x; 1)$ . Como  $B(x; 1/2)$  interseca a  $A$  en un número infinito de puntos, es posible escoger  $n_2 > n_1$  tal que  $x_{n_2} \in B(x; 1/2)$ . De nuevo, como  $B(x; 1/3)$  interseca a  $A$  en infinitos puntos, se puede seleccionar  $n_3 > n_2$  tal que  $x_{n_3} \in B(x; 1/3)$ . De esta manera se continua y se obtiene entonces  $(x_{n_j})$  una subsucesión de  $(x_n)_n$  tal que  $(x_{n_j}) \rightarrow x$ .  $\square$

El resultado anterior se usa en la demostración de la Proposición 2.5.15, la cual habíamos dejado pendiente, y la presentamos en seguida.

*Demostración de la Proposición 2.5.15.* En virtud de la Proposición 2.5.13 sólo falta probar que si  $S$  es acotado entonces es totalmente acotado. Si  $S \subseteq B(a; r)$ , consideremos  $\epsilon > 0$  y  $K = \overline{B(a; r)}$ , de modo que  $S \subseteq K$ ,  $K$  es cerrado (Ejercicio 2.9.12) y acotado (por ejemplo,  $K \subseteq B(a; \frac{3}{2}r)$ ), por lo tanto  $K$  es compacto.

Tenemos:  $K \subseteq \bigcup_{t \in K} B(t; \epsilon)$ , de modo que usando la Proposición 2.5.20 existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(t_i; \epsilon)$  y de esta manera  $\{B(t_i; \epsilon)\}_{i=1}^N$  es una  $\epsilon$ -red para  $S$ .  $\square$

**Proposición 2.5.21.** Si  $(X, d)$  es espacio métrico compacto y  $F \subseteq X$ ,  $F$  cerrado, entonces  $F$  es compacto.

*Demostración.* Sea  $\{O_i\}_{i \in I}$  un recubrimiento abierto de  $F$ , entonces

$$X = F \cup (X - F) \subseteq \left( \bigcup_{i \in I} O_i \right) \cup (X - F).$$

$\{O_i\}_{i \in I} \cup \{X - F\}$  es un recubrimiento abierto de  $X$  y como  $X$  es compacto este recubrimiento se puede reducir a un subrecubrimiento finito, de lo cual podemos concluir que debe existir un  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $F \subseteq \bigcup_{k=1}^N O_{i_k}$ ; luego  $F$  es compacto.  $\square$

**Proposición 2.5.22.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, entonces:

- (i) La unión finita de compactos es un compacto;
- (ii) La intersección arbitraria de compactos es un compacto.

*Demostración.*

- (i) Basta hacer la prueba para dos compactos y luego aplicar inducción matemática.

Sean  $A$  y  $B$  compactos y sea  $\{O_i\}_{i \in I}$  un recubrimiento abierto de  $A \cup B$ . Tenemos:  $A, B \subseteq A \cup B \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$ , luego  $\{O_i\}_{i \in I}$  es recubrimiento abierto tanto de  $A$ , como de  $B$ . Por hipótesis existen  $\{O_{i_k}\}_{k=1}^N$  y  $\{O_{j_k}\}_{k=1}^M$  subrecubrimientos finitos de  $A$  y de  $B$  respectivamente, de modo que  $\{O_{i_k}\}_{k=1}^N \cup \{O_{j_k}\}_{k=1}^M$  es un subrecubrimiento finito de  $A \cup B$ .

- (ii) Sea  $\{K_i\}_{i \in I}$  familia de compactos. Entonces cada  $K_i$  es un cerrado (Proposición 2.5.8) de modo que  $\bigcap_{i \in I} K_i$  es también un cerrado (Ejercicio 2.9.10). Además  $\bigcap_{i \in I} K_i \subset K_j$  para cada  $j \in I$ , y  $\bigcap_{i \in I} K_i$  sigue siendo cerrado como subconjunto de  $K_j$  (si  $A \subseteq K \subseteq X$  y  $A$  es cerrado en  $X$ , entonces  $A$  también es cerrado en  $K$  porque  $K - A = (X - A) \cap K$ ,  $X - A$  es abierto en  $X$ , y se puede entonces aplicar la Proposición 2.4.7 para concluir que  $K - A$  es abierto en  $K$ ). Se tiene entonces que  $\bigcap_{i \in I} K_i$  es un cerrado en  $K_j$  y  $K_j$  es compacto, luego, en virtud de la Proposición 2.5.21, se concluye que  $\bigcap_{i \in I} K_i$  es compacto.  $\square$

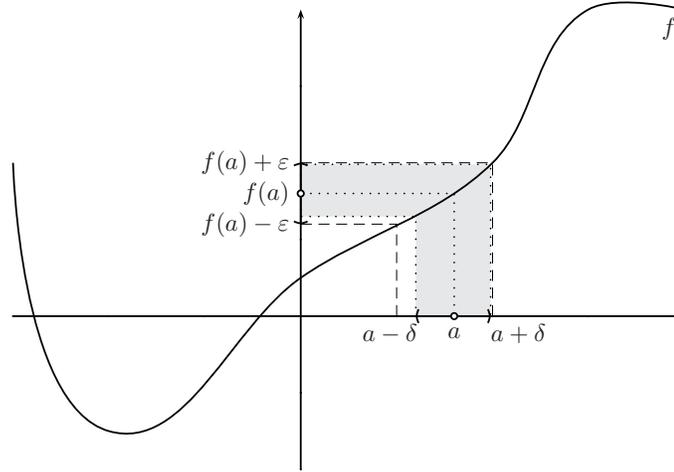
## 2.6. Continuidad en espacios métricos

Recordemos la definición de continuidad que se estudia en un primer curso de cálculo: dados una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in \mathbb{R}$ , se dice que  $f$  es continua en  $a$ , si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe

$\delta > 0$  tal que,

$$\text{siempre que } |x - a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (2.18)$$

(Ver Figura 2.20)



**Figura 2.20:**  $f$  es continua en  $a$ .

Recordemos también que la métrica usual en  $\mathbb{R}$  está dada por

$$d_u(x, y) = |x - y| ;$$

de modo que en la definición anterior está involucrada la noción de distancia y la condición (2.18) se puede escribir como sigue:

$$\text{siempre que } d_u(x, a) < \delta \text{ entonces } d_u(f(x), f(a)) < \varepsilon. \quad (2.19)$$

De esta manera la definición de continuidad de una función en  $\mathbb{R}$  se puede generalizar al contexto de los espacios métricos, cambiando  $\mathbb{R}$  por cualquier espacio métrico y  $d_u$  por la métrica del espacio, obteniendo entonces la siguiente definición:

**Definición 2.6.1.** Sean  $(X, d)$  y  $(Y, m)$  espacios métricos,  $f : X \rightarrow Y$  y  $a \in X$ . Diremos que  $f$  es **continua** en  $a$ , si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que siempre que  $d(x, a) < \delta$ , entonces  $m(f(x), f(a)) < \varepsilon$ . Diremos que  $f$  es continua en  $X$  (o simplemente continua), si  $f$  es continua en  $a$ , para todo  $a \in X$ .

Si  $f$  no es continua en  $a$ , se dice que  $f$  es **discontinua** en  $a$ .

La continuidad se puede también caracterizar en términos de bolas o en términos de abiertos. Veamos:

**Proposición 2.6.2.** Sean  $f : (X, d) \rightarrow (Y, m)$  y  $a \in X$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $f$  es continua;
2. Para toda bola  $B_m(f(a); \epsilon)$  existe una bola  $B_d(a, \delta)$  tal que

$$f(B_d(a; \delta)) \subseteq B_m(f(a); \epsilon);$$

3. Para todo  $O$  abierto en  $Y$ , se tiene que  $f^{-1}(O)$  es abierto en  $X$ .

*Demostración.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Dada la bola  $B(f(a); \epsilon)$ , para  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta$  implica  $m(f(x), f(a)) < \epsilon$ , es decir tal que:

$$x \in B_d(a; \delta) \text{ implica } f(x) \in B_m(f(a); \epsilon).$$

Ahora sea  $y \in f(B_d(a; \delta))$ ; existe  $x \in B_d(a; \delta)$  tal que  $y = f(x)$ , entonces  $y \in B_m(f(a); \epsilon)$ , de modo que,  $f(B_d(a; \delta)) \subseteq B_m(f(a); \epsilon)$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Sea  $O$  abierto en  $(Y, m)$ . Si  $f^{-1}(O) = \emptyset$  entonces es abierto. Si  $f^{-1}(O) \neq \emptyset$ , sea  $a \in f^{-1}(O)$ , es decir  $f(a) \in O$  y puesto que  $O$  es abierto, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_m(f(a); \epsilon) \subseteq O$ . Por hipótesis existe una bola  $B_d(a; \delta)$  tal que,  $f(B_d(a; \delta)) \subseteq B_m(f(a); \epsilon)$ , de lo cual se tiene:

$$B_d(a; \delta) \subseteq f^{-1}f(B_d(a; \delta)) \subseteq f^{-1}(B_m(f(a); \epsilon)) \subseteq f^{-1}(O).$$

Esto prueba que  $f^{-1}(O)$  es abierto.

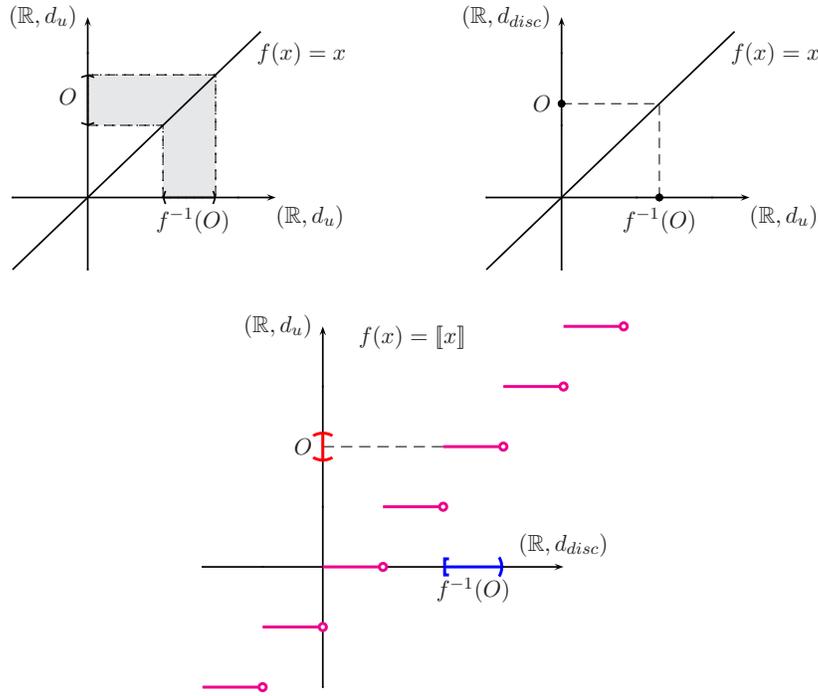
(iii)  $\Rightarrow$  (i): Sea  $a \in X$  y  $\epsilon > 0$ . Consideremos la bola  $B_m(f(a); \epsilon)$  que es un abierto en  $Y$ . Por hipótesis  $f^{-1}(B_m(f(a); \epsilon))$  es abierto en  $X$ , y puesto que  $a \in f^{-1}(B_m(f(a); \epsilon))$ , entonces debe existir un  $\delta > 0$  tal que

$$B_d(a; \delta) \subseteq f^{-1}(B_m(f(a); \epsilon)).$$

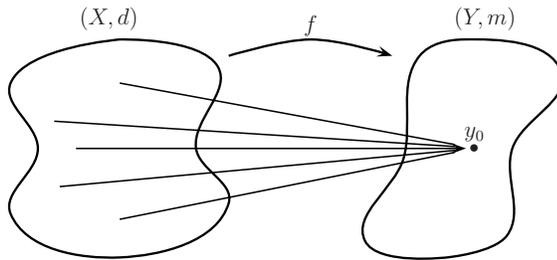
De esta manera, si  $d(x, a) < \delta$  entonces  $x \in B_d(a; \delta)$ , luego  $x \in f^{-1}(B_m(f(a); \epsilon))$ , es decir  $f(x) \in B_m(f(a); \epsilon)$ , o equivalentemente,  $m(f(x), f(a)) < \epsilon$ .  $\square$

### Ejemplo 2.6.3.

1. La función  $f : (\mathbb{R}, d_u) \rightarrow (\mathbb{R}, d_u)$  definida por  $f(x) = x$  es continua.
2. La función  $f : (\mathbb{R}, d_u) \rightarrow (\mathbb{R}, d_{disc})$  definida por  $f(x) = x$  **no** es continua.
3. La función  $f : (\mathbb{R}, d_{disc}) \rightarrow (\mathbb{R}, d_u)$  definida por  $f(x) = \llbracket x \rrbracket$  es continua.



4. Toda función constante es continua.



$f : (X, d) \rightarrow (Y, m)$  definida por  $f(x) = y_0$ , siendo  $y_0 \in Y$ ,  $y_0$  fijo. Sea  $O$  abierto en  $(Y, m)$ . Si  $y_0 \notin O$  entonces  $f^{-1}(O) = \emptyset$  y  $\emptyset$  es abierto. Si  $y_0 \in O$  entonces  $f^{-1}(O) = X$  que también es abierto, luego  $f$  es continua.

**Nota.** Obsérvese cómo, en general la continuidad de una función depende no solamente de la forma como está definida la función, sino también de las métricas tanto del dominio como del codominio de la función.

La continuidad en espacios métricos también se puede caracterizar en términos de convergencia de sucesiones como sigue:

**Proposición 2.6.4.** Sean  $f : (X, d) \rightarrow (Y, m)$  y  $a \in X$ .  $f$  es continua en  $a$  si y sólo si  $(x_n)_n \rightarrow a$  implica  $(f(x_n))_n \rightarrow f(a)$ , para cada sucesión  $(x_n)_n$  en  $X$ .

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ) Si  $f$  es continua en  $a$  y  $(x_n)_n \rightarrow a$ , veamos que entonces  $(f(x_n))_n \rightarrow f(a)$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Existe  $\delta > 0$  tal que:

$$d(x_n, a) < \delta \text{ implica } m(f(x_n), f(a)) < \varepsilon.$$

Como  $(x_n)_n \rightarrow a$ , para  $\delta > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que,

$$n \geq N \text{ implica } d(x_n, a) < \delta,$$

lo cual a su vez implica que  $m(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$ . Luego  $(f(x_n))_n \rightarrow f(a)$ .

$\Leftrightarrow$  Sea  $\varepsilon > 0$ . Por contradicción supongamos que no existe  $\delta > 0$  tal que

$$f(B_d(a; \delta)) \subseteq B_m(f(a); \varepsilon).$$

Entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene:

$$f(B_d(a; \frac{1}{n})) \not\subseteq B_m(f(a); \varepsilon),$$

de modo que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $x_n \in B(a; \frac{1}{n})$  tal que  $f(x_n) \notin B(f(a); \varepsilon)$ , es decir:

$$d(x_n; a) < \frac{1}{n}, \quad \text{y,} \quad m(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon.$$

Esto significa que  $(x_n)_n \rightarrow a$  pero  $(f(x_n))_n \not\rightarrow (f(a))$ , contradiciendo la hipótesis.  $\square$

Para efectos de construir fractales nos interesarán cierto tipo de funciones que abordamos en la siguiente sección.

## 2.7. Contracciones en espacios métricos

Intuitivamente una contracción es un función de un espacio métrico en sí mismo, que “reduce distancias”.

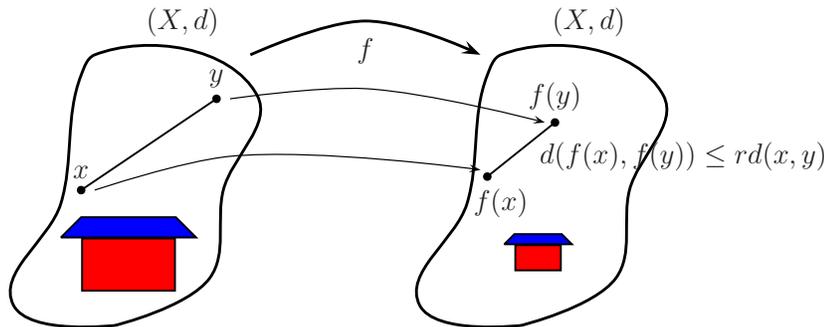


Figura 2.21: Noción intuitiva de contracción.

Formalmente:

**Definición 2.7.1 (Contracción).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$ . Diremos que  $f$  es una **contracción** si existe  $r \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq r < 1$  tal que para cualesquiera  $x, y \in X$  se tiene que

$$d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y).$$

En tal caso la constante  $r$  se llama *factor de contracción* de  $f$ .

**Nota.** Una contracción tiene infinitos factores de contracción, ya que si  $r$  es factor de contracción de  $f$ , entonces también  $s$  lo es, para todo  $s$  tal que  $r < s < 1$ .

**Ejemplo 2.7.2.**

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$$d(f(x), f(y)) = \left| \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} - \left( \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} \right) \right| = \frac{1}{3}|x - y| = \frac{1}{3}d(x, y).$$

$f$  es contracción, con factor de contracción  $\frac{1}{3}$ . Cualquier  $r \in [\frac{1}{3}, 1)$  es también un factor de contracción de  $f$ .

2.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}; \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Recordemos, (véase el Apéndice A) que si  $z = (z_1, z_2)$  y  $w = (w_1, w_2)$  entonces la norma de  $z - w$  está dada por

$$\|z - w\| = \sqrt{(z - w) \cdot (z - w)} = \sqrt{(z_1 - w_1)^2 + (z_2 - w_2)^2} = d_u(z, w).$$

Luego

$$\begin{aligned} d(f(z), f(w)) &= \|f(z) - f(w)\| = \left\| \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}w - \frac{1}{2} \right\| \\ &= \frac{1}{2}\|z - w\| = \frac{1}{2}d(z, w). \end{aligned}$$

Así  $f$  es una contracción con factor de contracción  $\frac{1}{2}$ .

Este ejemplo lo podemos generalizar como sigue:

3. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por:  $f(z) = rze^{i\theta} + e + fi$ , donde  $r, e, f \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq r < 1$ ,  $e$  es la constante de Euler<sup>7</sup>.

Recordemos que  $e^{\theta i} = \cos \theta + i \sin \theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ , de donde  $\|e^{i\theta}\| = 1$ .

Ahora,

$$\begin{aligned} \|f(z) - f(w)\| &= \left\| rze^{i\theta} + e + fi - rwe^{i\theta} - e - fi \right\| \\ &= r \left\| e^{i\theta} \right\| \|z - w\| = r \|z - w\|. \end{aligned}$$

<sup>7</sup> $e \approx 2,7182818284590452353602874713527$

Entonces

$$\|f(z) - f(w)\| = r \|z - w\|$$

o de forma equivalente

$$d(f(z), f(w)) = rd(z, w).$$

Luego  $f$  es una contracción con factor de contracción  $r$ .

4. Toda función constante es una contracción. En efecto: sea  $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ ,  $x_0 \in X$ , donde  $x_0$  es fijo. Definamos  $f(x) = x_0$ ,  $\forall x \in X$ . Entonces

$$d(f(x), f(y)) = d(x_0, x_0) = 0 < rd(x, y)$$

para cualquier  $r$ ,  $0 \leq r < 1$ .

5. La función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por  $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , es una contracción con factor de contracción  $\frac{1}{2}$  (!compruébelo!).

**Proposición 2.7.3.** *Toda contracción es continua.*

*Demostración.* Sean  $f : X \rightarrow X$  una contracción,  $a \in X$  y  $\epsilon > 0$ . Debemos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, a) < \delta \rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Dado que  $f$  es contracción, existe  $r$ ,  $0 \leq r < 1$  tal que  $d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y)$ . Si  $r = 0$  se tendría  $d(f(x), f(y)) = 0$ ,  $\forall x, y \in X$ , luego  $f(x) = f(y)$ ,  $\forall x, y \in X$ , lo que significa que  $f$  es una función constante y por tanto continua (Ejemplo 2.6.3.4).

Si  $r > 0$ , basta tomar  $\delta = \frac{\epsilon}{r}$ , ya que si  $d(x, a) < \delta = \frac{\epsilon}{r}$ , entonces

$$d(f(x), f(a)) \leq rd(x, a) < r \frac{\epsilon}{r} = \epsilon. \quad \square$$

**Definición 2.7.4.** Sea  $f : X \rightarrow X$ ; un punto  $x_0 \in X$  se dice un **punto fijo** de  $f$  si satisface  $f(x_0) = x_0$ .

**Ejemplo 2.7.5.**

1. La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2$  tiene dos puntos fijos: 0 y 1, como fácilmente se puede verificar.
2. La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$  tiene a  $\frac{3}{2}$  como punto fijo, como fácilmente se puede verificar.

Pero además en este caso  $\frac{3}{2}$  es el **único** punto fijo de  $f$  ya que es el único real que satisface  $\frac{1}{3}x + 1 = x$ . Por otra parte este único punto fijo cumple también una propiedad especial que explicaremos después de introducir la siguiente notación:

**Nota.** Si  $f : X \rightarrow X$  y  $x \in X$  obsérvese que entonces los elementos  $f(x)$ ,  $f(f(x))$ ,  $f(f(f(x)))$ , etc. quedan bien definidos.

Notemos  $f(f(x))$  por  $f^{\circ 2}(x)$ ,  $f(f(f(x)))$  por  $f^{\circ 3}(x)$  y así sucesivamente. Lo podemos también definir recursivamente como sigue:

$$\begin{cases} f^{\circ 1}(x) := f(x) \\ f^{\circ n}(x) := f(f^{\circ(n-1)}(x)), \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$$

De esta manera para todo  $x \in X$  queda definida la sucesión:

$$x, f(x), f^{\circ 2}(x), \dots, f^{\circ n}(x), \dots$$

que suele llamarse la **órbita** de  $x$ .

Volvamos a nuestro ejemplo y analicemos la órbita de cualquier  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x + 1 \\ f^{\circ 2}(x) &= f\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x + 1\right) + 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 x + \frac{1}{3} + 1 \\ f^{\circ 3}(x) &= f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 x + \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 x + \frac{1}{3} + 1\right) + 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 1 \\ &\vdots \\ f^{\circ n}(x) &= \left(\frac{1}{3}\right)^n x + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 1. \end{aligned}$$

¿Cómo se comporta esta órbita?, ¿converge?, ¿no converge?, si converge, a dónde lo hace?

Veamos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(\frac{1}{3}\right)^n x + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 1 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n x + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

que es precisamente el punto fijo de  $f$ .

Veremos en la siguiente sección que esto no es una coincidencia, sino que es un caso particular de un importante teorema.

## 2.8. El teorema del punto fijo para espacios métricos completos

El siguiente resultado, llamado *Teorema del punto fijo para espacios métricos completos*, es de gran importancia para la geometría fractal, pues es justamente el resultado que va a garantizar la existencia y unicidad de cada fractal obtenido por medio de un sistema iterado de funciones, como lo veremos en el capítulo 4.

**Teorema 2.8.1** (Teorema del punto fijo). Sean  $(M, d)$  un espacio métrico completo y  $f : M \rightarrow M$  una contracción de  $M$ . Entonces  $f$  tiene un único punto fijo, es decir, existe un único  $p \in M$  tal que  $f(p) = p$ . Además, para cualquier  $x \in M$  se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x) = p.$$

*Bosquejo de la demostración.* Sea  $x \in M$ . Puesto que  $f$  es una contracción, se puede demostrar que la sucesión

$$(f^{\circ n}(x))_n = (x, f(x), f^{\circ 2}(x), \dots, f^{\circ n}(x), \dots)$$

es una sucesión de Cauchy (intuitivamente, cada vez que se aplica la función, las distancias se van reduciendo de modo que los términos de la sucesión se van acercando cada vez más entre sí). Como  $M$  es completo la sucesión converge, es decir existe un  $p \in M$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x) = p.$$

Entonces:

$$f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x)\right) = f(p),$$

y como  $f$  es continua (por ser contracción) se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(f^{\circ n}(x)) = f(p),$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x) = f(p),$$

es decir:  $p = f(p)$  de modo que  $p$  es punto fijo de  $f$ . Ahora si  $q$  fuese otro punto fijo de  $f$  se tendría:

$$d(p, q) = d(f(p), f(q)) \leq rd(p, q)$$

siendo  $r$  factor de contracción de  $f$ . Entonces  $d(p, q)(r - 1) \geq 0$  y puesto que  $0 \leq r < 1$  se concluye que  $d(p, q) = 0$ .

La prueba formal de que  $(f^{\circ n}(x))_n$  es de Cauchy es como sigue:

tomemos  $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $m \geq n$ . Tenemos:

$$\begin{aligned}
 d(f^{\circ m}(z), f^{\circ n}(z)) &\leq rd\left(f^{\circ(m-1)}(z), f^{\circ(n-1)}(z)\right) \\
 &\leq r^2d\left(f^{\circ(m-2)}(z), f^{\circ(n-2)}(z)\right) \leq \dots \\
 &\leq r^n d\left(f^{\circ(m-n)}(z), z\right) \\
 &\leq r^n \left[ d\left(f^{\circ(m-n)}(z), f^{\circ(m-n-1)}(z)\right) \right. \\
 &\quad \left. + d\left(f^{\circ(m-n-1)}(z), f^{\circ(m-n-2)}(z)\right) + \dots + d(f(z), z) \right] \\
 &\leq r^n \left[ r^{m-n-1}d(f(z), z) + r^{m-n-2}d(f(z), z) \right. \\
 &\quad \left. + \dots + rd(f(z), z) + d(f(z), z) \right] \\
 &= r^n d(f(z), z) \left[ r^{m-n-1} + r^{m-n-2} + \dots + r + 1 \right] \\
 &\leq r^n d(f(z), z) \sum_{k=0}^{\infty} r^k = r^n d(f(z), z) \frac{1}{1-r} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

Luego,  $(f^{\circ n}(z))_n$  es una sucesión de Cauchy.  $\square$

## 2.9. Ejercicios

1. Demuestre que los axiomas  $EM1$  y  $EM2$  de la definición de espacio métrico (Definición 2.1.1) implican que para cualesquiera  $x, y, z \in M$  se cumple que:

$$a) \quad d(x, y) \geq 0; \quad b) \quad d(x, y) = d(y, x); \quad c) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

2. Para cada una de las siguientes funciones de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , determine cuáles de ellas definen una métrica y cuáles no. Justifique su respuesta.

$$\begin{aligned}
 a) \quad d_{\ln}(x, y) &=: \ln(1 + |x - y|); \\
 b) \quad m(x, y) &= |x^3 - y^3|; \\
 c) \quad d(x, y) &= |x^2 - y^2|; \\
 d) \quad t(x, y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x = 2y \vee y = 2x \\ 2 & \text{en otro caso} \end{cases}
 \end{aligned}$$

3. Demuestre que la función  $d_{disc}$  definida en el ejemplo 2.1.2.4, es en efecto una métrica en  $X$  (métrica discreta).

4. Demostrar que la función  $d$  definida en el ejemplo 2.1.2.5 en efecto satisface los axiomas (EM1) y (EM2).

5. Se definen las funciones  $d_{tax}, d_{m\acute{a}x} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$\begin{aligned}
 d_{tax}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= : |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|, \\
 d_{m\acute{a}x}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= : \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}.
 \end{aligned}$$

Demuestre que  $d_{tax}$  y  $d_{m\acute{a}x}$  son métricas en  $\mathbb{R}^2$ .

6. Escriba los siete primeros términos de la sucesión  $(s_n)_n$  definida por:

a)  $(s_n)_n = (2n)_n$

b)  $(s_n)_n = ((-1)^n)_n$

7. Escriba una “fórmula” que defina la siguiente sucesión (en  $\mathcal{P}\mathbb{R}^2$ ):



8. Considere el espacio métrico  $(\mathbb{R}^2, d_{\text{máx}})$  y dibuje la bola  $B_{d_{\text{máx}}}((0, 0); 1)$ .

9. Considere el espacio de los códigos  $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d)$ ,  $\Sigma = \{1, 2, \dots, N\}$  (Ejemplo 2.1.2.5) y sean  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k$  fijo,  $a = a_1 a_2 a_3 \dots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ . Demuestre que

$$B_d\left(a; \frac{1}{(N+1)^k}\right) = \left\{ \mathbf{x} \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_k = a_k \right\}.$$

10. Sea  $(X, d)$  espacio métrico. Demuestre que:

a)  $\emptyset$  y  $X$  son cerrados.

b) La unión finita de cerrados, es un cerrado.

c) La intersección arbitraria de cerrados, es un cerrado.

d) ¿Qué se puede decir de la unión arbitraria de cerrados? Justifique.

11. Considere una bola  $B(a; r)$  en un espacio métrico  $(X, d)$ . ¿Qué relación existe entre la adherencia  $\overline{B(a; r)}$  y la bola cerrada  $\overline{B}(a; r)$ ? (recuerde que la bola cerrada se define por:  $\overline{B}(a; r) := \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$ ).

12. Demuestre que en un espacio métrico, la adherencia de cualquier conjunto, es un conjunto cerrado. Además  $\overline{S}$  es el “menor” cerrado que contiene  $S$ , es decir si  $C$  es cerrado y  $S \subseteq C$  entonces  $\overline{S} \subseteq C$ .

13. Una sucesión  $(x_n)_n$  en un espacio métrico se dirá “casi constante” si existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x_k = x_{k+1} = x_{k+2} = \dots$

Demuestre que en un espacio discreto  $(X, d_{\text{disc}})$  una sucesión converge si y sólo si es casi constante.

14. Sea  $(X, d)$  espacio métrico y  $S \subseteq X$ . Demuestre:

a)  $\emptyset' = \emptyset$ ,  $\partial\emptyset = \emptyset$ ,  $\partial X = \emptyset$ ;

b)  $\partial S = \partial S^c$ .

15. Sean  $(X, d)$  espacio métrico,  $S \subseteq X$  y  $x \in X$ . Demuestre que  $x$  es punto de acumulación de  $S$  si y sólo si existe una sucesión  $(x_n)_n$  de puntos de  $S - \{x\}$  tal que  $(x_n)_n \rightarrow x$ .

16. Sea  $(X, d)$  espacio métrico. Demuestre:

- a)  $\emptyset$  y  $X$  son abiertos.
- b) La unión arbitraria de abiertos, es un abierto.
- c) La intersección finita de abiertos, es un abierto.
- d) ¿Qué se puede decir de la intersección arbitraria de abiertos? Justifique

17. Demuestre que todo espacio finito es compacto.

18. Demuestre que **no** siempre la unión de compactos es un compacto.

19. Para cada uno de los siguientes subconjuntos  $\mathcal{S}_i$  de  $\mathbb{R}^2$ , determine: ¿es completo?,  $\overline{\mathcal{S}_i}$ , ¿es cerrado?, ¿es acotado?, ¿es compacto?,  $\mathcal{S}'_i$ ,  $\partial\mathcal{S}_i$ ,  $\mathcal{S}_i^\circ$ , ¿es abierto?

- |  |  |
|--|--|
| a) $\mathcal{S}_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$   | h) $\mathcal{S}_8 = \{(x, y) \mid  y  > 2\}$                                 |
| b) $\mathcal{S}_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  | i) $\mathcal{S}_9 =$ Triángulo de Sierpiński                                 |
| c) $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_1 \cup \{(1, 1)\}$   | j) $\mathcal{S}_{10} = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ |
| d) $\mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_2 \cup \{(1, 1)\}$   | k) $\mathcal{S}_{11} = \overline{\mathcal{S}_{10}}$                          |
| e) $\mathcal{S}_5 = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_k\}$<br>(cualquier conjunto finito de puntos). | l) $\mathcal{S}_{12} = [0, 1] \times [0, 1]$                                 |
| f) $\mathcal{S}_6 = \{(x, y) \mid x \geq 1\}$  | m) $\mathcal{S}_{13} = (0, 1] \times [0, 1]$                                 |
| g) $\mathcal{S}_7 = \{(x, y) \mid y = x^3\}$   | n) $\mathcal{S}_{14} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$                         |
|  | $\tilde{n}$ ) $\mathcal{S}_{15} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$              |

Puede resumir toda la información obtenida, completando las tablas 2.9.1 y 2.9.2.

20. Demuestre que en un espacio métrico discreto  $(X, d_{disc})$ , todo subconjunto de  $X$  es simultáneamente abierto y cerrado.

21. Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $(Y, d_{disc})$  un espacio discreto y  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d_{disc})$  inyectiva. Demuestre que  $f$  es discontinua en  $X'$ .

22. Demuestre que toda función cuyo dominio sea un espacio métrico discreto, es continua.

23. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) := ax + b$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes reales.

- a) Demuestre que  $f$  es una contracción si y sólo si  $|a| < 1$ .
- b) Dé un ejemplo de una función  $f$  de la forma definida en a) y calcule la imagen bajo  $f$  de los conjuntos:  $[0, 1]$ ,  $[-1, 3]$  y  $[-2, -1]$ , esto es, calcule  $f([0, 1])$ ,  $f([-1, 3])$  y  $f([-2, -1])$ . Describa en palabras el efecto geométrico de  $f$ .

24. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $f(z) = rz e^{i\theta} + e + fi$ , donde  $r, e, f \in \mathbb{R}$  y  $e$  es la constante de Euler.

a) Demuestre que  $f$  es contracción si y sólo si  $|r| < 1$ .

b) Dé un ejemplo de una función  $f$  de la forma definida en a) y calcule la imagen bajo  $f$  del rectángulo:  $R = [0, 1] \times [0, 2]$ , esto es, calcule  $f(R)$ . Describa en palabras el efecto geométrico de  $f$ .

25. Determine cuáles de las siguientes funciones son contracción y justifique su respuesta. Para cada función encuentre, si los tiene, sus puntos fijos.

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x$

d)  $f : [0, \frac{1}{4}] \rightarrow [0, \frac{1}{4}], \quad f(x) = x^2$

b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

e)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -\frac{2}{3}x$

c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$

f)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos x$

26. Dibuje la gráfica de cada una de las funciones anteriores y dé una interpretación geométrica al problema de encontrar los puntos fijos de una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

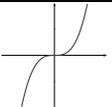
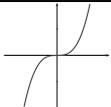
Conjuntos	$\mathcal{S}_i$	$\bar{\mathcal{S}}_i$	$\mathcal{S}_i$ cerrado?	$\mathcal{S}_i$ acotado?	$\mathcal{S}_i$ compacto?	$\mathcal{S}'_i$	$\partial\mathcal{S}_i$	$\mathcal{S}_i^\circ$	$\mathcal{S}_i$ abierto?
$\mathcal{S}_1$			NO	SI					
$\mathcal{S}_2$		SI			SI				NO
$\mathcal{S}_3$		NO		SI					
$\mathcal{S}_4$					SI				
$\mathcal{S}_5$			SI						
$\mathcal{S}_6$									
$\mathcal{S}_7$									
$\mathcal{S}_8$				NO					SI
$\mathcal{S}_9$			SI						

Tabla 2.9.1.

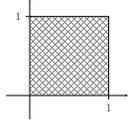
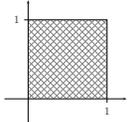
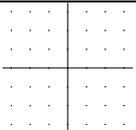
Conjuntos		¿completo?	$\overline{S_i}$	¿cerrado?	¿acotado?	¿compacto?	$S'_i$	$\partial S_i$	$S_i^\circ$	¿abierto?
$S_{10}$				NO	SI					
$S_{11}$		SI								
$S_{12}$										
$S_{13}$										NO
$S_{14}$						NO	$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$			
$S_{15}$				NO				$\mathbb{R}^2$		

Tabla 2.9.2.



## Capítulo 3

# El espacio $(\mathcal{H}(X), h)$ : el espacio donde viven los fractales

En este capítulo nos dedicaremos al estudio de un espacio métrico particular el cual ha sido denominado por M. Barnsley [4] como “el espacio donde viven los fractales”.

### 3.1. El conjunto $\mathcal{H}(X)$ y la métrica de Hausdorff

**Definición 3.1.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Notemos  $\mathcal{H}(X)$  la familia de todos los subconjuntos compactos no vacíos de  $X$ , es decir:

$$\mathcal{H}(X) := \{K \subseteq X \mid K \text{ es compacto, } K \neq \emptyset\}.$$

**Ejemplo 3.1.2.** Consideremos  $(\mathbb{R}^2, d_u)$ . Los conjuntos  $K_1$  a  $K_7$  que se muestran en la Figura 3.1(a) pertenecen a  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ , mientras que  $S_1$  a  $S_6$  **no** pertenecen a  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  (ver Figura 3.1(b)).

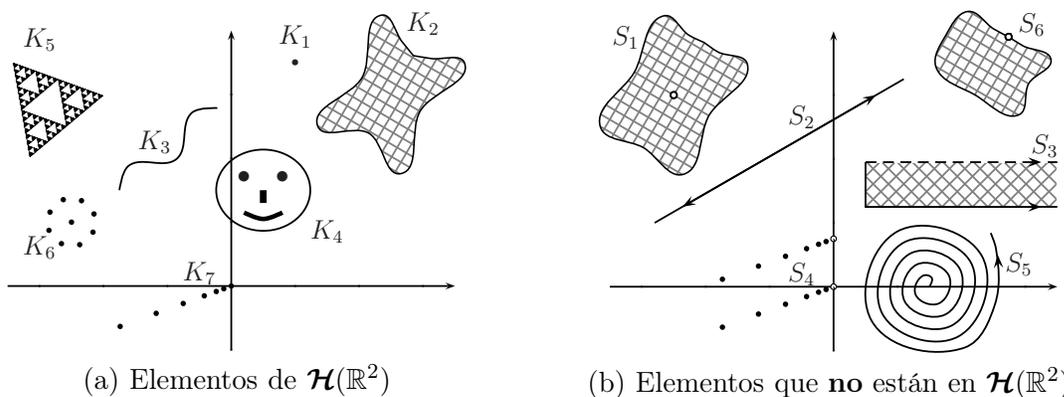


Figura 3.1:

Una característica importante en  $\mathcal{H}(X)$ , es que la continuidad preserva la compacidad, es decir:

**Proposición 3.1.3.** Sean  $(X, d)$  y  $(Y, m)$  espacios métricos y  $f : X \rightarrow Y$  continua. Si  $K \in \mathcal{H}(X)$  entonces  $f(K) \in \mathcal{H}(Y)$ .

*Demostración.* Sea  $(y_n)_n$  una sucesión en  $f(K)$ . Debemos probar que  $(y_n)_n$  admite una sub-sucesión convergente en  $f(K)$ .

$$f(K) = \{y \in Y \mid y = f(k) \text{ para algún } k \in K\}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y_n = f(k_n)$  para algún  $k_n \in K$ . Dado que  $(k_n)_n$  es una sucesión en  $K$ , y que  $K$  es compacto, entonces existe una sub-sucesión  $(k_{n_t})_t$  de  $(k_n)_n$  tal que

$$(k_{n_t})_t \rightarrow k \text{ para un } k \in K. \quad (3.1)$$

$(f(k_{n_t}))_t$  es una sub-sucesión de  $(y_n)_n$  y  $(f(k_{n_t}))_t \rightarrow f(k) \in f(K)$  por (3.1) y porque  $f$  es continua. (Proposición 2.6.4).  $\square$

Se quiere ahora definir una métrica en el conjunto  $\mathcal{H}(X)$ . Observe que los “puntos” o elementos de  $\mathcal{H}(X)$  no son sencillos o “elementales” en cuanto cada elemento es a su vez un conjunto, más exactamente un subconjunto compacto no vacío del espacio métrico  $X$ . De esta manera, para definir una métrica en el conjunto  $\mathcal{H}(X)$  procedemos por etapas.

**Definición 3.1.4** (Distancia de punto a compacto). Sean  $(X, d)$  espacio métrico,  $a \in X$  y  $K \in \mathcal{H}(X)$ . Se define  $\hat{d}(a, K)$  por:

$$\hat{d}(a, K) := \text{mín} \{d(a, x) \mid x \in K\}. \quad (\text{Ver Figura 3.2}).$$

**Proposición 3.1.5.** El mínimo de la definición anterior siempre existe.

*Demostración.* Sea  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) := d(a, x)$ ,  $\forall x \in K$ . Veamos que  $f$  es continua. Sea  $\epsilon > 0$ . Observemos que:  $-d(x, y) \leq d(x, a) - d(y, a) \leq d(x, y)$  por tanto:

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y).$$

De esta manera basta tomar  $\delta \leq \epsilon$  para tener la continuidad de  $f$ .

Ahora consideremos el conjunto  $S := \{d(a, x) \mid x \in K\}$  ( $= \{f(x) \mid x \in K\}$ ). Claramente  $S \subseteq \mathbb{R}$ ,  $S \neq \emptyset$  (pues  $K \neq \emptyset$ ) y  $S$  es acotado inferiormente; por el axioma de completitud de  $\mathbb{R}$ , existe  $P = \text{ínf } S$ . Como  $P$  es la máxima cota inferior de  $S$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $y_n \in K$ , tal que  $f(y_n) < P + \frac{1}{n}$  y se tiene:  $-\frac{1}{n} < 0 \leq f(y_n) - P < \frac{1}{n}$ , por lo tanto  $|f(y_n) - P| < \frac{1}{n}$  de lo cual se deduce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = P. \quad (3.2)$$

Como  $K$  es compacto, existe  $(y_{k_n})_n$  subsucesión de  $(y_n)_n$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{k_n} = \hat{y}$ , con  $\hat{y} \in K$ . Tenemos:  $f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_{k_n}\right) = f(\hat{y})$  y puesto que  $f$  es continua,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_{k_n}) = f(\hat{y})$  (Proposición 2.6.4). Pero  $(f(y_{k_n}))_n$  es una subsucesión de  $(f(y_n))_n$ , entonces, aplicando la Proposición 2.2.7 y teniendo en cuenta (3.2) se concluye que  $P = f(\hat{y})$  de modo que  $P$  es en realidad el mínimo de  $S$ , como se quería ver.  $\square$

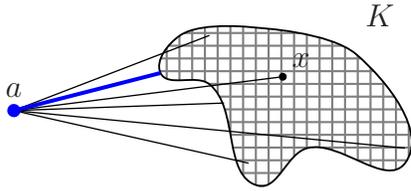


Figura 3.2:  $\hat{d}(a, K)$

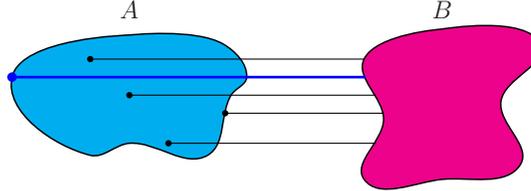


Figura 3.3:  $\tilde{d}(A, B)$

**Definición 3.1.6** (Distancia de compacto a compacto). Sean  $(X, d)$  espacio métrico y  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ . Se define  $\tilde{d}(A; B)$  por:

$$\begin{aligned} \tilde{d}(A, B) &:= \max \left\{ \hat{d}(a, B) \mid a \in A \right\} \\ &:= \max \left\{ \min \{ d(a, b) \mid b \in B \} \mid a \in A \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Ver Figura 3.3}).$$

Es de aclarar que  $\tilde{d}$  no es métrica, ya que en general, no se cumple que  $\tilde{d}(A, B) = \tilde{d}(B, A)$ , es decir la propiedad de simetría, lo que se observa en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 3.1.7.**

1. Considere en  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  los siguientes dos conjuntos  $A = [0, 1] \times [0, 1]$  y  $B = [1, 7] \times [0, 8]$ . Al calcular se obtiene que

- $\tilde{d}([0, 1] \times [0, 1], [1, 7] \times [0, 8]) = 1.$
- $\tilde{d}([1, 7] \times [0, 8], [0, 1] \times [0, 1]) = \sqrt{85}.$

Claramente  $\tilde{d}(A, B) \neq \tilde{d}(B, A)$ .

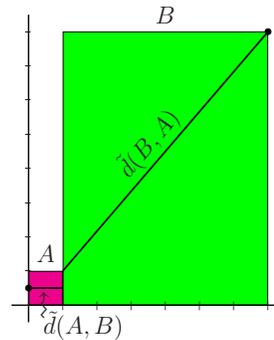


Figura 3.4:  $\tilde{d}(A, B) \neq \tilde{d}(B, A)$

2. Considere ahora en  $(\mathbb{R}, d_u)$  los conjuntos  $A = [0, 1]$  y  $B = [0, 2]$ . Entonces

$$\tilde{d}([0, 1], [0, 2]) = 0 \neq 1 = \tilde{d}([0, 2], [0, 1]).$$

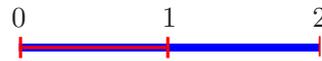


Figura 3.5:  $\tilde{d}(A, B) \neq \tilde{d}(B, A)$

Para que la Definición 3.1.6 quede bien establecida, tenemos que demostrar la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.8.** *El máximo de la Definición 3.1.6 siempre existe.*

*Demostración.* Definamos  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  por:  $f(x) := \hat{d}(x, B)$ ,  $\forall x \in A$ . Por la Proposición 3.1.5,  $f(x)$  siempre existe. Veamos que  $f$  es continua. Sea  $\varepsilon > 0$ . Tenemos,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \hat{d}(x, B) - \hat{d}(y, B) \right| = |d(x, b_1) - d(y, b_2)|$$

para algunos  $b_1, b_2 \in B$ ; es decir:

$$\hat{d}(x, B) = d(x, b_1) \quad (= \text{mín} \{d(x, b) \mid b \in B\})$$

y

$$\hat{d}(y, B) = d(y, b_2) \quad (= \text{mín} \{d(y, b) \mid b \in B\}).$$

Por lo tanto,

$$d(x, b_1) \leq d(x, b_2) \leq d(x, y) + d(y, b_2)$$

y

$$d(y, b_2) \leq d(y, b_1) \leq d(y, x) + d(x, b_1).$$

De las desigualdades anteriores se obtiene:

$$-d(x, y) \leq d(x, b_1) - d(y, b_2) \leq d(x, y)$$

es decir,

$$|d(x, b_1) - d(y, b_2)| \leq d(x, y)$$

y basta entonces tomar  $0 < \delta \leq \varepsilon$  para obtener la continuidad de  $f$ .

Ahora consideremos el conjunto

$$S := \left\{ \hat{d}(x, B) \mid x \in A \right\}.$$

$S \subseteq \mathbb{R}$ ,  $S \neq \emptyset$  (pues  $A$  y  $B$  son no vacíos). Como  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $A$  es compacto,  $f(A)$  es compacto (Proposición 3.1.3). Pero claramente  $f(A) = S$ , luego  $S$  es compacto y por lo tanto acotado. Aplicando entonces el axioma de completitud de  $\mathbb{R}$  podemos afirmar que existe  $P = \sup S$ . Queremos ver que en realidad  $P$  es el máximo de  $S$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $y_n \in A$  tal que:  $P - \frac{1}{n} < f(y_n)$ ; luego:

$$-\frac{1}{n} < 0 \leq P - f(y_n) < \frac{1}{n}$$

de donde  $|P - f(y_n)| < \frac{1}{n}$  y por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = P. \tag{3.3}$$

Ahora, como  $A$  es compacto y  $(y_n)_n$  es una sucesión en  $A$ , existe  $(y_{k_n})$  subsucesión de  $(y_n)_n$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{k_n} = \hat{a}$  para algún  $\hat{a} \in A$ . Por tanto:  $f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_{k_n}\right) = f(\hat{a})$  y como  $f$  es continua  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_{k_n}) = f(\hat{a})$  (Proposición 2.6.4). Observando (3.3) y por la Proposición 2.2.7 se concluye que  $P = f(\hat{a})$  de modo que  $P$  es el máximo de  $S$  como se quería ver.  $\square$

**Lema 3.1.9.** Si  $A, B \in \mathcal{H}(X)$  y  $A \subseteq B$  entonces  $\tilde{d}(A, B) = 0$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned}\tilde{d}(A, B) &= \max \left\{ \hat{d}(a, B) \mid a \in A \right\} \\ &= \hat{d}(a_0, B) \text{ para algún } a_0 \in A \subseteq B \\ &= \min \{d(a_0, b) \mid b \in B\},\end{aligned}$$

pero  $a_0 \in B$ , luego  $\min \{d(a_0, b) \mid b \in B\} = 0$ .  $\square$

**Definición 3.1.10.** Sean  $A, B \in \mathcal{H}(X)$  se define  $h(A, B)$  por:

$$h(A, B) =: \max \left\{ \tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A) \right\}.$$

**Ejemplo 3.1.11.**

1. En  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ ,  $h([0, 1] \times [0, 1], [1, 7] \times [0, 8]) = \max\{1, \sqrt{85}\} = \sqrt{85}$ .
2. En  $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ ,  $h([0, 1], [0, 2]) = \max\{0, 1\} = 1$ .

El objetivo ahora es demostrar que  $h$  si define una métrica en  $\mathcal{H}(X)$ , pero para esto necesitaremos de algunos resultados previos.

**Lema 3.1.12.** Sean  $S \subseteq \mathbb{R}$  y  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k$  constante, entonces

$$\min \{k + s \mid s \in S\} = k + \min S.$$

*Demostración.* Notemos  $H = \{k + s \mid s \in S\}$ . Es claro que  $k + \min S \in H$ . Sea  $k + s \in H$ , como  $s \in S$  se tiene que  $\min S \leq s$ , por tanto  $k + \min S \leq k + s, \forall s \in S$ , es decir,  $k + \min S = \min H$ .  $\square$

**Lema 3.1.13.** Sean  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ , tales que cumplen las desigualdades  $a \leq b + c$  y  $d \leq e + f$ , entonces

$$\max \{a, d\} \leq \max \{b, e\} + \max \{c, f\}.$$

*Demostración.* Si  $\max\{a, d\} = a$  se tiene:

$$\max\{a, d\} = a \leq b + c \leq \max\{b, e\} + \max\{c, f\}.$$

Si  $\max\{a, d\} = d$  se tiene:

$$\max\{a, d\} = d \leq e + f \leq \max\{b, e\} + \max\{c, f\}.$$

$\square$

**Lema 3.1.14.** Sean  $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ ,  $a \in A$ ,  $c \in C$  ( $a, c$  fijos). Entonces:

$$\min\{d(a, b) \mid b \in B\} \leq \min\{d(a, c) + d(c, b) \mid b \in B\}.$$

*Demostración.* Sean  $b_0$  y  $b_1$  elementos de  $B$  tales que:

$$d(a, c) + d(c, b_0) = \min\{d(a, c) + d(c, b) \mid b \in B\}$$

y,

$$d(a, b_1) = \min\{d(a, b) \mid b \in B\},$$

se tiene,  $d(a, b_1) \leq d(a, b_0) \leq d(a, c) + d(c, b_0)$ . □

**Lema 3.1.15.**  $\tilde{d}(A, B) \leq \tilde{d}(A, C) + \tilde{d}(C, B)$ ,  $\forall A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ .

*Demostración.* Para cada  $a \in A$  se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{d}(a, B) &= \min\{d(a, b) \mid b \in B\} \\ &\leq \min\{d(a, c) + d(c, b) \mid b \in B\}, \quad \forall c \in C \quad (\text{usando el Lema anterior}) \\ &\leq d(a, c) + \min\{d(c, b) \mid b \in B\}, \quad \forall c \in C \quad (\text{usando el Lema 3.1.12}). \end{aligned}$$

Luego, considerando  $c_0 \in C$  tal que:  $\hat{d}(a, C) = d(a, c_0)$  se tendría:

$$\begin{aligned} \hat{d}(a, B) &\leq d(a, c_0) + \min\{d(c_0, b) \mid b \in B\} \\ &\leq \hat{d}(a, C) + \max\{\min\{d(c, b) \mid b \in B\} \mid c \in C\} \\ &= \hat{d}(a, C) + \tilde{d}(C, B). \end{aligned}$$

Considerando en particular  $a = a_0$  donde  $\hat{d}(a_0, B) = \tilde{d}(A, B)$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \tilde{d}(A, B) &\leq \hat{d}(a_0, C) + \tilde{d}(C, B) \\ &\leq \max\{\hat{d}(a, C) \mid a \in A\} + \tilde{d}(C, B) \\ &= \tilde{d}(A, C) + \tilde{d}(C, B). \end{aligned} \quad \square$$

**Proposición 3.1.16.**  $\mathbf{h}$  es una métrica sobre  $\mathcal{H}(X)$ .

*Demostración.*

$$(EM1) \quad \mathbf{h}(A, B) = 0 \stackrel{?}{\Leftrightarrow} A = B.$$

$\Rightarrow$ ) Sea  $a_0 \in A$ . Como  $\mathbf{h}(A, B) = 0$ , entonces  $\tilde{d}(A, B) = \tilde{d}(B, A) = 0$ . Por tanto  $\tilde{d}(A, B) = \max\{\hat{d}(a, B) \mid a \in A\} = 0$ , lo cual implica que existe  $a_1 \in A$  tal que  $\hat{d}(a_1, B) = 0$ .

Por otra parte, se tiene que  $\hat{d}(a_0, B) \leq \hat{d}(a_1, B) = 0$ , en consecuencia  $\hat{d}(a_0, B) = 0$ , luego existe  $b_0 \in B$  tal que  $\hat{d}(a_0, B) = d(a_0, b_0) = 0$ , de modo que  $a_0 = b_0$ . Entonces  $a_0 \in B$ . Con esto hemos probado que  $A \subseteq B$ .

Análogamente se prueba que  $B \subseteq A$ .

$\Leftrightarrow$ ) Supongamos (sin pérdida de generalidad) que

$$\mathbf{h}(A, B) = \tilde{d}(A, B).$$

Para cada  $a \in A$  se tiene que  $\hat{d}(a, B) = \min \{d(a, b) \mid b \in B\} = 0$ , pues  $A \subseteq B$ , entonces  $\tilde{d}(A, B) = \max \{0\} = 0$ .

$$(EM2) \quad \mathbf{h}(A, B) \stackrel{?}{\leq} \mathbf{h}(A, C) + \mathbf{h}(B, C) \quad \forall A, B, C \in \mathcal{H}(X).$$

En efecto, por el Lema 3.1.15 se tiene que

$$\tilde{d}(A, B) \leq \tilde{d}(A, C) + \tilde{d}(C, B) \quad \text{y} \quad \tilde{d}(B, A) \leq \tilde{d}(B, C) + \tilde{d}(C, A). \quad (3.4)$$

Ahora, usando el Lema 3.1.13 se puede ver que

$$\max \{ \tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A) \} \leq \max \{ \tilde{d}(A, C), \tilde{d}(C, A) \} + \max \{ \tilde{d}(C, B), \tilde{d}(B, C) \}.$$

En consecuencia

$$\mathbf{h}(A, B) \leq \mathbf{h}(A, C) + \mathbf{h}(B, C) \quad \forall A, B, C \in \mathcal{H}(X). \quad \square$$

Ahora sí estamos en condiciones de formular la siguiente definición.

**Definición 3.1.17** (Métrica de Hausdorff). Llamaremos al espacio métrico  $(\mathcal{H}(X), \mathbf{h})$  el espacio donde viven los fractales. La métrica  $\mathbf{h}$  se llama **métrica de Hausdorff**.

Como los elementos de  $\mathcal{H}(X)$  son subconjuntos de  $X$  (es decir son elementos que a la vez son conjuntos), también se suele decir que  $\mathcal{H}(X)$  es un **hiperespacio** de  $X$ .

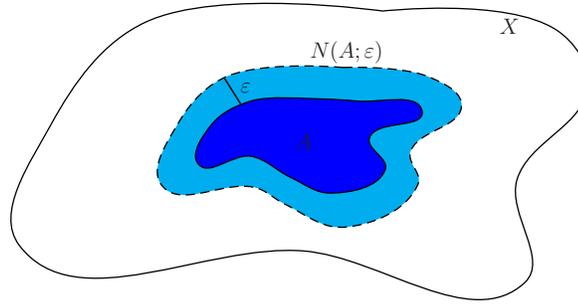
En la siguiente sección se demuestra la completez de  $\mathcal{H}(X)$  a partir de la completez de  $X$ , (en realidad se prueba la equivalencia entre la completez de  $X$  y la de  $\mathcal{H}(X)$ ). También se demuestran otros resultados que se usarán en el próximo capítulo.

## 3.2. Completez del espacio $\mathcal{H}(X)$

Un objetivo importante del presente capítulo es probar que la completez de  $(X, d)$  implica la completez de  $(\mathcal{H}(X), \mathbf{h})$ , para esto se deben establecer antes varios conceptos y resultados.

**Definición 3.2.1.** Sean  $(X, d)$  espacio métrico,  $A \in \mathcal{H}(X)$  y  $\varepsilon > 0$ . Se define la **nube** de centro  $A$  y radio  $\varepsilon$ , denotada  $N(A; \varepsilon)$  por:

$$N(A; \varepsilon) := \{x \in X \mid \hat{d}(x, A) < \varepsilon\}. \quad (\text{Ver Figura 3.6}).$$



**Figura 3.6:** Nube  $N(A; \varepsilon)$ .

Es fácil verificar que:

$$N(A; \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon \text{ para algún } a \in A\}.$$

**Lema 3.2.2.** Sean  $A, B \in \mathcal{H}(X)$  y  $\varepsilon > 0$ . Entonces:  $\mathbf{h}(A, B) < \varepsilon$  si y sólo si  $A \subseteq N(B; \varepsilon)$  y  $B \subseteq N(A; \varepsilon)$ .

*Demostración.* Basta probar que:

(i)  $\tilde{d}(A, B) < \varepsilon$  si y sólo si  $A \subseteq N(B; \varepsilon)$

y

(ii)  $\tilde{d}(B, A) < \varepsilon$  si y sólo si  $B \subseteq N(A; \varepsilon)$ .

Si  $\tilde{d}(A, B) < \varepsilon$  entonces  $\max \{\hat{d}(a, B) \mid a \in A\} < \varepsilon$  por lo tanto,  $\hat{d}(a, B) < \varepsilon, \forall a \in A$ , entonces  $a \in N(B; \varepsilon), \forall a \in A$  y  $A \subseteq N(B; \varepsilon)$ . Recíprocamente si  $A \subseteq N(B; \varepsilon)$ , entonces para todo  $a \in A$  se tiene que  $\hat{d}(a, B) < \varepsilon$ . Si en particular tomamos  $a_0 \in A$  tal que  $\hat{d}(a_0, B) = \tilde{d}(A, B)$  entonces se obtiene  $\tilde{d}(A, B) < \varepsilon$ .

Análogamente se prueba (ii). □

Si  $A \in \mathcal{H}(X)$  y  $\varepsilon > 0$ , definimos la **nube cerrada** de centro  $A$  y radio  $\varepsilon$ , notado por  $\overline{N}(A; \varepsilon)$  como sigue:

$$\overline{N}(A; \varepsilon) := \left\{x \in X \mid \hat{d}(x, A) \leq \varepsilon\right\} \quad \left( = \{x \in X \mid \exists a \in A : d(x, a) \leq \varepsilon\} \right).$$

**Lema 3.2.3.** Sean  $A \in \mathcal{H}(X)$  y  $\varepsilon > 0$ . El conjunto  $\overline{N}(A; \varepsilon)$  es cerrado.

*Demostración.* Veamos que  $(\overline{N}(A; \varepsilon))^c$  es abierto. Sea  $y \in (\overline{N}(A; \varepsilon))^c$ . Entonces  $\hat{d}(y, A) > \varepsilon$ . Sea  $a_0 \in A$  tal que  $\hat{d}(y, A) = d(y, a_0)$ . Veamos que  $B(y; \delta) \subseteq (\overline{N}(A; \varepsilon))^c$  donde  $\delta = d(y, a_0) - \varepsilon > 0$ . Sea  $z \in B(y; \delta)$ . Debemos probar que  $d(z, a) > \varepsilon$  para toda  $a \in A$ . Sea  $a \in A$ . Tenemos

$$\begin{aligned} d(y, a_0) &\leq d(y, a) \leq d(y, z) + d(z, a) \\ &< \delta + d(z, a) = d(y, a_0) - \varepsilon + d(z, a) \end{aligned}$$

de donde  $\varepsilon < d(z, a)$ , como se quería ver.  $\square$

De manera análoga a como se demostró el Lema 3.2.2, se puede demostrar el siguiente resultado.

**Lema 3.2.4.** Sean  $A, B \in \mathcal{H}(X)$  y  $\varepsilon > 0$ .

$$\mathbf{h}(A, B) \leq \varepsilon \iff A \subseteq \overline{N}(B; \varepsilon) \quad \text{y} \quad B \subseteq \overline{N}(A; \varepsilon).$$

**Lema 3.2.5** (Lema de Extensión). Sean  $(A_n)_n$  una sucesión de Cauchy en  $(\mathcal{H}(X), \mathbf{h})$  y  $(n_j)_{j=1}^\infty$  una sucesión creciente de naturales. Suponga que  $\{x_{n_j} \in A_{n_j} \mid j = 1, 2, \dots\}$  es una sucesión de Cauchy (en  $(X, d)$ ). Entonces existe una sucesión de Cauchy  $\{\tilde{x}_n \in A_n \mid n = 1, 2, \dots\}$  tal que  $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}, \forall j = 1, 2, 3, \dots$

*Demostración.* Se construye la sucesión  $(\tilde{x}_n)_n$  como sigue: para cada  $n \in \{1, 2, \dots, n_1 - 1\}$  escogemos  $\tilde{x}_n \in A_n$  tal que  $\hat{d}(x_{n_1}, A_n) = d(x_{n_1}, \tilde{x}_n)$ . Análogamente para cada  $j \in \{2, 3, \dots\}$  y cada  $n: n_{j-1} < n < n_j$  se escoge  $\tilde{x}_n \in A_n$  tal que:  $\hat{d}(x_{n_j}, A_n) = d(x_{n_j}, \tilde{x}_n)$  y por supuesto  $\tilde{x}_{n_j} := x_{n_j}, \forall j = 1, 2, 3, \dots$ . Veamos que  $(\tilde{x}_n)_n$  así definida es la sucesión buscada: claramente  $(\tilde{x}_n)_n$  es una extensión de  $(x_{n_j})_j$  y  $\tilde{x}_n \in A_n$  para todo  $n$ . Veamos que  $(\tilde{x}_n)_n$  es de Cauchy. Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $(x_{n_j})_j$  es de Cauchy, existe  $N_1 > 0$  tal que:

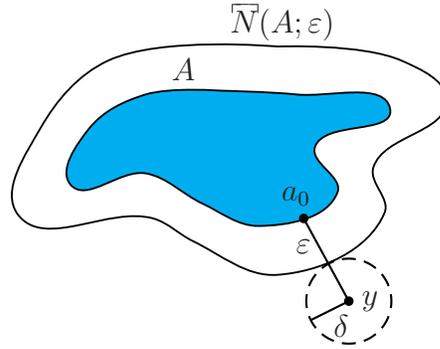
$$n_k, n_j \geq N_1 \implies d(x_{n_k}, x_{n_j}) < \varepsilon/3. \tag{3.5}$$

Como  $(A_n)_n$  es de Cauchy, existe  $N_2 > 0$  tal que:

$$m, n_j \geq N_2 \implies \mathbf{h}(A_m, A_{n_j}) < \varepsilon/3. \tag{3.6}$$

La última desigualdad significa, según el Lema 3.2.2 que:

$$A_m \subseteq N(A_{n_j}; \varepsilon/3) \quad \text{y} \quad A_{n_j} \subseteq N(A_m; \varepsilon/3).$$



**Figura 3.7:** Nube cerrada.

Luego para  $m, n_j \geq N_2$ ,  $x_{n_j} \in N(A_m; \varepsilon/3)$ , es decir  $\hat{d}(x_{n_j}, A_m) < \varepsilon/3$ , y por tanto:

$$d(x_{n_j}, \tilde{x}_m) = \hat{d}(x_{n_j}, A_m) < \varepsilon/3. \quad (3.7)$$

Análogamente, si

$$n, n_k \geq N_2 \longrightarrow d(x_{n_k}, \tilde{x}_n) < \varepsilon/3. \quad (3.8)$$

Basta entonces tomar  $N = \max\{N_1, N_2\}$  y se tendrá:  $m, n \geq N$  implica

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) &\leq d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}_n) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Un resultado central de este capítulo, como ya se había comentado antes, es la obtención de la completez del hiperespacio  $\mathcal{H}(X)$ , a partir de la completez de  $X$ . En realidad se tiene la siguiente equivalencia:

**Teorema 3.2.6.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.  $(\mathcal{H}(X), \mathbf{h})$  es completo si y sólo si  $(X, d)$  es completo. Además, si  $(A_n)_n$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{H}(X)$  y*

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

entonces  $A$  se puede caracterizar como sigue:

$$A := \{x \in X \mid \text{existe } (x_n)_n \text{ sucesión en } X, \text{ con } (x_n)_n \rightarrow x \text{ y } x_n \in A_n, \forall n\}.$$

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Sea  $(x_n)_n$  una sucesión de Cauchy en  $(X, d)$ . Como claramente cada conjunto unitario  $\{x_n\}$  es un compacto no vacío, entonces  $(\{x_n\})_n$  es una sucesión en  $\mathcal{H}(X)$ . Además

$$\mathbf{h}(\{x_n\}, \{x_m\}) = \tilde{d}(\{x_n\}, \{x_m\}) = \hat{d}(x_n, \{x_m\}) = d(x_n, x_m)$$

de modo que  $(\{x_n\})_n$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{H}(X)$ . Por hipótesis,  $(\{x_n\})_n \rightarrow K$  para algún  $K \in \mathcal{H}(X)$ . Veamos que  $K$  es un conjunto unitario. Sean  $a, b \in K$  y  $\varepsilon > 0$ . Existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N$  implica que  $\mathbf{h}(K, \{x_n\}) < \varepsilon/2$ . Observemos que

$$\tilde{d}(K, \{x_n\}) = \max \left\{ \hat{d}(y, \{x_n\}) \mid y \in K \right\} = \max \{d(y, x_n) \mid y \in K\}.$$

Ahora, para  $n \geq N$  se tendrá:

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq d(a, x_n) + d(b, x_n) \leq 2 \max \{d(y, x_n) \mid y \in K\} \\ &= 2\tilde{d}(K, \{x_n\}) \leq 2\mathbf{h}(K, \{x_n\}) < 2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

De esta manera para todo  $\varepsilon > 0$  se tiene  $d(a, b) < \varepsilon$  lo que implica  $a = b$  y  $K = \{a\}$ . Por tanto

$$d(x_n, a) = \mathbf{h}(\{x_n\}, \{a\}) = \mathbf{h}(\{x_n\}, K)$$

se puede hacer tan pequeña como se quiera, es decir  $(x_n)_n \rightarrow a$ .

$\Leftrightarrow$  Sea  $(A_n)_n$  una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{H}(X)$ . Definamos:

$$A := \{x \in X \mid \text{existe } (x_n)_n \text{ sucesión en } X, \text{ con } (x_n)_n \rightarrow x \text{ y } x_n \in A_n, \forall n\}.$$

- (a) Probemos que  $A \neq \emptyset$ . Para esto basta probar que existe  $(a_n)_n$  sucesión de Cauchy, con  $a_n \in A_n, \forall n$ , ya que la completez de  $X$  garantiza que en tal caso  $(a_n)_n \rightarrow a$  para algún  $a \in X$ , y por tanto  $a \in A$ .

Como  $(A_n)_n$  es de Cauchy, podemos escoger una sucesión creciente de naturales:

$$N_1 < N_2 < \dots < N_n < \dots$$

tales que

$$h(A_m, A_n) < \frac{1}{2^i}, \quad \forall m, n \geq N_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Sea  $x_{N_1} \in A_{N_1}$ . Como  $h(A_{N_1}, A_{N_2}) < \frac{1}{2}$ , implica que  $A_{N_1} \subseteq N(A_{N_2}; \frac{1}{2})$ , entonces  $\hat{d}(x_{N_1}, A_{N_2}) < \frac{1}{2}$  lo que implica que existe  $x_{N_2} \in A_{N_2}$  tal que  $d(x_{N_1}, x_{N_2}) < \frac{1}{2}$ .

Como  $h(A_{N_2}, A_{N_3}) < \frac{1}{2^2}$ , entonces  $A_{N_2} \subseteq N(A_{N_3}; \frac{1}{2^2})$ , luego  $\hat{d}(x_{N_2}, A_{N_3}) < \frac{1}{2^2}$ , de donde existe  $x_{N_3} \in A_{N_3}$  tal que  $d(x_{N_2}, x_{N_3}) < \frac{1}{2^2}$ , y así sucesivamente se obtiene una sucesión  $(x_{N_i})_i$  con  $x_{N_i} \in A_{N_i}$  y tal que  $d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) < \frac{1}{2^i}$ . Tomemos  $N_m \leq N_n$ , entonces:

$$\begin{aligned} d(x_{N_m}, x_{N_n}) &\leq d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + d(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}}) + \dots + d(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) \\ &< \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

De esta manera  $(x_{N_i})_i$  es de Cauchy y por el Lema de Extensión (Lema 3.2.5) existe  $(\tilde{x}_n)_n$  sucesión de Cauchy tal que  $\tilde{x}_n \in A_n, \forall n$  y  $\tilde{x}_{N_i} = x_{N_i}, \forall i$ . Como  $X$  es completo, existe  $x \in X$  tal que  $(\tilde{x}_n)_n \rightarrow x$ , de modo que  $x \in A$  y así  $A \neq \emptyset$ .

- (b) Probaremos ahora que  $A$  es cerrado. Sea  $(a_i)_i$  sucesión de elementos de  $A$  tal que  $(a_i)_i \rightarrow a$  y probemos que  $a \in A$  (de esta manera se tendrá que  $\bar{A} \subseteq A$ ). Como cada  $a_i \in A$  entonces, para cada  $i$ , existe una sucesión  $(x_n^i)_n$ , con  $x_n^i \in A_n, \forall n$  y  $(x_n^i)_n \rightarrow a_i$

$$\begin{array}{rcl} (x_n^1)_n & = & (x_1^1 \ x_2^1 \ \dots \ x_n^1 \ \dots) \quad \rightarrow \quad a_1 \\ (x_n^2)_n & = & (x_1^2 \ x_2^2 \ \dots \ x_n^2 \ \dots) \quad \rightarrow \quad a_2 \\ & \vdots & \vdots \\ (x_n^i)_n & = & (x_1^i \ x_2^i \ \dots \ x_n^i \ \dots) \quad \rightarrow \quad a_i \\ & \vdots & \vdots \\ (x_n^{N_k})_n & = & (x_1^{N_k} \ x_2^{N_k} \ \dots \ x_n^{N_k} \ \dots) \quad \rightarrow \quad a_{N_k} \\ & \vdots & \downarrow \\ & & a \end{array}$$

Como  $(a_i)_i \rightarrow a$  es posible encontrar una sucesión creciente de naturales:

$$N_1 < N_2 < \cdots < N_k < \cdots$$

tal que para cada  $k$ ,

$$d(a_{N_k}, a) < \frac{1}{k}.$$

Como  $(x_n^{N_k})_n \rightarrow a_{N_k}$ , para  $k$  existe  $m_k$  tal que

$$d(x_{m_k}^{N_k}, a_{N_k}) < \frac{1}{k}.$$

Entonces

$$d(x_{m_k}^{N_k}, a) \leq d(x_{m_k}^{N_k}, a_{N_k}) + d(a_{N_k}, a) < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} \rightarrow 0.$$

Notemos  $y_{m_k} = x_{m_k}^{N_k}$ . Entonces para cada  $k$ ,  $y_{m_k} \in A_{m_k}$  y además  $(y_{m_k})_k \rightarrow a$ , luego  $(y_{m_k})_k$  es de Cauchy. En estas condiciones aplicamos de nuevo el Lema de Extensión para obtener una sucesión  $(\tilde{y}_m)_m$  tal que  $\tilde{y}_m \in A_m$ ,  $\forall m$ ,  $\tilde{y}_{m_k} = y_{m_k}$  y  $(\tilde{y}_m)_m$  de Cauchy. Por la completitud de  $X$ ,  $(\tilde{y}_m)_m$  debe ser convergente y como su subsucesión  $(y_{m_k})_k$  converge a  $a$ , entonces también  $(\tilde{y}_m)_m \rightarrow a$ . De esta manera  $a$  cumple todos los requisitos para pertenecer a  $A$ , como se quería probar.

(c) Sea  $\varepsilon > 0$ . Probaremos que existe  $N$  tal que para  $n \geq N$ ,  $A \subseteq \overline{N}(A_n; \varepsilon)$ . Como  $(A_n)_n$  es de Cauchy, existe  $N$  tal que si  $m, n \geq N$  entonces  $\mathbf{h}(A_n, A_m) \leq \varepsilon$ , luego  $A_m \subseteq \overline{N}(A_n; \varepsilon)$ . (Lema 3.2.2). Sea  $a \in A$ . Entonces existe una sucesión  $(a_i)_i$  tal que cada  $a_i \in A_i$  y  $(a_i)_i \rightarrow a$ . Podemos asumir además que  $N$  es suficientemente grande para que  $m \geq N$  implique  $d(a_m, a) < \varepsilon$ . Entonces  $a_m \in \overline{N}(A_n; \varepsilon)$  pues  $A_m \subseteq \overline{N}(A_n; \varepsilon)$ . De esta manera  $(a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots)$  es una sucesión en  $\overline{N}(A_n; \varepsilon)$  que converge a  $a$ , es decir,  $a \in \overline{N}(A_n; \varepsilon) = \overline{N}(A_n; \varepsilon)$  (Lema 3.2.3). Hemos probado así que para  $n \geq N$ ,  $A \subseteq \overline{N}(A_n; \varepsilon)$ .

(d) Probemos ahora que  $A$  es compacto. Para esto basta probar que  $A$  es totalmente acotado y aplicar entonces el Teorema 2.5.14.

Por contradicción, supongamos que  $A$  no es totalmente acotado. Entonces existe  $\varepsilon > 0$  para el cual **no** existe una  $\varepsilon$ -red que recubra a  $A$ . Sea  $x_1 \in A$

$$\begin{aligned} A &\not\subseteq B(x_1; \varepsilon) \longrightarrow \exists x_2 \in A : d(x_1, x_2) \geq \varepsilon \\ A &\not\subseteq B(x_1; \varepsilon) \cup B(x_2; \varepsilon) \longrightarrow \exists x_3 \in A : d(x_3, x_1) \geq \varepsilon \text{ y } d(x_3, x_2) \geq \varepsilon \\ &\vdots \end{aligned}$$

Se construye de esta manera una sucesión  $(x_i)_i$  de elementos de  $A$  tal que  $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ ,  $\forall i \neq j$ . Ahora, por (c) existe un  $n$  suficientemente grande tal que  $A \subseteq \overline{N}(A_n; \varepsilon/3)$ .

Entonces para cada  $x_i$ , existe  $y_i \in A_n$  tal que  $d(x_i, y_i) \leq \varepsilon/3$ . Como  $A_n$  es compacto, existe una subsucesión  $(y_{n_i})$  de  $(y_n)_n$ , convergente en  $A_n$ . Por tanto  $(y_{n_i})$  es de Cauchy, así que es posible encontrar  $y_{n_i}, y_{n_j}$  tales que  $d(y_{n_i}, y_{n_j}) < \varepsilon/3$ . Por tanto

$$\begin{aligned} d(x_{n_i}, x_{n_j}) &\leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, x_{n_j}) \\ &\leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, x_{n_j}) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto claramente contradice la forma como fué construida  $(x_n)_n$ . De esta manera,  $A$  es totalmente acotado y puesto que en (b) se demostró que es cerrado, entonces se concluye (Teorema 2.5.14) que  $A$  es compacto.

(e) Probaremos ahora que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A.$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Probaremos que existe  $N$  tal que  $n \geq N$ , implica  $A_n \subseteq \overline{N}(A; \varepsilon)$ . Esto será suficiente teniendo en cuenta (c) y el Lema 3.2.4.

Existe  $N$  tal que  $m, n \geq N$  implica  $\mathbf{h}(A_m, A_n) \leq \varepsilon/2$ . Entonces para  $m, n \geq N$ ,  $A_m \subseteq \overline{N}(A_n; \varepsilon/2)$ . Probemos que  $n \geq N$  implica  $A_n \subseteq \overline{N}(A; \varepsilon)$ .

Sea  $y \in A_n$ . Existe una sucesión creciente de enteros,

$$N < N_1 < N_2 < \dots < N_k < \dots$$

tal que para  $m, n \geq N_j$ ,  $A_m \subseteq \overline{N}\left(A_n; \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right)$ . Entonces  $A_n \subseteq \overline{N}\left(A_{N_1}; \frac{\varepsilon}{2}\right)$ . Como  $y \in A_n$ , existe  $x_{N_1} \in A_{N_1}$  tal que  $d(y, x_{N_1}) \leq \varepsilon/2$ . Como  $x_{N_1} \in A_{N_1}$  existe  $x_{N_2} \in A_{N_2}$  tal que  $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \varepsilon/2^2$ . De esta manera continuamos y se encuentra una sucesión  $x_{N_1}, x_{N_2}, x_{N_3}, \dots$  tal que  $x_{N_j} \in A_{N_j}$  y  $d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ . Entonces

$$\begin{aligned} d(y, x_{N_j}) &\leq d(y, x_{N_1}) + d(x_{N_1}, x_{N_2}) + \dots + d(x_{N_{j-1}}, x_{N_j}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^j} < \varepsilon, \quad \text{para todo } j. \end{aligned}$$

Además  $(x_{N_j})$  es una sucesión de Cauchy, luego  $(x_{N_j}) \rightarrow x$ , para algún  $x$ . Esto implica que  $x \in A$ .

Veamos que  $d(y, x) \leq \varepsilon$ . Supongamos que  $d(y, x) > \varepsilon$ . Entonces  $d(y, x) - \varepsilon > 0$  y como  $(x_{N_j}) \rightarrow x$ , existe  $M > 0$  tal que  $N_j > M$  implica  $d(x_{N_j}, x) < d(y, x) - \varepsilon$ , de donde

$$\begin{aligned} \varepsilon &< d(y, x) - d(x_{N_j}, x) \\ &\leq d(y, x_{N_j}) + d(x_{N_j}, x) - d(x_{N_j}, x) = d(y, x_{N_j}) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Se obtendría  $\varepsilon < \varepsilon$ , absurdo! Por lo tanto  $d(y, x) \leq \varepsilon$  y puesto que  $x \in A$  se concluye que  $y \in \overline{N}(A; \varepsilon)$  luego  $A_n \subseteq \overline{N}(A; \varepsilon)$  como se quería demostrar.  $\square$

El teorema anterior cuya demostración es un poco ardua, desempeña un papel muy importante en nuestro camino de acercamiento a los fractales; podríamos decir que este teorema proporciona la mitad de los “ingredientes” que usaremos para construir nuestros fractales. La otra mitad la constituye un número finito de contracciones que conformarán lo que en el próximo capítulo se denomina un sistema iterado de funciones. De esta manera los lemas que se presentan en lo que queda del presente capítulo, se incluyen porque se usarán para garantizar el buen funcionamiento de los sistemas iterados de funciones.

**Lema 3.2.7.** Sean  $(X, d)$  espacio métrico completo y  $(A_n)_n$  sucesión de Cauchy en  $\mathcal{H}(X)$  tal que:

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

*Demostración.* Por el Teorema 3.2.6 sabemos que  $\mathcal{H}(X)$  es completo y que

$$A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \in X \mid \text{existe } (x_n)_n \text{ sucesión en } X \text{ con } (x_n)_n \rightarrow x \text{ y } x_n \in A_n, \forall n\}.$$

Probemos entonces que  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ . Sea  $x \in A$ . Existe  $(x_n)_n$  sucesión en  $X$ , tal que  $(x_n)_n \rightarrow x$  y  $x_n \in A_n$ ,  $\forall n$ . Supongamos que  $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ , es decir, existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $x \notin A_M$ . Como  $A_M$  es compacto entonces es cerrado, luego  $A_M = \overline{A_M}$ , así que  $x \notin \overline{A_M}$  lo cual significa que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(x; \varepsilon) \cap A_M = \emptyset$ . Ahora, como  $(x_n)_n \rightarrow x$ , para  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_n, x) < \varepsilon$  siempre que  $n \geq N$ .

Sea  $T = \max\{M, N\}$ . Se tiene:  $d(x_T, x) < \varepsilon$ , luego  $x_T \in B(x; \varepsilon)$ . Como  $T \geq M$ ,  $A_T \subseteq A_M$  y como  $x_T \in A_T$  entonces  $x_T \in A_M$ , de modo que  $x_T \in B(x; \varepsilon) \cap A_M = \emptyset$ , lo cual es una contradicción.

Recíprocamente sea  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ , entonces  $x \in A_n$  para todo  $n$ , y basta entonces considerar la sucesión constante  $(x, x, \dots, x, \dots) \rightarrow x$  para concluir que  $x \in A$ .  $\square$

**Lema 3.2.8.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$  una contracción. Definimos la función  $\hat{f} : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  por  $\hat{f}(K) = f(K) \forall K \in \mathcal{H}(X)$ . Entonces  $\hat{f}$  es una contracción en  $\mathcal{H}(X)$ , con el mismo factor de contracción de  $f$ .

*Demostración.* En primer lugar obsérvese que  $\hat{f}$  está bien definida en virtud de la Proposición 3.1.3.

Dado que  $f$  es una contracción, existe  $r \in [0, 1)$  tal que  $\forall x, y \in X$

$$d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y). \quad (3.9)$$

Sean  $A, B, \in \mathcal{H}(X)$ . Tenemos

$$\mathbf{h}(\hat{f}(A), \hat{f}(B)) = \mathbf{h}(f(A), f(B)) = \max\{\tilde{d}(f(A), f(B)), \tilde{d}(f(B), f(A))\};$$

sin pérdida de generalidad, supongamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(f(A), f(B)) &= \tilde{d}(f(A), f(B)) \\ &= \max\{\min\{d(f(a), f(b)) \mid a \in A\} \mid b \in B\} \\ &\leq \max\{\min\{rd(a, b) \mid a \in A\} \mid b \in B\} \quad (\text{por (3.9)}). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\hat{f}(A), \hat{f}(B)) &\leq r \max\{\min\{d(a, b) \mid a \in A\} \mid b \in B\} = r\tilde{d}(A, B) \\ &\leq r \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\} = r\mathbf{h}(A, B). \quad \square \end{aligned}$$

**Lema 3.2.9.**  $\tilde{d}(A \cup B, C) = \max\{\tilde{d}(A, C), \tilde{d}(B, C)\}$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \tilde{d}(A \cup B, C) &= \max\{\hat{d}(x, C) \mid x \in A \cup B\} \\ &= \max\{\hat{d}(x, C) \mid x \in A \vee x \in B\} \\ &= \max\{\max\{\hat{d}(x, C) \mid x \in A\}, \max\{\hat{d}(x, C) \mid x \in B\}\} \\ &= \max\{\tilde{d}(A, C), \tilde{d}(B, C)\}. \quad \square \end{aligned}$$

**Lema 3.2.10.**  $\mathbf{h}(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{\mathbf{h}(A, C), \mathbf{h}(B, D)\}$ .

*Demostración.* Por el Lema 3.1.15

$$\tilde{d}(A, C \cup D) \leq \tilde{d}(A, C) + \tilde{d}(C, C \cup D),$$

como  $\tilde{d}(C, C \cup D) = 0$  ya que  $C \subseteq C \cup D$  (Lema 3.1.9), entonces

$$\tilde{d}(A, C \cup D) \leq \tilde{d}(A, C). \quad (3.10)$$

De forma análoga,

$$\tilde{d}(B, C \cup D) \leq \tilde{d}(B, D) + \tilde{d}(D, C \cup D) \Rightarrow \tilde{d}(B, C \cup D) \leq \tilde{d}(B, D), \quad (3.11)$$

$$\tilde{d}(C, A \cup B) \leq \tilde{d}(C, A) + \tilde{d}(A, A \cup B) \Rightarrow \tilde{d}(C, A \cup B) \leq \tilde{d}(C, A) \quad (3.12)$$

y

$$\tilde{d}(D, A \cup B) \leq \tilde{d}(D, B) + \tilde{d}(B, A \cup B) \Rightarrow \tilde{d}(D, A \cup B) \leq \tilde{d}(D, B). \quad (3.13)$$

Por la definición de  $\mathbf{h}$ , el Lema 3.2.9 y las inecuaciones anteriores, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(A \cup B, C \cup D) &= \text{máx} \left\{ \tilde{d}(A \cup B, C \cup D), \tilde{d}(C \cup D, A \cup B) \right\} \\
&= \text{máx} \left\{ \text{máx} \left\{ \tilde{d}(A, C \cup D), \tilde{d}(B, C \cup D) \right\}, \text{máx} \left\{ \tilde{d}(C, A \cup B), \tilde{d}(D, A \cup B) \right\} \right\} \\
&= \text{máx} \left\{ \tilde{d}(A, C \cup D), \tilde{d}(B, C \cup D), \tilde{d}(C, A \cup B), \tilde{d}(D, A \cup B) \right\} \\
&\leq \text{máx} \left\{ \tilde{d}(A, C), \tilde{d}(B, D), \tilde{d}(C, A), \tilde{d}(D, B) \right\} \\
&= \text{máx} \left\{ \text{máx} \left\{ \tilde{d}(A, C), \tilde{d}(C, A) \right\}, \text{máx} \left\{ \tilde{d}(B, D), \tilde{d}(D, B) \right\} \right\} \\
&= \text{máx} \left\{ \mathbf{h}(A, C), \mathbf{h}(B, D) \right\}
\end{aligned}$$

esto es

$$\mathbf{h}(A \cup B, C \cup D) \leq \text{máx} \left\{ \mathbf{h}(A, C), \mathbf{h}(B, D) \right\}. \quad \square$$

Los lemas anteriores se usarán para demostrar el siguiente, el cual a su vez constituye un resultado básico para el desarrollo de nuestro próximo capítulo.

**Lema 3.2.11.** Sean  $(X, d)$  espacio métrico y  $f_i : X \rightarrow X$  una contracción en  $X$ , con  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  ( $N \in \mathbb{N}$ ,  $N$  fijo). Si se define  $F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  por

$$F(K) =: f_1(K) \cup f_2(K) \cup f_3(K) \cup \dots \cup f_N(K) =: \bigcup_{i=1}^N f_i(K).$$

Entonces  $F$  es contracción.

*Demostración.* En primer lugar obsérvese que  $F$  está bien definida en virtud de Lema 2.5.22 y de la Proposición 3.1.3.

Para probar que  $F$  es contracción basta considerar el caso  $N = 2$  (luego se aplica inducción matemática).

Existen  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \in [0, 1)$  tales que  $\forall x, y \in X$ ,

$$\begin{aligned}
d(f_1(x), f_1(y)) &\leq \mathbf{r}_1 d(x, y) \\
d(f_2(x), f_2(y)) &\leq \mathbf{r}_2 d(x, y).
\end{aligned}$$

Sean  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ ; utilizando los lemas 3.2.10 y 3.2.8, respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(F(A), F(B)) &= \mathbf{h}(f_1(A) \cup f_2(A), f_1(B) \cup f_2(B)) \\
&\leq \text{máx} \left\{ \mathbf{h}(f_1(A), f_1(B)), \mathbf{h}(f_2(A), f_2(B)) \right\} \\
&\leq \text{máx} \left\{ \mathbf{r}_1 \mathbf{h}(A, B), \mathbf{r}_2 \mathbf{h}(A, B) \right\} \\
&\leq \mathbf{r} \text{máx} \left\{ \mathbf{h}(A, B), \mathbf{h}(A, B) \right\} = \mathbf{r} \mathbf{h}(A, B),
\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{r} = \text{máx} \left\{ \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \right\}$ . Por lo tanto  $F$  es una contracción. □

### 3.3. Ejercicios

1. Sean  $(X, d)$  espacio métrico,  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ . Pruebe que puede ocurrir  $\tilde{d}(A, B) = 0$  pero  $A \neq B$ .
2. Sean  $(X, d)$  espacio métrico,  $K \in \mathcal{H}(X)$  y  $x \notin K$ . Discuta la veracidad o falsedad de la siguiente igualdad,

$$\hat{d}(x, K) = \hat{d}(x, \partial K).$$

3. Sean  $(X, d)$  espacio métrico,  $A \in \mathcal{H}(X)$  y  $\epsilon > 0$ . Considere la bola  $B_{\mathbf{h}}(A; \epsilon)$  en el espacio  $(\mathcal{H}(X), \mathbf{h})$  y demuestre que:

$$N(A; \epsilon) = \bigcup B_{\mathbf{h}}(A; \epsilon) \quad \left( = \bigcup \{K \in \mathcal{H}(X) \mid \mathbf{h}(K, A) < \epsilon\} \right).$$

4. Demuestre que la sucesión  $(S_n)_n$ , definida en la sección 1.1.1, es una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ .
5. Demuestre que la sucesión  $(\partial S_n)_n$ , siendo  $(S_n)_n$  la sucesión del ejercicio anterior, es una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ .
6. Demuestre que la sucesión  $(C_n)_n$ , definida en la sección 1.3.1, es una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ .
7. Demuestre que las sucesiones  $(\mathcal{A}_n)_n$  y  $(\mathcal{K}_n)_n$ , definidas en las secciones 1.3.2 y 1.3.3 respectivamente, son sucesiones de Cauchy en  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ .
8. Ilustre con un ejemplo el Lema 3.2.7.
9. Sean  $(X, d)$  espacio métrico y  $(A_n)_n$  una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{H}(X)$  tal que:

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$$

Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}.$$

Ilustre con un ejemplo. Compare con el Lema 3.2.7.



## Capítulo 4

# Sistemas iterados de funciones

Abordamos en este capítulo el estudio del mecanismo más usado, y ya clásico, para construir fractales. Esto nos permite además establecer una definición formal de la noción de autosemejanza, que se discutió de manera intuitiva en el primer capítulo y que constituye una de las propiedades esenciales de los fractales.

### 4.1. Sistema Iterado de Funciones (SIF), atractor de un SIF

**Definición 4.1.1** (SIF). Un **Sistema Iterado de Funciones (SIF)**, es una estructura de la forma  $\{X; f_1, f_2, f_3, \dots, f_N\}$ , donde  $X$  es un espacio métrico completo y cada  $f_i : X \rightarrow X$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , es una contracción en  $X$ .

El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad de lo que llamaremos el atractor de un SIF.

**Teorema 4.1.2.** *Dado  $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$  un SIF, se define*

$$\begin{aligned} F : \mathcal{H}(X) &\longrightarrow \mathcal{H}(X) \\ K &\longmapsto F(K) =: \bigcup_{i=1}^N f_i(K), \end{aligned}$$

*entonces existe un único  $A \in \mathcal{H}(X)$  tal que  $F(A) = A = \bigcup_{i=1}^N f_i(A)$ .*

*Además para cualquier  $K \in \mathcal{H}(X)$  se tiene que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{\circ n}(K) = A.$$

*El conjunto  $A$  lo llamaremos el **atractor** del SIF.*

*Demostración.* En primer lugar obsérvese que  $F$  está bien definida en virtud de las proposiciones 2.5.22 y 3.1.3; además por el Lema 3.2.11,  $F$  es una contracción en  $\mathcal{H}(X)$ .

Por otra parte, dado que  $X$  es completo, tenemos que  $\mathcal{H}(X)$  es completo (Teorema 3.2.6), de modo que podemos aplicar el teorema del punto fijo (Teorema 2.8.1) a la función,

$$F : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$$

para concluir que existe un único  $A \in \mathcal{H}(X)$  tal que:

$$\bigcup_{i=1}^N f_i(A) = F(A) = A. \quad (4.1)$$

Finalmente, aplicando la segunda parte del teorema del punto fijo, se obtiene la segunda parte del teorema.  $\square$

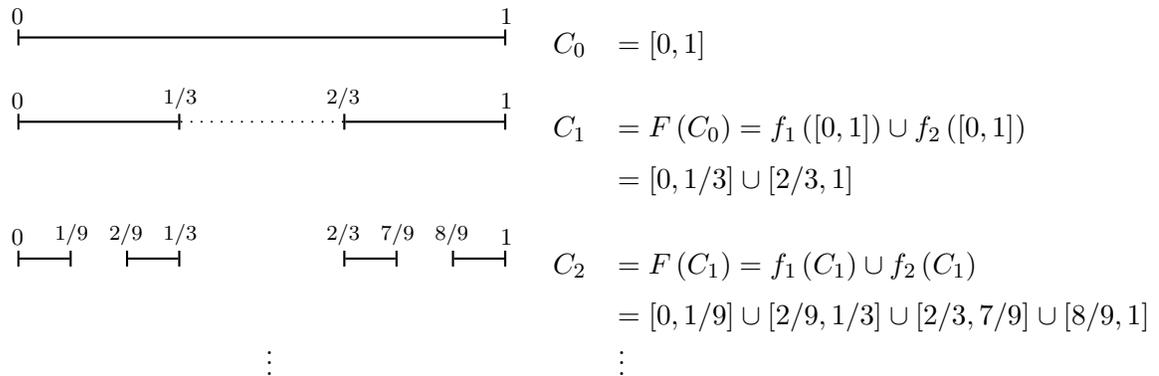
**Ejemplo 4.1.3.** Consideremos el SIF  $\{\mathbb{R}, f_1, f_2\}$  donde

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

En este caso  $F : \mathcal{H}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R})$  está definida por

$$F(K) := f_1(K) \cup f_2(K), \quad \forall K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}).$$

Tomemos como conjunto inicial (llamado también *semilla*) el conjunto  $C_0 = [0, 1]$ . Entonces,



**Figura 4.1:** Descripción de la construcción del *conjunto de Cantor*.

Es intuitivamente claro que el atractor de este SIF es el conjunto de Cantor  $\mathcal{C}$ . Para probarlo formalmente basta observar que  $(C_n)_n$  es una sucesión de Cauchy (compruébelo!) en  $\mathcal{H}(\mathbb{R})$  que cumple:

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots \supseteq C_n \supseteq \cdots$$

Entonces se puede aplicar el Lema 3.2.7 y por supuesto el teorema anterior para obtener:

$$\text{Atractor del SIF} = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \mathcal{C} \quad (\text{recuerde la sección 1.3.1}).$$

Analizando la expresión (4.1) y recordando que cada  $f_i$  es una contracción de modo que cada  $f_i(A)$  se podría interpretar como una “copia reducida” de  $A$ , entonces la igualdad (4.1) podría también expresarse informalmente, diciendo que el conjunto  $A$  es unión de un número finito de copias reducidas de sí mismo. Formalmente:

**Definición 4.1.4.** Diremos que un conjunto es **autosemejante** (o autosimilar) si es el atractor de un SIF.

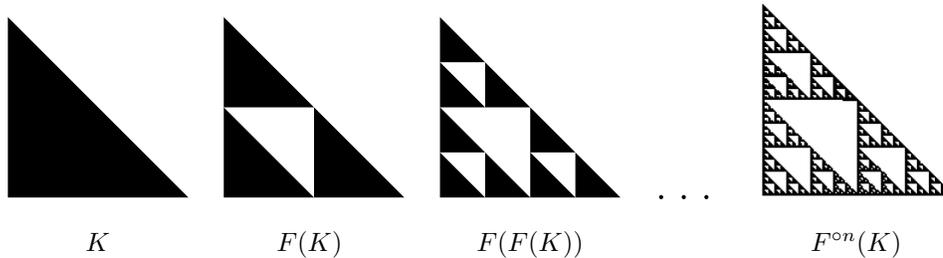
**Ejemplo 4.1.5.**

1. Consideremos el SIF  $\left\{ \mathbb{R}^2, \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}z + \frac{i}{2} \right\}$ . En este caso  $F : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  está definida por

$$F(K) := f_1(K) \cup f_2(K) \cup f_3(K), \quad \forall K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2),$$

siendo  $f_1(z) = \frac{1}{2}z$ ,  $f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$  y  $f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}$ .

Tomemos como conjunto inicial el triángulo rectángulo “relleno”  $K$ , de vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$ . Se obtiene:



**Figura 4.2:** Construcción de una versión del triángulo de Sierpiński.

Aunque la sucesión de figuras que aquí se obtiene, no es exactamente la misma obtenida en la sección 1.1.1, si pareciera que, “de alguna manera”, los conjuntos límite son “esencialmente” iguales. Veremos en la sección 4.4 una proposición (Proposición 4.4.13) que nos permitirá concluir que en efecto el atractor del SIF de este ejemplo, es justamente (homeomorfo<sup>1</sup> a) el triángulo de Sierpiński.

2. Tomemos ahora el SIF  $\left\{ [0, 1], \frac{2}{5}x \right\}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 1 & & 0 & \frac{2}{5} & & 0 & \frac{4}{25} & & 0 & \left(\frac{2}{5}\right)^n & & \dots & 0 \\ |-----| & , & |-----| & , & |-----| & , & |-----| & , & \dots & \bullet \end{array}$$

<sup>1</sup>Dos espacios métricos  $X$  e  $Y$  se dicen **homeomorfos** si existe una biyección  $h : X \rightarrow Y$  tal que  $h$  y  $h^{-1}$  son continuas.

Su atractor es  $A = \{0\}$ . En efecto: según el Teorema 4.1.2 basta demostrar que  $A$  es el punto fijo de la contracción  $F : \mathcal{H}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{H}([0, 1])$  definida por

$$F(K) = f_1(K), \quad \forall K \in \mathcal{H}([0, 1]), \quad f_1(x) = \frac{2}{5}x.$$

Tenemos:

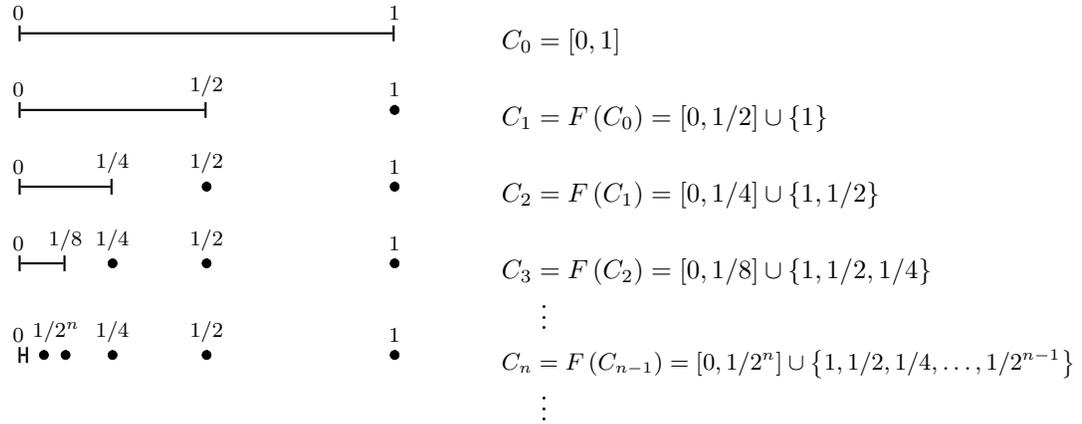
$$F(\{0\}) = f_1(\{0\}) = \{f_1(0)\} = \{0\}.$$

Obsérvese que este ejemplo naturalmente se puede generalizar a cualquier SIF que tenga solamente una contracción (Ejercicio 4.6.3).

3. Sea  $\{\mathbb{R}, \frac{1}{2}x, 1\}$ . En este caso el atractor es  $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

En efecto: probemos que,

$$F\left(\{0\} \cup \left\{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$



Sea  $y \in F(A)$ . Entonces  $y \in f_1(A) \cup f_2(A)$ . Si  $y = f_1(x)$  para algún  $x \in A$ , tenemos: si  $x = 0$  entonces  $y = f_1(0) = 0$  de modo que  $y \in A$ . Si  $x = \frac{1}{2^n}$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  entonces  $y = f_1\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \in A$ . Ahora, si  $y \in f_2(A) = \{1\}$ , entonces  $y = 1 = \frac{1}{2^0} \in A$ . De esta forma  $F(A) \subseteq A$ . Recíprocamente, sea  $y \in A$ , si  $y = 0$  entonces  $y = f_1(0) \in f_1(A) \subseteq F(A)$ . Si  $y = \frac{1}{2^n}$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , entonces  $y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = f_1\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \in f_1(A) \subseteq F(A)$ . Finalmente si  $y = 1$  entonces  $y = f_2(1) \in f_2(A) \subseteq F(A)$ . Por tanto  $A \subseteq F(A)$ .

4. Considere el mismo SIF del ejemplo 1, pero ahora tomemos como semilla un cuadrado (relleno) como en la Figura 4.3.

Este ejemplo ilustra lo afirmado en el Teorema 4.1.2 en relación con que el atractor de un SIF es independiente del compacto  $K$  que se elija como semilla o conjunto inicial. ¡Explique!

Podemos ahora afirmar que el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpiński,  $\{0\}$  (y en general cualquier conjunto unitario  $\{x\}$  en un espacio métrico completo), y  $\{0\} \cup \{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  son conjuntos autosemejantes.

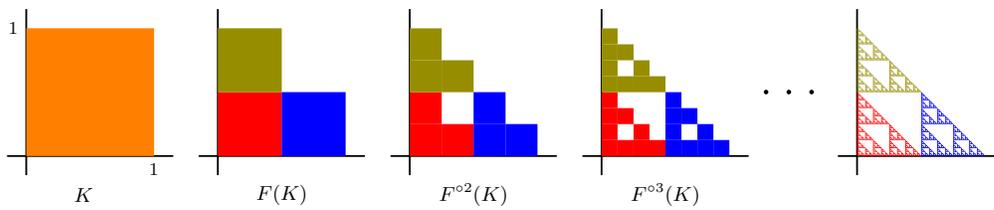


Figura 4.3: Construcción del triángulo de Sierpiński tomando otro compacto inicial.

## 4.2. SIF's con condensación

Es común que al observar figuras como las siguientes:

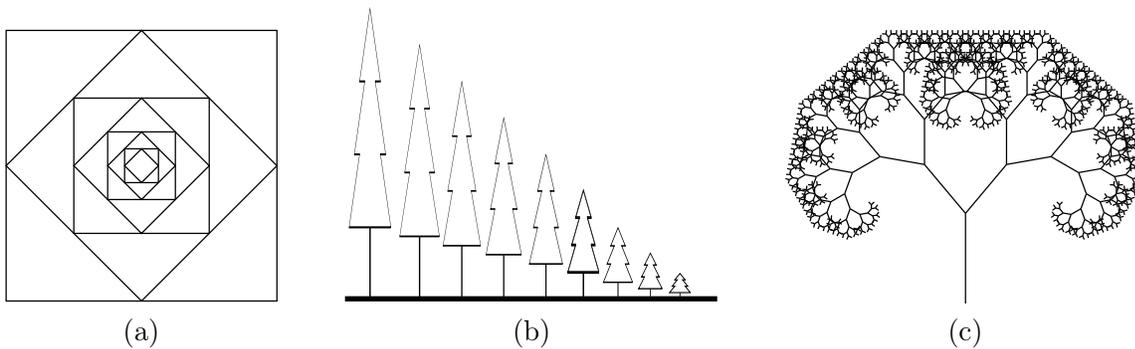


Figura 4.4: SIF's con condensación.

se piense en fractales. Si bien es intuitivamente claro que “dentro de” la figura completa se pueden observar varias copias reducidas de si misma, en realidad en estos ejemplos no se cumple “rigurosamente” la condición de la “lupa” o efecto de “zoom” (ver sección 1.1.1, Figura 1.9), en el sentido de que **no** es cierto que al poner una lupa en cualquier parte del conjunto, se pueda observar ahí una copia reducida del mismo (Figura 4.5). Sin embargo si es posible obtener este tipo de figuras como atractores de cierta clase de sistemas iterados de funciones, que se llamarán SIF's con condensación.

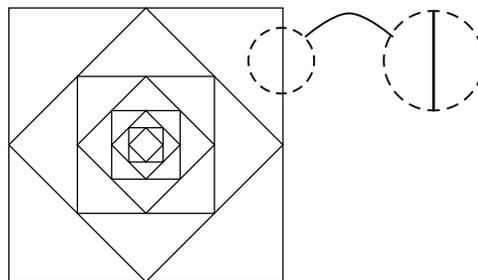


Figura 4.5: No se cumple la “propiedad de la lupa”.

**Definición 4.2.1.** Sean  $(X, d)$  espacio métrico y  $C \in \mathcal{H}(X)$ . Defina  $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  por  $w_0(K) := C, \forall K \in \mathcal{H}(X)$ . Entonces  $w_0$  se dice una **transformación de condensación**

y  $C$  se llama el **conjunto de condensación** asociado.

**Nota.** Obsérvese que  $w_0$  sencillamente es una función constante de  $\mathcal{H}(X)$  en  $\mathcal{H}(X)$ ; por lo tanto  $w_0$  es una contracción (con factor de contracción cero) cuyo punto fijo es el conjunto de condensación  $C$ .

**Definición 4.2.2.** Sea  $\{X, w_1, w_2, \dots, w_N\}$ , un SIF y sea  $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  una transformación de condensación. Entonces  $\{X, w_0, w_1, w_2, \dots, w_N\}$  se llama un **SIF con condensación**.

**Ejemplo 4.2.3.** Sea  $\{\mathbb{R}^2; w_0, w_1, w_2\}$  donde  $w_0(K) := \{0\} \times [0, 1]$ ,  $w_1(z) := \frac{1}{2}ze^{-i\pi/4} + i$  y  $w_2(z) := \frac{1}{2}ze^{i\pi/4} + i$ .

Obsérvese que la única diferencia entre SIF y SIF con condensación, es la presencia, en este último, de una contracción “diferente” de las otras del SIF, en cuanto  $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ ; es decir el dominio y codominio de  $w_0$  es  $\mathcal{H}(X)$ , mientras que el dominio y codominio de las demás contracciones, es  $X$ . Sin embargo, el SIF con condensación puede “funcionar” de la misma manera que los otros y generar una sucesión convergente de compactos. Veamos como sería esto para el SIF con condensación del ejemplo anterior:

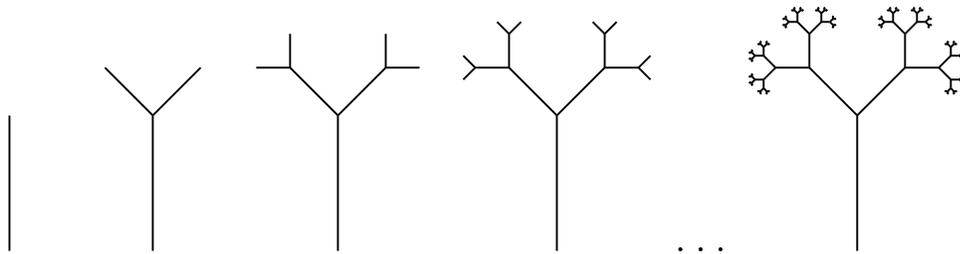
**Ejemplo 4.2.4.** Para el SIF del Ejemplo 4.2.3 se tiene que  $W : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  está dada por:

$$\begin{aligned} W(K) &:= w_0(K) \cup w_1(K) \cup w_2(K) \\ &= (\{0\} \times [0, 1]) \cup w_1(K) \cup w_2(K). \end{aligned}$$

Tomemos como semilla o conjunto inicial, el mismo conjunto de condensación, es decir, tomemos  $K = \{0\} \times [0, 1]$ . La sucesión

$$K, W(K), W^{\circ 2}(K), W^{\circ 3}(K), \dots, W^{\circ n}(K), \dots$$

se vería aproximadamente como sigue:



**Figura 4.6:** Construcción de un árbol fractal.

De manera totalmente análoga a como se obtuvo la demostración del Teorema 4.1.2, se obtiene la demostración del siguiente resultado.

**Teorema 4.2.5.** Sea  $\{X; w_0, w_1, w_2, \dots, w_N\}$  un SIF con condensación. Entonces la transformación  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  definida por

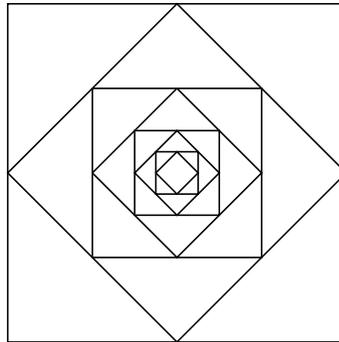
$$W(K) := \bigcup_{i=0}^N w_i(K), \quad K \in \mathcal{H}(X)$$

tiene un único punto fijo, es decir existe un único  $A \in \mathcal{H}(X)$  tal que  $W(A) = A = \bigcup_{i=0}^N w_i(A)$ . Además para cualquier  $K \in \mathcal{H}(X)$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(K) = A.$$

**Definición 4.2.6.** Sea  $\{X; w_0, w_1, w_2, \dots, w_N\}$  un SIF con condensación. El conjunto  $A$  del teorema anterior se llama el **atractor** del SIF con condensación.

**Ejemplo 4.2.7.** El atractor del SIF  $\{\mathbb{R}^2; w_0, w_1\}$  donde  $w_0$  es la transformación de condensación definida por  $w_0(K) := \partial([0, 1] \times [0, 1])$ ,  $\forall K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  y  $w_1(z) := \frac{\sqrt{2}}{2}z e^{i\pi/4} + \frac{1}{2}$ , es el conjunto de la Figura 4.7.



**Figura 4.7:** Atractor de un SIF con condensación.

En la siguiente sección se estudia una función que desempeña un papel muy importante en la geometría fractal.

### 4.3. La función de direccionamiento

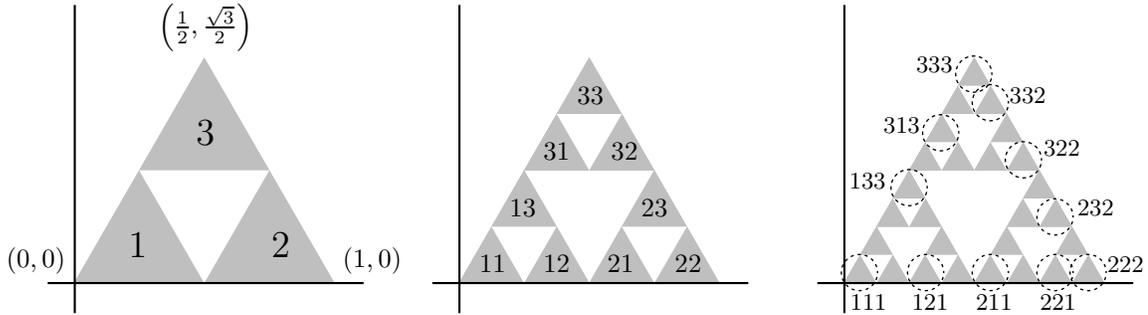
Esta función permitirá, entre otras cosas, asociar a cada punto del atractor de un SIF, un código, es decir un elemento del espacio de los códigos (ver Ejemplo 2.1.2.5).

En primer lugar veamos cómo el atractor de un SIF determina un espacio de códigos, de acuerdo al número de contracciones del SIF.

**Definición 4.3.1** (El espacio de códigos asociados a un SIF). Dado un SIF:  $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$  se define su **espacio de códigos asociado** como el espacio métrico  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  donde  $\Sigma = \{1, 2, \dots, N\}$ .

**Nota.** Recuerde que la métrica en  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  esta dada por  $d_c(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i}$ , para todo  $\alpha = \alpha_1\alpha_2\dots, \beta = \beta_1\beta_2\dots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ .

**Ejemplo 4.3.2.** El espacio de códigos asociados al SIF:  $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3\}$  donde  $w_1(z) = \frac{1}{2}z$ ;  $w_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$ ;  $w_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$  (y a cualquier SIF con tres contracciones) es  $\{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$ .



**Figura 4.8:** El espacio de códigos asociado con el triángulo de Sierpiński.

Los siguientes lemas se usarán en la demostración del Teorema 4.3.5, el cual a su vez constituye el resultado central de esta sección.

**Lema 4.3.3.** Sea  $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  un SIF. Sea  $K \in \mathcal{H}(X)$ . Entonces existe  $\tilde{K} \in \mathcal{H}(X)$  tal que  $K \subseteq \tilde{K}$  y para cada  $i = 1, \dots, N$ ,  $w_i : \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$ . En otras palabras  $\{\tilde{K}; w_1, \dots, w_N\}$  es un SIF cuyo conjunto subyacente es un compacto.

*Demostración.* Para construir  $\tilde{K}$  considere el SIF con condensación

$$\{X; w_0, w_1, \dots, w_N\}$$

donde la función  $w_0$  es la función de condensación determinada por  $K$ , es decir:  $w_0(B) := K$ ,  $\forall B \in \mathcal{H}(X)$ .

Por el Teorema 4.1.2 existe el atractor de este SIF con condensación, es decir existe  $\tilde{K}$  el punto fijo de la contracción,

$$W_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$$

definida por:

$$\begin{aligned} W_0(B) &:= w_0(B) \cup \overbrace{w_1(B) \cup \dots \cup w_N(B)}^{W(B)} \\ &= K \cup W(B) \end{aligned}$$

Claramente  $\tilde{K}$  es compacto y además cumple  $W_0(\tilde{K}) = \tilde{K}$ , es decir  $K \cup W(\tilde{K}) = \tilde{K}$  de donde  $K \subseteq \tilde{K}$  y  $W(\tilde{K}) \subseteq \tilde{K}$ ; esta última contención implica  $w_i : \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$ ,  $\forall_i = 1, \dots, N$ .  $\square$

**Lema 4.3.4.** Sea  $\{X; w_1, \dots, w_N\}$  un SIF con factor de contracción  $\lambda$  (es decir  $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$  donde  $\lambda_i$  es el factor de contracción de  $w_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ). Sea  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  el espacio de códigos asociados al SIF. Sea,

$$\phi : \Sigma^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times X \longrightarrow X$$

definida por:

$$\phi(\alpha, n, x) := w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x).$$

Sea  $K \in \mathcal{H}(X)$ . Entonces existe una constante  $D$  tal que:

$$d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\alpha, n, x_2)) \leq D\lambda^{\min\{m, n\}}$$

$\forall \alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}, \forall m, n \in \mathbb{N}$  y  $\forall x_1, x_2 \in K$ .

*Demostración.* Sean  $\alpha, m, n, x_1, x_2$  como se establecen en el lema. Construya el compacto  $\tilde{K}$  como en el Lema 4.3.3, de modo que cada  $w_i : \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$ . Podemos suponer  $m < n$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha, n, x_2) &= w_{\alpha_1} \circ \dots \circ w_{\alpha_m} \circ \underbrace{w_{\alpha_{m+1}} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}}_{x_3}(x_2) \\ &= \phi(\alpha, m, x_3). \end{aligned}$$

De modo que:

$$\begin{aligned} d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\alpha, n, x_2)) &= d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\alpha, m, x_3)) \\ &= d(w_{\alpha_1} \circ \dots \circ w_{\alpha_m}(x_1), w_{\alpha_1} \circ \dots \circ w_{\alpha_m}(x_3)) \\ &\leq \lambda^m d(x_1, x_3) \leq \lambda^m D \end{aligned}$$

donde  $D = \max\{d(x, y) \mid x, y \in \tilde{K}\}$ ;  $D$  existe puesto que  $\tilde{K}$  es compacto.  $\square$

Establecidos los lemas anteriores podemos ahora si abordar la función que nos interesa.

**Teorema 4.3.5** (La función  $\varphi$ ). Sean  $\{X; w_1, \dots, w_N\}$  un SIF y  $A$  su atractor. Sea  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  el espacio de códigos asociado al SIF. Para cada  $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}, n \in \mathbb{N}$  y  $x \in X$ , sea

$$\varphi(\alpha) := \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\alpha, n, x).$$

Entonces  $\varphi(\alpha)$  siempre existe, pertenece a  $A$ , es independiente de  $x$ , y la función:

$$\begin{aligned} \varphi &: \Sigma^{\mathbb{N}} \longrightarrow A \\ \alpha &\longmapsto \varphi(\alpha) \end{aligned}$$

es continua y sobre.

*Demostración.* Sean  $x \in X$  y  $K \in \mathcal{H}(X)$  tal que  $x \in K$ . Construya  $\tilde{K}$  como en el Lema 4.3.3. Sabemos que el atractor  $A$  se puede obtener como:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(K).$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha, 1, x) &= w_{\alpha_1}(x) \in W(K), \\ \phi(\alpha, 2, x) &= w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2}(x) \in W^{o2}(K), \\ &\vdots \\ \phi(\alpha, n, x) &= w_{\alpha_1} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x) \in W^{on}(K), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por el Lema 4.3.4 la sucesión  $(\phi(\alpha, n, x))_n$  es de Cauchy, y aplicando entonces el Teorema de Completez de  $\mathcal{H}(X)$  (Teorema 3.2.6), podemos afirmar que dicha sucesión converge a un elemento del atractor  $A$ , es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\alpha, n, x) \in A.$$

Veamos que  $\varphi$  es continua. Sea  $\epsilon > 0$ . Existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\lambda^n D < \epsilon$ , ( $\lambda$  es factor de contracción del SIF y  $D$  es el diámetro de  $\tilde{K}$ ). Para  $\alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  que cumplan:

$$d_c(\alpha, \beta) < \frac{1}{(N+1)^{n+1}}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} (N+1)^{n+1} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} \right] < 1 \\ \underbrace{\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i| (N+1)^{n+1-i}}_{t \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}} + \sum_{i=n+1}^{\infty} |\alpha_i - \beta_i| (N+1)^{n+1-i} < 1. \end{aligned}$$

Luego necesariamente  $t = 0$ , de modo que  $\alpha_i = \beta_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$  (es decir  $\alpha$  y  $\beta$  coinciden en sus primeras  $n$  cifras).

Para  $m \leq n$  se tiene:

$$\begin{aligned} d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\beta, m, x_2)) &= d(w_{\alpha_1} \circ \dots \circ w_{\alpha_m}(x_1), w_{\beta_1} \circ \dots \circ w_{\beta_m}(x_2)), \quad x_1, x_2 \in \tilde{K} \\ &= d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\alpha, m, x_2)) \leq \lambda^m D < \epsilon, \end{aligned}$$

y tomando el límite cuando  $m \rightarrow \infty$ ,

$$d\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \phi(\alpha, m, x_1), \lim_{m \rightarrow \infty} \phi(\beta, m, x_2)\right) < \epsilon,$$

luego  $d(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) < \epsilon$ . Así  $\varphi$  es continua.

Solo falta probar que  $\varphi$  es sobre. Sea  $a \in A$ . Claramente  $\{x\} \in \mathcal{H}(X)$  para cualquier  $x \in X$ , de modo que,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(\{x\}).$$

Considere la sucesión de compactos:

$$\begin{aligned} W(\{x\}) &= \{w_1(x), \dots, w_N(x)\} \\ W^{\circ 2}(\{x\}) &= \{w_1 \circ w_1(x), \dots, w_1 w_n(x), w_2 w_1(x), \dots, w_2 w_N(x), w_N w_1, \dots, w_N w_N(x)\} \\ &\vdots \\ W^{on}(\{x\}) &= \{w_{\alpha_1} w_{\alpha_2} \dots w_{\alpha_n}(x) \mid \alpha_i \in \{1, \dots, N\}, 1 \leq i \leq n\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Claramente es una sucesión de Cauchy (en  $\mathcal{H}(X)$ ), usando el Teorema de Completez de  $\mathcal{H}(X)$  (ver Teorema 3.2.6), debe existir una sucesión  $(a_n)_n$  tal que  $(a_n)_n \rightarrow a$  y  $a_n \in W^{on}(\{x\})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Así, para cada  $n$ ,

$$a_n = w_{\alpha_1^n} \circ w_{\alpha_2^n} \circ \dots \circ w_{\alpha_n^n}(x).$$

Se determina entonces una sucesión de códigos  $(\alpha^n)_n$  donde  $\alpha^n = (\alpha_m^n)_m$ . Como  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  es compacto,  $(\alpha^n)_n$  admite una subsucesión convergente, digamos  $(\alpha^{k_n})_n \rightarrow \alpha$ ,  $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ . Por la última convergencia, los “segmentos iniciales” de los códigos  $\alpha^{k_n}$ , coincidentes con los de  $\alpha$ , se van haciendo cada vez “más largos”, de modo que

$$d(\phi(\alpha, n, x), \phi(\alpha^{k_n}, n, x)) \leq \lambda^{t(n)} D$$

donde

$$t(n) = \# \left\{ j \in \mathbb{N} \mid \alpha_k^{k_n} = \alpha_k, 1 \leq k \leq j \right\}.$$

Tomando límite en los dos lados de la desigualdad, se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\alpha, n, x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\alpha^{k_n}, n, x), \\ \varphi(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_1^{k_n}} \circ \dots \circ w_{\alpha_n^{k_n}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a. \quad \square \end{aligned}$$

De esta manera, para cada punto del atractor de un SIF, podemos ahora definir lo que llamaremos una dirección del punto.

**Definición 4.3.6** (Función de direccionamiento). Sean  $\{X; w_1, \dots, w_n\}$  un SIF,  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  su espacio de códigos asociado y  $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow A$  la función construida en el teorema anterior. Sea  $a \in A$ ; llamaremos una **dirección** o **código** de  $a$ , a cualquier elemento del conjunto,

$$\varphi^{-1}(a) := \left\{ \alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid \varphi(\alpha) = a \right\}.$$

El conjunto  $\varphi^{-1}(a)$  lo llamaremos el **conjunto de las direcciones de  $a$**  y la función  $\varphi$  la llamaremos la **función de direccionamiento** del atractor del SIF.

**Dos observaciones sobre la función de direccionamiento**<sup>2</sup>: La función  $\varphi$  permite, entre otras cosas, asignar a cada punto del atractor, un código semi-infinito, lo cual a su vez puede facilitar la caracterización de ciertos subconjuntos del fractal como se hará en la sección 4.4.2 para el triángulo de Sierpiński. Por otra parte la función de direccionamiento constituye una forma de obtener los conjuntos fractales como cocientes topológicos del espacio de Cantor. En efecto: si  $F$  es un subconjunto cerrado de  $\Sigma^{\mathbb{N}}$ , y dado que  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  es compacto, entonces  $F$  es también compacto; de esta manera para la función  $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow A$  definida en el Teorema 4.3.5, se tiene que  $\varphi(F)$  es un subconjunto compacto de  $A$  (la imagen continua de un compacto es un compacto); además, puesto que  $A$  es Hausdorff (por ser un espacio métrico), entonces  $\varphi(F)$  es un cerrado de  $A$  (un subconjunto compacto de un espacio Hausdorff, es cerrado [38, Theorem 17.5]). De esta manera la función  $\varphi$  es cerrada de modo que se tiene una función continua, sobre y cerrada; se puede entonces aplicar [38, Teorema 9.2] para concluir que  $A$  es un cociente (topológico) del espacio de Cantor. Por supuesto esta conclusión también se puede obtener como una consecuencia directa del Teorema 30.7 de [38], el cual establece que todo espacio métrico compacto es una imagen continua del espacio de Cantor; sin embargo en el Teorema 4.3.5 se muestra explícitamente una función de cociente entre el espacio de Cantor  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  y el atractor  $A$ .

**Ejemplo 4.3.7.**

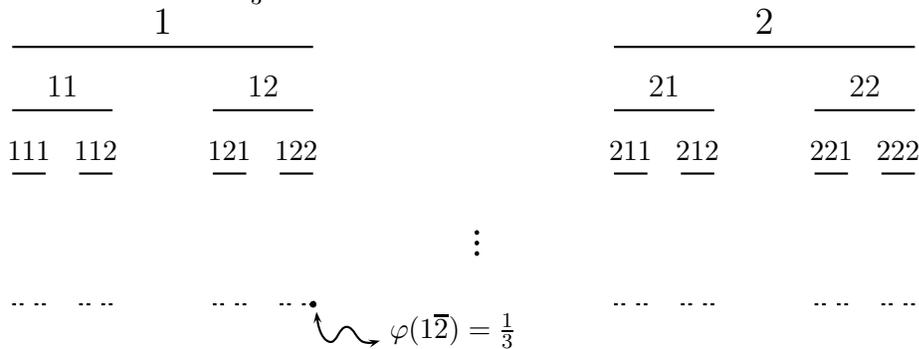
1. Consideremos el SIF:  $\{[0, 1]; w_1, w_2\}$  donde  $w_1(x) = \frac{1}{3}x$ ,  $w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ . El atractor de este SIF es el espacio de Cantor  $\mathcal{C}$ , y su función de direccionamiento,

$$\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{C}, \quad \text{donde} \quad \Sigma = \{1, 2\},$$

Calculemos por ejemplo  $\varphi(1\bar{2})$ ; ( $1\bar{2} = 1222\dots$ ).

$$\begin{aligned} \varphi(1\bar{2}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} w_1 \circ w_2 \circ w_2 \circ \dots \circ w_2(1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} w_1(1) = w_1(1) = \frac{1}{3} \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

Luego  $1\bar{2}$  es dirección de  $\frac{1}{3}$ .

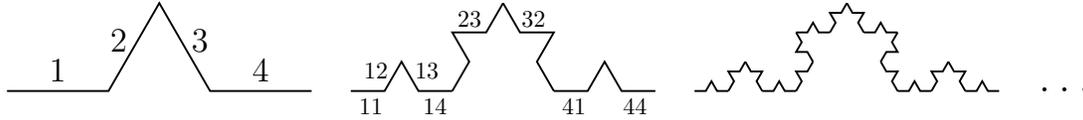


**Figura 4.9:** El espacio de códigos asociado con el conjunto de Cantor.

<sup>2</sup>Para estudiantes que han visto un curso de topología

2. El atractor del SIF:  $\left\{ I \times I; \frac{1}{3}z, \frac{1}{3}ze^{i\pi/3} + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}ze^{-i\pi/3} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i, \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \right\}$ , es la **curva de Koch**, que notaremos  $\mathcal{K}$ . Entonces

$$\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{K} \quad \text{con} \quad \Sigma = \{1, 2, 3, 4\}.$$



**Figura 4.10:** El espacio de códigos asociado con la curva de Koch.

En este caso, por ejemplo  $\varphi^{-1}(\frac{1}{3}) = \{1\bar{4}, 2\bar{1}\}$ . Compruébelo.

Los siguientes lemas serán de gran utilidad más adelante.

**Lema 4.3.8.** Sean  $A$  el atractor de un SIF  $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$  y  $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow A$  la correspondiente función de direccionamiento. Entonces para todo  $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  se cumple:

$$\varphi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots) = f_{\alpha_1}(\varphi(\alpha_2\alpha_3 \dots)).$$

*Demostración.* En efecto:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ f_{\alpha_3} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}(x), \quad x \in X \\ &= f_{\alpha_1} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\alpha_2} \circ f_{\alpha_3} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}(x) \right), \quad \text{pues } f_{\alpha_1} \text{ es continua} \\ &= f_{\alpha_1}(\varphi(\alpha_2\alpha_3 \dots)). \quad \square \end{aligned}$$

**Lema 4.3.9.** Sean  $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$  un SIF cuyas contracciones son inyectivas y  $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow A$  la correspondiente función de direccionamiento. Entonces para todo par  $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots, \beta = \beta_1\beta_2\beta_3 \dots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  se tiene

$$\varphi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots) = \varphi(\alpha_1\beta_2\beta_3 \dots)$$

si y solo si

$$\varphi(\alpha_2\alpha_3 \dots) = \varphi(\beta_2\beta_3 \dots).$$

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ) Si  $\varphi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots) = \varphi(\alpha_1\beta_2\beta_3 \dots)$ , aplicando el lema anterior se tiene

$$f_{\alpha_1}(\varphi(\alpha_2\alpha_3 \dots)) = f_{\alpha_1}(\varphi(\beta_2\beta_3 \dots)).$$

Como  $f_{\alpha_1}$  es inyectiva se concluye que  $\varphi(\alpha_2\alpha_3 \dots) = \varphi(\beta_2\beta_3 \dots)$ .

$\Leftarrow$ ) Aplicando  $f_{\alpha_1}$  en la hipótesis y luego usando el lema anterior, se obtiene el resultado.  $\square$

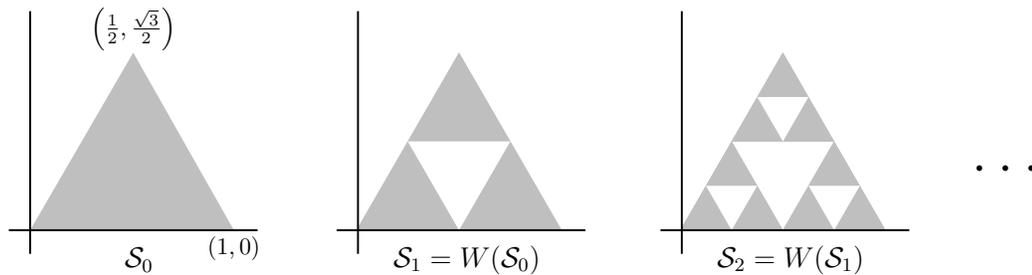
En la familia de los fractales clásicos, el triángulo de Sierpiński, llamado también curva triangular de Sierpiński, ocupa un lugar muy destacado, parece tener propiedades excepcionales y surge, a veces de manera casi sorprendente, en diversos contextos de la matemática: en los sistemas dinámicos, la teoría de grafos, la matemática aplicada (en la fabricación de antenas de alta frecuencia, en particular en teléfonos celulares), e incluso en objetos tan antiguos como el triángulo de Pascal o el juego de las Torres de Hanoi, (véanse por ejemplo [35], [26], [13, pág. 309]). Por las razones anteriores, hemos querido dedicar en este capítulo una sección completa a este muy famoso fractal.

#### 4.4. Sobre el triángulo de Sierpiński

Recuérdese que en el capítulo 1, sección 1.1.1, se definió el triángulo de Sierpiński, que notamos  $\mathcal{S}$ , como la intersección de cierta familia de compactos  $(\mathcal{S}_n)_n$ . Ahora, si consideramos el SIF  $\mathbb{S} = \{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3\}$  donde

$$w_1(z) = \frac{1}{2}z, \quad w_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \quad w_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \quad (4.2)$$

y tomamos como semilla  $\mathcal{S}_0$  el triángulo (relleno) de vértices  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  y  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ , se puede comprobar, haciendo los cálculos y aplicando inducción matemática, que la sucesión  $(W^{on}(\mathcal{S}_0))_n$  es la misma sucesión  $(\mathcal{S}_n)_n$  de la sección 1.1.1 (Figuras 1.7 y 4.11). En adelante notaremos con  $\mathbb{S}$  el SIF anterior.



**Figura 4.11:** Construcción del triángulo de Sierpiński.

De esta forma definimos:

**Definición 4.4.1.** Siendo  $(\mathcal{S}_n)_n$  la sucesión obtenida anteriormente, se define el **triángulo de Sierpiński** que notaremos  $\mathcal{S}$ , como la intersección de la familia  $\{\mathcal{S}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , es decir:

$$\mathcal{S} := \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n.$$

Obsérvese que cada  $\mathcal{S}_n$  es compacto, no vacío y además:

(i)  $\mathcal{S}_0 \supseteq \mathcal{S}_1 \supseteq \mathcal{S}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{S}_n \supseteq \dots$

(ii)  $(\mathcal{S}_n)_n$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ .

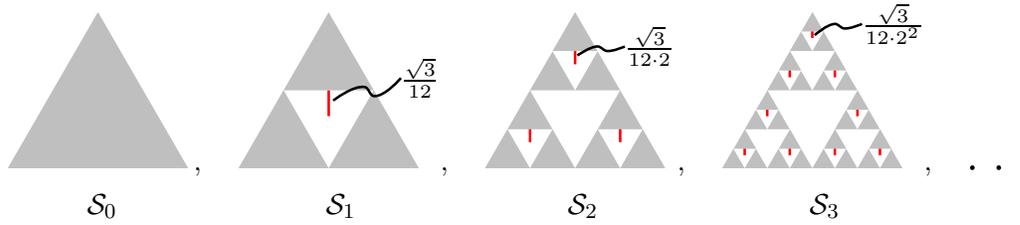


Figura 4.12: Distancia entre  $\mathcal{S}_n$  y  $\mathcal{S}_{n+1}$ .

En efecto:

$$\begin{aligned}
 h(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) &= \tilde{d}(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) = \frac{\sqrt{3}}{12} \\
 h(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) &= \tilde{d}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) = \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2} \\
 h(\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3) &= \tilde{d}(\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3) = \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^2} \\
 &\vdots \\
 h(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_{n+1}) &= \tilde{d}(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_{n+1}) = \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^n}
 \end{aligned}$$

de modo que si  $m \geq n$  se tiene:

$$\begin{aligned}
 h(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_m) &\leq \sum_{j=n}^{m-1} h(\mathcal{S}_j, \mathcal{S}_{j+1}) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^n} + \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^{n+1}} + \dots + \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^m} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{12} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^m} \right) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

Así teniendo en cuenta (i), (ii) y que  $\mathbb{R}^2$  es completo, se puede aplicar el Lema 3.2.7 para obtener:

**Proposición 4.4.2.** *El triángulo de Sierpiński es el atractor del SIF  $\mathbb{S}$ .*

En la siguiente sección (basada en [25]), se hace un análisis del SIF  $\mathbb{S}$ , y se introduce la noción de SIF triangular, para llegar a obtener una caracterización del triángulo de Sierpiński. Debemos comentar sin embargo que para un total entendimiento de esta sección, es necesario haber visto un curso de topología; más específicamente para entender la demostración de la Proposición 4.4.11 y la segunda parte de la demostración de la Proposición 4.4.12.

#### 4.4.1. SIF's triangulares y una caracterización de $\mathcal{S}$

En el siguiente lema se establecen algunas propiedades del SIF  $\mathbb{S}$ , las cuales a su vez inspiran la Definición 4.4.4.

**Lema 4.4.3.** *Para el SIF  $\mathbb{S}$  se tiene:*

- (i)  $w_1(\mathcal{S}) \cap w_2(\mathcal{S}) = \left\{ \left( \frac{1}{2}, 0 \right) \right\}$ ;      (ii)  $w_2(\mathcal{S}) \cap w_3(\mathcal{S}) = \left\{ \left( \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right\}$ ;  
 (iii)  $w_1(\mathcal{S}) \cap w_3(\mathcal{S}) = \left\{ \left( \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right\}$ ;      (iv)  $w_1(\mathcal{S}) \cap w_2(\mathcal{S}) \cap w_3(\mathcal{S}) = \emptyset$ .

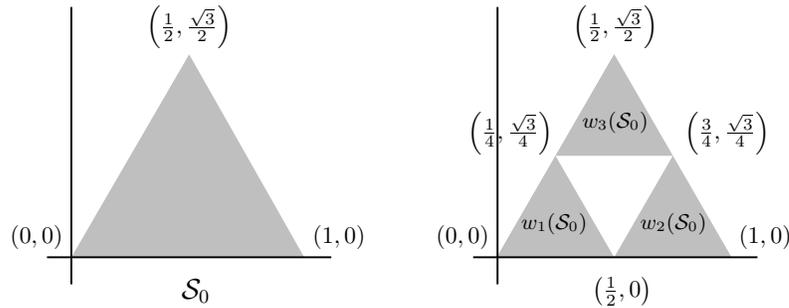


Figura 4.13:

*Demostración.* En primer lugar obsérvese que  $w_1(\mathcal{S}_0)$  es el triángulo de vértices  $(0,0)$ ,  $(\frac{1}{2}, 0)$  y  $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ ;  $w_2(\mathcal{S}_0)$  es el triángulo de vértices  $(\frac{1}{2}, 0)$ ,  $(1,0)$  y  $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ ; y  $w_3(\mathcal{S}_0)$  es el triángulo de vértices  $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ ,  $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$  y  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  de modo que  $w_1(\mathcal{S}_0) \cap w_2(\mathcal{S}_0) = \left\{ \left( \frac{1}{2}, 0 \right) \right\}$ ,  $w_2(\mathcal{S}_0) \cap w_3(\mathcal{S}_0) = \left\{ \left( \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right\}$ ,  $w_1(\mathcal{S}_0) \cap w_3(\mathcal{S}_0) = \left\{ \left( \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right\}$ ,  $w_1(\mathcal{S}_0) \cap w_2(\mathcal{S}_0) \cap w_3(\mathcal{S}_0) = \emptyset$ . Sea  $y \in w_1(\mathcal{S}) \cap w_2(\mathcal{S})$ ; entonces  $y = w_1(a) = w_2(b)$  para algunos  $a, b \in \mathcal{S} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$ . En particular  $a, b \in \mathcal{S}_0$ , de donde  $w_1(a) \in w_1(\mathcal{S}_0)$  y  $w_2(b) \in w_2(\mathcal{S}_0)$ , luego  $y \in w_1(\mathcal{S}_0) \cap w_2(\mathcal{S}_0)$ , es decir  $y = (\frac{1}{2}, 0)$ . De esto podemos concluir que  $w_1(\mathcal{S}) \cap w_2(\mathcal{S}) = \left\{ \left( \frac{1}{2}, 0 \right) \right\}$ . Análogamente se prueba que  $w_2(\mathcal{S}) \cap w_3(\mathcal{S}) = \left\{ \left( \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right\}$ ,  $w_1(\mathcal{S}) \cap w_3(\mathcal{S}) = \left\{ \left( \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right\}$  y  $w_1(\mathcal{S}) \cap w_2(\mathcal{S}) \cap w_3(\mathcal{S}) = \emptyset$ .  $\square$

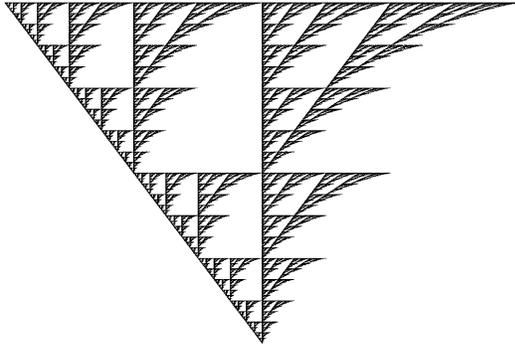
**Definición 4.4.4.** Diremos que un SIF  $\{X; f_1, f_2, f_3\}$  es **triangular** de intersecciones  $p, q$  y  $r$ , si sus contracciones son inyectivas y su atractor  $A$  satisface  $f_1(A) \cap f_2(A) = \{p\}$ ,  $f_2(A) \cap f_3(A) = \{q\}$  y  $f_1(A) \cap f_3(A) = \{r\}$  donde  $p, q$  y  $r$  son diferentes dos a dos.

**Ejemplo 4.4.5.** Claramente el SIF  $\mathbb{S}$  es triangular.

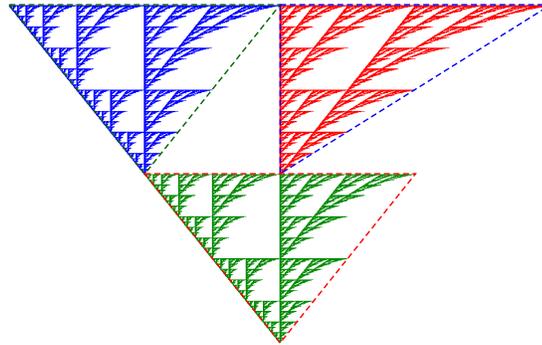
**Ejemplo 4.4.6.** Sea  $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$  donde

$$\begin{aligned} f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

es un SIF triangular cuyo atractor se ilustra en las figuras 4.14 y 4.15.



**Figura 4.14:** Atractor de un SIF triangular.



**Figura 4.15:** División del atractor

En los siguientes resultados  $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$  es un SIF triangular de intersecciones  $p, q$  y  $r$ , y atractor  $A$ . Además  $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow A$  es la función de direccionamiento correspondiente.

Notemos  $\Sigma^*$  el conjunto de códigos **finitos** sobre  $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ , incluyendo el código “vacío”, es decir, sin cifras.

**Lema 4.4.7.**

- (i)  $p, q$  y  $r$  tienen más de un código.
- (ii)  $f_1(A) \cap f_2(A) \cap f_3(A) = \emptyset$ .

*Demostración.*

- (i) Puesto que  $p \in f_1(A) \cap f_2(A)$ , existen  $x_1, x_2 \in A$  tales que  $p = f_1(x_1) = f_2(x_2)$ ; luego existen  $\alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  (el espacio de códigos asociado al SIF), tales que  $x_1 = \varphi(\alpha)$  y  $x_2 = \varphi(\beta)$ , así que, usando el Lema 4.3.8 se tiene:

$$p = f_1(\varphi(\alpha)) = \varphi(1\alpha) \quad \text{y} \quad p = f_2(\varphi(\beta)) = \varphi(2\beta),$$

de modo que  $1\alpha$  y  $2\beta$  son códigos de  $p$ . Análogamente se prueba que  $q$  y  $r$  tiene cada uno más de un código.

(ii) Si  $x \in f_1(A) \cap f_2(A) \cap f_3(A)$  entonces  $x \in f_1(A) \cap f_2(A) = \{p\}$  y  $x \in f_2(A) \cap f_3(A) = \{q\}$ , de donde  $p = q$ , lo cual contradice que el SIF es triangular.  $\square$

**Proposición 4.4.8.** *Sea  $a \in A$ ;  $a$  tiene más de un código si y solo si  $a \in \{p, q, r\}$  ó  $a \in \{f_\sigma(p), f_\sigma(q), f_\sigma(r)\}$ , donde  $f_\sigma = f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2} \circ \dots \circ f_{\sigma_k}$  para alguna  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k \in \Sigma^*$ .*

*Demostración.* Si  $a$  tiene más de un código, existen  $\alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  tales que  $a = \varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ , con  $\alpha \neq \beta$ .

Si  $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots$ ,  $\beta = \beta_1 \beta_2 \dots$ , consideremos dos casos  $\alpha_1 \neq \beta_1$  ó  $\alpha_1 = \beta_1$ . Si  $\alpha_1 \neq \beta_1$ ,  $a = \varphi(\alpha_1 \alpha') = \varphi(\beta_1 \beta')$ , donde  $\alpha' = \alpha_2 \alpha_3 \dots$ ,  $\beta' = \beta_2 \beta_3 \dots$

Entonces:

$$a = f_{\alpha_1}(\varphi(\alpha')) = f_{\beta_1}(\varphi(\beta')),$$

luego  $a \in f_{\alpha_1}(A) \cap f_{\beta_1}(A)$ , de donde  $a \in \{p, q, r\}$ .

Si  $\alpha_1 = \beta_1$ , como  $\alpha \neq \beta$ , sea  $i$  el menor índice tal que  $\alpha_i \neq \beta_i$ . Llamemos

$$\sigma_1 = \alpha_1 = \beta_1, \quad \sigma_2 = \alpha_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad \sigma_{i-1} = \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, \quad \sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{i-1}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} a &= \varphi(\sigma \alpha_i \alpha_{i+1} \dots) = \varphi(\sigma \beta_i \beta_{i+1} \dots) \\ &= f_\sigma(\varphi(\alpha_i \alpha_{i+1} \dots)) = f_\sigma(\varphi(\beta_i \beta_{i+1} \dots)) \end{aligned}$$

luego  $a \in f_\sigma(f_{\alpha_i}(A) \cap f_{\beta_i}(A))$ , y puesto que  $f_{\alpha_i}(A) \cap f_{\beta_i}(A) \subseteq \{p, q, r\}$  entonces

$$a \in \{f_\sigma(p), f_\sigma(q), f_\sigma(r)\}.$$

Recíprocamente, si  $a \in \{p, q, r\}$  usamos el lema anterior para obtener el resultado; y si  $a \in \{f_\sigma(p), f_\sigma(q), f_\sigma(r)\}$  para alguna  $\sigma \in \Sigma^*$ , supongamos por ejemplo  $a = f_\sigma(p)$ , sabemos que existen  $\alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ ,  $\alpha \neq \beta$  tales que  $p = \varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ , entonces  $a = f_\sigma(\varphi(\alpha)) = f_\sigma(\varphi(\beta))$ . Pero  $f_\sigma(\varphi(\alpha)) = \varphi(\sigma \alpha)$  y  $f_\sigma(\varphi(\beta)) = \varphi(\sigma \beta)$ , de modo que  $\sigma \alpha$  y  $\sigma \beta$  son dos códigos diferentes de  $a$ . Análogamente si  $a = f_\sigma(q)$  ó  $a = f_\sigma(r)$ .  $\square$

**Proposición 4.4.9.** *Sea  $a \in A$ . Si  $a$  tiene exactamente  $m$  códigos distintos con  $m > 1$ , entonces al menos uno de los elementos de  $\{p, q, r\}$  tiene exactamente  $m$  códigos.*

*Demostración.* Sean  $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^m$  los  $m$  códigos distintos de  $a$ . Si dos de estos códigos difieren en su primera cifra, entonces procediendo de manera análoga a la demostración anterior, se tendrá que  $a \in \{p, q, r\}$  y estaría demostrado lo que se quiere. En caso contrario, es decir si todos los  $m$  códigos coinciden en su primera cifra, sea  $i$  el primer índice para el cual dos de los  $m$  códigos difieren en su  $i$ -ésima cifra.

Entonces  $\alpha^1 = \sigma\alpha_i^1\alpha_{i+1}^1 \cdots$ ,  $\alpha^2 = \sigma\alpha_i^2\alpha_{i+1}^2 \cdots$ ,  $\alpha^m = \sigma\alpha_i^m\alpha_{i+1}^m \cdots$ , donde  $\sigma$  es el código finito formado por las  $i - 1$  primeras cifras comunes a todos los códigos. De nuevo razonando como en la demostración de la proposición anterior, obtendremos que  $a \in \{f_\sigma(p), f_\sigma(q), f_\sigma(r)\}$ .

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $a = f_\sigma(p)$  y probemos que en este caso,  $p$  tiene exactamente  $m$  códigos. Si  $p$  tuviese más de  $m$  códigos, entonces cada uno de ellos, al anteponerle  $\sigma$ , sería un código de  $a$ , lo cual contradice la hipótesis. De esta forma  $p$  **no** puede tener más de  $m$  códigos.

Por otra parte,

$$a = \varphi(\alpha^1) = \varphi(\alpha^2) = \cdots = \varphi(\alpha^m),$$

es decir

$$\begin{aligned} a &= \varphi(\sigma\alpha_i^1\alpha_{i+1}^1 \cdots) = \varphi(\sigma\alpha_i^2\alpha_{i+1}^2 \cdots) = \cdots = \varphi(\sigma\alpha_i^m\alpha_{i+1}^m \cdots) \\ f_\sigma(p) &= a = f_\sigma(\varphi(\alpha_i^1\alpha_{i+1}^1 \cdots)) = f_\sigma(\varphi(\alpha_i^2\alpha_{i+1}^2 \cdots)) = \cdots = f_\sigma(\varphi(\alpha_i^m\alpha_{i+1}^m \cdots)) \end{aligned}$$

Como  $f_\sigma$  es inyectiva (compuesta de inyectivas), se tiene:

$$p = \varphi(\alpha^{1'}) = \varphi(\alpha^{2'}) = \cdots = \varphi(\alpha^{m'}),$$

donde  $\alpha^{1'} = \alpha_i^1\alpha_{i+1}^1 \cdots$ ,  $\alpha^{2'} = \alpha_i^2\alpha_{i+1}^2 \cdots$ ,  $\cdots$ ,  $\alpha^{m'} = \alpha_i^m\alpha_{i+1}^m \cdots$  son distintos dos a dos. De esta forma se concluye que  $p$  tiene exactamente  $m$  códigos distintos.  $\square$

**Definición 4.4.10.** Sea  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  el espacio de códigos asociado al SIF triangular  $\{X; f_1, f_2, f_3\}$ . Se define en  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  la relación “ $\simeq$ ” por:  $\alpha \simeq \beta$  si y solo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- (i)  $\alpha = \beta$ ;
- (ii)  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = f_\sigma(p)$ ;
- (iii)  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = f_\sigma(q)$ ;
- (iv)  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = f_\sigma(r)$ ,

para algún  $\sigma \in \Sigma^* \cup \{\lambda\}$  ( $\lambda$  es el “código vacío”, es decir sin cifras de modo que  $f_\lambda = id$ ).

Recordemos ahora<sup>3</sup> que la función de direccionamiento  $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow A$  es continua, sobre y cerrada, entonces es una función de cociente, de modo que  $A$  es un cociente topológico de  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  (ver las observaciones hechas después de la Definición 4.3.6). Además es sabido que en este caso la relación de equivalencia  $\sim$  sobre  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  que determina el espacio cociente está dada por:

$$\alpha \sim \beta \quad \text{si y solo si} \quad \varphi(\alpha) = \varphi(\beta).$$

---

<sup>3</sup>Para estudiantes que han visto un curso de topología.

De esta manera los espacios  $\Sigma^{\mathbb{N}}/\sim$  y  $A$  son homeomorfos, lo cual notamos:  $\Sigma^{\mathbb{N}}/\sim \cong A$ .

**Nota:** Lo anterior es válido para **cualquier** SIF, no solo para los triangulares.

Veamos ahora que en el caso de los SIF's triangulares, las relaciones  $\simeq$  y  $\sim$  coinciden.

**Proposición 4.4.11.** *Para  $\alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  se tiene:*

$$\alpha \sim \beta \quad \text{si y solo si} \quad \alpha \simeq \beta.$$

*Demostración.* Si  $\alpha = \beta$  entonces  $\alpha \simeq \beta$ . Si  $\alpha \neq \beta$ , tenemos

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = a \in A,$$

de modo que  $a$  tiene más de un código, entonces usamos la Proposición 4.4.8 para afirmar que  $a \in \{p, q, r, f_\sigma(p), f_\sigma(q), f_\sigma(r)\}$  para algún  $\sigma \in \Sigma^*$ . Así  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) \in \{p, q, r, f_\sigma(p), f_\sigma(q), f_\sigma(r)\}$ , concluyendo, por la definición de  $\simeq$ , que  $\alpha \simeq \beta$ .

Recíprocamente, supongamos  $\alpha \simeq \beta$ . En cualquiera de los cuatro casos de la Definición 4.4.10, y por la definición de  $\sim$ , se obtiene de manera inmediata que  $\alpha \sim \beta$ .  $\square$

**Proposición 4.4.12.** *Sean  $\{X; f_1, f_2, f_3\}$  y  $\{Y; g_1, g_2, g_3\}$  dos SIF's triangulares de intersecciones  $\{p, q, r\}$ ,  $\{p', q', r'\}$  y atractores  $A$  y  $A'$  respectivamente, tales que para toda  $\sigma \in \Sigma^* \cup \{\lambda\}$  se tiene:*

- (i)  $f_\sigma(p)$  y  $g_\sigma(p')$  tienen exactamente los mismos códigos;
- (ii)  $f_\sigma(q)$  y  $g_\sigma(q')$  tienen exactamente los mismos códigos;
- (iii)  $f_\sigma(r)$  y  $g_\sigma(r')$  tienen exactamente los mismos códigos.

*Entonces  $A$  y  $A'$  son homeomorfos.*

*Demostración.* Por la Proposición 4.4.11 tenemos:  $\forall \alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ ,

$$\alpha \sim_A \beta \quad \text{si y solo si} \quad \alpha \simeq_A \beta,$$

lo cual significa, por la definición de  $\simeq_A$ , que  $\alpha = \beta$ , ó,  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = f_\sigma(p)$ , ó,  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = f_\sigma(q)$ , ó,  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = f_\sigma(r)$ , para alguna  $\sigma \in \Sigma^* \cup \{\lambda\}$ . Si  $\alpha = \beta$  es claro que  $\alpha \sim_{A'} \beta$ .

Si  $\alpha \neq \beta$ , supongamos  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = f_\sigma(p)$ . Entonces  $\alpha$  y  $\beta$  son códigos de  $f_\sigma(p)$  y por la hipótesis (i),  $\alpha$  y  $\beta$  son códigos de  $g_\sigma(p')$ , es decir  $\varphi'(\alpha) = \varphi'(\beta) = g_\sigma(p')$  ( $\varphi'$  es la función de direccionamiento para el atractor  $A'$ ). Según la Definición 4.4.10 se tiene entonces que

$\alpha \simeq_{A'} \beta$ , luego  $\alpha \sim_{A'} \beta$ . De manera parecida se prueba que si  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = f_\sigma(q)$  o si  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = f_\sigma(r)$ , en cualquiera de los dos casos se obtendrá  $\alpha \sim_{A'} \beta$ .

Recíprocamente, si  $\alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  y  $\alpha \sim_{A'} \beta$  entonces  $\alpha \simeq_{A'} \beta$ , es decir:  $\alpha = \beta$ , ó,  $\varphi'(\alpha) = \varphi'(\beta) = g_\sigma(p')$ , ó,  $\varphi'(\alpha) = \varphi'(\beta) = g_\sigma(q')$ , ó,  $\varphi'(\alpha) = \varphi'(\beta) = g_\sigma(r')$  y en cualquier caso se demuestra de manera totalmente análoga a como se hizo antes, que  $\alpha \sim_A \beta$ .

Se ha demostrado que las relaciones  $\sim_A$  y  $\sim_{A'}$  son iguales en  $\Sigma^{\mathbb{N}}$ , de modo que  $\Sigma^{\mathbb{N}}/\sim_A = \Sigma^{\mathbb{N}}/\sim_{A'}$ , luego,

$$A \cong \Sigma^{\mathbb{N}}/\sim_A = \Sigma^{\mathbb{N}}/\sim_{A'} \cong A'.$$

□

Estamos ahora si en condiciones de demostrar la anunciada caracterización de la curva triangular de Sierpiński.

**Proposición 4.4.13.** *El triángulo de Sierpiński es el único (salvo homeomorfismos) espacio topológico que se puede obtener como el atractor  $A$  de un SIF  $\{X; f_1, f_2, f_3\}$  que cumple:*

- (i)  $f_1, f_2$  y  $f_3$  son inyectivas.
- (ii)  $f_1(A) \cap f_2(A) = \{p\}$ ,  $f_1(A) \cap f_3(A) = \{q\}$ ,  $f_2(A) \cap f_3(A) = \{r\}$  donde  $p = f_1(x_2) = f_2(x_1)$ ,  $q = f_1(x_3) = f_3(x_1)$ ,  $r = f_2(x_3) = f_3(x_2)$  son tres puntos distintos y  $x_1, x_2$  y  $x_3$  son los puntos fijos de  $f_1, f_2$  y  $f_3$  respectivamente.
- (iii)  $p, q$  y  $r$  tienen exactamente dos códigos cada uno.

*Demostración.* La demostración tiene dos partes:

I. Se probará que  $\mathcal{S}$  se puede obtener como el atractor de un SIF que satisface las condiciones (i), (ii) y (iii).

II. Se probará que si  $A$  es el atractor de un SIF que satisface (i), (ii) y (iii), entonces  $A$  es homeomorfo a  $\mathcal{S}$ .

Demostremos la primera parte.

I. Claramente el SIF  $\mathcal{S}$  definido en la ecuación (4.2) satisface (i). Fácilmente se verifica que  $x_1 = (0, 0)$ ,  $x_2 = (1, 0)$  y  $x_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  son los puntos fijos de  $w_1(z) = \frac{1}{2}z$ ,  $w_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$  y  $w_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$  respectivamente. Además se verifica:

- $w_1(x_2) = w_1(1, 0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) = w_2(0, 0) = w_2(x_1)$ ;
- $w_1(x_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = w_3(0, 0) = w_3(x_1)$ , y,

$$\blacksquare w_2(x_3) = w_2\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = w_3(1, 0) = w_3(x_2).$$

Notemos entonces  $p = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ,  $q = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$  y  $r = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ .

El Lema 4.4.3 completa la demostración de la parte (ii).

Para la parte (iii) veamos que  $p$  tiene dos códigos. Obsérvese que en este caso la función de direccionamiento es  $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{S}$  con  $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \varphi(1\bar{2}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (w_1 \circ w_2 \circ w_2 \circ \cdots \circ w_2)(x_2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} w_1(x_2), \\ &= w_1(1, 0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) = p. \end{aligned}$$

Y por otra parte:

$$\begin{aligned} \varphi(2\bar{1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (w_2 \circ w_1 \circ w_1 \circ \cdots \circ w_1)(x_1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} w_2(x_1), \\ &= w_2(0, 0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) = p. \end{aligned}$$

De esta forma  $1\bar{2}$  y  $2\bar{1}$  son códigos de  $p$ .

Análogamente

$$\begin{aligned} \varphi(1\bar{3}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (w_1 \circ w_3 \circ w_3 \circ \cdots \circ w_3)(x_3) = w_1(x_3) = q \quad y \\ \varphi(3\bar{1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (w_3 \circ w_1 \circ w_1 \circ \cdots \circ w_1)(x_1) = w_3(x_1) = q \end{aligned}$$

de modo que  $1\bar{3}$  y  $3\bar{1}$  son códigos de  $q$ . De manera similar se obtiene que  $2\bar{3}$  y  $3\bar{2}$  son códigos de  $r$ .

Falta entonces demostrar que  $p$ ,  $q$  y  $r$  no tienen más de dos códigos. Supongamos que  $p$  tiene un tercer código  $\alpha$ ,  $\alpha \neq 1\bar{2}$  y  $\alpha \neq 2\bar{1}$ . Entonces  $\alpha_1 \neq 3$ , pues si  $\alpha_1 = 3$  se tendría usando el Lema 4.3.8,  $p = \varphi(3\alpha_2\alpha_3\dots) = w_3(\varphi(\alpha_2\alpha_3\dots)) \in w_3(\mathcal{S})$  y por tanto  $p \in w_1(\mathcal{S}) \cap w_2(\mathcal{S}) \cap w_3(\mathcal{S}) = \emptyset$  lo cual es absurdo. Por tanto  $\alpha_1 = 1$  ó  $\alpha_1 = 2$ . Si  $\alpha_1 = 1$  entonces  $\varphi(1\bar{2}) = \varphi(1\alpha_2\alpha_3\dots)$  de donde  $\varphi(\bar{2}) = \varphi(\alpha_2\alpha_3\dots)$  ya que  $w_1$  es inyectiva (Lema 4.3.9). Sea  $i$  el menor índice tal que  $\alpha_i \neq 2$ , así que  $\varphi(\bar{2}) = \varphi(\alpha_i\alpha_{i+1}\dots) = t$  para algún  $t \in \mathcal{S}$ . Si  $\alpha_i = 1$ , entonces  $t \in w_1(\mathcal{S}) \cap w_2(\mathcal{S}) = \{p\}$ , luego  $t = p$ . Pero

$$\varphi(\bar{2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_2 \circ \cdots \circ w_2(1) = 1 \neq p.$$

Ahora si  $\alpha_i = 3$  entonces  $t \in w_2(\mathcal{S}) \cap w_3(\mathcal{S}) = \{q\}$ , luego  $t = q$ , pero  $\varphi(\bar{2}) = 1 \neq q$ . De esta manera es imposible que  $\alpha_1 = 1$ . Análogamente, si  $\alpha_1 = 2$  se obtiene una contradicción. Se concluye que  $p$  tiene exactamente dos códigos. La demostración de que  $q$  y  $r$  tienen exactamente dos códigos cada uno, se realiza de manera similar.

II. Sea  $A$  el atractor de un SIF  $\{X; f_1, f_2, f_3\}$  que satisface (i), (ii) y (iii). Veamos que  $A$  es homeomorfo a  $\mathcal{S}$ . Para esto basta demostrar que para toda  $\sigma \in \Sigma^* \cup \{\lambda\}$  se cumple:

- (a)  $f_\sigma(p)$  y  $w_\sigma\left(\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right)$  tienen exactamente los mismos códigos.
- (b)  $f_\sigma(q)$  y  $w_\sigma\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right)$  tienen exactamente los mismos códigos.
- (c)  $f_\sigma(r)$  y  $w_\sigma\left(\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right)$  tienen exactamente los mismos códigos.

y luego aplicar la Proposición 4.4.12.

Por la hipótesis (ii) tenemos,

$$p = f_1(x_2) = f_1 \circ f_2(x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_1 f_2 \cdots f_2(x_2) = \varphi(1\bar{2}),$$

y también

$$p = f_2(x_2) = f_2 \circ f_1(x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_2 f_1 \cdots f_1(x_2) = \varphi(2\bar{1}),$$

de modo que  $1\bar{2}$  y  $2\bar{1}$  son códigos de  $p$ , y además los **únicos** dos códigos en virtud de la hipótesis (iii).

Veamos ahora que  $\sigma 1\bar{2}$  y  $\sigma 2\bar{1}$  son los únicos códigos de  $f_\sigma(p)$ .

Tenemos:

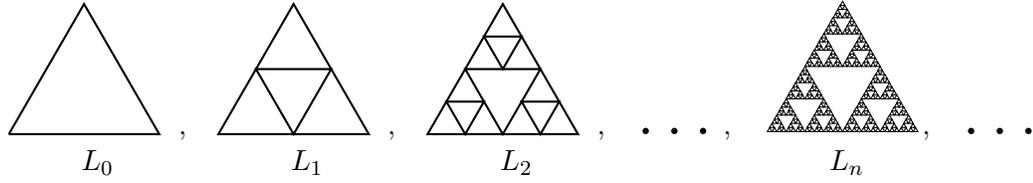
$$\varphi(\sigma 1\bar{2}) = f_\sigma(\varphi(1\bar{2})) = f_\sigma(p) \quad \text{y} \quad \varphi(\sigma 2\bar{1}) = f_\sigma(\varphi(2\bar{1})) = f_\sigma(p)$$

de modo que en efecto  $\sigma 1\bar{2}$  y  $\sigma 2\bar{1}$  son códigos de  $f_\sigma(p)$ .

Ahora si  $f_\sigma(p)$  tuviese más de dos códigos, entonces, en virtud de la Proposición 4.4.8, al menos uno de los elementos de  $\{p, q, r\}$  tiene más de dos códigos, lo cual contradice la hipótesis (iii). De manera parecida se puede demostrar que los únicos códigos de  $w_\sigma\left(\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right)$  son  $\sigma 1\bar{2}$  y  $\sigma 2\bar{1}$ ; que los únicos códigos de  $f_\sigma(q)$  y  $w_\sigma\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right)$  son  $\sigma 1\bar{3}$  y  $\sigma 3\bar{1}$ , y finalmente que los únicos códigos de  $f_\sigma(r)$  y  $w_\sigma\left(\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right)$  son  $\sigma 2\bar{3}$  y  $\sigma 3\bar{2}$ . De esta forma se obtiene (a), (b) y (c), y por tanto (Proposición 4.4.12) que  $A \cong \mathcal{S}$ .  $\square$

#### 4.4.2. $\mathcal{S}$ es mucho más de lo que parece

Observando la construcción que hacemos aquí del triángulo de Sierpiński, (Figura 4.11), podría parecer que nuestro conjunto  $\mathcal{S}$ , el atractor del SIF  $\mathbb{S}$ , está constituido **exactamente** por los puntos frontera de los conjuntos  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ , etc. Es decir, habría una “enorme tentación” a pensar que  $\mathcal{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \partial \mathcal{S}_n$ . Esta tentación incluso podría ser mayor al tomar como semilla directamente el triángulo (**no relleno**) de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ , (es decir tomar



**Figura 4.16:** La sucesión  $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ .

como semilla:  $\partial\mathcal{S}_0 = L_0$ , que claramente es también un compacto no vacío), y recordar que, según el Teorema 4.1.2, el atractor de un SIF es independiente de la semilla tomada, de modo que  $\mathcal{S}$  debe ser el límite de la sucesión  $(L_n)_{n=0}^{\infty}$  que se muestra en la Figura 4.16.

Sin embargo **es falso que**  $\mathcal{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ . Probaremos en primer lugar que en realidad  $\mathcal{S} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n}$  (lo cual implica que  $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n \subseteq \mathcal{S}$ ), y posteriormente mostraremos puntos que están en  $\mathcal{S}$  pero **no** están en  $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ .

Hay varias forma de probar que  $\mathcal{S} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n}$ . Por ejemplo bastaría observar que  $(L_n)_n$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  tal que,

$$L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \dots \subseteq L_n \subseteq \dots$$

y aplicar entonces el ejercicio 3.3.9. Otra alternativa es aplicar el ejercicio 4.6.2 al SIF  $\mathcal{S}$ , tomando  $C = L_0$ . A continuación presentamos una prueba directa de dicha igualdad.

**Proposición 4.4.14.**  $\mathcal{S} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n}$ .

*Demostración.* Sea  $\mathfrak{s} \in \mathcal{S}$ . Usando la función de direccionamiento  $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{S}$  asociada al SIF  $\mathcal{S}$ , sabemos que existe un código  $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  tal que  $\varphi(\alpha) = \mathfrak{s}$ , ( $\varphi$  es sobre, Teorema 4.3.5), de modo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_1} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x) = \mathfrak{s}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^2$ . Para probar que  $\mathfrak{s} \in \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n}$  tomemos  $\epsilon > 0$

y veamos que  $B(\mathfrak{s}; \epsilon) \cap \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n \right) \neq \emptyset$ .

Observemos que :

$$\begin{aligned} W(L_0) &= w_1(L_0) \cup w_2(L_0) \cup w_3(L_0) \\ &= \{w_1(x) \mid x \in L_0\} \cup \{w_2(x) \mid x \in L_0\} \cup \{w_3(x) \mid x \in L_0\} \\ &= \{w_i(x) \mid x \in L_0, i \in \{1, 2, 3\}\}, \\ W^{\circ 2}(L_0) &= \{w_{i_1} \circ w_{i_2}(x) \mid x \in L_0, i_1, i_2 \in \{1, 2, 3\}\}, \end{aligned}$$

y en general,  $W^{\circ n}(L_0) = \{w_{i_1} \circ \dots \circ w_{i_n}(x) \mid x \in L_0, i_1, \dots, i_n \in \{1, 2, 3\}\}$ .

Sea  $x_0 \in L_0$ . Puesto que  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_1} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x) = \mathfrak{s}$ , entonces para  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N$  entonces  $w_{\alpha_1} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x_0) \in B(\mathfrak{s}; \epsilon)$ . De esta manera tenemos que,  $\forall n \geq N$ ,

$$\begin{aligned} w_{\alpha_1} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x_0) &\in B(\mathfrak{s}; \epsilon) \cap W^{on}(L_0) = B(\mathfrak{s}; \epsilon) \cap L_n \\ &\subseteq B(\mathfrak{s}; \epsilon) \cap \left( \bigcup_{n=\infty}^{\infty} L_n \right). \end{aligned}$$

Para la otra contención demosntremos en primer lugar que  $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n \subseteq \mathcal{S}$ , es decir que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n \text{ (Definición 4.4.1).}$$

Usaremos los siguientes hechos:

- (1)  $L_n \subseteq \mathcal{S}_n$  para todo  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
- (2)  $\mathcal{S}_0 \supseteq \mathcal{S}_1 \supseteq \mathcal{S}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{S}_n \supseteq \dots$
- (3)  $L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \dots \subseteq L_n \subseteq \dots$

Sea  $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ . Existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in L_m$ . Por (3) se tiene que  $x \in L_n$ , para todo  $n \geq m$ . Por (1) se tiene que  $x \in \mathcal{S}_n$ , para todo  $n \geq m$ . Por (2) se tiene que  $x \in \mathcal{S}_n$ , para todo  $n \leq m$ . De esta manera  $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$ , con lo cual obtenemos que  $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n \subseteq \mathcal{S}$ . Recordando que  $\mathcal{S}$  es cerrado y que la adherencia de un conjunto es el “menor” cerrado que lo contiene (Ejercicio 2.9.12), concluimos que  $\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n} \subseteq \mathcal{S}$ . □

En la siguiente sección se mostrará una caracterización de la unión  $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ , lo cual nos permitirá obtener puntos de  $\mathcal{S}$  que no están en dicha unión.

### 4.4.3. Una caracterización de $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$

Notemos  $p = (0, 0)$ ,  $q = (1, 0)$  y  $r = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  los puntos fijos de las contracciones  $w_1, w_2$  y  $w_3$  respectivamente. Observemos que  $p, q$  y  $r$  son los vértices del triángulo inicial  $L_0$ . Sea  $L_{pq}$  el segmento que une  $p$  y  $q$ . Definimos  $L_{qr}$  y  $L_{pr}$  de manera análoga (Figura 4.17).

Así tenemos  $L_0 = \partial\mathcal{S}_0 = L_{pq} \cup L_{qr} \cup L_{pr}$  y  $L_n := W(L_{n-1}) = W^{on}(L_0)$ ,  $n \geq 1$ .

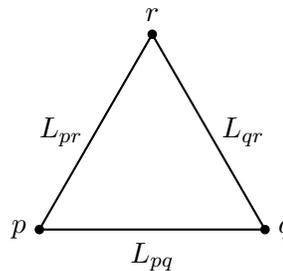


Figura 4.17: Los segmentos  $L_{pq}$ ,  $L_{qr}$  y  $L_{pr}$ .

Nuestra meta en esta sección es demostrar que  $\mathcal{S} \neq \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ , es decir que en el triángulo de Sierpiński existen puntos que no pertenecen a ningún triángulo  $L_n$ . Probaremos antes algunos lemas que necesitaremos.

Denotemos  $\Sigma_{13}$  el siguiente conjunto de códigos:

$$\Sigma_{13} := \left\{ \alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid \alpha_i \in \{1, 3\}, \forall i \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Lema 4.4.15.**  $\varphi(\Sigma_{13}) = L_{pr}$ .

*Demostración.* Sea  $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \in \Sigma_{13}$ . Como  $w_1(L_{pr}) \cup w_3(L_{pr}) = L_{pr}$ , entonces  $L_{pr}$  es el atractor del SIF  $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_3\}$ ; esto implica que para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  se cumple,

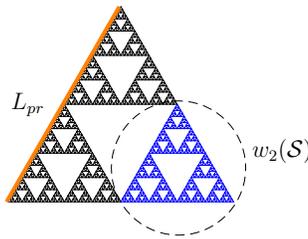
$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_1} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x) \in L_{pr},$$

de aquí que  $\varphi(\alpha) \in L_{pr}$  y por tanto  $\varphi(\Sigma_{13}) \subseteq L_{pr}$ . Para la otra contención demosetremos antes que si

$$\alpha \notin \Sigma_{13} \quad \text{entonces} \quad \varphi(\alpha) \notin L_{pr}. \quad (4.3)$$

Si  $\alpha \notin \Sigma_{13}$  es porque existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\alpha_k = 2$  de modo que

$$\varphi(\alpha_k\alpha_{k+1}\dots) = w_2(\varphi(\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\dots)) \in w_2(\mathcal{S}), \quad (\text{Lema 4.3.8})$$



**Figura 4.18:**

de donde podemos concluir que  $\varphi(\alpha_k\alpha_{k+1}\dots) \notin L_{pr}$  (véase la Figura 4.18), de lo cual se sigue que  $\varphi(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\alpha_{k+1}\dots) \notin L_{pr}$ , es decir  $\varphi(\alpha) \notin L_{pr}$ , como se quería ver.

Tomemos ahora  $x \in L_{pr}$ . Como  $\varphi$  es sobreyectiva, existe  $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  tal que  $\varphi(\alpha) = x$ , de modo que  $\varphi(\alpha) \in L_{pr}$ , usando (4.3) se concluye que  $\alpha \in \Sigma_{13}$ , donde  $x = \varphi(\alpha) \in \varphi(\Sigma_{13})$  lo cual demuestra que  $L_{pr} \subseteq \varphi(\Sigma_{13})$  que es la contención que faltaba.  $\square$

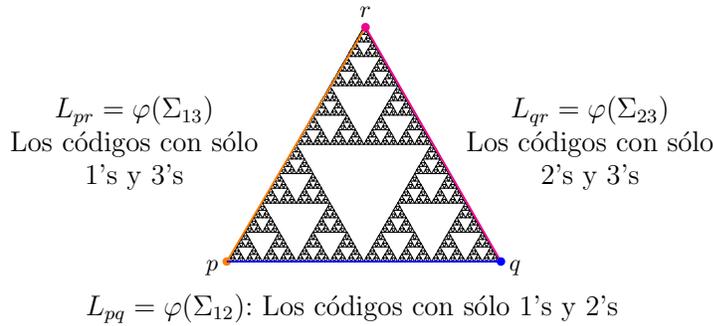
De manera análoga el lector puede demostrar (Ejercicio 4.4.10) el siguiente lema:

**Lema 4.4.16.**  $\varphi(\Sigma_{12}) = L_{pq}$  y  $\varphi(\Sigma_{23}) = L_{qr}$ .

Los dos lemas anteriores nos permiten entonces escribir el siguiente:

**Lema 4.4.17.**  $L_0 = L_{pq} \cup L_{qr} \cup L_{pr} = \varphi(\Sigma_{12}) \cup \varphi(\Sigma_{23}) \cup \varphi(\Sigma_{13})$ .

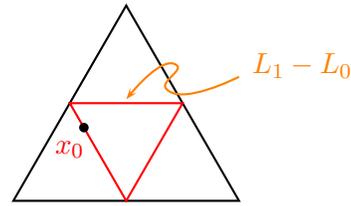
Obsérvese que lo establecido en el lema anterior es intuitivamente claro si pensamos en la “codificación” de los puntos de  $\mathcal{S}$  (véase la Figura 4.19).



**Figura 4.19:** Los códigos de  $L_{pq}$ ,  $L_{qr}$  y  $L_{pr}$ .

Ahora fijémonos en  $L_1 = W(L_0)$  que es la unión de  $L_0$  con el triángulo de vértices  $(\frac{1}{2}, 0)$ ,  $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$  y  $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ . Sea  $x_0 \in L_1 - L_0$ . Un código para  $x_0$  es de una de las siguientes tres formas:

- $\alpha = 1\beta$ , donde  $\beta \in \Sigma_{23}$
- $\alpha = 2\beta$ , donde  $\beta \in \Sigma_{13}$
- $\alpha = 3\beta$ , donde  $\beta \in \Sigma_{12}$



**Figura 4.20:** Gráfico de  $L_1 - L_0$ .

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $x_0$  es  $\alpha = 1\beta$ , con  $\beta \in \Sigma_{23}$  (véase la Figura 4.20). Como  $x_0 \in w_1(\mathcal{S})$  y  $x_0 \notin L_0$ , entonces  $x_0 \notin w_2(\mathcal{S})$  y  $x_0 \notin w_3(\mathcal{S})$ . Si  $x_0$  tuviera otro código que inicia también con 1, digamos  $1\delta$ , entonces:

$$x_0 = \varphi(1\beta) = \varphi(1\delta).$$

Puesto que  $w_1$  es inyectiva, podemos aplicar el Lema 4.3.9 y escribir:

$$\varphi(\beta) = \varphi(\delta)$$

es decir  $\beta$  y  $\delta$  son códigos del mismo punto. Como  $\beta \in \Sigma_{23}$  entonces  $\varphi(\beta) \in \varphi(\Sigma_{23}) = L_{qr}$ , luego  $\varphi(\delta) \in L_{qr}$  de donde  $\delta \in \Sigma_{23}$ .

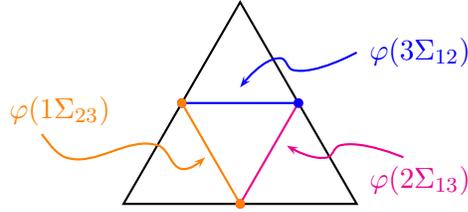
Denotemos  $1\Sigma_{23}$  el conjunto de los códigos de la forma  $1\beta$ , donde  $\beta \in \Sigma_{23}$ . Lo que se ha probado es sencillamente que los códigos de  $x_0$  necesariamente pertenecen a  $1\Sigma_{23}$ .

De manera análoga se puede probar que si  $x_0$  es  $\alpha = 2\beta$  donde  $\beta \in \Sigma_{13}$  entonces los códigos de  $x_0$  pertenecen a  $2\Sigma_{13}$  (conjunto de códigos de la forma  $2\beta, \beta \in \Sigma_{13}$ ) y que si  $x_0$  es  $\alpha = 3\beta$  donde  $\beta \in \Sigma_{12}$ , entonces los códigos de  $x_0$  pertenecen a  $3\Sigma_{12}$  (conjunto de códigos de la forma  $3\beta, \beta \in \Sigma_{12}$ ). Por tanto podemos concluir:

$$L_1 - L_0 = \varphi(1\Sigma_{23}) \cup \varphi(2\Sigma_{13}) \cup \varphi(3\Sigma_{12}).$$

(Véase la Figura 4.21).

Los razonamientos anteriores, junto con el Lema 4.4.17 nos permiten escribir lo siguiente:



**Figura 4.21:**  $L_1 - L_0 = \varphi(1\Sigma_{23}) \cup \varphi(2\Sigma_{13}) \cup \varphi(3\Sigma_{12})$ .

**Lema 4.4.18.**  $L_1 = \varphi(\Sigma_{12}) \cup \varphi(\Sigma_{23}) \cup \varphi(\Sigma_{13}) \cup \varphi(1\Sigma_{23}) \cup \varphi(2\Sigma_{13}) \cup \varphi(3\Sigma_{12})$ .

Procediendo inductivamente, y con cuidado se concluye que si  $x_0 \in L_n$  entonces los códigos de  $x_0$  son de la forma:

$$\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k\beta, \quad \text{donde } \beta \in \Sigma_{12} \cup \Sigma_{23} \cup \Sigma_{13} \quad (4.4)$$

para algún  $k \in \mathbb{N}$  y donde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \{1, 2, 3\}$ .

Recíprocamente si un código de  $x_0$  es de la forma (4.4), se tendrá:

$$x_0 = \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k\beta) = w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \dots \circ w_{\alpha_k}(\varphi(\beta)) \in F^{\circ k}(L_0) = L_k.$$

Expresándolo en palabras lo que hemos demostrado es que los puntos de los conjuntos  $L_n$  son aquellos cuyos códigos inician con un código finito cuyas cifras son 1, 2 o 3 ( $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k$ ), y luego sigue una “cola” en la cual solamente aparecen dos cifras: ó, 1’s y 2’s, ó 2’s y 3’s, ó 1’s y 3’s.

Los razonamientos anteriores nos permiten finalmente escribir el resultado principal de esta sección, el cual constituye una caracterización de los puntos del conjunto  $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$  y permitirá además concluir que nuestro fractal distinguido  $\mathcal{S}$ , contiene puntos que **no** están en dicha unión, es decir habremos alcanzado la meta de esta sección la cual era probar que  $\mathcal{S} \neq \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ .

**Proposición 4.4.19.**  $x_0 \in \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$  si y sólo si cada código de  $x_0$  es de la forma

$$\alpha = \omega\beta, \quad \text{donde } \omega \in \Sigma^* \quad \text{y} \quad \beta \in \Sigma_{12} \cup \Sigma_{23} \cup \Sigma_{13}. \quad (4.5)$$

Recordemos ahora la función de direccionamiento  $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{S}$ ; ella nos indica que **para todo**  $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ ,  $\varphi(\alpha) \in \mathcal{S}$ . Claramente existen “muchos” códigos en  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  que no son de la forma (4.5), por ejemplo los siguientes:  $123123\overline{123}$ ,  $112321\overline{321}$ ,  $333111213\overline{111213}$ , (dé otros ejemplos, hay “muchísimos” más). Veamos un ejemplo haciendo un cálculo más preciso:

Sea  $x_0 = \varphi(\overline{123}) = ?$

Calculemos la composición  $w_1 \circ w_2 \circ w_3$ :

$$\begin{aligned} w_1 \circ w_2 \circ w_3(x) &= w_1 \left( w_2 \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) \right) \\ &= w_1 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) + \frac{1}{2} \right) \\ &= w_1 \left( \frac{1}{4}x + \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i \right) \\ &= \frac{1}{8}x + \frac{5}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i. \end{aligned}$$

El punto fijo de la contracción  $w_1 \circ w_2 \circ w_3$  es  $x_f = \frac{5}{14} + \frac{\sqrt{3}}{14}i$ , de modo que podemos calcular  $\varphi(\overline{123})$  como sigue:

$$\varphi(\overline{123}) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_1 \circ \dots \circ w_1 \circ w_2 \circ w_3(x_f) = \frac{5}{14} + \frac{\sqrt{3}}{14}i.$$

Por lo tanto  $x_0 = \frac{5}{14} + \frac{\sqrt{3}}{14}i$  es un punto que pertenece al triángulo de Sierpiński pero no pertenece a  $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ .

Se puede además probar (ejercicio 4.6.13) que para tal  $x_0$  podemos construir un conjunto  $B$ , denso<sup>4</sup> en  $\mathcal{S}$ , y tal que **ninguno** de sus puntos pertenece a la unión de la familia  $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ .

En realidad la curva triangular de Sierpiński es la **adherencia** de la unión de los triángulos  $L_n$ , como se estableció ya en la Proposición 4.4.14.

## 4.5. Transformaciones geométricas del atractor de un SIF en el plano

Esta sección se basa en el trabajo [31] y tiene como objetivo mostrar cómo se pueden realizar cambios en el tamaño del atractor de un SIF en el plano  $\mathbb{R}^2$ , o trasladarlo o girarlo. Para el buen entendimiento de esta sección, es importante haber desarrollado antes los Talleres 3 y 4 del capítulo 6.

Iniciaremos definiendo los conceptos de transformación de similaridad y homotecia.

### 4.5.1. Transformación de similaridad, homotecia centrada en el origen

**Definición 4.5.1.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $k \in \mathbb{R}^+$  y  $f : X \rightarrow X$  una función sobreyectiva que satisface:  $\forall x, y \in X$ ,

$$d(f(x), f(y)) = k d(x, y).$$

---

<sup>4</sup> $B$  se dice **denso** en  $\mathcal{S}$ , si para todo conjunto abierto  $O$  de  $\mathcal{S}$ ,  $O \neq \emptyset$ , se tiene que  $B \cap O \neq \emptyset$ .

Diremos entonces que  $f$  es una **transformación de similitud** con factor de escala  $k$ .

**Ejemplo 4.5.2.** La función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) := 5z$  es una transformación de similitud con factor de escala 5.

**Lema 4.5.3.** *Toda transformación de similitud es biyectiva.*

*Demostración.* Sea  $f : X \rightarrow X$  una transformación de similitud con factor de escala  $k$ . Por definición ya tenemos que  $f$  es sobreyectiva. Supongamos ahora que  $f(x) = f(y)$ . Tenemos:

$$0 = d(f(x), f(y)) = k d(x, y),$$

y puesto que  $k \neq 0$  ( $k \in \mathbb{R}^+$ ) entonces necesariamente  $d(x, y) = 0$ , es decir  $x = y$  y por tanto  $f$  es inyectiva.  $\square$

**Lema 4.5.4.** *Si  $f$  es una transformación de similitud con factor de escala  $k$ , entonces  $f^{-1}$  es una transformación de similitud con factor de escala  $\frac{1}{k}$ .*

*Demostración.* En primer lugar obsérvese que por el lema anterior se tiene que en efecto existe la función inversa  $f^{-1} : X \rightarrow X$  definida por  $f^{-1}(y) = x$  si y sólo si  $y = f(x)$ . Sean  $y_1, y_2 \in X$  y probemos que

$$d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) = \frac{1}{k} d(y_1, y_2).$$

Sean  $x_1 = f^{-1}(y_1)$  y  $x_2 = f^{-1}(y_2)$ , o equivalentemente:  $y_1 = f(x_1)$  y  $y_2 = f(x_2)$ .

Por hipótesis tenemos que

$$d(f(x_1), f(x_2)) = k d(x_1, x_2)$$

de donde

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{k} d(f(x_1), f(x_2)),$$

es decir:

$$d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) = \frac{1}{k} d(y_1, y_2). \quad \square$$

**Lema 4.5.5.** *Toda transformación de similitud es continua.*

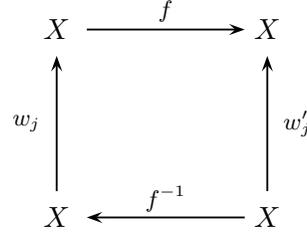
*Demostración.* Dada  $f$  transformación de similitud con factor de escala  $k$  y dado  $\varepsilon > 0$ , es inmediato que basta tomar un  $\delta < \varepsilon/k$  para obtener la continuidad de  $f$ .  $\square$

**Proposición 4.5.6.** *Sean  $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  un SIF con atractor  $\mathcal{A}$ . Si  $f : X \rightarrow X$  es una transformación de similitud entonces  $\{X; w'_1, w'_2, \dots, w'_N\}$  donde  $w'_j = f \circ w_j \circ f^{-1}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ , es un SIF con atractor  $f(\mathcal{A})$ .*

*Demostración.* En primer lugar se debe demostrar que cada  $w'_j$  es una contracción en  $X$ . Para simplificar un poco la notación escribiremos  $fw_jf^{-1}$  en vez de  $f \circ w_j \circ f^{-1}$ . Por hipótesis existen  $r \in [0, 1)$  y  $k \in \mathbb{R}^+$  factor de contracción y factor de escala de  $w_j$  y  $f$  respectivamente.

Sean  $x, y \in X$ . Tenemos

$$\begin{aligned} d(w'_j(x), w'_j(y)) &= d(fw_jf^{-1}(x), fw_jf^{-1}(y)) \\ &= k \cdot d(w_jf^{-1}(x), w_jf^{-1}(y)) \\ &\leq k \cdot r \cdot d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \\ &= k \cdot r \cdot \frac{1}{k}d(x, y) = r \cdot d(x, y). \end{aligned}$$



De esta manera  $w'_j$  es una contracción (con el mismo factor de contracción de  $w_j$ ). Ahora debemos demostrar que  $f(A)$  es el punto fijo de la contracción  $W' : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  definida por  $W'(K) := \bigcup_{j=1}^N w'_j(K)$ ,  $\forall K \in \mathcal{H}(X)$ .

Veamos:

$$\begin{aligned} W'(f(A)) &= w'_1(f(A)) \cup w'_2(f(A)) \cup \dots \cup w'_N(f(A)) \\ &= fw_1f^{-1}(f(A)) \cup fw_2f^{-1}(f(A)) \cup \dots \cup fw_Nf^{-1}(f(A)) \\ &= fw_1(A) \cup fw_2(A) \cup \dots \cup fw_N(A) \\ &= f(w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_N(A)) \\ &= f(W(A)) = f(A). \end{aligned} \quad \square$$

**Ejemplo 4.5.7.** Consideremos el SIF  $\{\mathbb{R}; w_1, w_2\}$  donde  $w_1(x) = \frac{1}{3}x$ ,  $w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ , cuyo atractor, como ya sabemos es el conjunto de Cantor  $\mathcal{C}$ . Tomemos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 4x + 1$ . Fácilmente se comprueba que  $f$  es una transformación de similaridad con factor de escala 4 y que  $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

$$w'_1(x) = fw_1f^{-1}(x) = fw_1\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{12}x - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

y

$$w'_2(x) = fw_2f^{-1}(x) = fw_2\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{12}x + \frac{7}{12}\right) = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}.$$

De modo que el “nuevo” SIF:  $\{\mathbb{R}; \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}\}$  tiene como atractor  $\mathcal{A} = f(\mathcal{C})$  que es una copia ampliada (con factor de ampliación 4) de  $\mathcal{C}$  y desplazada una unidad hacia la derecha (ver Figuras 4.22 y 4.23).

Ahora nos dedicaremos a trabajar exclusivamente en el plano  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 4.5.8** (Homotecia centrada en el origen). Sea  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Llamamos **homotecia de centro  $\mathbf{0} = (0, 0)$  y razón  $k$** , la transformación geométrica dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{h} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{h}(\mathbf{x}) := k\mathbf{x} \end{aligned}$$



**Figura 4.23:** Atractor del SIF  $\{\mathbb{R}; \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}\}$ .

**Lema 4.5.9.** *Toda homotecia de centro  $\mathbf{0}$  es una transformación de similaridad.*

*Demostración.* Para todo par  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  se tiene:

$$\begin{aligned} d_u(\mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{h}(\mathbf{y})) &= \|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{y})\| \\ &= \|k\mathbf{x} - k\mathbf{y}\| \\ &= |k| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \\ &= |k| \cdot d_u(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned}$$

de modo que  $\mathbf{h}$  es una transformación de similaridad con factor de escala  $|k|$ . □

Una transformación afín en el plano es una función  $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida de la forma

$$\omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\text{Notación cartesiana}} = \underbrace{\begin{pmatrix} r \cos \theta & -s \sin \phi \\ r \sin \theta & s \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\text{Notación geométrica}}.$$

(Recuerde los conceptos definidos en los Talleres 3 y 4 del capítulo 6).

En lo que sigue consideraremos solamente sistemas iterados de funciones en el plano, cuyas contracciones son transformaciones afines y si  $w_j$  es una de las transformaciones del SIF, notaremos  $M_j$  su matriz, es decir:

$$w_j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix}.$$

**Proposición 4.5.10.** *Sea  $\{\mathbb{R}^2; w_1, \dots, w_N\}$  un SIF con atractor  $\mathcal{A}$ ,*

$$w_j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, N$$

*y  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una homotecia de centro  $\mathbf{0}$  y razón  $k$ . Entonces  $\{\mathbb{R}^2; w'_1, \dots, w'_N\}$  es un SIF con atractor  $\mathbf{h}(\mathcal{A})$  donde:*

$$w'_j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, N.$$

*Demostración.* Por el Lema 4.5.9 y la Proposición 4.5.6 podemos garantizar que si  $g_j := \mathbf{h}w_j\mathbf{h}^{-1}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , entonces  $\{\mathbb{R}^2; g_1, \dots, g_N\}$  es un SIF con atractor  $\mathbf{h}(\mathcal{A})$ . Probemos entonces que  $g_j = w'_j$  para cada  $j = 1, \dots, N$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} g_j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \mathbf{h}w_j\mathbf{h}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{h}w_j \left( \frac{1}{k} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathbf{h} \left( M_j \left[ \frac{1}{k} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} \right) \\ &= k \frac{1}{k} M_j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} \\ &= M_j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = w'_j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

La Proposición 4.5.10 nos permite escribir la siguiente conclusión:

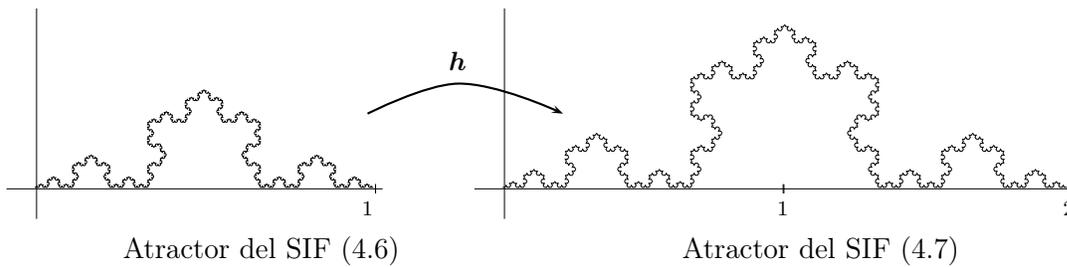
*“Para realizar una homotecia de razón  $k$  y centro el origen (dilatar o contraer), al atractor de un SIF, basta multiplicar por  $k$  los parámetros de desplazamiento de cada transformación del SIF (los demás parámetros no cambian).”*

**Ejemplo 4.5.11.** Supongamos que queremos obtener una curva de Koch cuyo tamaño sea el doble de la curva de Koch “clásica” o sea del atractor del SIF:

$$\left\{ \mathbb{R}^2; \frac{1}{3}z, \frac{1}{3}ze^{i60^\circ} + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}ze^{-i60^\circ} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i, \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \right\}. \quad (4.6)$$

La homotecia que debemos aplicar está definida por  $h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  de modo que el “nuevo” SIF que nos proporcionará la curva que queremos será:

$$\left\{ \mathbb{R}^2; \frac{1}{3}z, \frac{1}{3}ze^{i60^\circ} + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}ze^{-i60^\circ} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{1}{3}ze^{i60^\circ} + \frac{4}{3} \right\}. \quad (4.7)$$



**Figura 4.24:**

### 4.5.2. Traslado del atractor de un SIF

El objetivo ahora es desplazar el atractor de una posición original a otra posición en el plano. La siguiente proposición muestra cómo se hace esto.

**Proposición 4.5.12.** Sean  $\{\mathbb{R}^2; w_1, \dots, w_N\}$  un SIF con atractor  $\mathcal{A}$  y  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la transformación de traslado dada por:

$$f(z) := z + B, \quad B \in \mathbb{R}^2.$$

Entonces  $\{\mathbb{R}^2; w'_1, \dots, w'_N\}$  es un SIF con atractor  $f(\mathcal{A})$  donde

$$w'_j(z) = w_j(z - B) + B, \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

*Demostración.* Claramente  $f$  es sobreyectiva y

$$d(f(z), f(v)) = \|f(z) - f(v)\| = \|(z + B) - (v + B)\| = \|z - v\| = d(z, v)$$

de modo que  $f$  es una transformación de similaridad con factor de escala 1.

Sea  $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$  y calculemos para cada  $j$ ,  $f w_j f^{-1}(z)$ :

$$\begin{aligned} f w_j f^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f w_j \begin{pmatrix} x - e \\ y - f \end{pmatrix} \\ &= f \left( M_j \begin{pmatrix} x - e \\ y - f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} \right) \\ &= \left[ M_j \begin{pmatrix} x - e \\ y - f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\ &= w_j(z - B) + B = w'_j(z). \end{aligned}$$

De esta manera, usando nuevamente la Proposición 4.5.6 se obtiene el resultado. □

Obsérvese que

$$\begin{aligned} w_j(z - B) + B &= M_j \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\ &= M_j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} - M_j \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\ &= w_j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - M_j B + B. \end{aligned}$$

Por lo tanto la conclusión quedaría como sigue:

*“Para trasladar el atractor de un SIF, según un vector de desplazamiento  $B$  (si  $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$  entonces el traslado será de  $e$  “unidades” en sentido horizontal y  $f$  en el sentido vertical), se resta a cada contracción el producto  $M_j B$  y se suma  $B$ ”.*

**Ejemplo 4.5.13.** Desplacemos el triángulo de Sierpiński 3 unidades hacia la derecha y 2 hacia abajo. Nuestro SIF original es:

$$\left\{ \mathbb{R}^2; \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right\}. \tag{4.8}$$

Las contracciones del nuevo SIF serán:

$$w'_1(z) = \frac{1}{2}z - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z - \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z + \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

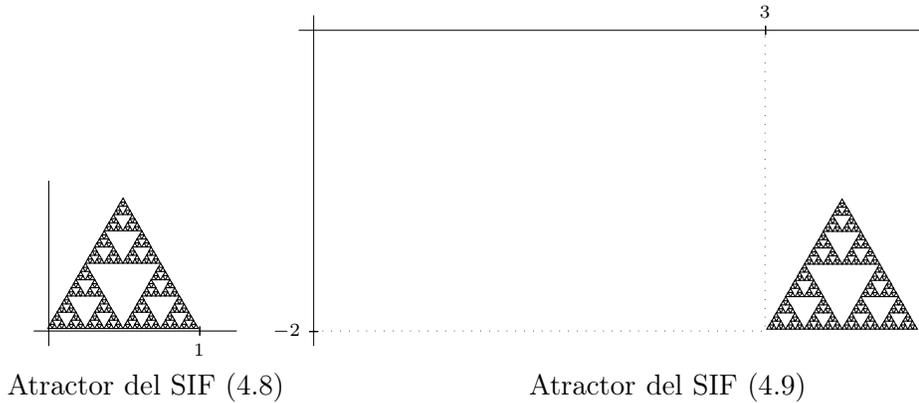
$$w'_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w'_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i + \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z + \begin{pmatrix} 7/4 \\ \sqrt{3}/4 - 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma el nuevo SIF lo podemos escribir como:

$$\left\{ \mathbb{R}^2; \frac{1}{2}z + \frac{3}{2} - i, \frac{1}{2}z + 2 - i, \frac{1}{2}z + \frac{7}{4} + \left( \frac{\sqrt{3}}{4} - 1 \right) i \right\} \tag{4.9}$$

y su atractor se muestra en la Figura 4.25.



**Figura 4.25:**

### 4.5.3. SIF rígido y rotación del atractor de un SIF rígido

En esta sección veremos cómo se giraría el atractor de un SIF cuyas contracciones son todas **similitudes directas** es decir son de la forma

$$w(z) = rze^{i\theta} + a + bi.$$

(Ver Ejemplo 2.7.2.3 y también el Taller 4: Transformaciones afines y autosemejanza – Parte II).

**Definición 4.5.14.** Un SIF  $\{\mathbb{R}^2; w_1, \dots, w_N\}$  se dirá **rígido** si sus contracciones son de la forma

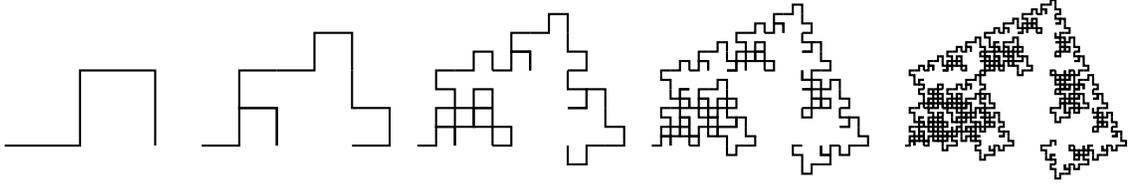
$$w_j(z) = r_j z e^{i\theta_j} + a_j + b_j i,$$

es decir, son similitudes directas.

**Ejemplo 4.5.15.** Sea

$$\left\{ \mathbb{R}^2; \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z e^{i\pi/2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{2}z e^{-i\pi/2} + 1 + \frac{1}{2}i \right\} \quad (4.10)$$

el SIF rígido cuyo atractor se obtiene al encontrar el límite de la sucesión que se aprecia en la Figura 4.26.



**Figura 4.26:** Sucesión que conduce al atractor del SIF (4.10).

Lo que ahora se quiere es girar el atractor un determinado ángulo  $\alpha$ .

**Proposición 4.5.16.** Sea  $\{\mathbb{R}^2; w_1, \dots, w_N\}$  un SIF rígido con atractor  $\mathcal{A}$ , y  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la transformación de rotación definida por:  $f(z) := z e^{i\alpha}$ . Entonces  $\{\mathbb{R}^2; w'_1, \dots, w'_N\}$  es un SIF con atractor  $f(\mathcal{A})$  donde:

$$w'_j(z) = r_j z e^{i\theta_j} + (a_j + b_j i) e^{i\alpha}, \quad j = 1, \dots, N.$$

*Demostración.* Nótese que  $f$  es sobreyectiva con inversa  $f^{-1}(z) = z e^{-i\alpha}$ . Además:

$$\begin{aligned} d(f(z), f(v)) &= \left\| z e^{-i\alpha} - v e^{-i\alpha} \right\| \\ &= \left\| e^{-i\alpha} \right\| \cdot \|z - v\| = \|z - v\| = d(z, v), \end{aligned}$$

de modo que  $f$  es una transformación de similitud con factor de escala 1. Podemos aplicar entonces la Proposición 4.5.6; veamos quién es  $f w_j f^{-1}$ :

$$\begin{aligned} f w_j f^{-1}(z) &= f w_j \left( z e^{-i\alpha} \right) = f \left( r_j z e^{-i\alpha} e^{i\theta_j} + a_j + b_j i \right) \\ &= \left( r_j z e^{-i\alpha} e^{i\theta_j} + a_j + b_j i \right) e^{i\alpha} \\ &= r_j z e^{i\theta_j} + (a_j + b_j i) e^{i\alpha} = w'_j(z). \quad \square \end{aligned}$$

**Conclusión:** “Para girar el atractor de un SIF rígido, un ángulo  $\alpha$ , se multiplican los parámetros de desplazamiento de cada contracción, por el giro  $e^{i\alpha}$ .”

**Ejemplo 4.5.17.** Giremos el atractor del SIF del Ejemplo 4.5.15, un ángulo de  $45^\circ$ . El SIF original es:

$$\left\{ \mathbb{R}^2; \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}ze^{i\pi/2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{2}ze^{-i\pi/2} + 1 + \frac{1}{2}i \right\}.$$

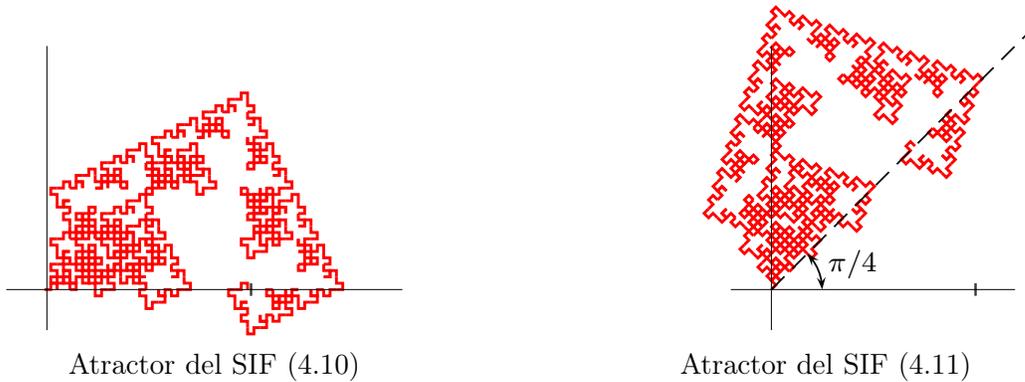
Las contracciones del nuevo SIF serán:

$$\begin{aligned} w'_1(z) &= \frac{1}{2}z + 0e^{i\pi/4} = \frac{1}{2}z \\ w'_2(z) &= \frac{1}{2}ze^{i\pi/2} + \frac{1}{2}e^{i\pi/4} = \frac{1}{2}ze^{i\pi/2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i \\ w'_3(z) &= \frac{1}{2}z + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)e^{i\pi/4} = \frac{1}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ w'_4(z) &= \frac{1}{2}ze^{-i\pi/2} + \left(1 + \frac{1}{2}i\right)e^{i\pi/4} = -\frac{1}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{2}i \end{aligned}$$

Por tanto el nuevo SIF es:

$$\left\{ \mathbb{R}^2; \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i, \frac{1}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{1}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2}i \right\} \tag{4.11}$$

y su atractor se muestra en la Figura 4.27.



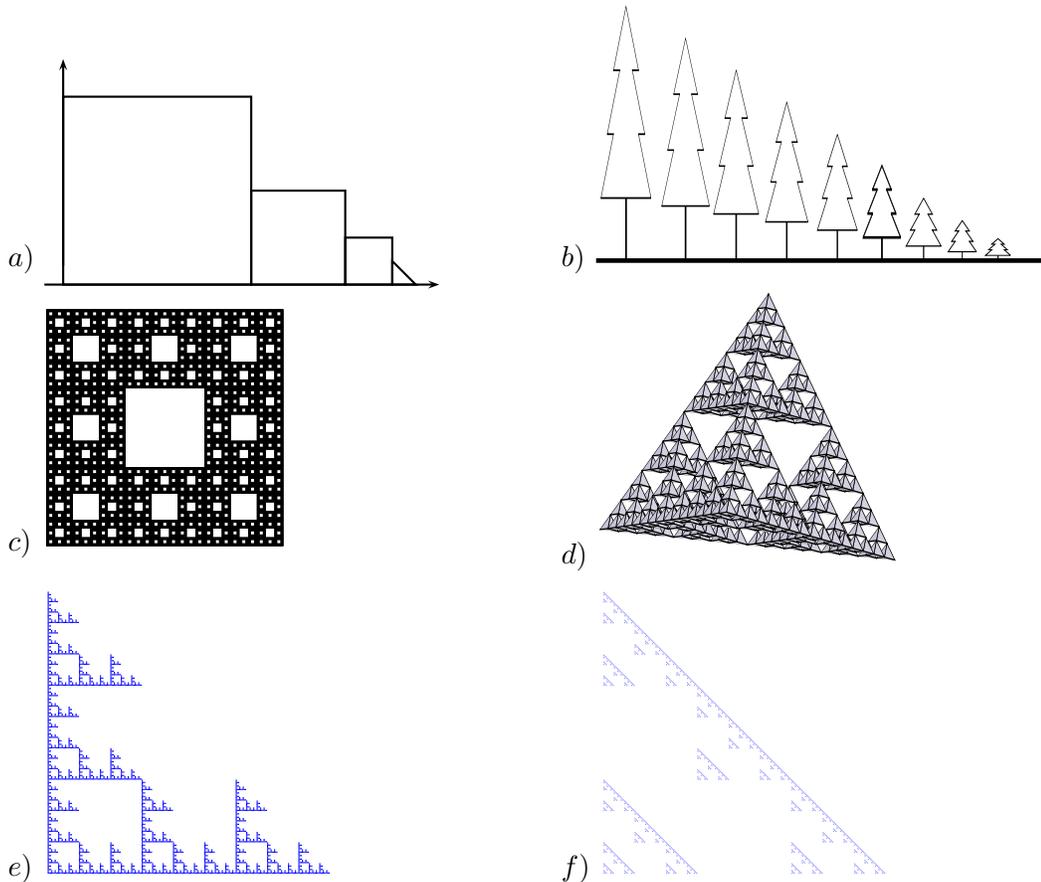
**Figura 4.27:**

## 4.6. Ejercicios

- ¿La inyectividad de las contracciones de un SIF  $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ , implica la inyectividad de  $F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  definida por:  $F(K) := \bigcup_{i=1}^N f_i(K)$ ?
- Sean  $\{X; f_1, \dots, f_N\}$  un SIF con atractor  $A$  y  $F$  la función definida en el Teorema 4.1.2. Demuestre que para cualesquier  $C \subseteq A \subseteq D$ ,  $C, D \in \mathcal{H}(X)$  se cumple:

$$A = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{\circ n}(C)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} F^{\circ n}(D).$$

3. Considere un SIF de la forma  $\{X; f\}$ . Demuestre que el atractor de este SIF es  $A = \{x_0\}$  donde  $x_0$  es el punto fijo de  $f$ .
4. Determine el atractor de cada uno de los siguientes SIF's:
- $\{\mathbb{R}; \frac{2}{3}x, 1\}$ .
  - $\{\mathbb{R}^2; \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\}$ .
  - $\{\mathbb{R}^2; C, \frac{1}{2}z + 1\}$ , donde  $C$  es el conjunto de condensación determinado por el triángulo "relleno" de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$ .
  - $\{\mathbb{R}^2; \frac{1}{3}z, \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}; \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}; \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}i; \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}i\}$ .
  - $\{\mathbb{R}; \frac{1}{3}x, -\frac{1}{3}x + 1\}$ .
5. Para cada figura determine un SIF (podría ser con condensación) que la genere:



6. Demuestre que el intervalo cerrado  $I = [0, 1]$  y el cuadrado  $I \times I$  son conjuntos autosemejantes.
7. Para el ejemplo 4.3.7.1, (el espacio de Cantor), determine el conjunto de direcciones de cada uno de los siguiente puntos:  $0$ ,  $1$ ,  $2/3$  y  $7/9$ . ¿Cuántas direcciones tiene cada punto?

8. Para el ejemplo 4.3.7.2, (la curva de Koch), determine el conjunto de direcciones de cada uno de los siguientes puntos:  $(0, 0)$ ,  $(1/3, 0)$ ,  $(1/4, 0)$ ,  $(1/2, \sqrt{3}/6)$  y  $(1, 0)$ .
9. Justifique mediante ejemplos la siguiente afirmación: si en un SIF eliminamos una contracción, entonces el atractor del SIF puede cambiar “drásticamente”.
10. Demuestre el Lema 4.4.16.
11. Verifique que el SIF  $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$  donde

$$\begin{aligned} f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

es un SIF triangular.

12. Caracterice los códigos de los puntos del triángulo de Sierpiński que no pertenecen a  $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$  (Sugerencia: use la Proposición 4.4.19).
13. Tome el punto  $x_0 = \frac{5}{14} + \frac{\sqrt{3}}{14}i$  y demuestre que el conjunto

$$B := \bigcup_{n=1}^{\infty} W^{on}(\{x_0\})$$

es denso en el triángulo de Sierpiński  $\mathcal{S}$ .

14. Determine un SIF cuyo atractor sea:
- Una curva de Koch girada  $60^\circ$
  - Una carpeta de Sierpiński de lado  $\frac{1}{2}$ .
  - Un conjunto de Cantor cuyos extremos sean los puntos de coordenadas  $(-2, 1)$  y  $(-1, 1)$ .
  - Un triángulo de Sierpiński de lado 2 y girado un ángulo de  $-90^\circ$ .
  - El segmento de extremos  $(2, 1)$  y  $(2 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ .
  - Un triángulo de Sierpiński cuyos vértices estén en los puntos  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(1, 2)$ .
15. Enuncie y demuestre una proposición que establezca cómo reflejar con respecto al origen el atractor de un SIF de la forma  $\{\mathbb{R}^2; w_1, \dots, w_N\}$  cuyas contracciones son transformaciones afines. Ilustre con un ejemplo.



## Capítulo 5

# Breve visita a los sistemas dinámicos discretos

Para obtener un sistema dinámico discreto necesitamos tan sólo dos ingredientes.

El primero es un espacio métrico,  $X$ .

En este capítulo nos interesamos de manera especial en el conjunto de los números reales,  $X = \mathbb{R}$ , en el plano,  $X = \mathbb{R}^2$ , y en subconjuntos de ellos. La métrica en el conjunto  $X$  la denotaremos con la letra  $d$ . Si  $X = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{R}^2$ , la distancia entre dos de sus puntos,  $x$  y  $y$ , la expresamos así:  $|x - y|$ .

El segundo ingrediente es una función continua del espacio  $X$  en sí mismo,  $f : X \rightarrow X$ .

Una vez que tenemos estos ingredientes podemos definir, para cada punto  $x \in X$ , una sucesión de puntos en  $X$  conocida como la **órbita de  $x$  bajo  $f$** ,

$$o(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\}.$$

Aquí el símbolo  $f^n$  representa una función de  $X$  en sí mismo:  $f^0$  es la función identidad,  $f^1 = f$ ,  $f^2 = f \circ f$ ,  $f^3 = f \circ f \circ f$ , y así sucesivamente<sup>1</sup>.

La interpretación que le damos a la sucesión  $o(x, f)$  es la siguiente: en el tiempo  $t = 0$  un objeto se encuentra en la posición  $x$ ; en el tiempo  $t = 1$  el objeto ha cambiado de posición y ahora se encuentra en  $f(x)$ ; en el tiempo  $t = 2$  el objeto vuelve a cambiar de posición y se encuentra en  $f(f(x)) = f^2(x)$ ; etcétera.

Posiciones:	$x$	$f(x)$	$f^2(x)$	$\dots$	$f^n(x)$	$\dots$
Tiempos:	0	1	2	$\dots$	$n$	$\dots$

Desde este punto de vista la pareja  $X$  y  $f$  nos da un modelo matemático del movimiento. Esto es, nos da un **sistema dinámico discreto**. La palabra discreto se refiere a que conocemos la

---

<sup>1</sup>En adelante  $f^n(x)$  denotará la composición de  $f(x)$   $n$  veces, es decir  $f^n(x) \equiv f^{\circ n}(x)$ .

posición del objeto que se mueve sólo cuando el tiempo asume un valor entero mayor o igual a cero.

La meta es estudiar todas las posibles sucesiones  $o(x, f)$ . De manera muy especial nos interesa su comportamiento cuando  $n$  tiende a  $\infty$ .

Antes de presentar al lector las definiciones y los resultados iniciales de la dinámica discreta es claro que tenemos que hacernos la siguiente pregunta: ¿cómo aparecen los conjuntos fractales en un sistema dinámico discreto?

A lo largo de este capítulo presentaremos ejemplos donde se muestra la relación entre fractales y dinámica discreta. La idea central en todos estos ejemplos es la siguiente: para cada  $f : X \rightarrow X$  existe un subconjunto de  $X$ , digamos  $B$ , invariante bajo  $f$ ,  $f(B) = B$ , donde la dinámica de  $f$  tiene su parte más interesante. En los puntos  $x$  que no están en  $B$  el comportamiento de su órbita es fácil de entender, pero si  $x$  está en  $B$  entonces la  $o(x, f)$  no se comporta de manera sencilla. Lo interesante es que muchas veces este conjunto  $B$  es un fractal. Es decir, con cierta frecuencia se nos presenta que un conjunto fractal es el lugar donde la parte complicada e interesante de la dinámica de  $f$  sucede.

De aquí en adelante todas las funciones consideradas en este capítulo son funciones continuas. Las letras  $X, Y, \dots$ , representan espacios métricos. La letra  $\mathbb{N}$  representa el conjunto de los números naturales, es decir, el conjunto de los enteros positivos.

El núcleo de este capítulo son los ejemplos. Las definiciones, los lemas, las proposiciones y los teoremas irán apareciendo en el momento en que nos ayuden a entender mejor las propiedades dinámicas del ejemplo que estemos tratando. A veces a la mitad misma de un ejemplo nos desviaremos para demostrar una proposición o un lema y, luego, regresaremos nuevamente al ejemplo para aplicar inmediatamente lo que nos dice ese resultado.

Los ejercicios forman la última sección de este capítulo. A pesar de esto, el lector no debe esperar hasta haber leído todas las secciones previas para intentar su solución. En varios lugares a lo largo del capítulo haremos sugerencias al lector sobre los ejercicios que se pueden ir intentando. Parte importante de la teoría se encuentra en los ejercicios.

## 5.1. Dinámica de las funciones lineales en $\mathbb{R}$

Iniciamos con el estudio de las propiedades dinámicas de las funciones lineales definidas en la recta real. Para explicar completamente la dinámica de estas funciones solamente necesitamos dos conceptos: punto fijo y punto periódico.

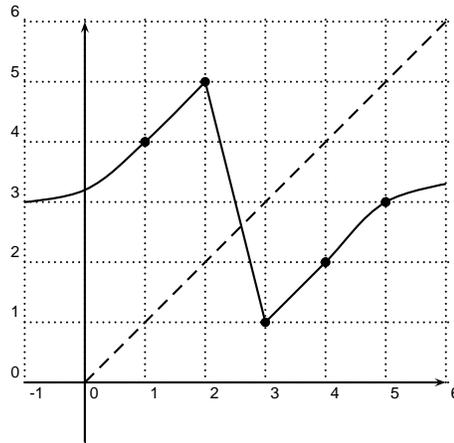
Recordemos que  $x_0 \in X$  es **punto fijo de  $f$**  si  $f(x_0) = x_0$ . En este caso la órbita de  $x_0$  bajo  $f$  es  $o(x_0, f) = \{x_0, x_0, \dots\} = \{x_0\}$ . Es claro, además, que cuando  $n$  crece la  $o(x_0, f)$  tiende a  $x_0$ .

**Definición 5.1.1.** Sean  $f : X \rightarrow X$  y  $x_0 \in X$ . Decimos que  $x_0$  es un **punto periódico de  $f$**  si existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $f^N(x_0) = x_0$ . Al conjunto de todos los puntos periódicos de  $f$  lo denotamos con  $\text{Per}(f)$ .

**Definición 5.1.2.** Sea  $x_0$  un punto periódico de  $f$ . Decimos que  $x_0$  tiene **periodo  $k$**  si  $k = \min \{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) = x_0\}$ .

**Nota.** Si  $x_0$  es un punto fijo de  $f$ , entonces  $x_0 \in \text{Per}(f)$  y  $x_0$  tiene periodo 1.

En la figura 5.1 se muestra la gráfica de una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que tiene un punto periódico de periodo 5.



**Figura 5.1:** Gráfica de una  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con un punto periódico de periodo 5.

Sean  $a$  y  $b$  dos números reales fijos. Decimos que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es **lineal** o **afín** si su regla de correspondencia se expresa así:

$$f(x) = ax + b.$$

Estudiaremos en esta sección la dinámica de este tipo de funciones.

Por cada pareja de valores  $a$  y  $b$  tenemos una función lineal. Es previsible que la dinámica dependerá de estos valores.

**Caso 1.**  $a = 1$ .

La función es  $f(x) = x + b$ . Si además  $b = 0$ , entonces para todo  $x$  se tiene que  $f(x) = x$ . La función no mueve los puntos, todo  $x \in \mathbb{R}$  es punto fijo de  $f$ , y todas las órbitas son muy sencillas.

Si  $a = 1$  y  $b \neq 0$ , entonces

$$f(x) = x + b, \quad f^2(x) = x + 2b, \quad \dots, \quad f^n(x) = x + nb.$$

Si  $b > 0$ , entonces para todo punto  $x$  en  $\mathbb{R}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \infty$ .

Si, por otro lado,  $b < 0$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = -\infty$ .

Todas las órbitas tienen un comportamiento muy sencillo en el sentido de que sabemos perfectamente qué les pasa cuando  $n$  tiende a infinito.

**Caso 2.**  $a \neq 1$ .

Los puntos fijos de  $f$  cumplen la relación  $ax + b = x$ . Esta igualdad tiene una única solución,  $x_0 = \frac{b}{1-a}$ . Es decir,  $f$  tiene un único punto fijo.

Observemos además que para toda pareja de puntos  $x$  e  $y$ , se tiene que

$$|f(x) - f(y)| = |a||x - y|,$$

y, por lo tanto, para toda  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$|f^n(x) - f^n(y)| = |a|^n|x - y|.$$

Si  $|a| < 1$ , entonces  $f$  es una contracción y para todo  $x$  en  $\mathbb{R}$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \frac{b}{1-a}.$$

Si  $|a| > 1$ , entonces para todo  $x \neq \frac{b}{1-a}$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x)| = \infty.$$

En ambos subcasos la dinámica vuelve a ser muy sencilla. Existe un único punto fijo y, una de dos, o todas las órbitas convergen a él o todas, salvo la del punto fijo, tienden en valor absoluto a infinito.

Sólo resta considerar  $a = -1$ .

El punto fijo de  $f$  es  $x_0 = \frac{b}{2}$ . Para cada punto  $x$  distinto de este punto fijo se tiene que

$$f^2(x) = f(-x + b) = -(-x + b) + b = x.$$

La función  $f$  mueve el punto  $x$  a una posición distinta, pero al volver aplicar  $f$  esta función regresa al punto a su lugar original. Es decir, al aplicar  $f$  una y otra vez lo que se está creando es un movimiento de ida y vuelta, un movimiento periódico.

Tenemos, entonces, que si  $a = -1$ ,  $f$  tiene un único punto fijo y todos los demás puntos son puntos periódicos de periodo 2. Nuevamente la dinámica que produce  $f$  es muy sencilla. Si  $x \neq \frac{b}{2}$ , entonces para toda  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $f^{2n}(x) = x$  y  $f^{2n+1}(x) = f(x)$ . La sucesión  $o(x, f)$  no converge, pero es claro que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(x) = x, \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n+1}(x) = f(x).$$

Con esto terminamos el tercer caso.

**Sugerencia.** Intentar los ejercicios 5.10.1, 5.10.2, 5.10.3, 5.10.4 y 5.10.5.

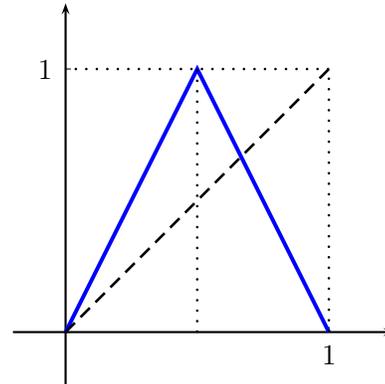
## 5.2. La dinámica se complica: la **Tienda**

La regla de correspondencia de la siguiente función está dada en dos partes. Ambas son lineales. Cada una por separado se entiende muy bien y no presenta mayor problema al estudiar su dinámica. Sin embargo, juntas provocan la aparición de fenómenos muy interesantes.

Sea  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

En la Figura 5.2 se puede ver la gráfica de la función **T**.



**Figura 5.2:** Gráfica de  $T$ .

La función  $T$  es conocida como la **Tienda**. Esta función nos acompañará de aquí en adelante. En este capítulo siempre nos referiremos a ella con la letra  $T$ .

Las siguientes propiedades de  $T$  son inmediatas:

*i*) Si  $x < 0$ , entonces  $T(x) = 2x < x$ , y para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $T^n(x) = 2^n x$ . Por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = -\infty$ .

*ii*) Si  $x > 1$ , entonces  $T(x) < 0$  y, por lo tanto, también  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = -\infty$ .

*iii*) Si  $x \in [0, 1]$ , entonces  $T(x) \in [0, 1]$ .

Estas tres propiedades nos dicen que los puntos que pueden tener una órbita interesante son los que están en el intervalo unitario  $[0, 1]$ . Observemos que  $T([0, 1]) = [0, 1]$ .

**Definición 5.2.1.** Sean  $f : X \rightarrow X$  y  $B \subset X$ . Decimos que el conjunto  $B$  es **invariante** bajo  $f$  si  $f(B) = B$ .

El conjunto  $[0, 1]$  es invariante bajo  $T$ . Si la **Tienda** tiene puntos fijos o periódicos éstos deben de estar en  $[0, 1]$ . De hecho, si  $T$  tiene algunas propiedades dinámicas distintas a las que nos presentaron las funciones lineales el lugar donde debemos buscarlas es en el intervalo  $[0, 1]$ .

Iniciemos por los puntos fijos de  $T$ . Si  $x$  es elemento del intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$  y es punto fijo de  $T$ , entonces, por un lado,  $T(x) = x$  y, por el otro,  $T(x) = 2x$ . Por lo tanto,  $2x = x$ , y así  $x = 0$ . Si  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$  y  $x$  es un punto fijo de  $T$ , entonces  $2 - 2x = x$ ,  $x = \frac{2}{3}$ . Observemos que estos puntos son los únicos dos puntos fijos de  $T$ .

**Nota.** Si  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow A$ , y  $x_0 \in A$  es un punto tal que  $f(x_0) = x_0$ , entonces  $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_0)$ . Por lo tanto este punto,  $(x_0, f(x_0))$ , se encuentra en la intersección de la gráfica de  $f$  y la diagonal  $\{(x, y) : x = y\}$ . En la Figura 5.3 se muestra la gráfica de una función con exactamente tres puntos fijos:  $x_0, x_1$  y  $x_2$ .

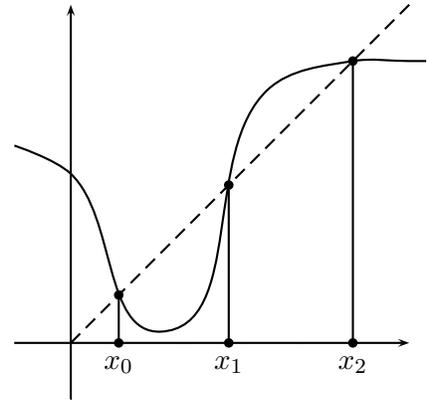
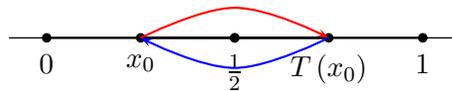


Figura 5.3: Puntos fijos de  $f$ .

Mostramos a continuación la existencia de un punto periódico de periodo 2 para la función **Tienda**.

Recordemos que los puntos fijos de  $T$  son los puntos  $0$  y  $\frac{2}{3}$ . Como  $T(\frac{1}{2}) = 1$  y  $T(1) = 0$ , entonces los puntos  $\frac{1}{2}$  y  $1$  no son puntos periódicos bajo  $T$ .

Buscamos  $x_0$  tal que  $T(x_0) \neq x_0$  y  $T^2(x_0) = x_0$ . Obsérvese que si un punto  $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$  cumple estas dos condiciones, entonces  $T(x_0) > \frac{1}{2}$  (¿por qué?).



Como  $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$ , entonces  $T(x_0) = 2x_0$ . Como  $T(x_0) \in (\frac{1}{2}, 1)$ , entonces  $T^2(x_0) = 2 - 2(2x_0)$ . Por tanto,  $T^2(x_0) = x_0$  implica  $2 - 4x_0 = x_0$ . Así  $x_0 = \frac{2}{5}$ .

Como  $T(\frac{2}{5}) = \frac{4}{5}$ , la órbita bajo  $T$  de este punto es el siguiente conjunto:

$$o\left(\frac{2}{5}, T\right) = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \dots \right\} = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{4}{5} \right\}.$$

En resumen,  $\frac{2}{5} \in \text{Per}(T)$  y su periodo es 2.

Para mostrar que  $T$  tiene un punto periódico de periodo 3 seguimos un camino similar. Supongamos que  $T^3(x_0) = x_0$  y que tanto  $x_0$  como  $T(x_0)$  están en el intervalo  $(0, \frac{1}{2})$ . Como  $\frac{1}{2} < T^2(x_0)$ , llegamos a la igualdad  $2 - 2(4x_0) = x_0$ . Así  $x_0 = \frac{2}{9}$  es un punto periódico bajo  $T$  de periodo 3. Además:

$$o\left(\frac{2}{9}, T\right) = \left\{ \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \dots \right\} = \left\{ \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9} \right\}.$$

### 5.3. Puntos periódicos y el teorema de Sharkovskii

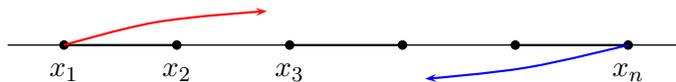
Un intervalo en  $\mathbb{R}$  es un conjunto que tiene alguna de las siguientes formas:  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $[a, b]$ ,  $(a, \infty)$ ,  $[a, \infty)$ ,  $(-\infty, b)$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $(-\infty, \infty)$ , donde  $a$  y  $b$  son dos números reales tales que  $a \leq b$ .

**Proposición 5.3.1.** Sean  $A$  un intervalo en  $\mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow A$  y  $n \geq 2$ . Si  $f$  tiene un punto periódico de periodo  $n$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo en  $A$ .

*Demostración.* Sea  $x \in A$  tal que  $x \in \text{Per}(f)$  y  $x$  tiene periodo  $n \geq 2$ . La  $o(x, f)$  tiene  $n$  elementos que podemos ordenar así:

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

Esto no quiere decir  $f(x_1) = x_2$ , sino simplemente que  $x_1$  es el mínimo de los elementos de  $o(x, f)$  y que  $x_n$  es el máximo de  $o(x, f)$ . Ver Figura 5.4.



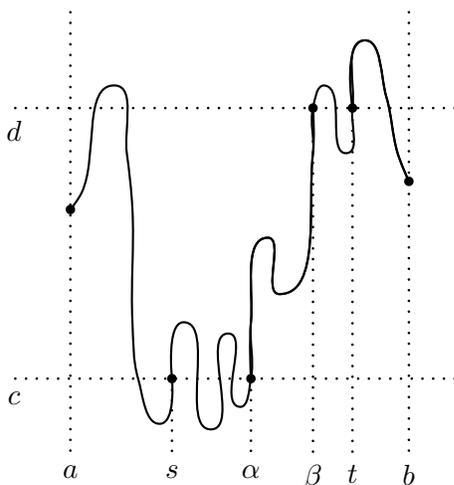
**Figura 5.4:** Órbita periódica de periodo  $n \geq 2$ .

Como  $n$  es mayor o igual a 2,  $f(x_1) > x_1$  y  $f(x_n) < x_n$ . Utilizando el teorema del valor intermedio y el hecho de que  $f$  es una función continua se sigue que  $f$  tiene un punto fijo en el intervalo  $[x_1, x_n] \subset A$ . □

Los siguientes dos lemas nos dan herramientas que nos ayudarán a encontrar puntos fijos y puntos periódicos.

**Lema 5.3.2.** Sean  $A$  y  $B$  dos intervalos en  $\mathbb{R}$  y  $f : A \rightarrow B$ . Sean  $[a, b] \subset A$  y  $[c, d] \subset B$  tales que  $f([a, b]) \supset [c, d]$ . Entonces existe un intervalo cerrado  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$  tal que  $f([\alpha, \beta]) = [c, d]$ .

*Demostración.* Sean  $s, t$  en  $[a, b]$  tales que  $f(s) = c$  y  $f(t) = d$ .



**Figura 5.5:** El intervalo  $[\alpha, \beta]$ .

**Caso 1.** Supongamos que  $s < t$ . Considere los siguientes puntos:

$$\alpha = \sup \{x \in [s, t] : f(x) = c\}$$

y

$$\beta = \inf \{x \in [\alpha, t] : f(x) = d\}.$$

Como  $f$  es continua,  $f(\alpha) = c$  y  $f(\beta) = d$ . Por la forma en que fueron definidos  $\alpha$  y  $\beta$ , y utilizando el teorema del valor intermedio, se tiene que si  $\alpha < x < \beta$ , entonces  $f(\alpha) < f(x) < f(\beta)$ . Así el intervalo  $[\alpha, \beta]$  cumple la condición deseada. Ver Figura 5.5.

**Caso 2.** La demostración para la desigualdad  $s > t$ , es análoga a la del caso anterior. □

**Lema 5.3.3.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalo cerrado y acotado.

- i) Si  $f([a, b]) \subset [a, b]$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo en  $[a, b]$ .
- ii) Si  $f([a, b]) \supset [a, b]$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo en  $[a, b]$ .

*Demostración.* i) Como  $f([a, b]) \subset [a, b]$ , entonces  $f(a) \geq a$  y  $f(b) \leq b$ . Sea  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(x) = f(x) - x$ .

La función  $h$  es continua en  $[a, b]$ . Además  $h(a) \geq 0$ ,  $h(b) \leq 0$ . Por lo tanto existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $h(x_0) = 0$ . En consecuencia,  $f(x_0) = x_0$ .

ii) Como  $f([a, b]) \supset [a, b]$ , entonces existen  $\alpha, \beta \in [a, b]$  tales que  $f(\alpha) = a$  y  $f(\beta) = b$ . Notemos que  $f(\alpha) \leq \alpha$  y  $\beta \leq f(\beta)$ . Consideramos ahora, como antes, una función auxiliar  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = f(x) - x$ . Tenemos  $h(\alpha) \leq 0$  y  $h(\beta) \geq 0$ . Por tanto, existe  $x_0 \in [\alpha, \beta]$ , o existe  $x_0 \in [\beta, \alpha]$ , tal que  $h(x_0) = 0$  y con ello,  $x_0 \in [a, b]$  y  $f(x_0) = x_0$ .  $\square$

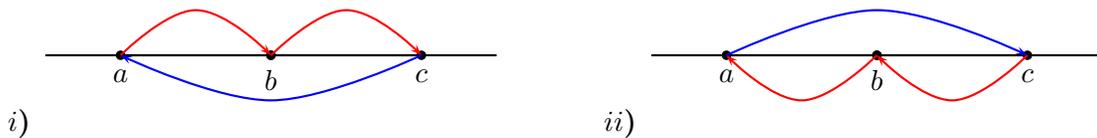
Tomemos un pequeño respiro antes de aplicar estos dos lemas.

Todos compartimos, en grados distintos, el placer de encontrar de repente algo asombroso. Las matemáticas están felizmente salpicadas, por aquí y por allá, de estas gemas que algunos afortunados han encontrado y (¡más afortunados nosotros!) nos han mostrado. El contenido de la siguiente proposición es, sin duda, uno de estos asombrosos descubrimientos.

**Proposición 5.3.4.** Sean  $A \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $f : A \rightarrow A$ . Si  $f$  tiene un punto periódico de periodo 3, entonces  $f$  tiene puntos periódicos de todos los periodos.

*Demostración.* Sea  $a \in A$ ,  $a \in \text{Per}(f)$ , de periodo 3. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $a$  es el mínimo de  $o(a, f)$  (ver Ejercicio 5.10.5).

Observemos que la órbita de  $a$  tiene dos opciones de recorrido. En el primero,  $b = f(a)$  y  $c = f^2(a)$ ; en el segundo,  $c = f(a)$  y  $b = f^2(a)$ .



Haremos la demostración para el primer caso, con la convicción de que la demostración para el otro posible recorrido de la órbita es análoga.

La Figura 5.6 puede ser de ayuda en lo que sigue.

Ya sabemos que  $f$  tiene puntos periódicos de periodos 1 y 3.

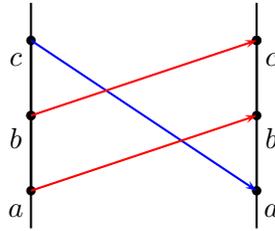


Figura 5.6: Dibujo que ayuda.

**Paso 1:** La función  $f$  tiene puntos periódicos de periodo 2.

**Demostración del Paso 1.** Como  $f([b, c])$  contiene a  $[a, b]$ , existe un intervalo cerrado  $[\alpha_1, \beta_1]$  contenido en  $[b, c]$  tal que  $f([\alpha_1, \beta_1]) = [a, b]$ . Como  $f([a, b]) \supset [b, c]$ , entonces existe otro intervalo cerrado  $[\alpha_2, \beta_2] \subset [a, b]$  tal que  $f([\alpha_2, \beta_2]) = [\alpha_1, \beta_1]$ . Así:

$$f^2([\alpha_2, \beta_2]) = [a, b].$$

Como  $[\alpha_2, \beta_2] \subset [a, b]$ , entonces  $f^2$  tiene un punto fijo en  $[\alpha_2, \beta_2]$ . Sea  $x_0 \in [\alpha_2, \beta_2]$  tal que  $f^2(x_0) = x_0$ .

Ahora, como

$$f([\alpha_2, \beta_2]) = [\alpha_1, \beta_1] \subset [b, c],$$

se tiene que  $f(x_0) \in [b, c]$ . Ya que  $b$  es de periodo 3,  $f(x_0) \neq b$ . Por lo tanto:

$$x_0 \leq \beta_2 \leq b < f(x_0),$$

y con ello,  $x_0 < f(x_0)$ . Así,  $x_0 \in \text{Per}(f)$  y su periodo es 2.

**Paso 2:** Sea  $n > 3$  (fijo). Entonces  $f$  tiene un punto periódico de periodo  $n$ .

**Demostración del Paso 2.** Análogo a lo hecho en el paso 1, existe un intervalo  $A_1 = [\alpha_1, \beta_1] \subset [b, c]$  tal que  $f([\alpha_1, \beta_1]) = [a, b]$ . Ahora como  $f([b, c])$  contiene a  $[b, c]$ , existe otro intervalo  $A_2 = [\alpha_2, \beta_2] \subset [b, c]$  tal que  $f([\alpha_2, \beta_2]) = [\alpha_1, \beta_1]$ . Siguiendo este argumento varias veces podemos encontrar  $n - 1$  subintervalos de  $[b, c]$ ,

$$A_1 = [\alpha_1, \beta_1], A_2 = [\alpha_2, \beta_2], \dots, A_{n-1} = [\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}],$$

tales que, para  $1 \leq i \leq n - 2$ ,

$$f([\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}]) = [\alpha_i, \beta_i];$$

y tales que para cada  $1 \leq i \leq n - 1$ ,

$$f^i([\alpha_i, \beta_i]) = [a, b].$$

Finalmente, como  $f([a, b]) \supset [b, c]$ , existe un último intervalo cerrado  $A_n = [\alpha_n, \beta_n]$  contenido en  $[a, b]$  tal que  $f([\alpha_n, \beta_n]) = [\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}]$ . Así,

$$f^n([\alpha_n, \beta_n]) = [a, b].$$

Por tanto, existe  $x_0 \in [\alpha_n, \beta_n]$  tal que  $f^n(x_0) = x_0$ . (Ver Figura 5.7).

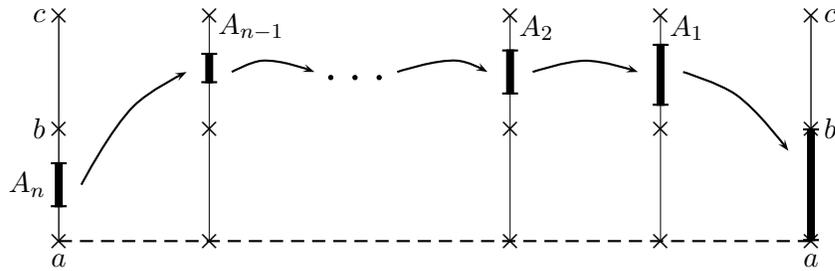


Figura 5.7:

Obsérvese que para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , se tiene que

$$f^i(x_0) \in [\alpha_{n-i}, \beta_{n-i}] \subset [b, c].$$

Ahora, si  $x_0 = f^i(x_0)$  para alguna  $i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , entonces se tendría que  $x_0 = b$ , ya que  $x_0 \leq b \leq f^i(x_0)$ . En este caso la órbita de  $x_0 = b$  tendría  $n-1$  elementos en el intervalo  $[b, c]$ , con  $n-1 \geq 3$ , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , se tiene que  $f^i(x_0) \neq x_0$ . Como  $f^n(x_0) = x_0$ , entonces  $x_0 \in \text{Per}(f)$  y tiene periodo  $n$ .  $\square$

El resultado que acabamos de demostrar es realmente muy interesante. Observe el lector que a partir de un conjunto de hipótesis muy pequeño,  $f: A \rightarrow A$  continua en el intervalo  $A$ , y  $f$  tiene un punto periódico de periodo 3, obtenemos muchísima información sobre la función  $f$ : Ella tiene puntos periódicos de todos los periodos posibles. Agreguemos que la demostración sólo utiliza herramientas que aprendemos en nuestros primeros cursos de cálculo diferencial e integral.

El resultado anterior es sólo una pequeña parte de un resultado más general obtenido en el año de 1964 por el matemático ucraniano A. N. Sharkovskii.

Presentamos a continuación lo que se conoce en nuestros días como el **teorema de Sharkovskii**.

El siguiente arreglo de los números naturales es conocido como el **orden de Sharkovskii**.

$$\begin{array}{l}
 3 \Rightarrow 5 \Rightarrow 7 \Rightarrow 9 \Rightarrow 11 \Rightarrow 13 \Rightarrow \dots \\
 2 \cdot 3 \Rightarrow 2 \cdot 5 \Rightarrow 2 \cdot 7 \Rightarrow \dots \\
 2^2 \cdot 3 \Rightarrow 2^2 \cdot 5 \Rightarrow 2^2 \cdot 7 \Rightarrow \dots \\
 2^3 \cdot 3 \Rightarrow 2^3 \cdot 5 \Rightarrow 2^3 \cdot 7 \Rightarrow \dots \\
 \vdots \\
 \dots \Rightarrow 2^4 \Rightarrow 2^3 \Rightarrow 2^2 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1
 \end{array}$$

En el primer renglón aparecen todos los números impares mayores que 1. En los siguientes renglones aparecen todos los números que se expresan como un producto de una potencia de 2 y un impar mayor que 1. En el último renglón aparecen todas las potencias de 2. En el arreglo están incluidos todos los números naturales.

**Teorema 5.3.5** (Sharkovskii, 1964). Sean  $A$  un intervalo en  $\mathbb{R}$  y sea  $f$  una función de  $A$  en  $A$ . Sean  $m$  y  $n$  dos números en  $\mathbb{N}$ . Consideremos el orden de Sharkovskii. Si  $f$  tiene un punto periódico de periodo  $m$  y sucede alguna de las siguientes dos condiciones:

- i)  $m$  está en algún renglón arriba del renglón que ocupa  $n$ , o
- ii)  $m$  y  $n$  están en el mismo renglón, pero  $m$  está a la izquierda de  $n$ ,

entonces  $f$  también tiene un punto periódico de periodo  $n$ .

No presentaremos aquí la demostración de este teorema. Gran parte de ella se puede consultar en el libro de R. L. Devaney: **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems**, ver [9].

Sabemos que la **Tienda** tiene al menos un punto periódico de periodo 3. Por tanto esta función tiene puntos periódicos de todos los periodos. Como cada órbita periódica modela o representa un movimiento periódico, entonces la función **Tienda** presenta todos los movimientos periódicos posibles, sólo hay que partir de la condición inicial adecuada.

**Sugerencia.** Intentar ejercicios 5.10.6, 5.10.7 y 5.10.9.

## 5.4. Transitividad topológica

Recordar los siguientes conceptos nos ayudará en algunos de los argumentos contenidos en esta sección.

Sea  $f : X \rightarrow Y$ . Decimos que  $f$  es: **inyectiva** si para todo par de puntos en  $X$ ,  $x \neq y$ , se tiene que  $f(x) \neq f(y)$ ; **suprayectiva** si para todo punto  $y \in Y$ , existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ ;

**biyectiva** si  $f$  es inyectiva y suprayectiva; un **homeomorfismo** si  $f$  es biyectiva y continua, y su inversa,  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  también es continua.

La riqueza dinámica presente en la **Tienda** no se limita a lo observado hasta ahora. El siguiente lema nos permitirá descubrir otras muy interesantes propiedades de esta función cuando la restringimos al intervalo unitario  $[0, 1]$ ,  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .

**Lema 5.4.1.** *Para todo  $n \in \mathbb{N}$  y para cada  $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$  se tiene que:*

$$T^n|_{\left[\frac{\ell}{2^n}, \frac{\ell+1}{2^n}\right]} : \left[\frac{\ell}{2^n}, \frac{\ell+1}{2^n}\right] \longrightarrow [0, 1] \quad (5.1)$$

es un homeomorfismo.

*Demostración.* Nuestro argumento utiliza inducción matemática.

Veamos que la afirmación es cierta para  $n = 1$ . En este caso,  $\ell \in \{0, 1\}$ .

Es inmediato que  $T : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, 1]$  es homeomorfismo, ya que en este intervalo  $T(x) = 2x$ . De manera análoga, es inmediato que  $T : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [0, 1]$  es homeomorfismo ya que en este conjunto,  $T(x) = 2 - 2x$ .

Suponemos válida la afirmación para  $n = k$ , y demostramos el caso  $n = k + 1$ .

Sea  $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{k+1} - 1\}$ .

Observemos que  $[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}}] \subset [0, \frac{1}{2}]$  si  $\ell \leq 2^k - 1$ , y  $[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}}] \subset [\frac{1}{2}, 1]$  si  $\ell \geq 2^k$ .

Si  $\ell \leq 2^k - 1$ , entonces la función  $T^{k+1}$  se puede expresar así:

$$\left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right] \xrightarrow{T} \left[\frac{\ell}{2^k}, \frac{\ell+1}{2^k}\right] \xrightarrow{T^k} [0, 1].$$

Ambas funciones son homeomorfismos (la segunda de ellas,  $T^k$ , por hipótesis de inducción).

Por tanto

$$T^{k+1}|_{\left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right]} : \left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right] \longrightarrow [0, 1]$$

es un homeomorfismo.

Si  $\ell \geq 2^k$ , entonces

$$\left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right] \xrightarrow{T} \left[\frac{2^{k+1} - \ell - 1}{2^k}, \frac{2^{k+1} - \ell}{2^k}\right] \xrightarrow{T^k} [0, 1].$$

Es inmediato que la primera función es un homeomorfismo. Y como

$$2^k \leq \ell \leq 2^{k+1} - 1,$$

entonces

$$\begin{aligned} -2^k &\geq -\ell \geq 1 - 2^{k+1}, \\ 2^{k+1} - 2^k - 1 &\geq 2^{k+1} - \ell - 1 \geq 0, \\ 2^k - 1 &\geq 2^{k+1} - \ell - 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Así la segunda función, gracias a la hipótesis de inducción, también es un homeomorfismo.  $\square$

**Corolario 5.4.2.** Sea  $(a, b)$ ,  $a < b$ , un subintervalo de  $(0, 1)$ . Entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $T^N(a, b) = [0, 1]$ .

*Demostración.* Como  $a < b$  y el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$ . Se sigue que existe un valor  $\ell$  en el conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, 2^N - 1\}$  tal que  $[\frac{\ell}{2^N}, \frac{\ell+1}{2^N}] \subset (a, b)$ . Ahora, gracias al Lema 5.4.1, tenemos que  $T^N(a, b) = [0, 1]$ .  $\square$

**Definición 5.4.3.** Sea  $D \subset X$ . Decimos que  $D$  es **denso** en  $X$  si para todo conjunto abierto  $U$  de  $X$ ,  $U \neq \emptyset$ , se tiene que  $U \cap D \neq \emptyset$ .

**Corolario 5.4.4.** El conjunto  $\text{Per}(T)$  es denso en  $[0, 1]$ .

*Demostración.* Sea  $U \neq \emptyset$  un conjunto abierto en  $[0, 1]$ . Sea  $(a, b) \subset U$ ,  $a < b$ .

Procediendo como en el Corolario 5.4.2, tomamos  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$ . Entonces existe  $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, 2^N - 1\}$  tal que  $[\frac{\ell}{2^N}, \frac{\ell+1}{2^N}] \subset (a, b)$ .

Como  $T^N([\frac{\ell}{2^N}, \frac{\ell+1}{2^N}]) = [0, 1]$ , podemos aplicar el Lema 5.3.3 a la función  $T^N$  en el intervalo  $[\frac{\ell}{2^N}, \frac{\ell+1}{2^N}]$ . Así concluimos que existe  $x_0$ ,

$$x_0 \in \left[ \frac{\ell}{2^N}, \frac{\ell+1}{2^N} \right] \subset (a, b) \subset U,$$

tal que  $T^N(x_0) = x_0$ .  $\square$

**Definición 5.4.5.** Sea  $f : X \rightarrow X$ . Decimos que  $f$  es **topológicamente transitiva en  $X$**  si para todo par de conjuntos abiertos no vacíos de  $X$ ,  $U$  y  $V$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Hemos interpretado, a lo largo de este capítulo, a la función  $f : X \rightarrow X$  como la que define el movimiento: Un objeto que está en la posición  $x \in X$ , estará, una unidad de tiempo después, en la posición  $f(x)$ , y así sucesivamente. Bajo esta óptica una función transitiva da vida a una dinámica muy interesante. Hablando de manera intuitiva, una función que es transitiva **mueve** puntos de cualquier región  $U$  de  $X$  a cualquier otra región  $V$  de  $X$ . No lo hace de manera inmediata, es decir, no necesariamente a la primera aplicación de  $f$  hay puntos de  $U$  que van a dar a  $V$ . Pero lo que sí es seguro es que aplicando  $f$  una cantidad suficiente de veces sí habrá puntos de  $U$  que **vian** a  $V$ . Como esto es válido para cualesquiera dos conjuntos abiertos de  $X$ , entonces  $f$  está **revolviendo, mezclando**, a los puntos de todas las regiones que componen  $X$ .

La función **Tienda** no es transitiva en  $\mathbb{R}$ . Consideremos los conjuntos abiertos  $U = (-\infty, 0)$  y  $V = (0, \infty)$ . Es inmediato que para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T^n(U) \cap V = \emptyset$ . Sin embargo si restringimos  $T$  al intervalo unitario resulta que ahí esta función sí es transitiva.

**Proposición 5.4.6.** La función  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  es transitiva en  $[0, 1]$ .

*Demostración.* Sean  $U$  y  $V$  dos subconjuntos de  $[0, 1]$  abiertos y no vacíos.

Existe un intervalo abierto  $(a, b)$ ,  $a < b$ , contenido en  $U$ . Por el Corolario 5.4.2, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $T^N(a, b) = [0, 1]$ . De aquí se sigue que  $T^N(U) \cap V \neq \emptyset$ .  $\square$

**Sugerencia.** Intentar los ejercicios 5.10.8, 5.10.10, 5.10.11 y 5.10.12.

## 5.5. La definición de caos según R. L. Devaney

Sea  $f : X \rightarrow X$ , y sea  $x_0 \in X$  tal que  $f(x_0) = x_0$ .

Decimos que  $x_0$  es un **punto fijo atractor** si existe un conjunto abierto  $U$  tal que  $x_0 \in U$ ,  $f(U) \subset U$ , y para toda  $x \in U$  se tiene que:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$ .

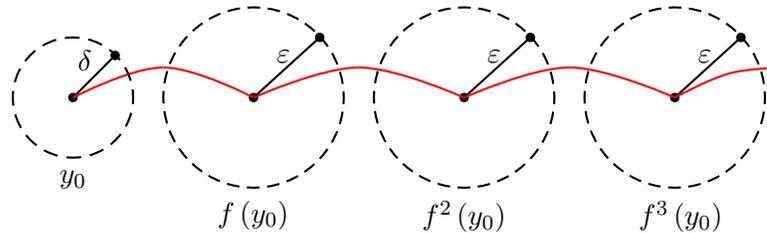
Decimos que  $x_0$  es un **punto fijo repulsor** si existe un conjunto abierto  $U$  tal que  $x_0 \in U$  y para cada  $x \in U$ ,  $x \neq x_0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n = n(x)$ , tal que  $f^n(x) \notin U$ .

**Nota.** Los puntos fijos de la función **Tienda**,  $0$  y  $\frac{2}{3}$ , son ambos repulsores.

Decimos que el punto fijo  $x_0$  es **estable** (o tiene **órbita estable**) si para toda  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in B(x_0; \delta)$ , entonces para toda  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $d(f^n(x), x_0) < \varepsilon$ .

La siguiente es una definición más general.

Decimos que  $y_0 \in X$  tiene **órbita estable** si para toda  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que para toda  $x \in B(y_0, \delta)$  y para toda  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $d(f^n(x), f^n(y_0)) < \varepsilon$ .



Las órbitas estables son, en cierto sentido, fáciles de seguir con un error pequeño. Supongamos que la órbita de  $y_0$  es estable. Si queremos seguir la órbita de  $y_0$  con un error menor que un valor positivo  $\varepsilon$ , entonces tomemos la condición inicial  $x$  con un error menor que  $\delta > 0$ . Es decir, tomemos  $x$  tal que  $d(x, y_0) < \delta$  y sigamos la  $o(x, f)$ . La información que nos dan los elementos de la órbita de  $x$  es  $\varepsilon$ -cercana a la que nos darían los elementos de la órbita de  $y_0$ . Además la estabilidad de la órbita de  $y_0$  nos asegura que dada cualquier  $\varepsilon$  positiva, sí podemos encontrar la  $\delta$  positiva que nos permita este seguimiento  $\varepsilon$ -cercano.

**Nota.** Si la órbita de  $x_0 \in X$  no es estable, entonces existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$ , podemos encontrar un punto  $y \in B(x_0; \delta)$  y un número natural  $n$  tales que  $d(f^n(x_0), f^n(y)) \geq \varepsilon_0$ . Como  $y \neq x_0$ , entonces también sabemos que  $x_0$  es un punto de acumulación de  $X$ .

**Proposición 5.5.1.** Sean  $f : A \rightarrow A$ , donde  $A \subset \mathbb{R}$  es un intervalo y  $x_0 \in A$ . Supongamos que  $f$  es derivable en  $x_0$  y que  $f(x_0) = x_0$ .

a) Si  $|f'(x_0)| < 1$ , entonces  $x_0$  es un punto fijo atractor.

b) Si  $|f'(x_0)| > 1$ , entonces  $x_0$  es un punto fijo repulsor.

c) En el caso a), la órbita de  $x_0$  es estable. En el caso b), la órbita de  $x_0$  no es estable.

*Demostración.* Si  $|f'(x_0)| < 1$ , entonces

$$\left| \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < 1.$$

Como la función valor absoluto es continua y  $f(x_0) = x_0$ , tenemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} \right| < 1.$$

Sea  $c$  un número real fijo tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} \right| < c < 1.$$

Existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in B(x_0; \delta) \cap A$ , entonces

$$\left| \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} \right| < c,$$

y así

$$|f(x) - x_0| < c|x - x_0|.$$

Como  $|f(x) - x_0| < \delta$ , tenemos que para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|f^n(x) - x_0| < c^n|x - x_0|.$$

De lo anterior se sigue que  $x_0$  es un punto fijo atractor. Además si  $0 < \gamma < \delta$ , entonces para todo punto  $x \in B(x_0; \gamma)$  y para toda  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $f^n(x) \in B(x_0; \gamma)$ . Por lo tanto la órbita de  $x_0$  bajo  $f$  es estable.

Si  $|f'(x_0)| > 1$ , desarrollamos un argumento similar al seguido antes. Encontramos  $c > 1$  y  $\delta > 0$  tales que si  $x \in B(x_0; \delta) \cap A$ ,  $x \neq x_0$ , entonces

$$|f(x) - x_0| > c|x - x_0|.$$

Si sucede que para cada  $i$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,  $f^i(x) \in B(x_0; \delta) \cap A$ , entonces

$$|f^n(x) - x_0| > c^n |x - x_0|.$$

Como  $c > 1$  debe existir  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N = N(x)$ , tal que  $f^N(x) \notin B(x_0; \delta)$ .

Así  $x_0$  es un punto fijo repulsor.

Observemos que en este segundo caso podemos concluir también que para cada valor  $\gamma$ ,  $0 < \gamma < \delta$ , existen  $x \in B(x_0, \gamma)$  y  $N \in \mathbb{N}$  tales que  $f^N(x) \notin B(x_0; \delta)$ . Por lo tanto la órbita de  $x_0$  no es estable.  $\square$

**Nota.** Los puntos fijos de la función **Tienda**,  $0$  y  $\frac{2}{3}$ , son ambos puntos fijos no estables.

En términos coloquiales podríamos decir que un sistema dinámico discreto donde todas sus órbitas son estables es un sistema que se **comporta muy bien**. A pesar de que podríamos, al escoger la condición inicial  $x_0$ , tener un pequeño error y tomar  $y_0$ , las órbitas de estos dos puntos no se separarían demasiado. Por otro lado, la presencia de algunas o muchas órbitas no estables provocaría, si no escogemos de manera exacta la condición inicial, muchos problemas y haría que el comportamiento del sistema, a la larga, fuera **impredecible** o **caótico**.

La siguiente definición la podríamos entender como una **no estabilidad** que abarca a todas las órbitas por igual.

**Definición 5.5.2.** Decimos que  $f : X \rightarrow X$  es **sensible a las condiciones iniciales** en  $X$  si existe un valor positivo  $\varepsilon_0$ , fijo, tal que para toda  $x \in X$ , y para toda  $\delta > 0$ , existen  $y \in B(x; \delta)$  y  $N \in \mathbb{N}$  tales que:

$$d(f^N(x), f^N(y)) \geq \varepsilon_0.$$

Una función  $f$  que es sensible a las condiciones iniciales no sólo nos dice que todas sus órbitas son no estables. Hay además una suerte de uniformidad en este fenómeno: La  $\varepsilon_0 > 0$  para la cual falla la estabilidad es la misma para todas las órbitas.

Sea  $f : X \rightarrow X$  una función sensible a las condiciones iniciales. Al valor  $\varepsilon_0 > 0$  que cumple las condiciones de la Definición 5.5.2 le llamamos una **constante de sensibilidad** de  $f$ . Obsérvese que  $f$  tiene una infinidad de constantes de sensibilidad.

**Proposición 5.5.3.** *La función  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  es sensible a las condiciones iniciales. De esta manera, ninguna órbita bajo  $T$ , restringida al intervalo unitario, es estable.*

*Demostración.* Sea  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ . Tomemos  $x \in [0, 1]$  y  $\delta > 0$ . Por el Corolario 5.4.2, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$T^N((x - \delta, x + \delta) \cap [0, 1]) = [0, 1].$$

Por tanto, existen en el intervalo  $(x - \delta, x + \delta) \cap [0, 1]$  dos puntos,  $y_1, y_2$ , tales que  $T^N(y_1) = 0$ ,  $T^N(y_2) = 1$ . De aquí que:

$$|T^N(x) - T^N(y_1)| \geq \frac{1}{2}, \text{ ó } |T^N(x) - T^N(y_2)| \geq \frac{1}{2}. \quad \square$$

La siguiente es la definición de **caos** dada por R. L. Devaney en 1985 (ver [9]).

**Definición 5.5.4.** Decimos que  $f : X \rightarrow X$  es una **función caótica**, o genera un **sistema dinámico discreto caótico**, si se cumplen las siguientes tres condiciones:

- a) El conjunto  $\text{Per}(f)$  es denso en  $X$ ,
- c)  $f$  es transitiva en  $X$ , y
- d)  $f$  es sensible a las condiciones iniciales en  $X$ .

**Proposición 5.5.5.** *La función  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  es caótica en  $[0, 1]$ .*

*Demostración.* Se sigue de lo hecho en el corolario 5.4.4 y en las proposiciones 5.4.6 y 5.5.3.  $\square$

**Sugerencia.** Intentar los ejercicios 5.10.13 y 5.10.14.

Para una discusión más profunda de la definición de caos dada por Devaney recomendamos leer los artículos [3], [24] y [36]. El trabajo de S. Ruelle, ver [32], contiene una detallada y muy recomendable introducción a los sistemas dinámicos discretos definidos en subconjuntos de la recta real  $\mathbb{R}$ .

## 5.6. El conjunto de los puntos atrapados

La siguiente definición es muy útil cuando estudiamos funciones definidas en el espacio  $\mathbb{R}^n$ . La redactamos para funciones en  $\mathbb{R}$  sólo por comodidad.

**Definición 5.6.1.** Dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , el conjunto de todos los puntos  $x$  cuya órbita está acotada lo llamamos el **conjunto de los puntos atrapados** o el **conjunto de los puntos prisioneros**. Este conjunto lo denotamos con  $J(f)$ . Es decir,

$$J(f) = \{x \in \mathbb{R} : o(x, f) \text{ está acotada}\}.$$

Observemos que si  $x \in J(f)$ , entonces  $f(x)$  también está en  $J(f)$  ya que la  $o(f(x), f)$  está contenida en la  $o(x, f)$ . De aquí se sigue que  $f(J(f)) \subset J(f)$ .

Por otro lado, sea  $x$  en  $J(f)$ . Si existe  $y$  tal que  $f(y) = x$ , entonces  $y$  también está en  $J(f)$  ya que

$$o(y, f) = \{y\} \cup o(x, f).$$

Así, si se tiene que  $J(f) \subset f(\mathbb{R})$ , entonces  $J(f) \subset f(J(f))$ , y con ello estos dos conjuntos son iguales. Es decir,  $J(f)$  es un conjunto invariante bajo  $f$ .

Tal vez la importancia de este conjunto de puntos atrapados se vea si recordamos que para la función **Tienda** se tiene que  $J(T) = [0, 1]$ . Y es precisamente en este conjunto donde  $T$  tiene una dinámica caótica, y fuera de él su dinámica es muy sencilla.

**Nota.** Si la función  $f$  está definida en los números complejos,  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , y la regla de correspondencia de  $f$  se expresa de forma polinomial,

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_Nz^N,$$

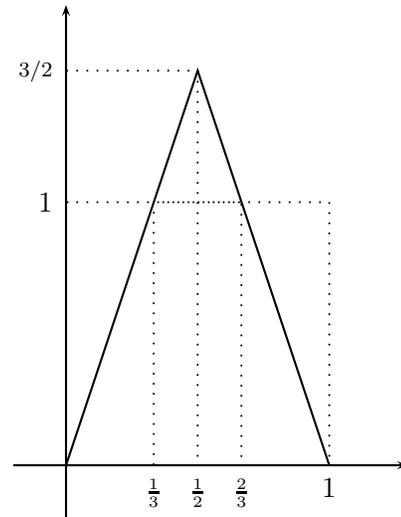
con  $N \geq 2$  y  $a_N \neq 0$ , entonces  $J(f)$  es conocido como el **conjunto de Julia**<sup>2</sup> lleno de  $f$  y la frontera de  $J(f)$  es el **conjunto de Julia** de  $f$ .

**Ejemplo 5.6.2.** Sea  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por

$$P(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ 3 - 3x, & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Estudiaremos a continuación algunas propiedades dinámicas de esta función. En primer lugar nos interesa descubrir la estructura del conjunto  $J(P)$ . En particular demostraremos que este conjunto es un fractal. Una vez cumplida esta tarea demostraremos que  $P$  restringida a  $J(P)$  es caótica.

En la Figura 5.8 el lector puede ver la gráfica de la función  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . De aquí en adelante la letra  $P$  sólo la utilizaremos para designar esta función.



**Figura 5.8:** La función  $P(x)$ .

Las gráficas de  $P$  y  $T$  son muy parecidas. La única diferencia es la altura que alcanza el pico que ambas tiene en el punto  $x = \frac{1}{2}$ . Sin embargo, el conjunto de los puntos atrapados de una y otra es muy distinto.

Las demostraciones de las siguientes cuatro observaciones son casi inmediatas.

<sup>2</sup>JULIA Gaston Maurice (1893–1978). Matemático francés. Julia fue un precursor en la teoría de los sistemas dinámicos complejos y en lo que hoy se conoce como fractales. Fue uno de los primeros en estudiar estos temas, y explicar cómo a partir de cualquier función compleja se puede fabricar, por medio de una sucesión definida por inducción, un conjunto cuya frontera es imposible de dibujar a pulso (por ser de longitud infinita, entre otras propiedades).

Su notoriedad culminó al ser publicado su artículo informe sobre la iteración de las funciones racionales (Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles) en la revista francesa de matemáticas Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Este artículo de 199 páginas le permitió ser galardonado por la Academia de las Ciencias Francesa.

- i) Para todo  $x < 0$  se tiene que  $P(x) < x$ . Más aún, para toda  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $P^n(x) = 3^n x$ . Así,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x) = -\infty$ .
- ii) Si  $x > 1$ , entonces  $P(x) < 0$ . Por lo tanto para estos puntos también se concluye que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x) = -\infty$ .
- iii) Los únicos puntos fijos de  $P$  son  $0$  y  $\frac{3}{4}$ , y ambos son repulsores.
- iv) Si  $x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , entonces  $P(x) > 1$  y, nuevamente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x) = -\infty$ .

Sobre el conjunto  $J(P)$  hasta ahora sabemos lo siguiente:

$$J(P) \subset \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \quad \text{y} \quad \left\{0, \frac{3}{4}\right\} \subset J(P).$$

Llamamos  $A_1$  a la unión de los intervalos  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$  y  $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ .

La función  $P$  transforma al intervalo  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$  en el intervalo  $[0, 1]$  de manera lineal haciendo crecer las distancias por un factor de 3. El intervalo abierto  $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$  es transformado bajo  $P$  en el intervalo  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ . Así  $J(P) \cap \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) = \emptyset$ . Algo similar le sucede al intervalo  $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ .

Sea  $A_2$  la unión de los  $2^2$  intervalos  $\left[0, \frac{1}{9}\right]$ ,  $\left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right]$ ,  $\left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right]$  y  $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$ . Cada uno de estos intervalos es transformado bajo  $P^2$  en el intervalo unitario. Este hecho provoca que el tercio de en medio de cada uno de ellos esté formado por puntos que no están en  $J(P)$ . Con esta información podemos definir  $A_3$  como la unión de  $2^3$  intervalos cerrados de longitud  $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ , tal que  $P^3$  transforma a cada uno de ellos en el intervalo unitario, y tal que el conjunto  $J(P)$  está contenido en  $A_3$ .

Podemos continuar el proceso anterior indefinidamente, quitando en cada paso puntos cuya órbita no está acotada. Los conjuntos  $A_n$  que se van formando son precisamente los que se utilizan en la construcción del conjunto de Cantor clásico, que denotamos con la letra  $\mathcal{C}$ . Como para toda  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $J(P) \subset A_n$ , entonces  $J(P) \subset \mathcal{C}$ .

Por otro lado, si  $x \in \mathcal{C}$  entonces para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in A_n$  y por ello  $P^n(x) \in [0, 1]$ . Esto implica que la órbita entera de  $x$  está en  $[0, 1]$ , así  $x \in J(P)$ . Por lo tanto  $J(P) = \mathcal{C}$ .

Como  $J(P)$  está contenido en la imagen de  $\mathbb{R}$  bajo  $P$ , entonces  $J(P)$  es un conjunto invariante de  $P$ .

Así nuestra función  $P$  nos ha proporcionado un conjunto invariante que es a su vez un conjunto fractal. Haremos algunos comentarios sobre este interesante hecho un poco más adelante. Por lo pronto nos interesa convencer al lector de que  $P$ , restringida a  $J(P)$ , es una función caótica. Así el conjunto de Cantor clásico es el escenario donde se lleva a cabo un sistema dinámico discreto caótico.

A cada punto de  $J(P)$  le vamos a asignar, mediante una función  $\varphi$ , una sucesión infinita formada solamente por ceros y unos. Sea  $x_0$  un punto en  $J(P)$ . Observemos que para toda  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $P^n(x_0)$  está en el intervalo  $[0, \frac{1}{3}]$  o en el intervalo  $[\frac{2}{3}, 1]$ . La idea es asignar un 0 o un 1 según  $P^n(x_0)$  se encuentre en el primer o en el segundo intervalo.

Sean  $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$  y  $I_1 = [\frac{2}{3}, 1]$ . Entonces

$$\varphi(x_0) = \hat{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots),$$

donde las coordenadas de  $\hat{t}$  se definen de la siguiente manera: Para cada  $n \geq 0$

$$t_n = \begin{cases} 0, & \text{si } P^n(x_0) \in I_0, \\ 1, & \text{si } P^n(x_0) \in I_1. \end{cases}$$

Sea

$$\Sigma_2 = \{\hat{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots) : \text{para cada } n \geq 0, t_n \in \{0, 1\}\}.$$

Ya habíamos visto este espacio antes, es el espacio de los códigos. Recordemos que la métrica está dada por:

$$d(\hat{t}, \hat{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t_n - s_n|}{3^n},$$

donde  $\hat{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$  y  $\hat{s} = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ .

A la sucesión  $\varphi(x_0) = \hat{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$  se le llama, también, el **itinerario de  $x_0$** . Si lo pensamos un poco este nombre tiene mucho sentido. El punto  $x_0$  sólo puede **viajar**, al aplicarle  $P$  varias veces, a dos **ciudades**,  $I_0$  e  $I_1$ . El valor que asuma  $t_n$  nos dirá de manera inmediata en cuál de estos dos destinos se encuentra  $P^n(x_0)$ .

Las siguientes cuatro proposiciones contienen las propiedades más importantes de la función  $\varphi : J(P) \rightarrow \Sigma_2$ . La meta es mostrar que  $\varphi$  es en realidad un homeomorfismo.

**Proposición 5.6.3.**  $\varphi : J(P) \rightarrow \Sigma_2$  es una función inyectiva.

*Demostración.* Sea  $x_0$  y  $y_0$  dos puntos en  $J(P)$  tales que  $\hat{t} = \varphi(x_0) = \varphi(y_0) = \hat{s}$ . Entonces para toda  $n \geq 0$  se tiene que  $t_n = s_n$ . De aquí se sigue que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P^{n-1}(x_0)$  y  $P^{n-1}(y_0)$  están ambos en  $I_0$  o ambos en  $I_1$ . Entonces

$$|P^n(x_0) - P^n(y_0)| = 3 |P^{n-1}(x_0) - P^{n-1}(y_0)|.$$

Y como para cada  $i$ ,  $0 \leq i \leq n-2$ , se tiene que  $P^i(x_0)$  y  $P^i(y_0)$  están ambos en  $I_0$  o ambos en  $I_1$ , entonces tenemos que

$$|P^n(x_0) - P^n(y_0)| = 3^n |x_0 - y_0|.$$

De aquí se sigue que para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|x_0 - y_0| \leq \frac{1}{3^n}$ . Por lo tanto  $x_0 = y_0$ . □

**Proposición 5.6.4.**  $\varphi : J(P) \rightarrow \Sigma_2$  es una función suprayectiva.

*Demostración.* Observemos primero que si  $E = [a, b]$  es un intervalo contenido en  $[0, 1]$ , entonces existen dos intervalos  $E_0 \subset I_0$  y  $E_1 \subset I_1$  tales que  $P(E_i) = E$ ,  $i = 0, 1$ . Además la longitud de cada  $E_i$  es un tercio de la longitud de  $E$ .

Para los intervalos  $I_0$  e  $I_1$  existen dos intervalos en  $I_0$ , que llamaremos  $I_{00}$  e  $I_{01}$ , tales que  $P(I_{00}) = I_0$  y  $P(I_{01}) = I_1$ , y existen dos intervalos en  $I_1$ , que ahora llamaremos  $I_{10}$  e  $I_{11}$ , tales que  $P(I_{10}) = I_0$  y  $P(I_{11}) = I_1$ . La longitud de cada uno de estos cuatro intervalos cerrados es  $(\frac{1}{3})^2$ . La unión de los cuatro intervalos nos da el conjunto  $A_2$ .

En el siguiente paso existen cuatro intervalos en  $I_0$ , llamados  $I_{000}$ ,  $I_{001}$ ,  $I_{010}$  e  $I_{011}$ , tales que la función  $P$  transforma de la siguiente manera:

$$I_{000} \rightarrow I_{00}, \quad I_{001} \rightarrow I_{01}, \quad I_{010} \rightarrow I_{10}, \quad I_{011} \rightarrow I_{11}.$$

De manera análoga existen cuatro intervalos en  $I_1$  que se comportan de manera similar a los cuatro anteriores.

En este paso ya tenemos  $2^3$  intervalos de la forma  $I_{s_0 s_1 s_2}$ ,  $s_i \in \{0, 1\}$  para  $0 \leq i \leq 2$ , tales que  $P(I_{s_0 s_1 s_2}) = I_{s_1 s_2}$ , y la longitud de cada uno de ellos es  $(\frac{1}{3})^3$ .

Obsérvese que si  $x \in I_{s_0 s_1 s_2}$ , entonces  $x \in I_{s_0}$ ,  $P(x) \in I_{s_1}$  y  $P^2(x) \in I_{s_2}$ .

En el paso  $n$  de esta construcción obtenemos  $2^n$  intervalos de la forma  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}}$ ,  $s_i \in \{0, 1\}$  para  $0 \leq i \leq n-1$ , tales que

$$P(I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}}) = I_{s_1 s_2 \dots s_{n-1}},$$

y la longitud de cada uno de ellos es  $(\frac{1}{3})^n$ .

Además si  $x \in I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}}$ , entonces  $x \in I_{s_0}$ ,  $P(x) \in I_{s_1}$ ,  $P^2(x) \in I_{s_2}$ , y así hasta que  $P^{n-1}(x)$  está en  $I_{s_{n-1}}$ .

Ahora sí demostraremos que  $\varphi$  es suprayectiva.

Sea  $\hat{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$  un punto en  $\Sigma_2$ .

Sea  $n \in \mathbb{N}$  y consideremos el intervalo  $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_n}$ .

Observemos que si  $x$  es un punto en  $J(P)$  tal que  $x \in I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_n}$ , entonces  $\varphi(x)$  y  $\hat{t}$  tienen iguales las primeras  $n+1$  coordenadas.

Como para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que el intervalo  $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_n}$  está contenido en el intervalo  $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_{n-1}}$ , la colección  $\{I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_n}\}_{n=0}^{\infty}$  forma una sucesión de intervalos cerrados encajados, cada uno de ellos distinto del vacío. Sabemos también que la longitud del intervalo  $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_n}$

tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito. Entonces la intersección

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_n}$$

es exactamente un punto, que llamaremos  $x_0$ .

Por la forma en que encontramos a  $x_0$  se sigue que  $x_0 \in J(P)$  y que  $\varphi(x_0)$  es  $\hat{t}$ . □

**Proposición 5.6.5.**  $\varphi : J(P) \rightarrow \Sigma_2$  es una función continua.

*Demostración.* Sean  $x_0 \in J(P)$ ,  $\varphi(x_0) = \hat{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$  y  $\varepsilon > 0$ .

Existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} < \varepsilon$ .

Consideremos el intervalo  $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_N}$ . Este es uno de los  $2^N$  intervalos que componen  $A_N$ . Su longitud es  $(\frac{1}{3})^{N+1}$ .

Observemos que si  $x$  y  $y$  son dos puntos de  $J(P)$  tales que también están en  $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_N}$ , entonces  $\varphi(x)$  y  $\varphi(y)$  coinciden desde la primera hasta la coordenada  $N$ . Entonces

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

Sea  $\delta > 0$  tal que

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A_N \subset I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_N}.$$

Si  $|x_0 - x| < \delta$  y  $x \in J(P)$ , entonces  $x \in I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_N}$  y  $d(\varphi(x_0), \varphi(x)) < \varepsilon$ . □

**Proposición 5.6.6.**  $\varphi^{-1} : \Sigma_2 \rightarrow J(P)$  es una función continua.

*Demostración.* Sean  $\hat{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots) \in \Sigma_2$  y  $\varepsilon > 0$ .

Como la longitud del intervalo  $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_n}$  tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que la longitud de  $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_N}$  es menor que  $\varepsilon$ .

Sea  $\delta = \frac{1}{3^N}$ . Observemos que si  $\hat{s} \in \Sigma_2$  es tal que  $d(\hat{t}, \hat{s}) < \delta$ , entonces para cada  $i$ ,  $0 \leq i \leq N$  se tiene  $t_i = s_i$ . Esto implica que  $\varphi^{-1}(\hat{s})$  también está en el intervalo  $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_N}$ . Por ello la distancia entre  $\varphi^{-1}(\hat{t})$  y  $\varphi^{-1}(\hat{s})$  es menor que  $\varepsilon$ . □

La demostración del siguiente resultado es inmediata a partir de las proposiciones 5.6.5 y 5.6.6.

**Corolario 5.6.7.** La función  $\varphi : J(P) \rightarrow \Sigma_2$  es un homeomorfismo.

La siguiente observación nos permitirá definir una función del espacio  $\Sigma_2$  en sí mismo. Sea  $x$  en  $J(P)$ . La idea es encontrar una relación entre los itinerarios de  $x$  y de  $P(x)$ . Supongamos que  $\varphi(x) = (t_0, t_1, t_2, t_3, \dots)$ , entonces es inmediato que  $\varphi(P(x)) = (t_1, t_2, t_3, \dots)$ . La órbita de  $P(x)$  siempre va un paso adelante de la órbita de  $x$ .

Es natural, entonces, definir la siguiente función  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ ,

$$\sigma((t_0, t_1, t_2, t_3, \dots)) = (t_1, t_2, t_3, \dots).$$

El punto  $\sigma(\hat{t})$  tiene una infinidad de coordenadas. Para encontrarlas sólo quitamos la primera coordenada de  $\hat{t}$ ,  $t_0$ , y desplazamos todas las demás un lugar hacia la izquierda. Así  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  es conocida como la **función desplazamiento** o como la **función corrimiento**.

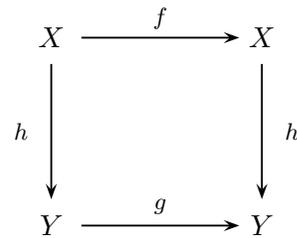
La demostración de que esta función es continua no es tan difícil y el lector es invitado a hacerla en el ejercicio 5.10.16.

Para cada punto  $x \in J(P)$  se tiene que  $\varphi(P(x)) = \sigma(\varphi(x))$ . Esta igualdad es la clave para descifrar la dinámica de  $P$  restringida al conjunto de los puntos atrapados. Este hecho es tan importante que merece una definición que tome en cuenta a muchos posibles casos semejantes.

**Definición 5.6.8.** Sean  $f : X \rightarrow X$  y  $g : Y \rightarrow Y$  dos funciones continuas definidas en sendos espacios métricos. Decimos que las funciones  $f$  y  $g$  son **topológicamente conjugadas**, o simplemente **conjugadas**, si existe un homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  tal que para todo punto  $x \in X$  se tiene que  $h(f(x)) = g(h(x))$ .

La condición de conjugación a veces se expresa diciendo que el siguiente diagrama es conmutativo:

Si  $f : X \rightarrow X$  y  $g : Y \rightarrow Y$  son dos funciones conjugadas, entonces las propiedades dinámicas de  $f$  son esencialmente iguales a las propiedades dinámicas de  $g$ . Dedicaremos la siguiente sección de este capítulo a darle cuerpo a esta afirmación. En particular demostraremos que, bajo esta hipótesis, la función  $f$  es caótica en  $X$  si y solamente si la función  $g$  es caótica en  $Y$ .



Las funciones  $P : J(P) \rightarrow J(P)$  y  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  son conjugadas. Para demostrar que  $P$  es caótica en  $J(P)$ , demostraremos primero que  $\sigma$  es caótica en  $\Sigma_2$ .

**Proposición 5.6.9.** *El conjunto de puntos periódicos de  $\sigma$  es denso en  $\Sigma_2$ .*

*Demostración.* Sean  $\hat{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots) \in \Sigma_2$  y  $\varepsilon > 0$ .

Existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} < \varepsilon$ . Considere el siguiente punto en  $\Sigma_2$ :

$$\hat{s} = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_N, t_0, t_1, t_2, \dots, t_N, t_0, t_1, t_2, \dots)$$

donde la cadena finita de coordenadas  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$  se repite indefinidamente.

Es inmediato que  $\sigma^{N+1}(\hat{s}) = \hat{s}$  y que la distancia de  $\hat{t}$  a  $\hat{s}$  es menor que  $\varepsilon$ .  $\square$

**Proposición 5.6.10.** *La función  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  es transitiva.*

*Demostración.* Sean  $\hat{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$  y  $\hat{s} = (s_0, s_1, s_2, \dots)$  dos puntos en  $\Sigma_2$  y  $\varepsilon > 0$ .

Sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} < \varepsilon$ . Considere el siguiente punto en  $\Sigma_2$ :

$$\hat{u} = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_N, s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, u_{2N+2}, \dots).$$

Por la forma que le hemos asignado al punto  $\hat{u}$  sus coordenadas, las siguientes desigualdades son inmediatas:

$$d(\hat{t}, \hat{u}) < \varepsilon \quad \text{y} \quad d(\hat{s}, \sigma^{N+1}(\hat{s})) < \varepsilon.$$

Por lo tanto  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  es transitiva.  $\square$

**Proposición 5.6.11.** *La función  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  es sensible a las condiciones iniciales.*

*Demostración.* Tome  $\varepsilon_0 = 1$ . Esta va a ser nuestra constante de sensibilidad.

Sean  $\hat{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots) \in \Sigma_2$  y  $\delta > 0$ . Demostraremos que existen un punto  $\hat{s}$ , que está a distancia menor que  $\delta$  de  $\hat{t}$ , y  $N \in \mathbb{N}$  tales que  $d(\sigma^N(\hat{t}), \sigma^N(\hat{s})) \geq \varepsilon_0$ .

Sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{3^n} < \delta$ . Consideramos ahora un punto  $\hat{s}$  tal que sus primeras  $N$  coordenadas coincidan con las primeras  $N$  coordenadas de  $\hat{t}$ ,

$$\hat{s} = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}, s_N, s_{N+1}, \dots),$$

y tal que el valor de  $s_N$  sea distinto del valor de  $t_N$ .

Obsérvese que la distancia de  $\hat{t}$  a  $\hat{s}$  es menor que  $\delta$ . Además, como  $\sigma^N(\hat{t})$  y  $\sigma^N(\hat{s})$  difieren en la primera coordenada,  $d(\sigma^N(\hat{t}), \sigma^N(\hat{s})) \geq 1$ .  $\square$

De las tres proposiciones anteriores se sigue que la función  $\sigma$  es caótica en  $\Sigma_2$ .

## 5.7. Equivalencia topológica

Varias son las propiedades dinámicas que se preservan a través de la equivalencia topológica. Dedicaremos por entero esta sección al estudio de algunas de ellas. La hipótesis para todos los resultados contenidos en esta sección es la siguiente: los espacios  $X$  e  $Y$  son compactos y las funciones  $f : X \rightarrow X$  y  $g : Y \rightarrow Y$  son conjugadas bajo el homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$ .

**Proposición 5.7.1.** *Para todo  $n \in \mathbb{N}$  y para todo  $x \in X$  se tiene que  $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$ .*

*Demostración.* Procederemos por inducción. Como  $f$  y  $g$  son conjugadas, la afirmación es cierta para el caso  $n = 1$ .

Sea  $k \in \mathbb{N}$ . Supongamos que para todo  $x \in X$  se tiene que  $h(f^k(x)) = g^k(h(x))$ . Entonces

$$\begin{aligned} h(f^{k+1}(x)) &= h(f^k(f(x))) = g^k(h(f(x))) \\ &= g^k(g(h(x))) = g^{k+1}(h(x)). \end{aligned} \quad \square$$

**Proposición 5.7.2.** *Las funciones  $g : Y \rightarrow Y$  y  $f : X \rightarrow X$  son conjugadas bajo el homeomorfismo  $h^{-1} : Y \rightarrow X$ .*

*Demostración.* Demostraremos que para todo  $y \in Y$  se tiene que  $h^{-1}(g(y)) = f(h^{-1}(y))$ .

Sea  $y$  un punto en  $Y$ . Entonces

$$g(y) = g(h(h^{-1}(y))) = h(f(h^{-1}(y))).$$

Aplicando el homeomorfismo  $h^{-1}$  a los extremos de la expresión anterior obtenemos la igualdad siguiente:  $h^{-1}(g(y)) = f(h^{-1}(y))$ . □

**Proposición 5.7.3.** *El conjunto  $\text{Per}(f)$  es denso en  $X$  si y sólo si el conjunto  $\text{Per}(g)$  es denso en  $Y$ .*

*Demostración.* Gracias a la Proposición 5.7.2 es suficiente demostrar que si  $\text{Per}(f)$  es denso en  $X$ , entonces  $\text{Per}(g)$  es denso en  $Y$ .

Sea  $U \subset Y$  un conjunto abierto y distinto del vacío. Entonces  $h^{-1}(U)$  es un subconjunto de  $X$  que es también abierto y distinto del vacío. Como  $\text{Per}(f)$  es denso en  $X$ , existe  $x_0$ , punto periódico de  $f$ , en  $h^{-1}(U)$ .

Sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $f^N(x_0) = x_0$ . Entonces  $h(x_0) = y_0$  es un punto en  $U$  y

$$g^N(y_0) = g^N(h(x_0)) = h(f^N(x_0)) = h(x_0) = y_0.$$

Así  $y_0$  es un punto periódico de  $g$  que está en  $U$ . □

**Proposición 5.7.4.** *La función  $f$  es transitiva en  $X$  si y sólo si  $g$  es transitiva en  $Y$ .*

*Demostración.* Es suficiente demostrar que si  $f$  es transitiva en  $X$ , entonces la función  $g$  es transitiva en  $Y$ .

Sean  $U$  y  $W$  dos conjuntos abiertos, no vacíos, en  $Y$ . Entonces los conjuntos  $h^{-1}(U)$  y  $h^{-1}(W)$  son no vacíos y abiertos en el espacio  $X$ .

Como  $f$  es transitiva en  $X$ , existen  $x_0$  en  $h^{-1}(U)$  y  $N$ , un número natural, tales que  $f^N(x_0)$  está en  $h^{-1}(W)$ . Entonces  $h(x_0) \in U$  y  $g^N(h(x_0)) = h(f^N(x_0)) \in W$ . De aquí se sigue que  $g^N(U) \cap W \neq \emptyset$ .  $\square$

**Proposición 5.7.5.** *La función  $f$  es sensible a las condiciones iniciales en  $X$  si y sólo si  $g$  es sensible a las condiciones iniciales en  $Y$ .*

*Demostración.* Nuevamente es suficiente demostrar sólo una de las implicaciones.

Supongamos que  $f$  es sensible a las condiciones iniciales en  $X$ . Sea  $\varepsilon_0 > 0$  una constante de sensibilidad para  $f$ .

Como  $Y$  es un espacio compacto y  $h^{-1} : Y \rightarrow X$  es continua, entonces  $h^{-1}$  es uniformemente continua<sup>3</sup> en  $Y$ . Para el valor  $\varepsilon_0$ , existe  $\delta_0 > 0$  tal que para toda pareja de puntos  $y_1$  e  $y_2$  en  $Y$  tales que  $d_Y(y_1, y_2) < \delta_0$  se tiene que  $d_X(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_2)) < \varepsilon_0$ .

Demostraremos que  $\delta_0$  es una constante de sensibilidad para  $g : Y \rightarrow Y$ .

Sean  $y_0$  un punto en  $Y$  y  $\gamma > 0$ . Sea  $U = B(y_0; \gamma)$ . El conjunto  $U$  es abierto en  $Y$ . Sea  $x_0 = h^{-1}(y_0)$ .

El conjunto  $h^{-1}(U)$  es abierto en  $X$  y contiene al punto  $x_0$ . Por lo tanto existen  $x_1 \in h^{-1}(U)$  y  $N \in \mathbb{N}$  tales que

$$d_X(f^N(x_0), f^N(x_1)) \geq \varepsilon_0.$$

Los correspondientes puntos  $h(x_0) = y_0$  y  $h(x_1)$  están en  $U$ . Además como

$$d_X(h^{-1}(g^N(y_0)), h^{-1}(g^N(h(x_1)))) = d_X(f^N(x_0), f^N(x_1)) \geq \varepsilon_0,$$

se tiene que

$$d_Y(g^N(y_0), g^N(h(x_1))) \geq \delta_0. \quad \square$$

Ahora la demostración del siguiente corolario es inmediata.

<sup>3</sup>Sean  $X$  e  $Y$  espacios métricos y  $f : X \rightarrow Y$ . La función  $f$  se dice que es **uniformemente continua** en  $X$  si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall a, b \in X, d_X(a, b) < \delta \text{ implica que } d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon.$$

**Corolario 5.7.6.** *La función  $f$  es caótica en  $X$  si y sólo si  $g$  es caótica en  $Y$ .*

Otra afirmación que ya podemos fácilmente demostrar es la siguiente:

**Corolario 5.7.7.** *La función  $P$  es caótica en el conjunto de los puntos atrapados  $J(P)$ .*

*Demostración.* Las funciones  $P : J(P) \rightarrow J(P)$  y  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  son conjugadas. Como  $\sigma$  es caótica en  $\Sigma_2$ , entonces  $P$  es caótica en  $J(P)$ .  $\square$

## 5.8. Conjuntos invariantes repulsores

El conjunto de los puntos atrapados de la función  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J(P)$ , tiene dos propiedades interesantes.

La primera lo hace un conjunto invariante repulsor. Sabemos que si  $x$  es un punto fuera de  $J(P)$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x) = -\infty$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , un valor fijo,  $N(J(P); \varepsilon)$  representa la nube de radio  $\varepsilon$  alrededor de  $J(P)$ . Obsérvese que para todo punto  $x$  en  $N(J(P); \varepsilon) \setminus J(P)$ , existe  $N$ , que depende de  $x$ , tal que  $P^N(x) \notin N(J(P); \varepsilon)$ .

Esta situación es exactamente la misma que tenemos cuando hablamos de un punto fijo repulsor. Ahora lo que tenemos es un conjunto invariante repulsor.

La segunda es que  $J(P)$  es el conjunto de Cantor clásico,  $J(P) = \mathcal{C}$ . Este fractal ya lo habíamos visto antes como el conjunto atractor de un **SIF**. Nuestra meta es mostrar que es posible definir un **SIF** particular, a partir de la regla de correspondencia de la función  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que tiene como atractor precisamente a  $J(P) = \mathcal{C}$ .

La función  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$P(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ 3 - 3x, & \text{si } x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

está muy lejos de tener una función inversa,  $P$  no es inyectiva ni es suprayectiva. Sin embargo si nos restringimos al conjunto  $\{x : x \leq \frac{1}{2}\}$ ,  $P(x) = 3x$ . La inversa de esta función es  $\omega_1(x) = \frac{x}{3}$ . Si nos restringimos al conjunto  $\{x : x \geq \frac{1}{2}\}$ ,  $P(x) = 3 - 3x$ . La inversa es  $\omega_2(x) = 1 - \frac{x}{3}$ . Obsérvese que ambas funciones son contracciones definidas en todo  $\mathbb{R}$ .

Esto nos lleva a proponer el siguiente **SIF**:

$$\left\{ \mathbb{R}; \omega_1(x) = \frac{x}{3}, \omega_2(x) = 1 - \frac{x}{3} \right\}.$$

Como  $\omega_1(\mathcal{C}) = (\mathcal{C} \cap [0, \frac{1}{3}])$  y  $\omega_2(\mathcal{C}) = (\mathcal{C} \cap [\frac{2}{3}, 1])$ , entonces  $\mathcal{C} = \omega_1(\mathcal{C}) \cup \omega_2(\mathcal{C})$ . Así el atractor del **SIF** es el conjunto de Cantor  $\mathcal{C}$ .

La función que a cada conjunto  $A$  le asigna el conjunto  $F(A) = \omega_1(A) \cup \omega_2(A)$  es una contracción en el espacio de los subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}$ . A partir de cualquier conjunto compacto  $A$ , la sucesión de conjuntos  $\{F^n(A)\}$  será convergente al conjunto de Cantor  $C$ .

Hablando intuitivamente,  $F$  no se puede pensar como una función cuando se aplica a un punto ya que esta función toma un conjunto con un único punto y lo envía a un conjunto con dos puntos. Sin embargo al haber sido construida como el resultado de un esfuerzo por encontrarle una inversa a la función  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F$  sí tiene una propiedad importante: atraer a todos los conjuntos compactos hacia al conjunto  $C$ . Esto es precisamente lo inverso de lo que hace  $P$  que es alejar del conjunto  $C$  a todos los puntos que no están en ese conjunto.

Apliquemos la misma idea a la función **Tienda**.

La función inversa de  $x \rightarrow 2x$  es  $\omega_1(x) = \frac{x}{2}$ , y la inversa de  $x \rightarrow 2 - 2x$  es  $\omega_2(x) = 1 - \frac{x}{2}$ . Ambas funciones son contracciones definidas en todo  $\mathbb{R}$ .

Proponemos el siguiente **SIF**:

$$\left\{ \mathbb{R}; \omega_1(x) = \frac{x}{2}, \omega_2(x) = 1 - \frac{x}{2} \right\}.$$

Observemos que  $\omega_1([0, 1]) = [0, \frac{1}{2}]$  y  $\omega_2([0, 1]) = [\frac{1}{2}, 1]$ . Por lo tanto el atractor del **SIF** es el intervalo unitario. Este conjunto es precisamente el conjunto de puntos atrapados de  $T$  y, como el conjunto de Cantor en el ejemplo anterior, se comporta, bajo  $T$ , como un conjunto invariante repulsor.

Vale la pena aquí hacer la siguiente observación: Es cierto que el **SIF**

$$\left\{ \mathbb{R}; \omega_1(x) = \frac{x}{2}, \omega_2(x) = 1 - \frac{x}{2} \right\}$$

tiene como atractor el conjunto  $[0, 1]$ , pero no es el único **SIF** que tiene esta propiedad.

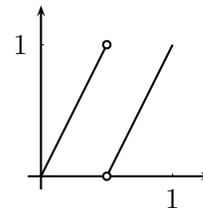
Tomemos por ejemplo el siguiente **SIF**:

$$\left\{ \mathbb{R}; \gamma_1(x) = \frac{x}{2}, \gamma_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right\}.$$

El atractor también es el intervalo unitario. Sin embargo al intentar encontrar una función del intervalo  $[0, 1]$  en sí mismo que sea una suerte de inversa, es decir que cumpla el papel de la  $T$  para el **SIF** anterior, se presenta un problema. Si  $x \in [0, 1]$  es tal que  $x < \frac{1}{2}$ , entonces la inversa se construye a partir de la función  $\gamma_1$  ya que  $x \in \gamma_1([0, 1]) \setminus \gamma_2([0, 1])$ . Si  $x \in \gamma_2([0, 1]) \setminus \gamma_1([0, 1])$ , entonces la inversa se propone a partir de la función  $\gamma_2$ .

Siguiendo estos pasos la inversa va quedando con esta regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1 & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$



Obsérvese que no hay forma de definir la función en el punto  $\frac{1}{2}$  para lograr que  $f$  sea continua. El problema radica en que  $\frac{1}{2}$  es elemento tanto de  $\gamma_1([0, 1])$  como de  $\gamma_2([0, 1])$ . La primera dice que la inversa debe enviar el punto  $\frac{1}{2}$  al 1 y la segunda dice que hay que enviarlo al 0.

Cuando estamos en el **SIF**

$$\left\{ \mathbb{R}; \omega_1(x) = \frac{x}{2}, \omega_2(x) = 1 - \frac{x}{2} \right\}$$

esto no sucede ya que ambas inversas envían el punto  $\frac{1}{2}$  al valor 1. Y así la inversa es una función continua en el atractor  $[0, 1]$  que, además, se puede extender a una función continua en todo  $\mathbb{R}$  dando lugar a la función **Tienda**.

## 5.9. Un ejemplo en el plano

En esta sección, a partir de dos de los sistemas iterados de funciones que presentamos en la sección anterior, definiremos un **SIF** en el plano. Discutiremos cuál es su conjunto atractor, (que llamaremos  $A$ ). Y por último, intentaremos definir una función  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que tenga a  $A$  como su conjunto de puntos atrapados.

Considera el siguiente **SIF**:  $\{\mathbb{R}^2; F_1, F_2, F_3, F_4\}$  donde

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{2}\right), & F_2(x, y) &= \left(1 - \frac{x}{3}, \frac{y}{2}\right), \\ F_3(x, y) &= \left(\frac{x}{3}, 1 - \frac{y}{2}\right), & F_4(x, y) &= \left(1 - \frac{x}{3}, 1 - \frac{y}{2}\right). \end{aligned}$$

Cada una de las funciones  $F_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , es una contracción.

Para encontrar el conjunto atractor tomaremos el conjunto compacto  $B = [0, 1] \times [0, 1]$  y le aplicaremos la función

$$B \longrightarrow F(B) = F_1(B) \cup F_2(B) \cup F_3(B) \cup F_4(B)$$

varias veces para descubrir hacia donde converge la sucesión de imágenes.

Observemos que cada  $F_i$  es una transformación lineal que envía rectas verticales en rectas verticales y rectas horizontales en rectas horizontales. Cada una de estas funciones transforma a  $B$  en un rectángulo.

$$\begin{aligned} F_1(B) &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right], & F_2(B) &= \left[\frac{2}{3}, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ F_3(B) &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right], & F_4(B) &= \left[\frac{2}{3}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{aligned}$$

Así  $F(B) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \times [0, 1] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \times [0, 1]$ .

Obsérvese que cada segmento de recta vertical  $L = \{(x, y) : x = x_0, 0 \leq y \leq 1\}$  se transforma bajo  $F$  en dos segmentos:

$$F_1(L) \cup F_2(L) = \left\{ (x, y) : x = \frac{x_0}{3}, 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

y

$$F_3(L) \cup F_4(L) = \left\{ (x, y) : x = 1 - \frac{x_0}{3}, 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

Así, desde el punto de vista de la primera coordenada, se va formando el conjunto de Cantor  $\mathcal{C}$  y, desde el punto de vista de la segunda coordenada el intervalo  $[0, 1]$  queda invariante. (Ver Figura 5.9).

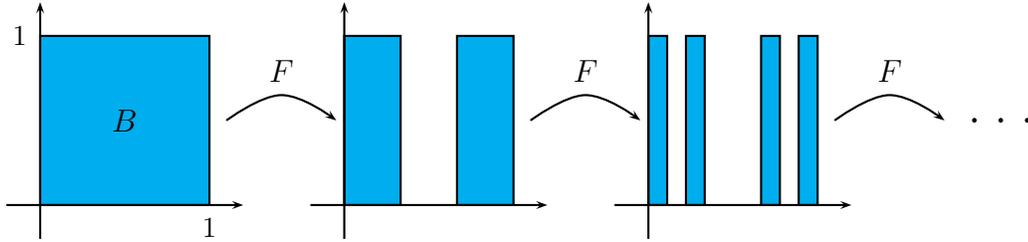


Figura 5.9:

Concluimos que el atractor del **SIF** es el conjunto  $A = \mathcal{C} \times [0, 1]$ .

Nuestra siguiente meta es definir una función  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con las siguientes características: continua en todo  $\mathbb{R}^2$ ; su conjunto de puntos atrapados es exactamente  $A$ ; caótica si la restringimos a  $A$ ; y, por último, que se comporte como un conjunto repulsor.

El primer paso es definir  $G$  en los puntos del atractor  $A$ .

Como  $F(A) = F_1(A) \cup F_2(A) \cup F_3(A) \cup F_4(A)$ , entonces las inversas de cada una de estas cuatro funciones nos dicen cómo definir  $G$ . Sea  $(x, y) \in A$ . Si  $(x, y) \in F_1(A)$  y  $(x, y)$  no es elemento de la unión  $F_2(A) \cup F_3(A) \cup F_4(A)$ , entonces definimos  $G$  en  $(x, y)$  con la regla de correspondencia de la inversa de  $F_1$ . Esta idea nos lleva a esta primera versión de  $G$ : Sea  $(x, y) \in A$ , entonces

$$G(x, y) = \begin{cases} (3x, 2y), & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, 0 \leq y < \frac{1}{2}, \\ (3 - 3x, 2y), & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1, 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ (3x, 2 - 2y), & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \frac{1}{2} < y \leq 1, \\ (3 - 3x, 2 - 2y), & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1, \frac{1}{2} < y \leq 1. \end{cases}$$

Ahora nos fijamos en los puntos que están en alguna intersección  $F_i(A) \cap F_j(A)$ ,  $i \neq j$ .

Sea  $(x_0, \frac{1}{2}) \in F_1(A) \cap F_3(A)$ . El lector puede comprobar que ahí las dos inversas coinciden y sugieren enviar este punto a  $(3x_0, 1)$ . Para puntos  $(x_0, \frac{1}{2})$  en  $F_1(A) \cap F_3(A)$  la situación también se resuelve satisfactoriamente.

Extendemos las cuatro reglas de correspondencia que definen a la función  $G$  primero a todo

el conjunto  $A$  y luego a todo el plano. La nueva  $G$  se ve así:

$$G(x, y) = \begin{cases} (3x, 2y), & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, y \leq \frac{1}{2}, \\ (3 - 3x, 2y), & \text{si } \frac{1}{2} \leq x, y \leq \frac{1}{2} \\ (3x, 2 - 2y), & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq y, \\ (3 - 3x, 2 - 2y), & \text{si } \frac{1}{2} \leq x, \frac{1}{2} \leq y. \end{cases}$$

Observemos que en la función  $G(x, y) = (G_1(x, y), G_2(x, y))$  sucede que  $G_1(x, y)$  sólo depende la variable  $x$  y  $G_2(x, y)$  sólo depende de  $y$ . De hecho  $G$  se puede expresar así:

$$G(x, y) = (P(x), T(y)),$$

donde  $P$  y  $T$  son las funciones que hemos estudiado en buena parte de este capítulo.

Para cada punto  $(x, y)$  y para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $G^n(x, y) = (P^n(x), T^n(y))$ . Si un punto  $(x_0, y_0)$  no pertenece a  $A = \mathcal{C} \times [0, 1]$  entonces  $x_0 \notin \mathcal{C}$  ó  $y_0 \notin [0, 1]$ . En el primer caso  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x_0) = -\infty$ , y en el segundo caso  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(y_0) = -\infty$ . En cualquiera de las dos situaciones se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |G^n(x_0, y_0)| = \infty$ . Así el conjunto  $A$  es invariante bajo  $G$  y es repulsor.

**Proposición 5.9.1.** *La función  $G$  restringida al conjunto  $\mathcal{C} \times [0, 1] = A$  es caótica.*

*Demostración.* **Paso 1.** Sean  $(x_0, y_0)$ , un punto en  $\mathcal{C} \times [0, 1]$ , y  $\varepsilon > 0$ .

Existe  $\delta > 0$  tal que

$$((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap A) \subset B(x_0; \varepsilon) \cap A.$$

Sea  $x_1$ , un punto periódico de  $P$  de periodo  $N$ , contenido en  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  y sea  $y_1$  un punto periódico de  $T$  de periodo  $M$ , contenido en  $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ .

Entonces  $(x_1, y_1) \in B(x_0, \varepsilon) \cap A$  y  $G^{NM}(x_1, y_1) = (x_1, y_1)$ .

**Paso 2.** Sean  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  dos puntos en  $\mathcal{C} \times [0, 1]$ , y sea  $\varepsilon > 0$ . Demostraremos que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $G^n(B((x_0, y_0); \varepsilon) \cap A)$  interseca el conjunto  $B((x_1, y_1); \varepsilon) \cap A$ .

Como en el paso 1, consideremos  $\delta > 0$  tal que  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap A$  está contenido en  $B((x_0, y_0); \varepsilon) \cap A$ .

Entonces existe  $N$  tal que uno de los intervalos utilizados en la definición de  $J(P) = \mathcal{C}$ ,  $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_N}$  está contenido en  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

De aquí se sigue que  $P^{N+1}((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathcal{C}) = \mathcal{C}$ , (ver Ejercicio 5.10.19). También sabemos que existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $T^M((y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap [0, 1]) = [0, 1]$ .

Tenemos, entonces, que  $G^{N+M}(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap A = A$ . Por lo tanto  $G^{N+M}(B(x_0; \varepsilon) \cap A) = A$ . De aquí se sigue

$$G^{N+M}(B((x_0, y_0); \varepsilon) \cap A) \cap (B((x_1, y_1); \varepsilon) \cap A) \neq \emptyset,$$

y con ello que  $G$  es transitiva en  $A$ .

**Paso 3.** Sea  $\varepsilon_0 > 0$  una constante de sensibilidad para la función  $T : [0, 1] \times [0, 1]$ . Demostraremos que este mismo valor sirve como constante de sensibilidad de la función  $G$  restringida al conjunto  $A$ .

Sean  $(x_0, y_0)$  en  $\mathcal{C} \times [0, 1]$  y  $\delta > 0$ . Entonces existen un punto  $y_1$  en el intervalo  $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap [0, 1]$  y  $N \in \mathbb{N}$  tales que

$$|T^N(y_0) - T^N(y_1)| \geq \varepsilon_0.$$

De aquí es inmediato que

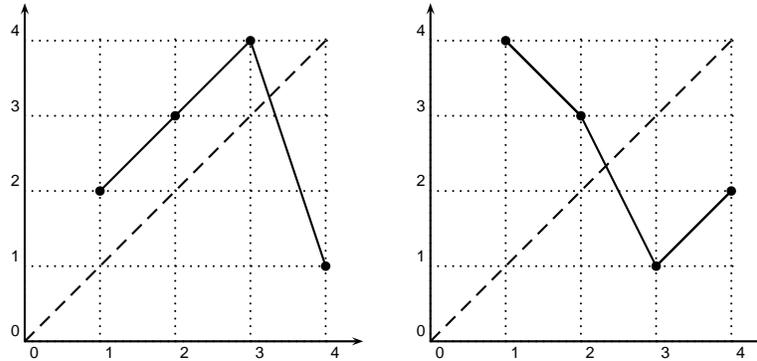
$$d(G^N(x_0, y_0), G^N(x_0, y_1)) \geq \varepsilon_0. \quad \square$$

## 5.10. Ejercicios y algunos comentarios

1. Sea  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ . Demuestre que si  $f$  es suprayectiva, entonces  $f$  tiene, al menos, un punto fijo.
2. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Demuestre que si  $\text{Per}(f) = \emptyset$ , entonces una de las siguientes dos opciones se cumple:
  - a) para todo  $x \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \infty$ , o
  - b) para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = -\infty$ .
3. Sea  $X = (0, 1) \times (0, 1)$ . Muestre, si es que existe, un homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$  sin puntos fijos.
4. Muestre, si es que existe, un homeomorfismo  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  sin puntos fijos.
5. Si  $x_0 \in \text{Per}(f)$ , entonces cada punto  $y \in o(x_0, f)$  es también un punto periódico de  $f$  del mismo periodo de  $x_0$ .
6. Muestre una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que sí tenga puntos de periodo 2 pero no tenga puntos fijos.
7. Verdadero o falso. Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Supongamos que  $f$  es un homeomorfismo. Entonces si  $x_0 \in \text{Per}(f)$ , el periodo de  $x_0$  sólo puede ser 1 ó 2.

8. Sean  $A = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  y  $F : A \rightarrow A$  la función dada por  $F(x, y) = (T(x), T(y))$ . Demuestre que  $\text{Per}(F)$  es denso en  $A$ .

¿Cuántas órbitas periódicas de periodo 3 tiene  $F$ ?



9. El conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$  es una órbita de periodo 4 en cada una de las dos gráficas que aparecen en la figura anterior. Una de ellas es la gráfica de una función que tiene órbitas periódicas de todos los periodos y la otra es la gráfica de una función que sólo tiene órbitas periódicas de periodos 1, 2 y 4. Identifique cuál es cuál.
10. Sean  $X$  un espacio métrico,  $f : X \rightarrow X$  una función transitiva en  $X$  y  $U \subset X$  un conjunto abierto no vacío. Demuestre que la siguiente unión infinita  $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$  es un conjunto abierto y denso en  $X$ .
11. Sean  $X$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$  una función transitiva en  $X$ . Sea  $N$  un número natural fijo. Considere, en  $X$ ,  $N$  conjuntos abiertos no vacíos,  $U_1, \dots, U_N$ , que sean ajenos por parejas. Demuestre que existe un punto  $x_0$  en  $X$  tal que su órbita visita todos estos conjuntos.

Sean  $A$  un subconjunto de  $X$  y  $\varepsilon$  un número positivo. Decimos que  $A$  es un conjunto  $\varepsilon$ -denso en  $X$  si para todo  $x \in X$ , existe  $a \in A$  tal que  $d(x, a) < \varepsilon$ .

12. Sean  $X$  un espacio métrico,  $f : X \rightarrow X$  una función transitiva en  $X$  y  $\varepsilon > 0$ . Demuestre que existe  $x_0 \in X$  tal que la  $o(x_0, f)$  es un conjunto  $\varepsilon$ -denso en  $X$ .

Los ejercicios 5.10.11 y 5.10.12 nos dicen, de alguna manera, que el concepto de transitividad y la existencia de órbitas que recorran casi densamente el espacio están relacionados.

Sea  $X$  un espacio métrico compacto sin puntos aislados y sea  $f : X \rightarrow X$ . Entonces  $f$  es transitiva si y sólo si existe un punto en  $X$  cuya órbita forma un conjunto denso en  $X$ . La demostración de este resultado se puede consultar en [6].

13. Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por  $f(x) = x^2$ . Encuentre todos los puntos con órbita estable bajo  $f$ .
14. Demuestre que la función **Tienda** es sensible a las condiciones iniciales en todo  $\mathbb{R}$ .
15. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $J(f) \neq \emptyset$ , entonces  $f$  tiene al menos un punto fijo.
16. Demuestre que la función corrimiento  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  es continua.
17. Sean  $c$  y  $k$  dos números reales distintos de cero. Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x) = x + c$  y  $g(x) = x + k$ . Demuestre que  $f$  y  $g$  son funciones conjugadas.  
**Sugerencia.** Suponga que el homeomorfismo buscado es de la forma  $h(x) = \alpha x + \beta$ .
18. Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $F(x, y) = (P(x), P(y))$ . Describa el conjunto  $J(F)$  y demuestre que  $F$  restringida a  $J(F)$  es caótica.
19. Sea  $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_N}$  uno de los intervalos utilizados en la definición de  $J(P) = \mathcal{C}$ . Demuestre que la imagen bajo  $P^{N+1}$  del conjunto  $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_N} \cap \mathcal{C}$  es el conjunto  $\mathcal{C}$ .

## Capítulo 6

# Talleres

La interacción con el computador es prácticamente indispensable en el estudio de la geometría fractal. En este capítulo proponemos varios talleres, la mayoría de ellos para ser desarrollados con un programa computacional y paralelamente a la teoría de la siguiente forma: los talleres 1 a 3 apoyan y complementan los tres primeros capítulos. Los talleres 4 a 7 corresponderían al capítulo 4. Además, algunos conceptos teóricos importantes son definidos en los talleres.

## Taller 1: Manejo básico de WinLogo

Para el desarrollo de este taller se necesita disponer de la versión del lenguaje Logo denominado WinLogo<sup>1</sup>. El lenguaje Logo es un lenguaje de programación cuya particularidad reside en el hecho de que fué diseñado específicamente para la enseñanza. Tiene como características principales: programación estructurada, manejo de listas, recursividad y comandos en castellano.

1. Imagine que en la pantalla hay un tablero donde vamos a dibujar, y para esto disponemos de una pequeña tortuga que vive en el tablero de la pantalla, tiene lápices de colores y se caracteriza por ser muy obediente. Para limpiar el tablero y hacer que la tortuga aparezca, digite las letras **bp** (borrar pantalla), luego oprima la tecla enter.
2. La tortuga es capaz de obedecer órdenes expresadas en el lenguaje denominado “idioma de la tortuga”. La orden **avanza** hace que la tortuga se mueva en línea recta en la dirección hacia donde mira; para indicarle cuanto debe avanzar, la orden **av** (avanza) debe ir seguida de un número que corresponda a los pasos que avanzará. Por ejemplo: dígame a la tortuga que avance 30 de sus pasos, con la instrucción:

**Avanza 30**   o   **av 30**

Ella cumple la orden al oprimir la tecla enter.

3. Ensaye: borre la pantalla y dígame a la tortuga que avance, con diferentes números de pasos.
4. Otra orden que obedece la tortuga es **re** (retrocede) la cual le indica que debe caminar hacia atrás; como en la orden anterior se requiere informarle con un número la cantidad de pasos que debe retroceder. Por ejemplo: **Retrocede 60** (enter) o **re 60** (enter).
5. Ensaye: borre la pantalla y pídale a la tortuga que avance al borde inferior de la misma y posteriormente al borde superior.
6. Ahora veamos otras dos órdenes que la tortuga acepta, las cuales modifican la dirección en que mira la tortuga sin afectar su ubicación; **giraderecha**, **giraizquierda**, hacen que la tortuga vuelva su mirada en otra dirección. Igual que en avanza una orden de giro debe contener un número que indique el ángulo (medido en grados) que debe girar la tortuga. Por ejemplo:

**Giraderecha 45** (enter)   o   **gd 45** (enter).

La tortuga gira, sin cambiar de posición 45 grados hacia la derecha.

---

<sup>1</sup>Ver <http://www.wlogo.com/>

Dígale ahora

**giraizquierda** 60 (enter) o **gi** 60 (enter).

Antes de continuar tenga en cuenta las siguientes observaciones: es posible que al comunicarnos con la tortuga se cometan errores tales como: Avanza50 (enter), por el cual el computador le responde (al lado derecho de la parte inferior de la pantalla): “No sé cómo hacer Avanza50”, o: Av (enter) y de la misma forma el computador le responderá: “Faltan datos para Av”.

7. Digite las siguientes instrucciones y observe. (No olvide oprimir la tecla enter al final de cada una)

- |                  |        |        |
|------------------|--------|--------|
| ■ bp             | ■ bp   | ■ bp   |
| gd 90            | gd 150 | gi 60  |
| av 80            | re 70  | av 120 |
|                  | av 90  | gd 80  |
| ■ bp gd 90 av 80 | gi 70  | re 50  |
|                  |        | gd 20  |
|                  |        | av 70  |

8. Con estas instrucciones podemos trazar muchas figuras, por ejemplo:

- bp av 20 gd 90 av 20 gi 90 av 20 gd 90 av 20 gi 90 av 20 gd 90 av 20

¿Qué figura se obtiene en la pantalla?

- bp av 40 gd 90 av 40 gd 90 av 40 gd 90 av 40

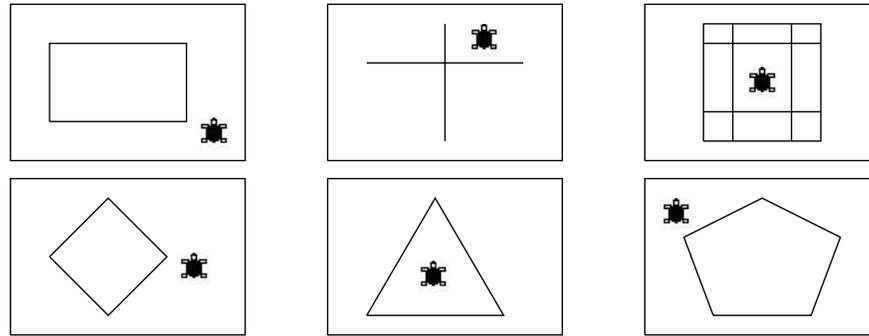
¿Qué figura se obtiene en la pantalla?

- bp gd 30 av 40 gd 120 av 40 gd 120 av 40

¿Qué figura se obtiene en la pantalla?

9. Cuando necesite que la tortuga avance sin dejar trazo, utilice la orden **sl** (sube lápiz) y no olvide para cuando ya desee el trazo, decirle **bl** (baja lápiz). Ensaye esas instrucciones.

10. Dibuje cada una de las gráficas siguientes: (no olvide primero limpiar la pantalla)



11. Digite las siguientes instrucciones:

bp gd 90 av 30 sl av 15 bl av 10 sl av 10 bl av 10

¿Qué figura observa?

12. Déle a la tortuga las órdenes necesarias para dibujar un cuadrilátero regular (un cuadrado) y un triángulo equilátero.

Observe: ¿algunas órdenes se repiten varias veces?, ¿qué órdenes se repiten y cuántas veces?

**Repite** es un nuevo comando que le va a ayudar a dibujar polígonos regulares, de manera fácil y rápida. Aquí tiene un ejemplo de cómo se usa este nuevo comando.

**repite** *n* [**com1** **arg1** **com2** **arg2** etc. ...]

El comando **repite** necesita tener corchetes. Los corchetes contienen los comandos y los argumentos que hemos de repetir. (Recuerde que el comando es el **qué hacer** y el argumento es **cuántas veces**). Intente usar este nuevo comando para hacer diferentes polígonos regulares (triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, etc.).

13. Hasta ahora usted ha trabajado en el modo de “comandos directos”. Ha llegado el momento de que le enseñe a la tortuga nuevos procedimientos que ella pueda recordar. Por ejemplo, hacer un polígono de  $n$  lados de una longitud de lado  $\ell$ . Para ello necesitará dos nuevos comandos: **para nombre del procedimiento** *opciones*, para iniciar el modo de enseñanza, y **fin** para acabar con la lección.

a) Escriba “**para poligono** : $n$  :lado” y pulse enter.

b) Escriba sus comandos para hacer un polígono, por ejemplo:

**repite** : $n$  [av :lado gd 360/: $n$ ]

y pulse enter.

c) Ahora escriba **fin** para acabar la lección de su tortuga y pulse enter.

La **ventana de trabajo** mostrará un mensaje diciendo “poligono definido”.

- d) Escriba **poligono 6 100** y pulse enter, ¿qué dibuja la tortuga?
- e) Haga que la tortuga dibuje un pentágono regular y un eneágono regular.

A continuación le presentamos una tabla para que recuerde algunos de los comandos básicos del “idioma de la tortuga”.

PRIMITIVA	CÓDIGO	DESCRIPCIÓN
Borrar pantalla	<b>bp</b>	Borra todo lo que esté en el área de gráficos
Avanza n	<b>av n</b>	Avanza, mueve la tortuga n pasos hacia delante
Retrocede n	<b>re n</b>	Retrocede, mueve la tortuga n pasos hacia atrás
Gira a la derecha n	<b>gd n</b>	Gira la tortuga hacia la derecha n grados
Gira a la izquierda n	<b>gi n</b>	Gira la tortuga hacia la izquierda n grados
Baja lápiz	<b>bl</b>	Baja la pluma
Sube lápiz	<b>sl</b>	Sube la pluma
Goma	<b>goma</b>	Cambia la pluma por el borrador
Ocultar la tortuga	<b>ot</b>	Hace invisible la tortuga
Muestra la tortuga	<b>mt</b>	Hace visible la tortuga
Repite	<b>Repite n [ ... ]</b>	Permite repetir n veces una lista de instrucciones

## Taller 2: Creando Fractales con WinLogo

Continuamos usando el lenguaje Winlogo para, ahora si, iniciar la creación de conjuntos fractales. En el capítulo 1, sección 1.3, se describe la construcción de cuatro importantes fractales, en todos los casos partiendo de una figura inicial (paso 0), y efectuando sobre ella ciertos cambios para obtener una sucesión de figuras. Llamaremos también **semilla** a la figura inicial o “paso 0”, y **producción** a la segunda figura o “paso 1” del proceso de construcción fractal.

1. Inventar una semilla y una producción que generen una figura de tipo fractal (en el plano).
2. Escribir las instrucciones en WinLogo para graficar el “paso 1” de los siguientes fractales:
  - La curva de Koch.
  - El triángulo de Sierpiński.
  - La isla de Koch.
  - La carpeta de Sierpiński.
  - El fractal que usted ideó en el punto 1.
3. A continuación se encuentran programas en lenguaje LOGO que generan la curva de Koch y otros fractales. Cópuelos en el computador (no es muy importante por ahora entender plenamente la estructura del programa, ya que para esto se necesitan instrucciones del lenguaje LOGO más avanzadas); y ¡deléitese observando la forma como la tortuga construye el fractal!

⊛ **Programa 1: *La curva de Koch***

```
para koch :paso :lado
  si :paso = 0 [av :lado alto]
  koch :paso-1 :lado/3 gi 60
  koch :paso-1 :lado/3 gd 120
  koch :paso-1 :lado/3 gi 60
  koch :paso-1 :lado/3
fin
```

Este programa trabaja con dos variables **:paso** y **:lado**. Para ejecutar el programa debe “llamarlo” e indicar dos valores determinados para las variables; por ejemplo digite: **koch 0 100** y oprima la tecla enter. ¿Qué dibuja la tortuga?

Siga ensayando con los siguientes u otros valores arbitrarios que usted elija:

**koch 1 100;      koch 2 150;      koch 5 300;      koch 7 250.**

Observando lo que dibuja la tortuga en cada caso, explique el significado de las variables **:paso** y **:lado**.

⊗ **Programa 2: *Isla de Koch***

```
para isla :paso :lado
  repite 3 [koch :paso :lado gd 120]
fin
```

Observe que para ejecutar este programa es necesario haber definido con anterioridad el programa que genera la curva de Koch. Repita el mismo proceso que se realizó en el programa 1, escogiendo valores arbitrarios:

**isla 1 100;      isla 2 150;      isla 5 300;      isla 4 200.**

⊗ **Programa 3: *Pentágono***

```
para pentagono :paso :lado
  haz "contraccion (suma 3 raizcuadrada 5)/2
  si :paso = 0 [av :lado alto]
  gi 36 pentagono :paso-1 :lado/:contraccion gi 72
  pentagono :paso-1 :lado/:contraccion gd 144
  pentagono :paso-1 :lado/:contraccion gd 72
  pentagono :paso-1 :lado/:contraccion gi 72
  pentagono :paso-1 :lado/:contraccion gi 72
  pentagono :paso-1 :lado/:contraccion gd 36
fin
```

Repita el mismo proceso, escogiendo valores arbitrarios:

**pentagono 1 100;      pentagono 2 150;**  
**pentagono 3 300;      pentagono 5 250.**

¿Qué dibuja la tortuga en cada caso?

⊗ **Programa 4: *Dragón de Sierpiński***

```
para dragon :paso :lado :signo
  si :paso = 0 [av :lado alto]
  gi 60*:signo
  dragon :paso-1 :lado/2 :signo gd 60*:signo
  dragon :paso-1 :lado/2 :signo gd 60*:signo
  dragon :paso-1 :lado/2 :signo gi 60*:signo
fin
```

En este programa *:signo* toma los valores de -1 o 1. Repita el mismo proceso que se realizó en los programas anteriores. Interprete el significado de la variable *:signo*.

⊛ **Programa 5**

El siguiente algoritmo genera un triángulo rectángulo y es auxiliar del programa principal que se presenta después.

```
para triangulo :lado
av :lado gd 90 av :lado gd 135 av :lado*(raizcuadrada 2) gd 135
fin
```

**Programa principal:**

```
para tri :paso :lado
si :paso=0 [triangulo :lado alto]
tri :paso-1 :lado/2 sl av :lado/2 bl
tri :paso-1 :lado/2 sl gd 90 av :lado/2 gi 90 bl
tri :paso-1 :lado/2 sl re :lado/2 gi 90 av :lado/2 gd 90 bl
fin
```

“Bautice” con un nombre apropiado el programa 5.

⊛ **Programa 6: *Triángulo de Sierpiński***

Se presenta primero un algoritmo auxiliar que hace un cuadrado de color azul y se usará en el programa principal.

```
para cuadrado :lado
poncl 5 repite 4 [av :lado gd 90]
sl av :lado/2 gd 90 av :lado/2 bl rellena
sl re :lado/2 gd 90 av :lado/2 gd 180 bl
fin
```

**Programa principal:**

```
para sierpinski :paso :lado
si :paso=0 [cuadrado :lado alto]
sierpinski :paso-1 :lado/2 gd 90 sl av :lado/2 gi 90 bl
sierpinski :paso-1 :lado/2 sl av :lado/2 bl
sierpinski :paso-1 :lado/2 sl re :lado/2 gi 90 av :lado/2 gd 90 bl
fin
```

Compare los programas 5 y 6. ¿Qué similitud y qué diferencias encuentra? Discuta con sus compañeros y escriba alguna conclusión.

⊗ **Programa 7: *Carpeta de Sierpiński***

**Algoritmo auxiliar:**

```

para cuadrorr :lado
poncl 5 repite 4 [av :lado gd 90] sl av :lado/3 gd 90 av :lado/3 gi 90 bl rellena
poncl 16 repite 4 [av :lado/3 gd 90] sl av :lado/9 gd 90 av :lado/9 bl rellena
sl re 4* :lado/9 gi 90 re 4* :lado/9 bl poncl 5
fin

```

**Programa principal:**

```

para carpeta :paso :lado
si :paso=0 [cuadrado :lado alto]
si :paso=1 [cuadrorr :lado alto]
repite 4 [carpeta :paso-1 :lado/3 cuadrorr :lado/3 av :lado/3
          carpeta :paso-1 :lado/3 cuadrorr :lado/3 av 2* :lado/3 gd 90]
fin

```

Observe que este programa hace uso de dos programas auxiliares: el programa *cuadrado* del programa 6 y el programa *cuadrorr*. Explique cómo hace la tortuga para rellenar de color una figura y qué hace el programa *cuadrorr*.

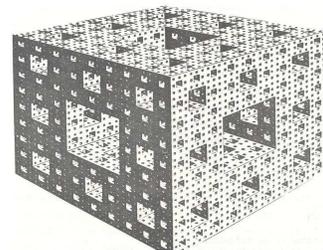
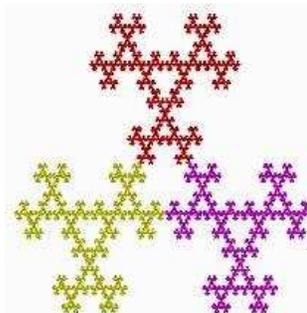
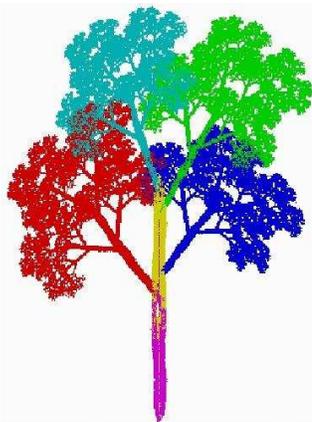
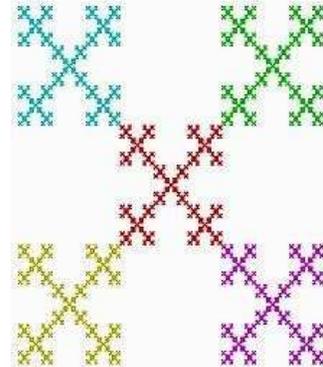
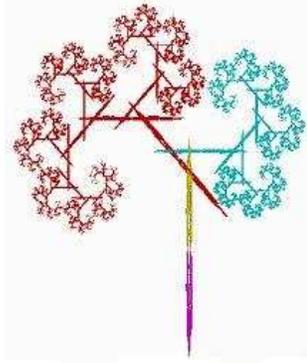
4. Escriba un programa que genere el fractal que usted inventó en el punto 1.

## Taller 3: Transformaciones afines y autosemejanza—Parte I

*... sucede que a veces vemos las partes tan complejas como el todo...*

Para el desarrollo de este taller se necesita: algunos conocimientos básicos de álgebra lineal, mucha imaginación, actitud mental positiva y una buena capacidad de asombro!

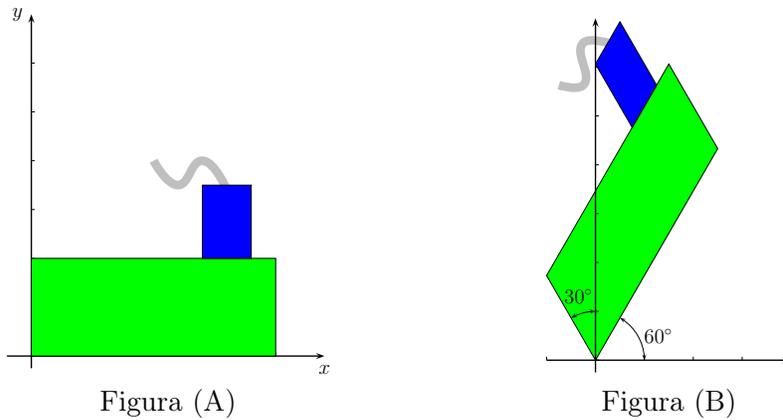
1. a) Observe atentamente las siguientes figuras:



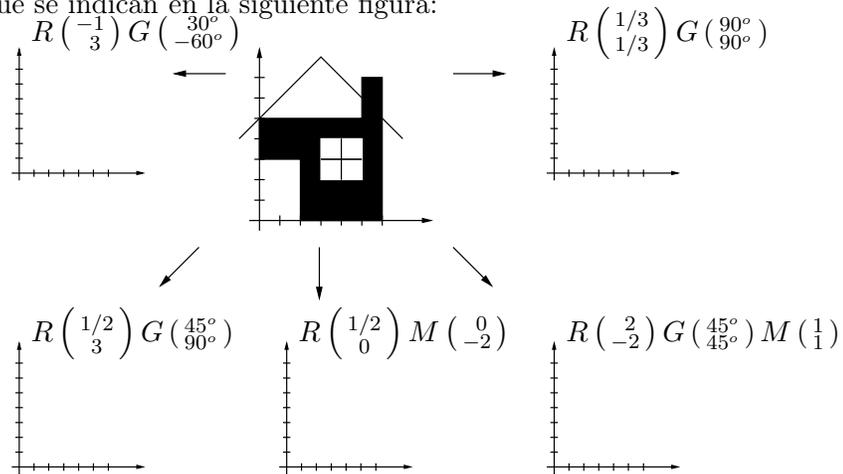
- b) Recuerde la noción intuitiva de autosemejanza: *“un objeto se dice autosemejante si está formado por varias copias de sí mismo, sólo que reducidas y puestas en diferente posición”*.
- c) Para cada una de las figuras anteriores, responda: ¿es autosemejante?, ¿por qué?
- d) Dé otros ejemplos de figuras, objetos o fenómenos de la naturaleza que sean autosemejantes.
2. Para una figura o cualquier subconjunto del plano, adoptemos la siguiente notación “provisional”:
- i)  $R\left(\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix}\right)$ : Hacer un “reescalamiento” de la figura:
- (a) multiplicando por  $|r|$  en sentido horizontal y, si  $r < 0$ , reflejando respecto al eje  $Y$  y

- (b) multiplicando por  $|s|$  en sentido vertical, y, si  $s < 0$ , reflejando respecto al eje  $X$ .
- ii)  $G_{\phi}^{\theta}$ : Girar cada segmento horizontal de la figura un ángulo  $\theta$  y cada segmento vertical un ángulo  $\phi$ .
- iii)  $M_{f,e}^e$ : Mover la figura  $|e|$  unidades en sentido horizontal, (hacia la derecha si  $e \geq 0$ , hacia la izquierda si  $e < 0$ ), y  $|f|$  unidades en sentido vertical, (hacia “arriba” si  $f \geq 0$ , hacia “abajo” si  $f < 0$ ).

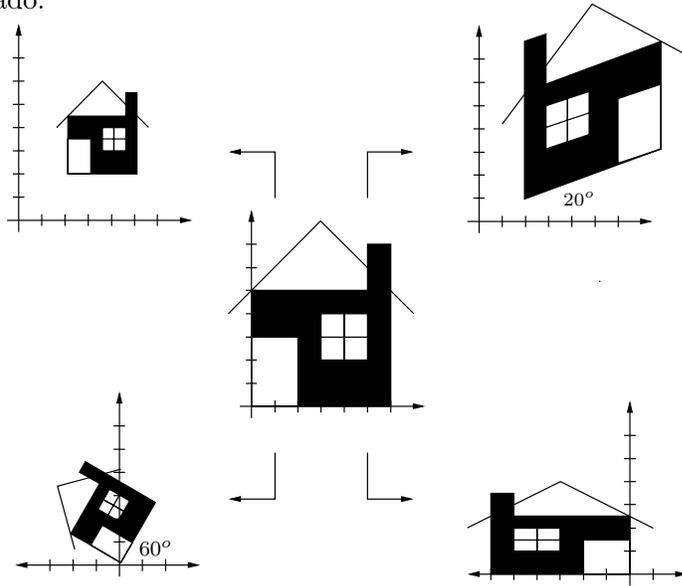
**Nota.** Debe tenerse presente que en la transformación  $G_{\phi}^{\theta}$ , el giro  $\theta$  horizontal, es totalmente independiente del giro  $\phi$  vertical. Por ejemplo si aplicamos la transformación  $G_{30^{\circ}}^{60^{\circ}}$  a la Figura (A) quedaría aproximadamente como se muestra en la Figura (B).



- (a) Dibuje cómo quedaría la casita al aplicarle cada grupo de cambios o transformaciones que se indican en la siguiente figura:



- (b) Escriba, según la notación provisional, las transformaciones que producen el efecto indicado:



3. Una **Transformación Afín** en el plano es una función  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la forma:

$$T(X) = AX + W \quad (\text{Notación matricial})$$

donde  $A$  es una matriz  $2 \times 2$ ,  $X$  es el vector variable y  $W$  es el vector (constante) de desplazamiento, es decir, una transformación afín en el plano es de la forma:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad (\text{Notación cartesiana})$$

donde  $a, b, c, d, e$  y  $f$  son constantes reales.

- a) Explique la siguiente afirmación:

*Una transformación afín es una transformación lineal, seguida de un desplazamiento.*

- b) Dé dos ejemplos de transformaciones afines en el plano encontrando las imágenes de diferentes vectores o puntos del plano y grafique en un plano cartesiano.

4. Dados los puntos:  $(0, 0)$ ,  $(0, 4)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(1, 0)$  en un plano cartesiano:

- a) Una los puntos en el orden dado para obtener una figura en el plano.
- b) Dibuje la imagen de la figura obtenida bajo cada una de las siguientes transformaciones afines y en cada caso describa (con palabras) el efecto geométrico de cada transformación (recuerde que si  $A_{2 \times 2}$  es la matriz estándar de una transformación lineal en el plano, entonces las columnas de  $A$  son las imágenes bajo la

transformación de los vectores unitarios  $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$T_5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

c) Describa el efecto geométrico que produce una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

(Sugerencia: Considere los casos  $k > 1$ ,  $0 < k < 1$ ,  $-1 < k < 0$ ,  $k < -1$ ,  $k = -1$ ,  $k = 0$  y  $k = 1$ )

d) Describa el efecto geométrico de las matrices:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

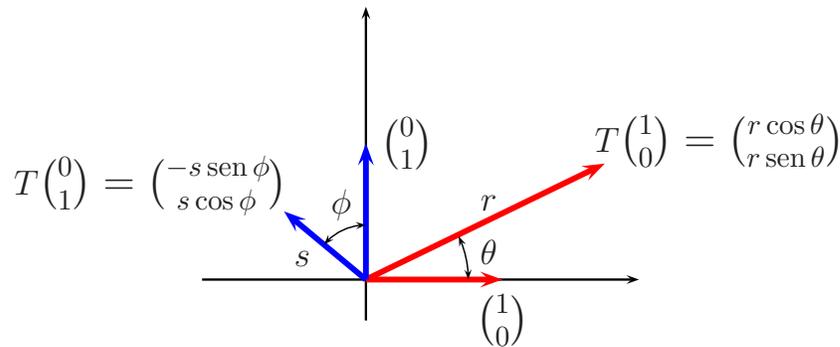
## Taller 4: Transformaciones afines y autosemejanza—Parte II

*... sucede que a veces vemos las partes tan complejas como el todo...*

Para el desarrollo de este taller se necesita: algunos conocimientos básicos de álgebra lineal, mucha imaginación, actitud mental positiva y una buena capacidad de asombro!

5. Una transformación afín en el plano también se puede representar de la forma:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -s \sin \phi \\ r \sin \theta & s \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad (\text{Notación geométrica})$$



**Figura 6.1:** Columnas de la matriz estándar de  $T$ .

donde cada uno de los parámetros  $r$ ,  $s$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $e$  y  $f$  se interpretan así:

- $r$  : indica el cambio de escala en el eje  $X$   
(si  $r < 0$  indica además una reflexión con respecto al eje  $Y$ )
- $s$  : indica el cambio de escala en el eje  $Y$   
(si  $s < 0$  indica además una reflexión con respecto al eje  $X$ )
- $\theta$  : indica el giro del eje  $X$
- $\phi$  : indica el giro del eje  $Y$
- $e$  : indica el desplazamiento horizontal
- $f$  : indica el desplazamiento vertical

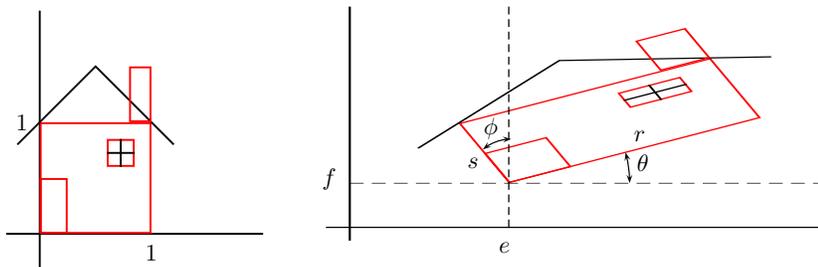
Discuta el efecto geométrico de  $T$  cuando:

- a)  $r = s$  y  $\theta = \phi = 0$ ,      b)  $r = s = 1$ ,      c)  $r = s$ ,  $|r| < 1$  y  $\theta = \phi$ .

6. Una **similitud directa** es una transformación afín de la forma:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$r$  se llama el **factor de escala** de la similitud.



**Figura 6.2:** Transformación afín en el plano.

- a) Analice y explique la siguiente afirmación:

*Una similitud directa conserva los ángulos.*

- b) Escriba en notación geométrica y cartesiana cada una de las transformaciones presentadas en notación provisional, en el punto 2. ¿Cuáles de ellas son similitudes directas?

7. Para las similitudes directas existe una notación “más práctica” que llamaremos **notación compleja** y que se deduce fácilmente al identificar el vector columna  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  con el número complejo  $z = x + iy$ , recordar cómo se multiplican matrices y recordar la identidad  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ . De esta manera una similitud directa con factor de escala  $r$ , ángulo de giro  $\theta$  y vector de desplazamiento  $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ , se puede escribir como

$$f(z) = rze^{i\theta} + e + fi \quad (\text{Notación Polar})$$

8. Considere las siguientes similitudes directas:

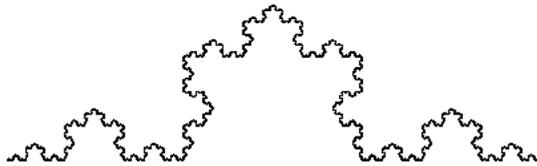
$$f_1(z) = \frac{1}{2}z, \quad f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \quad f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}i$$

- a) Describa brevemente el efecto geométrico de cada similitud.
- b) Para el triángulo  $A_0$  de vértices  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  y  $(1,0)$ , dibuje **en un mismo plano** cómo queda el triángulo al aplicarle  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$ . Llame  $A_1$  la figura obtenida.
- c) Dibuje en otro plano como queda  $A_1$  al aplicarle  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$ . Llame  $A_2$  a la figura obtenida y repita el proceso las veces que quiera (o que pueda).
- d) Observe la sucesión  $A_0, A_1, A_2, \dots$  de figuras obtenidas y especule todo lo que quiera! (¿el proceso termina?, ¿qué ocurre con las figuras  $A_0, A_1, A_2, \dots$  a medida que se avanza en la sucesión?, ¿qué características tienen las figuras obtenidas?). Vuelva al punto 1. de este taller, observe, compare, analice, hágase preguntas y siga especulando.

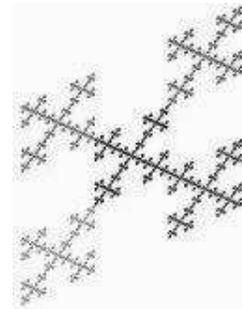
9. Diremos que un conjunto  $A$  es **autosimilar** si existen similitudes  $f_1, f_2, \dots, f_n$  tales que  $A = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_n(A)$ . Más generalmente, diremos que un conjunto  $A$  es **autoafín** (o **autosemejante**) si existen transformaciones afines  $f_1, f_2, \dots, f_n$  tales que  $A = f_1(A) \cup \dots \cup f_n(A)$ .

La sucesión de conjuntos que se formó en el punto anterior, tiene un “límite” o mejor un “conjunto límite”  $A$ . Este conjunto  $A$  es autosimilar, (generado por tres similitudes) y es un ejemplo clásico de un conjunto fractal.

- Analice la autosemejanza de cada una de las figuras del punto 1. de este taller y determine con cuántas transformaciones afines se puede generar cada una de ellas.
- No todos los conjuntos autosemejantes son tan “vistosos” o “llamativos”: verifique que un cuadrado cualquiera es autosimilar (por ejemplo con:  $f_1(z) = \frac{1}{2}z$ ,  $f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$ ,  $f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}i$ ,  $f_4(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ).
- Identifique las transformaciones afines que hacen que cada uno de los siguientes conjuntos sea autosemejante:



CURVA DE KOCH



VICSEK GIRADO

- ¿Se le parece la curva de Koch a algún elemento de la naturaleza? Explique.
- Si pudiera “deslizar” el dedo a lo largo de la curva de Koch, ¿qué sensación piensa que le produciría?, ¿por qué?
- Si se piensa en la curva de Koch como una función de dominio  $[0, 1]$  y codominio  $\mathbb{R}^2$ , ¿es continua esta función?, ¿es derivable? Argumente.

Muchos conjuntos de tipo fractal se pueden obtener mediante un proceso análogo al

realizado en el punto 8:

$f_1, f_2, \dots, f_n$  un número finito de transformaciones afines

$A_0$  una figura inicial

$$A_1 = f_1(A_0) \cup f_2(A_0) \cup \dots \cup f_n(A_0)$$

$$A_2 = f_1(A_1) \cup f_2(A_1) \cup \dots \cup f_n(A_1)$$

$\vdots$

$$A_k = f_1(A_{k-1}) \cup f_2(A_{k-1}) \cup \dots \cup f_n(A_{k-1})$$

$\vdots$

la sucesión  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k, \dots \rightarrow A$

$A$  es autosemejante.

10. Tome  $A_0$  el cuadrado de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 1)$ , y las similitudes  $f_1(z) = \frac{1}{3}z$ ,  $f_2(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}$ .

- a) Efectúe cuidadosamente el proceso descrito anteriormente.
- b) ¿Reconoce el conjunto límite de la sucesión obtenida?, Este conjunto tiene “nombre propio” famoso en matemáticas, pues constituye un ejemplo muy importante en topología y análisis. ¿Cómo se llama?

## Taller 5: El juego de la semilla y la producción

*... estructuras complejas cuya génesis es muy sencilla...*

Para el desarrollo de este taller necesitará varias hojas de papel milimetrado y reglas o escuadras.

Recuerde la construcción del conjunto de Cantor, la curva de Koch, el triángulo de Sierpiński y la carpeta de Sierpiński, a partir de una semilla y una producción. (Veáse el Taller 2.)

### 1. Tomemos medidas:

- (a) Para el conjunto de Cantor, suponga que la semilla tiene longitud 1. ¿Cuál es la longitud de la producción o segunda figura de la sucesión?, ¿cuál es la longitud de la tercera figura?, ¿de la cuarta?, ..., ¿de la  $n$ -ésima figura? ¿Cuál es la longitud del conjunto de Cantor?
- (b) De manera análoga a la anterior, calcule la longitud de la curva de Koch.
- (c) Para el triángulo de Sierpiński, suponga que la semilla tiene área 1. ¿Cuál es el área de la producción o segunda figura de la sucesión?, ¿cuál es el área de la tercera figura?, ¿de la cuarta?, ..., ¿de la  $n$ -ésima figura? ¿Cuál es el área del triángulo de Sierpiński?
- (d) De manera análoga, calcule el área de la carpeta de Sierpiński.
- (e) Discuta la siguiente afirmación: “el triángulo de Sierpiński no es un triángulo”. Escriba una conclusión al respecto (mínimo media página).

2. Para la semilla y la producción que se le dan a continuación (el profesor asignará a cada estudiante o grupo de estudiantes una semilla y una producción), dibuje (en las hojas de papel milimetrado), al menos las primeras cuatro figuras de la sucesión que se genera, o las que considere necesarias para tener una idea clara de cómo es el respectivo conjunto límite. Describa dicho conjunto límite, (autosemejanza, irregularidad, longitud, área, etc.).

3. Realice lo mismo del punto anterior para la semilla y producción que usted propuso en el punto 1 del Taller 2.

4. Como seguramente lo habrá notado desde el comienzo de este taller, (y si ya desarrolló el taller anterior), en cada ejemplo trabajado, aplicar la producción no es otra cosa que aplicar a cada figura obtenida, un número finito de transformaciones afines (las mismas en cada paso), para obtener la figura siguiente.

Identifique para la curva de Koch, el triángulo de Sierpiński y la carpeta de Sierpiński, las transformaciones afines correspondientes, en forma geométrica, cartesiana y, en caso de tratarse de una similitud, también en notación compleja. Para cada fractal construya una tabla donde aparezcan las transformaciones afines que lo generan con sus respectivos parámetros correspondientes a la forma geométrica. Por ejemplo para el triángulo de Sierpiński, se necesitan tres transformaciones  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$  y la tabla que debe completar sería como la siguiente:

	$r$	$s$	$\theta$	$\phi$	$e$	$f$
$T_1$						
$T_2$						
$T_3$						

5. Identifique para el fractal que usted inventó en el punto 1 del Taller 2, y también para el fractal que usted trabajó en el punto 2 del presente taller, las transformaciones afines correspondientes, en forma geométrica, cartesiana y, en caso de tratarse de una similitud, también en notación compleja. Para cada fractal construya la correspondiente tabla, como se explicó en el punto anterior.

## Taller 6: Generando fractales con FRACLIN

*... eran como bellos durmientes esperando el beso mágico de un ordenador...*

Para el desarrollo de este taller necesita disponer de un computador y del programa “**Fraclin1.2**”, diseñado por Fernando Pérez.

**Fraclin1.2** es una versión mejorada por el mismo autor, Fernando Pérez, quien diseñó la versión original llamada “Fractales” en el año 1991, siendo estudiante del Departamento de Física de la Universidad de Antioquia y como parte de un proceso de simulación de procesos físicos y matemáticos en computador.

1. Una vez esté ubicado dentro del programa explore todos y cada uno de los menús con sus respectivas ventanas; en particular, lea atenta y cuidadosamente los menús **Instrucciones**, e **Información**, (en este último podrá repasar algunos de los conceptos ya trabajados y encontrará nuevos datos e ideas muy interesantes).
2. Deténgase especialmente en el menú **operar**, observe cada fractal presentado en la ventana **DEMO** y reconozca sus correspondientes transformaciones afines.
3. Realice los ejercicios propuestos en el menú **Sugerencias**.
4. Escoja uno de los fractales presentados en **DEMO**.

Observe atentamente las transformaciones afines que generan el fractal.

- ¿Cuántas son?
  - ¿Cuáles son similitudes directas?
  - Describa con palabras el efecto geométrico de cada transformación.
5. Continuando con el fractal que escogió en el punto anterior, vaya a la ventana **ECUACIONES** y con la opción **EDITAR** varíe algún(os) parámetro(s) de las transformaciones, tratando de predecir el efecto que producirán sobre la figura dichos cambios; luego vaya a **GRAFICAR** y observe atentamente lo que ocurre (quizá deba hacer algunos ajustes en **PANTALLA** para obtener una imagen satisfactoria). A manera de ejemplo, podría seguir un esquema como el siguiente:

### Ejemplo:

Fractal Escogido: helecho

Transformación modificada:  $T_3$

Parámetro cambiado:  $B_1$ ; valor original: 0, nuevo valor: 1

Efecto producido en el fractal: las ramitas del lado derecho se “desprendieron” del tallo del helecho.

6. Con la opción **CREAR**, introduzca los parámetros de las transformaciones correspondientes a un fractal inventado por usted. Grafíquelo y ¡deléitese observándolo!  
Haga lo mismo para el fractal que le fue asignado en el punto 2 del taller anterior.
7. **Siga jugando**: haga variaciones de su fractal, como en el punto 5. Escoja dos de las variaciones que más le gusten. “Bautice” su fractal y sus respectivas variaciones, ¡grábelos, imprímalos y disfrútelos!, (para cada fractal que imprima indique sus respectivas transformaciones y una breve explicación).

## Taller 7: Movimientos del atractor de un SIF

Para el desarrollo de este taller necesita disponer del programa computacional Fraclin 1.2

1. Inicie con el fractal curva de Koch. Con EDITAR, introduzca los parámetros indicados:

TN	$r$	$s$	$\theta$	$\phi$	$B1$	$B2$
T1	0,333	0,333	0	0	0	0
T2	0,333	0,333	0	0	0,333	0
T3	0,333	0,333	60	60	0,166	0
T4	-0,333	0,333	-60	-60	0,333	0

¿Qué figura se obtiene?

2. Las siguientes funciones generan el triángulo de Sierpiński luego de un movimiento.

TN	$r$	$s$	$\theta$	$\phi$	$B1$	$B2$
T1	0,5	0,5	0	0	1,5	2,0
T2	0,5	0,5	0	0	2,0	2,0
T3	0,5	0,5	0	0	1,75	2,5

¿Cuál?

3. Las siguientes transformaciones generan un árbol. Compárelas con las del árbol predefinido de FRACLIN. ¿Qué cambios encuentra en las figuras y en las funciones?

TN	$r$	$s$	$\theta$	$\phi$	$B1$	$B2$
T1	0,05	0,60	0,00	0,00	-1,90	0,40
T2	0,05	-0,50	0,00	0,00	-1,90	2,50
T3	0,60	0,50	40,3	40,1	-0,76	2,00
T4	0,50	0,45	19,9	19,7	-0,91	2,02
T5	0,50	0,53	-30,2	-31,9	-1,42	1,05
T6	0,55	0,40	-39,8	-40	-1,42	0,69

4. Obtenga con FRACLIN los atractores que se piden en el ejercicio 4.6.14.
5. Obtenga el árbol predeterminado de FRACLIN, con un giro de  $90^\circ$ .

# Apéndice A

## La desigualdad de Cauchy–Schwarz

En el ejemplo 2.1.2.3 se usó la siguiente desigualdad:

Para cualesquiera  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  se cumple

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2). \quad (\text{A.1})$$

Llamada la desigualdad de Cauchy-Schwarz (en  $\mathbb{R}^2$ ). Demostraremos aquí una versión más general de esta desigualdad, para lo cual recordaremos rápidamente algunos conceptos del álgebra lineal, más exactamente del espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ :

$$\mathbb{R}^n =: \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}.$$

En  $\mathbb{R}^n$  se define una “suma” y un “producto” por escalar como sigue: dados  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces:

$$\begin{aligned} X + Y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ \alpha X &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n). \end{aligned}$$

De modo que  $\langle \mathbb{R}^n, +, \cdot \rangle$  es un espacio vectorial.

Dados  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  en  $\mathbb{R}^n$ , definimos la *norma* de  $X$  y el *producto interior* de  $X$  e  $Y$ , denotados  $\|X\|$  y  $X \cdot Y$  respectivamente por:

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad (\text{A.2})$$

$$X \cdot Y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n. \quad (\text{A.3})$$

El producto interior satisface las siguientes propiedades:  $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ :

1.  $X \cdot X = \|X\|^2$ ,
2.  $X \cdot Y = Y \cdot X$ ,

$$3. X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z,$$

$$4. \alpha(X \cdot Y) = (\alpha X) \cdot Y = X \cdot (\alpha Y).$$

Veamos que para cualesquier  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  se cumple:

$$(X \cdot Y)^2 \leq (X \cdot X)(Y \cdot Y). \quad (\text{Desigualdad de Cauchy–Schwarz})$$

(Obsérvese que en el caso particular  $X = (a_1, a_2)$  e  $Y = (b_1, b_2)$  se obtendría justamente (A.1)).

Si  $\alpha \in \mathbb{R}$ , es claro que

$$\begin{aligned} (X - \alpha Y) \cdot (X - \alpha Y) &= \|X - \alpha Y\|^2 \geq 0 \\ \Rightarrow X \cdot X - 2\alpha X \cdot Y + \alpha^2 Y \cdot Y &\geq 0 \\ \Rightarrow \|X\|^2 - 2\alpha X \cdot Y + \alpha^2 \|Y\|^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Consideremos ahora la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(\alpha) = A\alpha^2 + B\alpha + C,$$

donde  $A := \|Y\|^2 \geq 0$ ,  $B := -2X \cdot Y$ ,  $C := \|X\|^2 \geq 0$ .

De modo que la gráfica de  $f$  es una parábola que se “abre” hacia arriba y puesto que  $f(\alpha) \geq 0$ , entonces  $f$  tiene a lo más una sola raíz real, lo cual implica que  $B^2 - 4AC \leq 0$ , es decir:

$$4(X \cdot Y)^2 - 4\|Y\|^2 \|X\|^2 \leq 0,$$

de donde se obtiene que:

$$(X \cdot Y)^2 \leq (X \cdot X)(Y \cdot Y). \quad \square$$

## Apéndice B

# Algunas propiedades del conjunto de Cantor

(1).  $\mathcal{C}$  tiene longitud cero:

$$\begin{array}{ll} C_0 : \text{—————} & \text{long}(C_0) = 1 \\ C_1 : \text{———} \quad \text{———} & \text{long}(C_1) = \frac{2}{3} \\ C_2 : \text{—} \text{—} \quad \text{—} \text{—} & \text{long}(C_2) = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ & \vdots \\ & \text{long}(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{array}$$

En consecuencia se tiene que  $\text{long}(\mathcal{C}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ .

(2).  $\mathcal{C}$  no contiene intervalos de la forma  $(a, b)$ ,  $a < b$ :

Si existiera  $(a, b) \subseteq \mathcal{C}$  se tendría:

$$0 < b - a = \text{long}(a, b) \leq \text{long}(\mathcal{C}) = 0 \quad \Rightarrow \Leftarrow$$

(3).  $\mathcal{C}$  es cerrado: (luego  $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$ )

Recordemos que  $\mathcal{C}$  se definió como:  $\mathcal{C} := \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$ , donde:

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\ &\vdots \\ C_j &= \bigcup_{k=1}^{2^j} C_{jk} \end{aligned}$$

donde cada  $C_j$  es cerrado, pues es una **unión finita de cerrados**.

Por tanto  $\mathcal{C}$  es una intersección de cerrados, luego  $\mathcal{C}$  es cerrado.

- (4).  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ : Como  $\mathcal{C}$  es cerrado,  $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$ ; pero por otra parte  $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$  (Proposición 2.5.18), luego  $\mathcal{C} = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$  lo que implica que  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ .

Para la otra contención usaremos el hecho de que  $\mathcal{C}$  es equivalente al espacio de códigos  $\Sigma^{\mathbb{N}}$ , con  $\Sigma = \{1, 2\}$  (Ver Ejemplo 2.1.2.(5)). Probaremos entonces que  $\Sigma^{\mathbb{N}} \subseteq (\Sigma^{\mathbb{N}})'$ .

Sea  $\mathbf{x} = x_1x_2x_3 \cdots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Debemos probar que  $(B(\mathbf{x}; \varepsilon) - \{\mathbf{x}\}) \cap \Sigma^{\mathbb{N}} \neq \emptyset$ .

Es claro que existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{3^k} < \varepsilon$ . Sea  $\mathbf{y} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  definido como sigue:

$$y_i = x_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k, \quad y_{k+1} \neq x_{k+1}, \quad y_i \in \Sigma, \quad \forall i \geq k+2.$$

Claramente  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$  pues  $y_{k+1} \neq x_{k+1}$ .

Ahora:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{3^i} = \sum_{i=1}^k \frac{|x_i - y_i|}{3^i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{3^i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_{k+i} - y_{k+i}|}{3^{k+i}} = \frac{1}{3^k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_{k+i} - y_{k+i}|}{3^i} \end{aligned}$$

Como  $x_{k+i}, y_{k+i} \in \{1, 2\}$  entonces  $|x_{k+i} - y_{k+i}| \leq 1, \forall i$ , entonces,

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leq \frac{1}{3^k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3^k} \left[ \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \right] = \frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{3^k} < \varepsilon,$$

y en consecuencia  $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}; \varepsilon)$ .

De esta manera  $\mathbf{y} \in (B(\mathbf{x}; \varepsilon) - \{\mathbf{x}\}) \cap \Sigma^{\mathbb{N}}$ .

- (5).  $\partial\mathcal{C} = \mathcal{C}$ : Puesto que  $\mathcal{C}$  es cerrado,  $\partial\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$  (Proposición 2.5.18). Para la otra contención, tomemos  $x \in \mathcal{C}$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Debemos probar que,  $B(x; \varepsilon) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$  y  $B(x; \varepsilon) \cap (\mathbb{R} - \mathcal{C}) \neq \emptyset$ . Puesto que  $x \in \overline{\mathcal{C}}$  es inmediato que  $B(x; \varepsilon) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ .

Por contradicción, supongamos que  $B(x; \varepsilon) \cap (\mathbb{R} - \mathcal{C}) = \emptyset$ , esto implicaría que  $B(x; \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \mathcal{C}$ , lo cual implicaría que  $\mathcal{C}$  contiene al intervalo  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ , contradiciendo (2).

- (6).  $\mathcal{C}$  es acotado: En efecto  $\mathcal{C} \subseteq B(\frac{1}{2}; 1) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ .
- (7).  $\mathcal{C}$  es compacto: Por (3) y (6).
- (8).  $\mathcal{C}$  es completo: Por ser cerrado en  $\mathbb{R}$ , que es completo.
- (9).  $\mathring{\mathcal{C}} = \emptyset$ : Si existiera  $x \in \mathring{\mathcal{C}}$ , existiría  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(x; \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \mathcal{C}$ , lo cual contradice (2).
- (10).  $\mathcal{C}$  **no** es abierto: Por (9).

# Apéndice C

## Algunas propiedades del triángulo de Sierpiński

(1).  $\mathcal{S}$  tiene área cero:

$$\begin{array}{l} S_0 : \quad \triangle \quad a(S_0) = A \in \mathbb{R}^+ \\ S_1 : \quad \triangle \quad a(S_1) = \frac{3}{4}A \\ S_2 : \quad \triangle \quad a(S_2) = \frac{9}{16}A = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad a(S_n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n A \end{array}$$

En consecuencia se tiene que  $a(\mathcal{S}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n A = 0$ .

(2).  $\mathcal{S}$  **no** contiene discos abiertos:

Si existiera  $D = B(a; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2\}$  tal que  $D \subseteq \mathcal{S}$ , implicaría que  $a(D) \leq a(\mathcal{S})$ , esto es:  $0 < \pi r^2 \leq 0 \Rightarrow \Leftarrow$

(3).  $\mathcal{S}$  es cerrado: (luego  $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$ )

Si recordamos la construcción de  $\mathcal{S}$ , cada  $S_n$  es cerrado (unión finita de cerrados), en consecuencia  $\mathcal{S} := \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$  es cerrado (intersección de cerrados).

(4).  $\mathcal{S}$  es completo: Por ser cerrado en  $\mathbb{R}^2$ , que es completo.

- (5).  $\mathcal{S}$  es acotado: En efecto,  $\mathcal{S} \subseteq B\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); 1\right)$ .
- (6).  $\mathcal{S}$  es compacto: es cerrado y acotado en  $\mathbb{R}^2$ .
- (7).  $\partial\mathcal{S} = \mathcal{S}$ : Puesto que  $\mathcal{S}$  es cerrado,  $\partial\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$  (Proposición 2.5.18). Para la otra contención, tomemos  $a \in \mathcal{S}$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Debemos probar que,

$$B(a; \varepsilon) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset \quad \text{y} \quad B(a; \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^2 - \mathcal{S}) \neq \emptyset.$$

Puesto que  $a \in \overline{\mathcal{S}}$  es inmediato que  $B(a; \varepsilon) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ .

Por contradicción, supongamos que  $B(a; \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^2 - \mathcal{S}) = \emptyset$ , esto implicaría que  $B(a; \varepsilon) \subseteq \mathcal{S}$ , lo cual implicaría que  $\mathcal{S}$  contiene discos, contradiciendo (2).

- (8).  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$ : Como  $\mathcal{S}$  es cerrado,  $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$ ; pero por otra parte  $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$  (Proposición 2.5.18), luego  $\mathcal{S} = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$  lo que implica que  $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ .

Para la otra contención usaremos el hecho de que  $\mathcal{S}$  es equivalente al espacio de códigos  $\Sigma^{\mathbb{N}}$ , con  $\Sigma = \{1, 2, 3\}$  (Ver Ejemplo 2.1.2.(5)). Probaremos entonces que

$$\Sigma^{\mathbb{N}} \subseteq \left(\Sigma^{\mathbb{N}}\right)'$$

Sea  $\mathbf{x} = x_1x_2x_3 \cdots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Debemos probar que  $(B(\mathbf{x}; \varepsilon) - \{\mathbf{x}\}) \cap \Sigma^{\mathbb{N}} \neq \emptyset$ .

Es claro que existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{4^k} < \varepsilon$ . Sea  $\mathbf{y} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  definido como sigue:

$$y_i = x_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k, \quad y_{k+1} \neq x_{k+1}, \quad y_i \in \Sigma, \quad \forall i \geq k+2.$$

Claramente  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$  pues  $y_{k+1} \neq x_{k+1}$ .

Ahora:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{4^i} = \sum_{i=1}^k \frac{|x_i - y_i|}{4^i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{4^i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_{k+i} - y_{k+i}|}{4^{k+i}} = \frac{1}{4^k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_{k+i} - y_{k+i}|}{4^i} \end{aligned}$$

Como  $x_{k+i}, y_{k+i} \in \{1, 2, 3\}$  entonces  $|x_{k+i} - y_{k+i}| \leq 2, \forall i$ , entonces,

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leq \frac{1}{4^k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{4^k} \left[ \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \right] = \frac{1}{4^k} \cdot \frac{1}{3} < \frac{1}{4^k} < \varepsilon,$$

y en consecuencia  $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}; \varepsilon)$ .

De esta manera  $\mathbf{y} \in (B(\mathbf{x}; \varepsilon) - \{\mathbf{x}\}) \cap \Sigma^{\mathbb{N}}$ .

- (9).  $\mathring{\mathcal{S}} = \emptyset$ :

Si existiera  $a \in \mathring{\mathcal{S}}$ , existiría  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(a; \varepsilon) = D \subseteq \mathcal{S}$ , lo cual contradice (2).

- (10).  $\mathcal{S}$  **no** es abierto: Por (9).

# Lecturas recomendadas

- [1] Tom Apostol. *Análisis Matemático*. Editorial Reverte, Barcelona España, 1972.
- [2] G. Arenas y B. Mayorga. “Bolas no convexas”. *Lecturas Matemáticas*, 24(2):39–51, 2003.
- [3] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey. “On Devaney’s Definition of Chaos”. *American Math. Monthly*, 99:332–334, 1992.
- [4] M. Barnsley. *Fractals Everywhere*. Academic Press, Inc., 1988.
- [5] M. Barnsley and S. Demko. “Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals”. *Proc. Roy. Soc. London Ser., A* 399:243–275, 1985.
- [6] L. S. Block and W. A. Coppel. “Dynamics in One Dimension”. *Lecture Notes in Math.*, 1513, 1992.
- [7] F. Castro. *Geometría Fractal en el bachillerato*. Monografía de grado, Licenciatura en Matemáticas, UIS, Bucaramanga, 1994.
- [8] V. J. Charatonik and A. Dilks. “On Self-Homeomorphic Space”. *Topol. and its Appl.*, 55:215–238, 1994.
- [9] R. L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Second Edition, Addison-Wesley, Redwood City, 1989.
- [10] G. A. Edgar. *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. Springer-Verlag New York, Inc., 1990.
- [11] K.J. Falconer. *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge University Press, 1985. Gran Bretaña.
- [12] K.J. Falconer. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley and Sons, 1990.
- [13] K.J. Falconer. *Fractal Geometry – Mathematical Foundations and Applications*. Second Edition; John Willey and Sons, England, 2003.

- [14] E. Florez. *Una reseña histórica de la geometría fractal*. Monografía de grado, Licenciatura en Matemáticas, UIS, Bucaramanga, 1995.
- [15] Grupo Fractales. *Taller de fractales*. Departamento de Matemáticas, UIS, Bucaramanga, 1994. Material pre-impreso.
- [16] M. de Guzmán, A. Martín, M. Morán, and M. Reyes. *Estructuras fractales y sus aplicaciones*. Editorial Labor, S. A., 1993.
- [17] Bill Hirst. Libro de presentación de una exposición de arte, realizada en la sala de la Biblioteca Luis Angel Arango, marzo 1998. Santa fé de Bogotá.
- [18] J.E. Hutchison. “Fractals and Self-Similarity”. *Indiana University Journal of Mathematics*, 30:713–747, 1981.
- [19] A. Kameyama. “Julia Sets and Self-Similar Sets”. *Topology and its Applications*, 54:241–251, 1993.
- [20] G. B. Levelen. “Self-Similarity”. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 23:1023–1040, 1993.
- [21] B. Mandelbrot. *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension*. Flammarion, 1975.
- [22] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, 1992.
- [23] B. Mandelbrot. *Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión*. Tusquets editores, S. A., 1993.
- [24] H. Méndez. “On Intervals, Sensitivity Implies Chaos”. *Revista Integración*, 21(1–2):15–23, 2003.
- [25] H. Mesa. *El triángulo de Sierpiński*. Monografía de grado, Licenciatura en Matemáticas, UIS, Bucaramanga, 2001.
- [26] H. Mesa. Fractales, grafos y códigos. *Revista Integración*, 19(1):13–21, 2001.
- [27] J. R. Munkres. *Topology, A First Course*. Prentice-Hall, Inc, 1975.
- [28] G. Muser. “Comunicaciones inalámbricas – Fractales útiles”. *Rev. Investigación y Ciencia*, septiembre:38, 1999.
- [29] A. Oostra. *En la intersección del arte y la matemática*. XVI Encuentro de Geometría y IV de Aritmética, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, pág. 65–75, 2006.
- [30] H.O. Peitgen, H. Jurgens, and D. Saupe. *Fractals for the Classroom*, volume Part One. Springer–Verlang, 1992.

- 
- [31] C.L. Rodríguez. *Movimientos del atractor de un sistema iterado de funciones*. Monografía de grado, Licenciatura en Matemáticas, UIS, Bucaramanga, 2003.
- [32] S. Ruelle. “Chaos for Continuous Interval Maps”. *Notas disponibles en:*  
<http://www.math.u-psud.fr/~ruette/abstracts/abstract-chaos-int.html>.
- [33] G. Sarton. *Historía de la ciencia (La ciencia antigua durante la edad de oro griega)*. Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1965.
- [34] W. Sierpiński. Sur une curve dont tout point est un point de ramificación. *Prace Mat. – Fiz*, 1916.
- [35] I. Stewart. “La ubicua curva de Sierpiński”. *Rev. Investigación y Ciencia*, octubre:86–87, 1999.
- [36] M. Vellekoop and R. Berglund. “On Intervals, Transitivity = Chaos”. *Amer. Math. Monthly*, 101:353–355, 1994.
- [37] K. R. Wicks. *Fractals and Hyperspaces*. Springer-Verlag, 1991.
- [38] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley, Publishing Company, 1970.

# Índice alfabético

- adherencia de un conjunto, 34
- ángulo, 26
- atractor, 85
  - del SIF, 85, 91
- autosemejante, 6, 87
- autosimilar, 87
- autosimilitud, 5, 6, 13, 15
  
- bola, 34
  - cerrada, 38
  
- Cantor, Georg, 16
- caos, 138
- carpeta de Sierpiński, 17
- conjunto
  - $\mathcal{H}(X)$ , 67
  - abierto, 40
  - acotado, 42
  - autosemejante, 12, 87
  - autosimilar, 87
  - cerrado, 38
  - compacto, 42
  - convexo, 36
  - de Cantor, 16, 96, 183
  - de condensación, 90
  - de Julia, 142
  - de las direcciones de  $a$ , 95
  - denso, 137
  - fractal, 4, 11
  - invariante, 129, 151
  - totalmente acotado, 42, 45
- conjunto de Cantor
  - construcción, 86
- continuidad, 51
- contracción, 55
  
- curva de Koch, 18, 97
  
- definición
  - caos, 138
- desigualdad de Cauchy-Schwarz, 23, 181
- diámetro, 49
- dimensión
  - extraña, 8
  - fractal, 4, 8
  - Hausdorff, 8, 11
  - topológica, 8, 11
- distancia
  - entre compactos, 69
  
- equivalencia topológica, 149
- espacio
  - de códigos asociado, 91
  - de Cantor, 96
  - de los códigos, 24
  - discreto, 35
  - euclídeo, 22
  - Hausdorff, 96
  - métrico, 22
  - métrico completo, 33
  - topológico, 105
  - vectorial, 181
- esponja de Menger, 18
  
- fractal, 4, 11, 85
- fractales, 85
  - en el arte, 2
  - en la matemática, 2
  - en la naturaleza, 2
- función
  - afín, 127

- biyectiva, 135
- caótica, 141
- continua, 52
- de direccionamiento, 91, 95
- desplazamiento, 147
- inyectiva, 135
- la Tienda, 129
- lineal, 126
- sensible a condiciones iniciales, 140
- suprayectiva, 135
- topológicamente transitiva, 137
- Hausdorff, Félix, 12
- hiperespacio, 73
- homeomorfismo, 87, 105, 135
- homotecia, 115
- interior, 40
- Julia, Gaston Maurice, 142
- Koch, Helge Von, 18
- métrica
  - de Hausdorff, 67, 73
  - del taxista, 25
  - discreta, 24
  - usual, 25
- Mandelbrot, Benoit, 1, 12
- Menger, Karl, 18
- norma, 181
- nube, 73
  - cerrada, 74
- objeto fractal, 5
- órbita, 58, 125
  - estable, 138, 139
- periodo, 127
- pirámide de Sierpiński, 10
- producto interior, 181
- punto
  - acumulación, 47
  - adherente, 33
  - atrapado, 141
  - fijo, 57, 126
  - fijo atractor, 138, 139
  - fijo repulsor, 138, 139
  - frontera, 47
  - interior, 40
  - periódico, 127, 130
  - prisioneros, 141
- recubrimiento, 45
- rotación del atractor, 119
- segmento, 35, 37
- Sierpiński, Waclaw, 6
- SIF, 85
  - con condensación, 89
  - triangular, 100
- similitud directa, 119
- sistema Iterado de Funciones (SIF), 85
- sistema iterado de funciones (SIF)
  - atractor del, 85
  - con condensación, 89
  - movimiento del atractor, 180
  - rígido, 120
- sistemas dinámicos discretos, 125
- software
  - Fraclin, 178, 180
  - WinLogo, 160, 164
- subespacio métrico, 27
- sucesión, 28
  - convergente, 29
  - de Cauchy, 32
  - subsucesión, 31
- teorema
  - de completez de  $\mathcal{H}(X)$ , 76
  - de Sharkovskii, 130
  - del punto fijo para espacios métricos completos, 58, 59
- transformación
  - afín, 168, 170, 172

de condensación, 90  
de similaridad, 113  
geométrica, 113  
notación cartesiana, 116, 170  
notación geométrica, 116, 172  
notación matricial, 170  
transitividad topológica, 135  
traslación del atractor, 118  
triángulo de Sierpiński, 7, 98, 107, 185  
  autosimilitud, 7  
  construcción, 5, 87