

Pilas de Arena y Grafos de Ramanujan

Tesis de Maestría en Matemáticas
Universidad Industrial de Santander

Sterling Castañeda
Autor

Dr. Rer. Nat. Juan Andrés Montoya Argüello
Director

Agosto 22 de 2011

Abstract

Pilas de Arena y Grafos de Ramanujan

Sterling Castañeda

2011

In this work we study the behavior of The Abelian Sandpile Model on graphs of high connectivity, we focus our research on Ramanujan graphs.

We conjectured that the avalanche process is optimal on Ramanujan graphs, that is: we conjecture that the avalanches that can take place on Ramanujan graphs are short. For general graphs the best upper bound is Tardos' bound which states that the length of the avalanches triggered by the addition of two-critical configurations is $O(n^3)$ and this bound is tight. We prove that on Ramanujan graphs critical avalanches are very much shorter, their length is $O(n^{1.5})$.

Resumen. En este trabajo se estudia el comportamiento asintótico del modelo de pilas de arena sobre grafos de alta conectividad. Centramos nuestra atención en grafos de Ramanujan.

Nosotros conjeturábamos que el proceso de estabilización es veloz (eficiente) sobre clases de grafos de Ramanujan, esto es: conjeturábamos que sobre esta clase de grafos las avalanchas eran mucho más cortas. La mejor cota superior para la longitud de avalanchas críticas sobre grafos generales es la cota de Tardos la cual estipula que las avalanchas tienen una longitud acotada por $O(n^3)$, siendo esta cota óptima. Nosotros probamos que sobre grafos de Ramanujan las avalanchas críticas tienen una longitud acotada por $O(n^{1.5})$.

Copyright © 2011 by Sterling Castañeda
All rights reserved.

Índice general

Introducción	IV
1. Teoría Espectral de Grafos: Una invitación	1
1.1. Definiciones básicas y notación.	1
1.1.1. El espectro de un grafo.	2
1.1.2. Caminos de longitud fija.	3
1.1.3. Álgebra de Adyacencia de un Grafo	4
1.1.4. Grafos k-regulares.	5
2. Grafos de Ramanujan	8
3. El Modelo de Pilas de Arena	18
4. Estadística de avalanchas críticas	32
4.1. Avalanchas críticas y clases de grado acotado	32
4.2. Estadística de avalanchas críticas tridimensionales	35
5. Pilas de Arena de Ramanujan	41
5.1. Cotas subcúbicas.	42

Prefacio

En esta tesis estudiamos dos tematicas de las matematicas discretas las cuales, en principio, no tienen ninguna relacion entre si. Estas tematicas son los grafos de Ramanujan y el modelo abeliano de pilas de arena. Hemos logrado combinar estas dos tematicas considerando pilas de arena sobre grafos de Ramanujan. Si la dinamica de las pilas de arena sobre grafos de Ramanujan es singular, es de esperar que esta singularidad consista en que sobre grafos de ramanujan las avalanchas son cortas y los procesos de relajacion son veloces. Esto es asi dado que los grafos de Ramanujan son redes optimas para la transmision de informacion y el proceso de estabilizacion en el modelo de pilas de arena es un proceso de transmision de informacion en el que se comunican bits y diferencias de potencial. Asi pues la conjetura basica, de la que parte este trabajo, es que en grafos de Ramanujan las avalanchas son particularmente cortas. Nosotros hemos logrado un exito parcial estableciendo cotas superiores para la longitud de las avalanchas sobre grafos de Ramanujan que son mejores que toda otra cota superior para longitud de avalanchas que pueda ser encontrada en la literatura.

Introducción

El Modelo Abeliano de Pila de Arena y los *Grafos de Ramanujan* son los protagonistas de esta historia. El Modelo de Pila de Arena o modelo *BTW*, (introducido por los físicos Per Bak, Chao Tang y Kurt Wiesenfeld en 1988), es un sistema dinámico disipativo discreto definido sobre un grafo en el que hay intercambio de información entre los vértices del grafo. Decimos que un grafo G es óptimo para el Modelo de Pila de Arena si y solo si la dinámica del modelo se estabiliza rápidamente. La mejor cota superior conocida para calcular la velocidad de convergencia de estas dinámicas, en grafos generales, es la cota de G. Tardos

$$L(f) \leq |V(G)| \|f\| d(G)$$

(donde $L(f)$ denota la longitud de la avalancha generada por la configuración f y $d(G)$ denota el diametro del grafo). El objetivo de nuestro trabajo consiste en establecer una mejor cota superior para la longitud de las avalanchas en una clase particular de grafos: los Grafos de Ramanujan, introducidos por A. Lubotzky, R. Phillips y P. Sarnak en 1988. Estos grafos se definen en términos de los autovalores de la matriz de adyacencia del grafo. Podría pensarse que estos grafos son paradójicos, pues sus vértices están altamente conectados y, sin embargo, poseen un número escaso de aristas. En diseño de redes, los Grafos de Ramanujan son redes óptimas para la transmisión de la información (*expander graphs*).

El resultado principal de nuestro trabajo es el siguiente teorema:

Sea $(G_n)_{n \geq 1}$ una secuencia de grafos de Ramanujan k -regulares, dado $n \geq 1$ y

dadas $f, g \in K(G_n)$ se tiene que

$$L(f) \leq \frac{\|f + g\| \sqrt{m}}{k - 2(\sqrt{k} - 1)}$$

donde $\|f + g\|$ es el número de granos de arena al inicio de la avalancha y m es el tamaño del grafo, es decir, $m = |V(G_n)|$.

Este resultado, junto con el hecho de que los Grafos de Ramanujan poseen diámetro logarítmico, son demostrados en el capítulo 5, capítulo final de la tesis.

Conviene iniciar con algunas palabras acerca de los grafos en general. La teoría de grafos, que se remonta al conocido problema de los “*siete puentes de Königsberg*” propuesto por Euler, ha tenido gran desarrollo desde la segunda mitad siglo XX debido a sus aplicaciones en las ciencias de la computación. ,

Los grafos son los primeros objetos de estudio de la Matemática Discreta. Son modelos matemáticos de diferentes situaciones reales. En Ciencias Naturales y Humanas ellos modelan relaciones entre muchas especies, sociedades, compañías, etc. En ciencias de la computación ellos representan redes de comunicación, estructuras de datos; así mismo, un algoritmo puede representarse mediante un grafo al que se llama “diagrama de flujo del algoritmo”. En Física Estadística, los grafos pueden representar conexiones locales entre las partes que interactúan en un sistema, así como las dinámicas de los procesos físicos en estos sistemas. En matemáticas, los Grafos de Cayley son de vital importancia en Teoría de Grupos.

El estudio de las propiedades estructurales de los grafos, usando la información codificada en su matriz de adyacencia y en particular en los valores propios de estas matrices, es la llamada *Teoría Espectral de Grafos*, de la cual introduciremos algunos conceptos y resultados necesarios para nuestro trabajo en el capítulo 1.

Existe una clase bien particular de grafos a los que llamamos Grafos de Ramanujan. Formalmente un grafo de Ramanujan es un grafo regular, finito y conexo tal que para todo autovalor no trivial μ de G , se tiene que $|\mu| \leq 2\sqrt{k-1}$. En el capítulo 2 introducimos la *constante de expansión* de un grafo G , denotada por el símbolo

$h(G)$, y los principales resultados que relacionan dicha constante y el espectro de autovalores del grafo, que son los que motivan y dan sentido a nuestra definición de Grafos de Ramanujan.

En el capítulo 3 se introducen las definiciones básicas y algunos de los hechos más importantes del Modelo Abeliano de Pila de Arena (ASM), introducido por el físico Indú D. Dhar en 1990. El Modelo Abeliano de Pila de Arena comienza con un grafo que tiene un número finito de vértices y aristas y luego se colocan granos de arena en cada vértice. Si existe un número suficiente de granos de arena en un vértice, el vértice *dispara* (*fires*) o se *derrumba* (*topples*), enviando un grano de arena a través de cada una de sus aristas hacia sus vértices vecinos; estos vértices a su vez pueden alcanzar un número suficiente de granos de arena para disparar, y así sucesivamente, creando una *avalancha*. Se designa un vértice *sumidero*, que es un vertice que sólo absorbe granos de arena. Como el grafo es conexo, para cada vértice en el grafo existe un camino que lo comunica con el vértice sumidero, cualquier configuración de granos de arena dispuesta sobre el grafo será, después de una secuencia de disparos, eventualmente estabilizada. Este estado es independiente del orden de los disparos.

En el capítulo 4 se establecen cotas inferiores y superiores en la longitud de las avalanchas que tienen lugar en diferentes clases de grafos de arena. Nuestra atención se concentra en un cierto tipo de avalanchas denominadas *avalanchas críticas* y en familias de grafos de grado acotado. Los resultados referentes a la estadística de las avalanchas críticas tridimensionales son tomadas de la referencia [10].

Capítulo 1

Teoría Espectral de Grafos: Una invitación

La *teoría espectral de grafos* [1] es el estudio de las propiedades estructurales de los grafos usando la información codificada en su matriz de adyacencia, y en particular en los valores propios de estas matrices. La matriz de adyacencia de un grafo determina completamente el grafo, y sus propiedades espectrales se relacionan con propiedades del grafo. Por ejemplo, si el grafo G es k -regular entonces para cualquier autovalor λ de G se tiene que $|\lambda| \leq k$. Intentamos en este capítulo resaltar algunos resultados y definiciones de la teoría espectral de grafos que serán necesarios en nuestra investigación.

1.1. Definiciones básicas y notación.

Formalmente un grafo G consiste de un conjunto no vacío V de objetos llamados *vértices* y un conjunto E del conjunto de todos los subconjuntos de V de tamaño 2, los elementos de E serán llamados *aristas*.

1.1.1. El espectro de un grafo.

Comenzamos por definir una matriz que jugará un papel importante en este trabajo. Suponga que G es un grafo cuyo conjunto de vértices V es el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y considere E como un conjunto de parejas no ordenadas de elementos en V . Si $\{v_i, v_j\}$ está en E , entonces decimos que v_i y v_j son vértices adyacentes.

Definición 1 La matriz de adyacencia de G que denotamos con el símbolo $A(G)$, es la matriz $A(G) = [a_{ij}]_{i,j \leq n}$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ y } v_j \text{ son adyacentes,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Consideramos la matriz $A(G)$ sobre el campo de los complejos. Se sigue directamente de la definición que $A(G)$ es una matriz simétrica real, y que su traza es igual a cero. Puesto que las filas y las columnas de $A(G)$, están determinadas por la marcación arbitraria que se fija sobre el conjunto V , y puesto que nos interesa estudiar las propiedades de G que son independientes de la marcación escogida, es claro entonces que nos interesan aquellas propiedades de la matriz de adyacencia que son invariantes bajo permutaciones de filas y columnas. Una de tales propiedades es el espectro de la matriz.

Definición 2 El espectro de un grafo G es el conjunto de números que son autovalores de $A(G)$ junto con sus multiplicidades. Si los distintos autovalores de $A(G)$ son $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}$ y sus respectivas multiplicidades son $m(\lambda_0), m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_{s-1})$, entonces escribimos

$$\text{Spect}(G) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{s-1} \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & \dots & m(\lambda_{s-1}) \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, el grafo completo K_n es el grafo con n vértices en el que cada par de vértices distintos son adyacentes. Así, el grafo K_4 tiene por matriz de adyacencia la matriz

$$A(K_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y un cálculo fácil muestra que el espectro de K_4 es

$$\text{Spect}(K_4) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

o lo que es equivalente $(3, -1, -1, -1)$. Usualmente nos referiremos a los autovalores de $A(G)$ como los autovalores de G y al polinomio característico de $A(G)$ como al polinomio característico de G .

1.1.2. Caminos de longitud fija.

Un camino de longitud ℓ en G , que va del vértice v_i al vértice v_j , es una secuencia finita de vértices de G de la forma

$$v_i = w_0, w_1, \dots, w_\ell = v_j$$

tal que para cada $1 \leq t \leq \ell$ los vertices w_{t-1} y w_t son adyacentes. Considere el siguiente resultado [2]

Lema 3 *Sea G un grafo, sea $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ su conjunto de vértices y sea $A(G) = [a_{ij}]$ su matriz de adyacencia. Entonces, la entrada $a_{ij}^{(\ell)}$ en la fila i y columna j de A^ℓ es el número de caminos distintos de longitud ℓ que van del vértice v_i al vértice v_j .*

Prueba. Procedemos por inducción. Comenzamos con $A = A^1$. Cada entrada $a_{ij} = a_{ij}^{(1)}$ de A o es 1 o es 0, según si $\{v_i, v_j\}$ es o no es una arista de G . Por tanto $a_{ij}^{(1)}$ es el número de caminos de v_i a v_j de longitud 1 en G .

Asumimos para un entero positivo L , que el número de caminos de v_i a v_j de longitud L en G está dado por $a_{ij}^{(L)}$. De acuerdo con la definición de multiplicación de matrices, la entrada $a_{ij}^{(L+1)}$ en A^{L+1} es el producto de la fila i de A^L y la columna j de A , es decir,

$$a_{ij}^{(L+1)} = \sum_{t=1}^n a_{it}^{(L)} a_{tj} = a_{i1}^{(L)} a_{1j} + a_{i2}^{(L)} a_{2j} + \dots + a_{in}^{(L)} a_{nj}$$

Por otro lado, todo camino W de v_i a v_j y de longitud $L + 1$ es el resultado de concatenar un camino W^* de v_i a v_t de longitud L y la arista $\{v_t, v_j\}$, para algun vertice v_t adyacente al vertice v_j . Por la hipótesis de inducción, el número de caminos de v_i a v_t de longitud L es $a_{it}^{(L)}$, mientras que v_t es adyacente a v_j si y sólo si $a_{tj} = 1$. Se tienen entonces que $a_{ij}^{(L+1)}$ es igual a $\sum_{i:\{v_t, v_j\} \in E} a_{it}^{(L)}$ que a su vez es igual al número de caminos de v_i a v_j de longitud $L + 1$ en G . ■

Definición 4 *Se dice que un grafo es conexo si cada par de vértices está unido por un camino. El número de aristas recorridas en el camino más corto que une a v_i con v_j se llama la distancia en G entre v_i y v_j y se denota por $d(v_i, v_j)$. El máximo valor de la función distancia en un grafo conexo G se llama el diámetro de G denotado como $d(G)$.*

1.1.3. Álgebra de Adyacencia de un Grafo

Sea $A(G)$ la matriz de adyacencia del grafo G . Podemos pensar en $A(G)$ como en una variable y podemos considerar el álgebra de polinomios $\mathbb{C}[A]$, que es el álgebra de polinomios en la variable $A(G)$ y con coeficientes complejos. Esta álgebra tiene dimensión finita como espacio vectorial complejo: en efecto, el Teorema de Cayley-Hamilton afirma que $A(G)$ es raíz de su polinomio característico y esto implica que $\dim(\mathbb{C}[A]) \leq n$, siendo n el número de vértices en G . Al álgebra $\mathbb{C}[A]$ la llamaremos el álgebra de adyacencia de G y la denotaremos con el símbolo $\mathbb{A}(G)$

Proposición 5 Sea G un grafo conexo de diámetro d y sea $\mathbb{A}(G)$ su álgebra de adyacencia. La dimensión de $\mathbb{A}(G)$ es al menos $d + 1$.

Prueba. Sea $i \leq d$, existen vertices x_i, y_i tal que el camino mas corto conectando los vertices x_i y y_i tiene longitud i . Esto implica que la entrada $x_i y_i$ de la matriz $A(G)^i$ es diferente de cero, mientras que para todo $k \not\leq i$ la entrada $x_i y_i$ de la matriz $A(G)^k$ es igual a cero. Se sigue entonces que para todo $i \leq d$ la matriz $A(G)^i$ es linealmente independiente del conjunto $\{I, A(G), \dots, A(G)^{i-1}\}$, y que en consecuencia $\{I, A(G), \dots, A(G)^d\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{A}(G)$. Puesto que este conjunto tiene $d + 1$ elementos, la proposición está probada. ■

Existe una relación cercana entre el álgebra de adyacencia y el espectro de G . Si la matriz de adyacencia tiene s autovalores distintos, entonces, dado que es una matriz real y simétrica, su polinomio mínimo (el polinomio mónico de menor grado que lo anula) tiene grado s . Por lo tanto, la dimensión del álgebra de adyacencia es igual a s . De esta manera se tiene la siguiente cota para el número de autovalores diferentes.

Corolario 6 Un grafo conexo con diámetro d tiene al menos $d + 1$ autovalores distintos

1.1.4. Grafos k -regulares.

Se dice que un grafo es regular de grado k (o k -regular) si cada uno de sus vértices tiene grado k .

Proposición 7 Si G es un grafo regular de grado k , se tiene lo siguiente

1. k es un autovalor de G
2. Si G es conexo, entonces la multiplicidad de k es 1.
3. Para cualquier μ autovalor de G se tiene que $|\mu| \leq k$.

Prueba. 1. Sea $U = [1, 1, \dots, 1]^t$; entonces si A es la matriz de adyacencia de G tenemos que $AU = kU$, puesto que hay k unos en cada fila de A y por lo tanto k es un autovalor de G .

2. Sea $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t$ un vector no nulo tal que $Ax = kx$ y sea $j \leq n$ tal que para todo $i \leq n$ se tiene que $|x_i| \leq |x_j|$. Luego al multiplicar la fila j de A por el vector X se tiene que

$$\sum_j x_i = kx_j$$

donde $\sum_j x_i$ denota la sumatoria sobre los k vértices de G que son adyacentes a v_j . Por la propiedad extremal de x_j , se sigue que $x_i = x_j$ para todos estos vértices adyacentes. Si G es conexo podemos proceder sucesivamente de esta manera, mostrando finalmente que todas las entradas de X son iguales. Así X es un múltiplo de U , y el espacio de autovalores asociado con el autovalor k tiene dimensión 1.

3. Supongamos que $AY = \lambda Y$, $Y \neq 0$ y sea y_j una entrada de Y cuyo valor absoluto es máximo. El mismo argumento presentado en **2**, nos permite probar que

$$\sum_j y_i = \lambda y_j$$

Tenemos entonces que

$$|\lambda| |y_j| = \left| \sum_j \lambda_i \right| \leq \sum_j |y_i| \leq k |y_j|$$

Así cancelando $|y_j|$, se obtiene que $|\lambda| \leq k$, como se requería. ■

Teorema 8 Sea G un grafo finito, simple y sin bucles, con n vértices y autovalores $u_0 \geq u_1 \geq \dots \geq u_{n-1}$. Se tiene que

1. $\sum_i u_i = 0$
2. $\sum_{i=0}^{n-1} u_i^2 = 2 |E|$
3. $\sum_{i=0}^{n-1} u_i^3 = 6 \times \text{número de triángulos en } G$.

Prueba. 1. Sea A la matriz de adyacencia de G y $p(X) = \det(A - \lambda X)$ el polinomio característico de A . La entrada (i, j) de A^k cuenta los caminos de longitud k del vértice i al vértice j y el conjunto de autovalores de A^k es el conjunto $\{u_0^k, \dots, u_{n-1}^k\}$. La entrada (i, i) de A cuenta los caminos de longitud $k = 1$ del vértice i al mismo vértice i que es *cero* puesto que el grafo no tiene bucles. Ahora la matriz A es ortogonalmente diagonalizable, esto es, existe una matriz P tal que $D = P^{-1}AP$. El polinomio característico de A es el mismo polinomio característico de la matriz diagonal D con entradas $u_0 \geq u_1 \geq \dots \geq u_{n-1}$. Luego $\sum_i u_i = 0$, puesto que $Tr(A) = Tr(D)$.

2. La entrada (i, i) de A^2 cuenta los caminos de longitud $k = 2$ del vértice i al mismo vértice i , esto es, las aristas que inciden en el vértice i . La suma de los elementos de la diagonal de A^2 dividido en dos será el total del número de aristas del grafo. Los autovalores de A^2 son u_i^2 . Luego $\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} u_i^2 = |E|$, y por tanto

$$\sum_{i=0}^{n-1} u_i^2 = 2|E|$$

Nota: Se divide en dos porque cada arista se cuenta dos veces.

3. La entrada (i, i) de A^3 cuenta los caminos de longitud $k = 3$ del vértice i al mismo vértice i , esto es, el número de triángulos con vértice v_i . La suma de la diagonal de A^3 dividido por 6 será el número total de triángulos del grafo. El conjunto de autovalores de A^3 es el conjunto $\{u_0^3, \dots, u_{n-1}^3\}$, luego

$$\frac{1}{6} \sum_{i=0}^{n-1} u_i^3 = \text{número de triángulos en } G$$

y por lo tanto

$$\sum_{i=0}^{n-1} u_i^3 = 6 \times \text{número de triángulos en } G$$

Nota: Se divide en 6 porque cada triángulo se cuenta seis veces (dos veces por cada vértice del triángulo). ■

Capítulo 2

Grafos de Ramanujan

Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea F un subconjunto de V . Definimos la *frontera de F* , denotada por δF , como el conjunto de aristas con un extremo en F y el otro extremo en $V - F$. En otras palabras, δF es el conjunto de aristas que conectan a F con $V - F$

Definición 9 La constante isoperimétrica o constante de expansión del grafo G , denotado por $h(G)$, se define como

$$h(G) = \inf \left\{ \frac{|\delta F|}{|F|} : F \subseteq V, 0 < |F| \leq \frac{|V|}{2} \right\}$$

Definición 10 Sea $(G_m)_{m \geq 1}$ una familia de grafos finitos, conexos y k -regulares, con $|V_m| \rightarrow +\infty$ si $m \rightarrow +\infty$. Decimos que $(G_m)_{m \geq 1}$ es una familia de grafos expansivos (expander graphs) si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$h(G_m) \geq \varepsilon \text{ para todo } m \geq 1$$

Si vemos al grafo G como una red de transmisión de información (donde la información almacenada en un vértice se propaga, digamos en una unidad de tiempo,

hacia sus vértices vecinos), entonces $h(G)$ mide la “calidad” de G como una red de transmisión de información: si $h(G)$ es grande, la información se propaga rápidamente. Para ilustrar esto consideremos dos ejemplos extremos.

Ejemplo 11 Sea K_m el grafo completo con m vértices (el grafo de tamaño m en el que todo par de vértices distintos están conectados) y sea F un subconjunto de m . Si $|F| = \ell$, entonces $|\delta F| = \ell(m - \ell)$, así que $h(K_m) = m - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \sim \frac{m}{2}$.

Ejemplo 12 Sea C_n el ciclo con n vértices y sea F un subconjunto conexo de C_n tal que $|F| = \lfloor \frac{|C_n|}{2} \rfloor$ (suponemos n par), note que $|\partial F| = 2$, se tiene entonces que $h(C_n) = \lfloor \frac{2}{2} \rfloor \sim \frac{4}{n}$; en particular $|h(C_n)| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$.

En estos ejemplos podemos apreciar que el grafo completo, de alta conectividad, tiene una constante de expansión grande que crece proporcionalmente con el número de vértices. Por otra parte el grafo cíclico, de baja conectividad, tiene una constante de expansión pequeña que decrece hacia cero a medida que el número de vértices aumenta.

El siguiente teorema establece una relación entre la constante de expansión del grafo $h(G)$ y la diferencia espectral $k - \mu_1$ (*spectral gap*)

Teorema 13 (*Desigualdad Isoperimétrica o de Cheeger-Buser para grafos*)

Sea $G = (V, E)$ un grafo finito, conexo, k -regular, sin bucles. Sea u_1 el primer autovalor no trivial de G . Entonces

$$\frac{k - \mu_1}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2k(k - \mu_1)}$$

Prueba. Iniciamos con la desigualdad de la izquierda.

Dotamos el conjunto E de aristas con una orientación elegida arbitrariamente, lo que nos permite asociar a cualquier vértice $e \in E$ un origen e^- y un extremo (o fin) e^+ . Esto permite definir el operador $d : \ell^2(V) \rightarrow \ell^2(E)$, donde dados $f \in \ell^2(V)$ y $e \in E$ se tiene que

$$df(e) = f(e^+) - f(e^-)$$

Nota. Recuerde que para un grafo $G = (V, E)$ se define

$$\ell^2(V) = \left\{ f : V \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{v \in V} |f(v)|^2 < +\infty \right\}$$

El espacio $\ell^2(E)$ es definido análogamente. Claramente, si V es finito, digamos $|V| = n$, toda función $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ está en $\ell^2(V)$.

Dotamos a $\ell^2(V)$ con el producto escalar hermitiano

$$\langle f | g \rangle = \sum_{x \in V} \overline{f(x)} \cdot g(x)$$

y al espacio $\ell^2(E)$ con el producto análogo.

Podemos definir el operador adjunto (o transpuesta conjugada) $d^* : \ell^2(E) \rightarrow \ell^2(V)$, como el operador que es caracterizado por:

$$\langle df | g \rangle = \langle f | d^*g \rangle, \quad \forall f \in \ell^2(V), \forall g \in \ell^2(E)$$

Definimos la función $\delta : V \times E \rightarrow \{-1, 1, 0\}$ por

$$\delta(v, e) = \begin{cases} 1, & \text{si } v = e^+ \\ -1, & \text{si } v = e^- \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se puede ver facilmente que para $e \in E$ y $f \in \ell^2(V)$,

$$df(e) = \sum_{v \in V} \delta(v, e) f(v);$$

entre tanto, para $v \in V$ y $g \in \ell^2(E)$,

$$d^*g(v) = \sum_{e \in E} \delta(v, e) g(e)$$

Definimos entonces *el operador combinatorio de Laplace* $\Delta : \ell^2(V) \rightarrow \ell^2(V)$, mediante la ecuacion

$$\Delta = k.Id - A;$$

El particular, Δ no depende de la elección de la orientación. Para una base ortonormal de funciones propias de A , el operador Δ toma la forma

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k - \mu_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k - \mu_{n-1} \end{pmatrix}$$

El autovalor 0 corresponde a las funciones constantes sobre V . Por lo tanto, si f es una función sobre V con $\sum_{v \in V} f(v) = 0$ (*i.e.*, si f es ortogonal a las funciones constantes en $\ell^2(V)$), tenemos que

$$\|df\|_2^2 = \langle df | df \rangle = \langle \Delta f | f \rangle \geq (k - \mu_1) \|f\|_2^2$$

Aplicaremos lo anterior a una función f cuidadosamente escogida. Fijamos un subconjunto F de V y definimos f como

$$f(v) = \begin{cases} |V - F|, & \text{si } v \in F \\ -|F|, & \text{si } v \in V - F \end{cases}$$

Se tiene entonces que $\sum_{v \in V} f(v) = 0$ y

$$\|f\|_2^2 = |F| |V - F|^2 + |V - F| |F| = |F| |V - F| |V|$$

Por otra parte

$$df(e) = \begin{cases} 0, & \text{si } e \text{ conecta dos vértices en } F \text{ o en } V - F \\ \pm |V|, & \text{si } e \text{ conecta un vértice en } F \text{ con un vértice en } V - F \end{cases}$$

Por tanto, $\|df\|_2^2 = |V|^2 \cdot |\partial F|$. Así, de la desigualdad dada previamente se tiene que

$$|V|^2 |\partial F| \geq (k - \mu_1) |F| |V - F| |V|$$

Por lo que

$$\frac{|\partial F|}{|F|} \geq (k - \mu_1) \frac{|V - F|}{|V|}$$

Si asumimos que $|F| \leq \frac{|V|}{2}$, entonces $\frac{|\partial F|}{F} \geq \frac{k - \mu_1}{2}$; y de la definición de $h(G)$ se tiene que

$$h(G) \geq \frac{k - \mu_1}{2}$$

Con esto hemos terminado la prueba de la primera desigualdad. Ahora probamos la segunda desigualdad que es un poco más complicada.

Fijamos una función no negativa f sobre V , y definimos la cantidad B_f como

$$B_f = \sum_{e \in E} |f(e^+)^2 - f(e^-)^2|$$

Denotamos por $B_r > B_{r-1} > \dots > B_1 > B_0$ los valores que toma f , y para cada i en $\{0, 1, \dots, r\}$ definimos un conjunto

$$L_i = \{x \in V : f(x) \geq B_i\}$$

Note que $L_0 = V$, (por lo tanto, $\partial L_0 = \emptyset$)

Primer Paso: Probamos que

$$B_f = \sum_{i=1}^r |\partial L_i| (B_i^2 - B_{i-1}^2)$$

Para ver esto, denotamos por E_f el conjunto

$$\{e \in E : f(e^+) \neq f(e^-)\}$$

Claramente $B_f = \sum_{e \in E_f} |f(e^+)^2 - f(e^-)^2|$. Ahora, un arco $e \in E_f$ conecta algún vértice x , (con $f(x) = B_{i(e)}$) y un vértice y (que satisface $f(y) = B_{j(e)}$). Supongamos

que $i(e) > j(e)$. Se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
B_f &= \sum_{e \in E_f} (B_{i(e)}^2 - B_{j(e)}^2) \\
&= \sum_{e \in E_f} (B_{i(e)}^2 - B_{i(e)-1}^2 + B_{i(e)-1}^2 - \dots - B_{j(e)+1}^2 + B_{j(e)+1}^2 - B_{j(e)}^2) \\
&= \sum_{e \in E_f} \sum_{\ell=j(e)+1}^{i(e)} (B_{\ell}^2 - B_{\ell-1}^2)
\end{aligned}$$

Si queremos pensar geoméricamente, podemos pensar que hemos partido al grafo en curvas de nivel. Veamos que dado un arco e que conecta un vértice x , (con $f(x) = B_{i(e)}$), y un vértice y , (con $f(y) = B_{j(e)}$), cruza toda curva de nivel B_{ℓ} que separe a estos dos vértices.

En la expresión

$$B_f = \sum_{e \in E_f} (B_{i(e)}^2 - B_{i(e)-1}^2 + B_{i(e)-1}^2 - \dots - B_{j(e)+1}^2 + B_{j(e)+1}^2 - B_{j(e)}^2)$$

esto corresponde a la expansión del término $B_{i(e)}^2 - B_{j(e)}^2$, (insertando un cero, i.e. la expresión $-B_{\ell}^2 + B_{\ell}^2$, por cada una de las curvas de nivel B_{ℓ} atravezada por el arco e). Esto significa que, en la sumatoria previa para B_f , el término $B_{\ell}^2 - B_{\ell-1}^2$ aparece por cada uno de las aristas que conecten un vértice x , con $f(x) = B_i$ e $i \geq \ell$, y un vértice y , con $f(y) = B_j$ y $j < \ell$. En otras palabras, éste aparece para cada $e \in \partial L_{\ell}$ lo que establece la igualdad

$$B_f = \sum_{i=1}^r |\partial L_i| (B_i^2 - B_{i-1}^2)$$

Segundo Paso:

$$B_f \leq \sqrt{2K} \|df\|_2 \|f\|_2$$

En efecto

$$\begin{aligned}
B_f &= \sum_{e \in E} |f(e^+) + f(e^-)| \cdot |f(e^+) - f(e^-)| \\
&\leq \left[\sum_{e \in E} (f(e^+) + f(e^-))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\sum_{e \in E} (f(e^+) - f(e^-))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{2} \left[\sum_{e \in E} (f(e^+) + f(e^-))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \|df\|_2 \\
&= \sqrt{2k} \left[\sum_{e \in E} f(x)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \|df\|_2 = \sqrt{2k} \|f\|_2 \|df\|_2
\end{aligned}$$

Lo anterior se sigue de la desigualdad Cauchy-Schwarz y el siguiente hecho elemental: dados $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

Tercer Paso: usamos el termino *soporte de f* para denotar el conjunto

$$\text{sop}(f) = \{x \in V : f(x) \neq 0\}$$

En esta etapa de la prueba probamos que: Si $|\text{sop}(f)| \leq \frac{|V|}{2}$. Entonces, $B_f \geq h(G) \|f\|_2^2$.

Note que $B_0 = 0$ y que $|L_i| \leq \frac{|V|}{2}$ para $i = 1, \dots, r$, así que $|\partial L_i| \geq h(G) \cdot |L_i|$ por la definición de $h(G)$. Se sigue de lo obtenido en el primer paso que

$$\begin{aligned}
B_f &\geq h(G) \cdot \sum_{i=1}^r |L_i| \cdot (B_i^2 - B_{i-1}^2) \\
&= h(G) \left[|L_r| B_r^2 + (|L_{r-1}| - |L_r|) B_r^2 + \dots + (|L_1| - |L_1|) B_1^2 \right] \\
&= h(G) \left[|L_r| B_r^2 + \sum_{i=1}^{r-1} |L_i - L_{i-1}| B_i^2 \right]
\end{aligned}$$

Y dado que $L_i - L_{i+1}$ es el conjunto del nivel donde f toma el valor B_i , el término en paréntesis es exactamente $\|f\|_2^2$.

Coda. Aplicamos lo anterior a una función f cuidadosamente elegida. Sea g una función propia de Δ de valor real, asociada con el valor propio $k - \mu_1$. Sea V^+ el conjunto $\{x \in V : g(x) > 0\}$ y sea $f = \max\{g, 0\}$. Podemos asumir que $|V^+| < \frac{|V|}{2}$, reemplazando g por $-g$ si es necesario (Nóte que $|V^+| \neq 0$ porque $\sum_{x \in V} g(x) = 0$ y $g \neq 0$).

Para $x \in V^+$, tenemos lo siguiente (puesto que $g \leq 0$ en $V - V^+$).

$$\begin{aligned} (\Delta f)(x) &= kf(x) - \sum_{y \in V} A_{xy} f(y) = kg(x) - \sum_{y \in V^+} A_{xy} g(y) \\ &\leq kg(x) - \sum_{y \in V} A_{xy} g(y) = (\Delta g)(x) = (k - \mu_1)g(x) \end{aligned}$$

Usando esta estimación puntual, obtenemos

$$\begin{aligned} \|df\|_2^2 &= \langle \Delta f | f \rangle = \sum_{x \in V} (\Delta f)(x)g(x) \leq (k - \mu_1) \sum_{x \in V^+} g(x)^2 \\ &\leq (k - \mu_1) \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Combinando el segundo y el tercer paso, obtenemos

$$h(G) \|f\|_2^2 \leq B_f \leq \sqrt{2k} \|df\|_2 \|f\|_2 \leq \sqrt{2k(k - \mu_1)} \|f\|_2^2$$

cancelando $\|f\|_2^2$, se sigue el resultado, esto es: dado G un grafo conexo k -regular se tiene que $h(G) \leq \sqrt{2k(k - \mu_1)}$. ■

La anterior desigualdad es conocida como la *desigualdad Isoperimétrica* o de Cheeger-Buser para grafos permite caracterizar el comportamiento espectral de las familias de *expanders graphs*: el *spectral gap* determina la constante de expansión y la constante de expansión determina el *spectral gap*.

Corolario 14 *Sea $(G_m)_{m \geq 1}$ una familia de grafos finitos, conexos, k -regulares y sin bucles, tal que $|V_m| \rightarrow +\infty$ cuando $m \rightarrow +\infty$. La familia $(G_m)_{m \geq 1}$ es una familia de grafos expansivos si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $k - \mu_1(G_m) \geq \varepsilon$ para todo $m \geq 1$.*

Esto es, una familia de grafos k -regulares es una familia de *expanders* si y sólo si el *gap* espectral está acotado inferiormente por un $\varepsilon > 0$.

De la desigualdad de Cheeger (teorema 13), se sigue que a mayor *gap* espectral mayor es la expansividad del grafo. ¿Pero que tan grande puede llegar a ser el *gap* espectral? El siguiente resultado muestra que los $\mu_1(G_m)$ no pueden ser tan pequeños como queramos y que, por tanto, el *gap* espectral $k - \mu_1(G_m)$ está acotada superiormente.

Teorema 15 (*Alon Boppana*) Sea $(G_m)_{m \geq 1}$ una familia de grafos conexos, k -regulares y finitos con $|V_m| \rightarrow +\infty$ cuando $m \rightarrow +\infty$. Entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{Inf } \mu_1(G_m) \geq 2\sqrt{k-1}$$

El lector interesado en la demostración puede dirigirse a [3].

El siguiente resultado determina el comportamiento asintótico de $\{\mu(G_m)_{m \geq 1}\}$ que es la secuencia formada por los autovalores más pequeños no triviales de los grafos en la secuencia $(G_m)_{m \geq 1}$.

Teorema 16 Sea $(G_m)_{m \geq 1}$ una familia de grafos finitos, conexos, k -regulares con $g(G_m) \rightarrow +\infty$. Entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{Sup}(\mu(G_m)) \leq -2\sqrt{k-1}$$

El lector interesado en la demostración puede dirigirse a [3].

Observación 17 $g(G)$ denota la correa (*girth*) de un grafo conexo G , que se define como la longitud del circuito más corto en G . Diremos que $g(G) = +\infty$ si G no tiene circuitos, esto es, si G es un árbol [4].

Los teoremas 15 y 16 establecen las condiciones extremas del espectro en grafos finitos, k -regulares y conexos, motivando así la introducción de nuestra principal definición, los grafos de Ramanujan.

Definición 18 *Un grafo k -regular G , finito y conexo es un grafo de Ramanujan [3] si y solo si todo autovalor no trivial μ de G satisface la desigualdad*

$$|\mu| \leq 2\sqrt{k-1}$$

Supongamos que $(G_m)_{m \geq 1}$ es una familia de grafos de Ramanujan k -regulares sin bucles, tales que $|V_m| \rightarrow +\infty$ cuando $m \rightarrow +\infty$. Entonces los G_m logran el mayor *gap spectral* posible, suministrando una familia de *expanders* [5] que es óptima desde el punto de vista espectral.

Capítulo 3

El Modelo de Pilas de Arena

El Modelo de Pilas de Arena [6] es el modelo más simple de *Autoorganización Crítica* (*Self-Organized Criticality*) que admite un tratamiento analítico.

Autoorganización Crítica, SOC (por sus siglas en inglés) es un concepto introducido por Per Bak, Chao Tang y Kurt Wiesenfeld en 1987. La teoría SOC estudia sistemas disipativos cuyas dinámicas convergen de manera espontánea a estados críticos. En estos sistemas es posible identificar el conjunto de estados críticos con el estado estacionario del sistema.

Cuando el sistema accede al estado estacionario (crítico), la dinámica es intermitente, con largos periodos de inactividad separados por estallidos bien definidos de actividad o avalanchas. En un lenguaje más sencillo, grandes avalanchas ocurren muy a menudo (no existe una disminución exponencial del tamaño de las avalanchas, lo que daría lugar a una avalancha de tamaño característico) y existe una variedad de leyes de potencia que caracterizan varias propiedades del sistema.

El modelo paradigma para este tipo de comportamiento es el Autómata Celular Pilas de Arena, también conocido como el Modelo Bak-Thang-Wiesenfeld (*Modelo BTW*).

En este capítulo se introducen las definiciones básicas y algunos de los hechos más importantes relativos al Modelo de Pilas de Arena [7]

Definición 19 Un grafo de Pila de Arena es un par (G, s) , donde G es un grafo conexo y $s \in V(G)$.

Dado (G, s) un grafo de pila de arena, el vértice s será llamado el *sumidero*. La mayor de las veces diremos que G es un grafo de arena y que s es el sumidero de G . En adelante, usaremos el símbolo G para referirnos al par (G, s) .

El símbolo $V^*(G)$ denotará el conjunto $V(G) - \{s\}$. Una *configuración* sobre G es una función $g : V^*(G) \rightarrow \mathbb{N}$.

Dada una configuración g sobre G y dado un vértice $v \in V^*(G)$, diremos que v es *g -estable* si y solo si $g(v) < \deg(v)$, y diremos que g es una configuración estable si y solo si $\forall v \in V^*(G)$, tenemos que v es g -estable.

Definición 20 Dado G un grafo de arena, el autómata de pila de arena sobre G es el autómata $SP(G)$ definido por:

1. El conjunto de configuraciones de $SP(G)$ es el conjunto

$$\{g : g \text{ es una configuración en } G\}$$

2. Dada una configuración g de $SP(G)$ y dada una célula v , el estado de v bajo g es igual a $g(v)$.
3. Dado g una configuración, el conjunto de transiciones posibles desde g está dado por la siguiente regla de transición: Dado $v \in V^*(G)$, si $g(v) \geq \deg(v)$, tenemos entonces que $g \rightarrow g_v$ es una transición posible, donde g_v es la configuración definida por:

$$g_v(w) := \begin{cases} g(v) - \deg(v), & \text{si } w = v \\ g(w) + 1, & \text{si } v \text{ es un vecino de } w \\ g(w), & \text{si } v \text{ no es vecino de } w \end{cases}$$

Toda transición de $SP(G)$ es llamada un *disparo* (*firing*) o *desplome* (*toppling*). Así, dada una configuración g , la transición $g \rightarrow g_v$ es un disparo, y si tal transición ocurre, diremos que el vértice v ha sido disparado (desplomado) o diremos que un disparo ha ocurrido en v .

Dado G un grafo de arena y dada g una configuración inicial, podemos elegir un vértice inestable, disparar y obtener una nueva configuración. Nótese que podemos elegir cualquier vértice inestable para producir un disparo, en este sentido el autómata de pila de arena no es determinístico. Una secuencia de disparos $g_1 \rightarrow g_2 \rightarrow \dots \rightarrow g_n$ es llamada una avalancha de longitud n con configuración inicial g , y diremos que es una avalancha de g a g_n . Si g_n es estable diremos que g_n es una estabilización o relajación de g .

Si fijamos una configuración g sobre v , podemos considerar los siguientes tres conjuntos: $Aval(G; g)$, el conjunto de avalanchas cuya configuración inicial es g , $Aval_M(G, g)$ el conjunto de avalanchas maximales con inicio en g (A es maximal si y solo si A no puede ser extendida, *i.e.*, A es maximal si y solo si su configuración final es estable); $st(G, g)$ el conjunto de estabilizaciones de g .

Además, dados G, g y

$$A = g \rightarrow g_1 \rightarrow g_2 \rightarrow \dots g_{n-1} \rightarrow g_n$$

una avalancha, el *vector tabla* de A , que denotamos SC_A , es igual a $(t_v)_{v \in V(G)^*}$, donde dado $v \in V(G)^*$ la entrada t_v es igual al número de veces que el vértice v fue disparado durante la ocurrencia de A .

Teorema 21 (*El teorema fundamental de las pilas de arena*).

Sea G un grafo de pila de arena y sea g una configuración, tenemos:

1. *Cualquier avalancha con inicio en g es finita.*
2. $|St(G, g)| = 1$
3. *Dados $A, B \in Aval_M(G, g)$ se tien que $SC_A = SC_B$*

Prueba. Ítem 1: Podemos probar algo más fuerte, podemos probar que dado G un grafo de pila de arena y dada f una configuración sobre G , la longitud de la avalancha maximal desencadenada por f está acotada superiormente por $|V(G)| \|f\| d(G)$, donde $d(G)$ denota el diámetro de G y $\|f\|$ denota la cantidad $\sum_{v \in V(G)^*} f(v)$. Usaremos el símbolo $L(f)$ para denotar la longitud de la avalancha maximal desencadenada por f (el ítem 3 implica que todas las avalanchas maximales ocasionadas por f tienen la misma longitud); la desigualdad

$$L(f) \leq |V(G)| \|f\| d(G)$$

es conocida como la *Cota de Tardos* [11].

Sea v un vértice y sea $t \leq L(f)$ un entero positivo, usamos el símbolo $s(v, t)$ para denotar el número de disparos ocurridos en v hasta el instante t .

Hecho: dados v, w dos vértices y dado $t \leq L(f)$, tenemos que

$$|s(v, t) - s(w, t)| \leq \|f\|.$$

(*Prueba del hecho*). Sean v, w dos vértices tales que $s(v, t) \not\leq s(w, t)$. Definimos A como el conjunto $\{u : s(u, t) \leq s(v, t)\}$ y definimos B como el conjunto $\{u : s(v, t) \not\leq s(u, t)\}$. Observamos que en t disparos todos los vértices de B han sido disparados más veces que todos los vértices de A .

También tenemos que el número de granos en A ha sido incrementado. El incremento total, que denotamos con el símbolo I , es igual a

$$I = \sum_{u \in A, r \in B: \{u, r\} \in E(G)} (s(r, t) - s(u, t))$$

Observamos que $I \leq \|f\|$, y esto implica que para todo $u \in A$ y para todo $r \in B$, la desigualdad $s(u, t) - s(r, t) \leq \|f\|$ se satisface. Esto es: tenemos que para cualquier par $x, y \in V(G)^*$ y para todo $t \leq L(f)$

$$|s(x, t) - s(y, t)| \leq \|f\|$$

Dado $u \in v(G)$ usamos el símbolo $d(u, s)$ para denotar la distancia del vertice u al sumidero. Tenemos que s no dispara. El hecho anterior implica que si $d(v, s) = 1$, entonces v puede disparar máximo $\|f\|$ veces.

Podemos probar inductivamente que si $d(v, s) = k$, entonces v puede disparar $k\|f\|$ veces a lo sumo. así tenemos que todo vértice de G puede disparar máximo $d(G) \cdot \|f\|$ veces. Por tanto tenemos que

$$L(f) \leq |v(G)| \|f\| d(G).$$

Ítem 2: Dado G un grafo de pila de arena y dado v un vértice, definimos el *Operador de Toppling de Primer Orden* T_v como sigue: dada f una configuración sobre G tenemos que $T_v(f) = f_v$.

Note que la ecuación $T_v(T_u(f)) = T_u(T_v(f))$ se tiene para todo u, v y f .

Sea $C(G)$ el digrafo infinito cuyos vértices son los elementos del conjunto de configuraciones de G y cuya relación de accesibilidad es la relación dada por

$$f \rightarrow g \text{ si y solo si } \exists v \in V(G) (g = T_v(f))$$

Note que la avalancha maximal desencadenada por f corresponde al conjunto de caminos maximales en $C(G)$ con inicio en f . Además, nótese que $C(G)$ tiene la *propiedad de confluencia*, esto es: Dados $f, g, h \in V(C(G))$ si $f \rightarrow g$ y $f \rightarrow h$, existe t tal que $g \rightarrow t$ y $h \rightarrow t$. Tenemos que cualquier digrafo con la propiedad de confluencia cumple la siguiente propiedad: cualquier par de caminos maximales con inicio en el mismo nodo tienen el mismo vértice final [7]. De esta manera, tenemos que cualquier par de avalanchas maximales con inicio en la misma configuración tienen la misma configuración final.

Ítem 3: Dado G un grafo de pila de arena, supongamos que $V(G) = \{1, \dots, n, n+1\}$ y supongamos que $n+1$ es el vértice sumidero de G , el *laplaciano reducido* de G es

la matriz $L(G) = [a_{ij}]_{i,j \leq n}$ definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} -\deg(i), & \text{si } i = j \\ a_{ij} = 1, & \text{si } i \neq j \text{ y } \{i, j\} \in E(G) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Supongamos que g es una configuración sobre G , podemos pensar en g como en un elemento de \mathbb{N}^n . Si el vértice v dispara, obtenemos una nueva configuración g_v . Note que $g_v = g + Lv(G)$, donde $L_v(G)$ es la v -ésima fila de $L(G)$. De esta manera, se tiene para cualquier configuración g y para cualquier avalancha maximal A desencadenada por g vale la igualdad

$$st(G) = g + (L(G))(SC_A)$$

Llamamos a esta última la *ecuación de movimiento de la pila de arena*. La ecuación tiene importantes consecuencias. Dada A una avalancha maximal desencadenada por g , el vector SC_A es una solución del sistema:

$$st(g) - g = (L(G))X. \quad [\text{Sist. 1}]$$

El *teorema de la matriz de Kirchhoff* [10] dice que $|\det(L(G))|$ es igual al número de árboles generados de G . Note que esta cantidad es diferente de cero, puesto que G es conexo y por lo tanto $L(G)$ es no singular. Entonces, se tiene que, dados A y B dos avalanchas maximales, SC_A y SC_B son iguales a la única solución del sistema [Sist.1]. ■

El anterior teorema dice muchas cosas acerca del autómata de pila de arena. El ítem 1 dice que el autómata pila de arena no realiza computaciones infinitas. El ítem 2 dice que el autómata de pila de arena es confluente, *i.e.* El input (la configuración inicial) determina un único output (su estabilización). El ítem 3 dice que, aunque un automata de pila de arena puede ejecutar diferentes computaciones sobre un mismo input, estos autómatas son fuertemente determinísticos; puesto que dado $SP(G)$ un autómata de pilas de arena y dadas dos computaciones de $SP(G)$, en el input g , la segunda computación es simplemente una permutación de la primera, pero con las

mismas configuraciones inicial y final, lo cual implica que estas dos computaciones tienen la misma duracion y producen el mismo output.

Dado $C(G) = \mathbb{N}^{V(G)^*}$ el conjunto de todas las configuraciones sobre G , y dado $St(G)$, el conjunto de todas las configuraciones estables sobre G , podemos definir dos funciones $st_G : C(G) \rightarrow St(G)$ y $SC_G : C(G) \rightarrow C(G)$ de la manera siguiente:

1. $st_G(g) :=$ la estabilización de g .
2. $SC_G(g) := SC_A$, donde A es un elemento de $Aval_M(G, g)$

Note que, para cualquier grafo de Arena G , las funciones st_G y SC_G son computables puesto que las avalanchas son siempre finitas. Dado g una configuración de G , si uno quiere computar $st_G(g)$ o $SC_G(g)$, uno solo tiene que simular el cómputo del autómata $SP(G)$ en el input g .

Teorema 22 *Dado G un grafo de pila de arena y dados f_1, f_2 y f_3 tres configuraciones, tenemos que:*

1. $st_G(f_1 + f_2 + f_3) = st_G(st_G(f_1 + f_2) + f_3)$
2. $st_G(f_1 + f_2) = st_G(st_G(f_2) + st_G(f_1))$

Prueba. Se sigue facilmente de la invarianza del vector tabla. ■

Podemos ahora definir una operación binaria $\oplus : St(G)^2 \rightarrow St(G)$ de la manera siguiente :

$$f \oplus g := st_G(f + g)$$

Esto es: para calcular $f \oplus g$ simplemente sumamos las configuraciones f y g y entonces aplicamos la función st_G .

Se puede demostrar el siguiente lema:

Lema 23 *Dado un grafo de arena (G, s) , la operación $\oplus : St(G)^2 \rightarrow St(G)$ es modulativa, conmutativa y asociativa.*

Prueba. \oplus es asociativa:

$$\begin{aligned}
 (f \oplus g) \oplus h &= st_G(st_G(f + g) + h) \\
 &= st_G(f + g + h) \\
 &= st_G(f + st_G(g + h)) \\
 &= f \oplus (g \oplus h).
 \end{aligned}$$

\oplus es conmutativa:

$$f \oplus g = st_G(f + g) = st_G(g + f) = g \oplus f$$

\oplus es modulativa: sea g la *configuración nula* definida por, dado $v \in V(G)^*$ se tiene que $g(v) = 0$. Es facil comprobar que g es un módulo para \oplus . ■

Corolario 24 *La estructura $M(G) = (St(G), \oplus)$ es un monoide finito y conmutativo*

Sabemos que dado $M(G) = (St(G), \oplus)$ un monoide finito y conmutativo, el par $(Ker(M(G)), \oplus)$ es un grupo abeliano, donde $Ker(M(G))$ es igual a la intersección de todos los Ideales no vacíos de $M(G)$ [7].

Dado G un grafo de arena, el símbolo $K(G)$ denotará al grupo $(Ker(M(G)), \oplus)$. A este grupo lo llamaremos *El Grupo Crítico* de G o *El Grupo de Picard* de G .

Definición 25 *Sea $R(G)$ el grafo definido de la siguiente manera*

1. $V(R(G)) = St(G)$
2. *Dados $f, g \in St(G)$, la pareja $(f, g) \in E(R(G))$ si y solo si $\exists v \in G$ tal que $st_G(f + e_v) = g$, donde e_v es la configuración definida por*

$$e_v(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } v = w \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

usaremos el simbolo $f \rightarrow g$ para indicar que $(f, g) \in E(R(G))$ y diremos que g es accesible desde f .

Definición 26 Una configuración $f \in St(G)$ es recurrente si y solo si es accesible desde toda otra configuración.

Teorema 27 $f \in K(G)$ si y solo si f es recurrente.

Prueba. \rightarrow) Sea f un elemento de $K(G)$.

Dada $g \in St(G)$, el conjunto

$$g \uparrow := \{h \in St(G) : h \text{ es accesible desde } g\}$$

es un ideal, por tanto $f \in g \uparrow$, pues $K(G) \subseteq g \uparrow$. Luego f es accesible desde toda otra configuración.

Supongamos ahora que f es recurrente. Sea I un ideal del Monoide $(St(G), \oplus)$. Dado $g \in I$, existe $h \in St(G)$ tal que $f = g \oplus h$. Entonces $f \in I$. Como I era un ideal arbitrario de $(St(G), \oplus)$, podemos concluir que $f \in K(G)$. ■

Los elementos de $K(G)$ serán llamados *configuraciones críticas* (recurrentes), el conjunto de configuraciones críticas codifica el comportamiento a largo plazo de la dinámica del modelo de pila de arena sobre G .

El teorema a continuación, debido a Dhar, puede ser usado para caracterizar (y reconocer) el conjunto de configuraciones críticas [8].

Teorema 28 Dado un grafo de pila de arena G y dado f una configuración estable sobre G , tenemos que f es crítica si y solo si existe una configuración $g \neq 0$ tal que $f \oplus g = f$

Notación 29 Dado G un grafo de pilas de arena, usaremos el símbolo $\delta(G)$ para denotar el conjunto

$$\{w \in V(G)^* : \{w, s\} \in E(G)\}$$

Adicionalmente usaremos el símbolo $e_{\delta(G)}$ para denotar la configuración estable definida por

$$e_{\delta(G)}(v) = \text{número de aristas que conectan } v \text{ con } s$$

Teorema 30 Dado f una configuración estable sobre G y dado $v \in V(G)^*$ tenemos que

$$SC_{f+e_{\delta(G)}}(v) \leq 1$$

Prueba. Sea A una avalancha maximal desencadenada por $f+e_{\delta(G)}$. Podemos pensar en A como una secuencia de vértices $v_1, \dots, v_{L(f+e_{\delta(G)})}$ tal que dado $i \leq L(f+e_{\delta(G)})$ el vértice v_i es el vértice que dispara en el instante i durante la ocurrencia de A . Sea $i \leq L(f+e_{\delta(G)})$, usamos el símbolo $f^{(i)}$ para denotar la configuración obtenida después del i -ésimo disparo, (estamos suponiendo que se ha escogido una avalancha maximal desencadenada por $f+e_{\delta(G)}$), probaremos, usando inducción sobre i , que para cualquier $i \leq L(f+e_{\delta(G)})$, se tienen los siguientes dos hechos:

1. Para cualquier $j, k \leq i$, si $j \neq k$ entonces $v_j \neq v_k$.
2. Para todo $j \leq i$, se tiene la desigualdad

$$f^{(i)}(v_j) \leq \deg(v_j)$$

Para ($i = 1$) solo tenemos que chequear el ítem 2.

Note que

$$f^1(v) = f(v) + e_{\delta(G)}(v) - \deg(v) \text{ y } e_{\delta(G)}(v) \leq \deg(v)$$

Entonces, tenemos que $f^1(v) \leq f(v) \leq \deg(v)$, puesto que f es estable.

(*Hipótesis de Inducción*) Para toda $j, k \leq i$ si $j \neq k$, entonces $v_j \neq v_k$. Además, dado $j \leq i$, la desigualdad $f^{(i)}(v_j) \leq \deg(v_j)$ se tiene.

(*Caso $i + 1$*) Sea $j, k \leq i + 1$, si $j, k \leq i$ y $j \neq k$ entonces $v_j \neq v_k$. Supongamos que $k \leq j = i + 1$ entonces

$$f^{(i+1)}(v_{i+1}) = f(v_{i+1}) - \deg(v_{i+1}) + T_{i+1}$$

Donde T_{i+1} es igual al número de veces que han sido disparados los vecinos de v_{i+1} . La hipótesis de inducción implica que ningún vértice ha disparado más de una

vez antes del instante i . Además todos los vecinos de v_{i+1} han disparado máximo una vez. Esto implica que $T_{i+1} \leq \deg(v_{i+1})$ y que

$$f^{(i+1)}(v_{i+1}) \leq f(v_{i+1}) - \deg(v_{i+1}) \leq 0$$

Ahora, escogemos $\ell \leq i + 1$. Se tiene que

$$f^{(i+1)}(v_\ell) = f(v_\ell) - \deg(v_\ell) + E_{\ell, i+1}$$

Donde $E_{\ell, i+1}$ es igual al número de veces que los vecinos de v_ℓ han sido disparados antes del instante $i + 1$. Ya sabemos que todo vértice ha sido disparado máximo una vez, también sabemos que $\deg(v_\ell) \geq E_{\ell, i+1}$, todo lo anterior implica que

$$f^{(i+1)}(v_\ell) \leq f(v_\ell) \leq \deg(v_\ell)$$

Con lo que queda probado el teorema. ■

Teorema 31 (*Teorema de Dhar*). Sea G un grupo de pila de arena y sea f una configuración estable, tenemos que

1. f es crítica si y solo si $f \oplus e_{\delta(G)} = f$
2. f es crítica si y solo si para todo $v \in V(G)^*$ se tiene que $SC_{f+e_{\delta(G)}}(v) = 1$
3. f es crítica si y solo si no existe $A \subseteq V(G)^*$ tal que para todo $v \in A$ se satisface la desigualdad $f(v) \leq \deg_A(v)$, donde $\deg_A(v)$ es igual al número de arcos que conectan v con un vértice de A

Prueba. (Ítem 1) Si $f \oplus g = St(f + g) = f \oplus e_{\delta(G)} = f$, tenemos que f es crítica puesto que $e_{\delta(G)}$ no es nula. Dado $v \in V(G)^*$ definimos el operador *Toppling de segundo orden* G_v como sigue: Dado $f \in K(G)$ se tiene que $G_v(f) = f \oplus e_v$ donde e_v es la configuración

$$e_v(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w = v \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Note que dado $v, w \in v(G)^*$ se tiene la ecuación $G_v G_w = G_w G_v$. Definimos $T = \prod_{v \in V(G)^*} G_v^{\deg(v)}$ y $H = \prod_{v \in V(G)^*} G_v^{n_v}$, donde $n_v = \deg(v) - r_v$ y r_v es igual al número de aristas que conectan v con el sumidero.

Note que $T = H$ implica que $id = \prod_{v \in V(G)^*} G_v^{\deg(v) - n_v}$. Tenemos entonces que $\prod_{v \in V(G)^*} G_v^{r_v} = id$. Observe que dado $f \in K(G)$ se satisface la igualdad

$$\left(\prod_{v \in V(G)^*} G_v^{r_v} \right) (f) = f \oplus e_{\delta(G)}$$

Esto es, se tiene que $f = id(f) = f \oplus e_{\delta(G)}$

(Ítem 2) Si $SC_{f+e_{\delta(G)}}(v) = 1$ para todo $v \in V(G)^*$, entonces dado v un vértice de G el vértice v recibe un grano de arwna de cada de sus vecinos. Si v es vecino del sumidero, podemos pensar que, en el instante cero, v recibe de s un numero de granos que es igual al numero de aristas que conectan v con el sumidero, puesto que al comienzo adicionamos la configuración $e_{\delta(G)}$. Todos los vértices de G terminaran con un numero de granos igual al numero de granos que tenían al comienzo del proceso (¿Qué proceso? Adicionar $e_{\delta(G)}$ y luego estabilizar). De esta manera, se tiene que $f \oplus e_{\delta(G)} = f$ y esto implica que f es crítica puesto que $e_{\delta(G)}$ no es nula.

Por otro lado, si f es crítica, tenemos que $f \oplus e_{\delta(G)} = f$, esta ecuacion nos permite probar que dado v un vertice se satisface la desigualdad $SC_{f+e_{\delta(G)}}(v) \leq 1$

Supongamos que existe v tal que $SC_{f+e_{\delta(G)}}(v) = 0$. Entonces existe v tal que $SC_{f+e_{\delta(G)}}(v) = 0$ y $SC_{f+e_{\delta(G)}}(w) = 1$ para algún vecino w de v . Esto implica que $(f \oplus e_{\delta(G)})(v) \not\geq f(v)$, pero esto es claramente una contradicción.

(Ítem 3) Supongamos que f no es crítica, entonces el conjunto A definido por

$$A = \left\{ v : SC_{f+e_{\delta(G)}}(v) = 0 \right\}$$

es no vacío. Supongamos que existe $v \in A$ tal que $f(v) \geq \deg_A(v)$. Tenemos que $\deg(v) - \deg_A(v)$ vecinos son disparados durante la estabilización de $f + e_{\delta(G)}$. Cuando el proceso de relajación llegue a su fin, habran $f(v) + \deg(v) - \deg_A(v)$ granos en v . Es claro que

$$f(v) + \deg(v) - \deg_A(v) \geq \deg(v).$$

Tenemos entonces que el vértice v es inestable al final del proceso de relajación, pero esto es imposible dado que después de la relajación todos los vértices se hacen estables. Ahora, supondremos que existe A tal que para todo $v \in A$ se tiene la desigualdad

$$f(v) \not\leq \deg_A(v)$$

Probaremos que para todo $v \in A$ se satisface la igualdad $SC_{f+e_{\delta(G)}}(v) = 0$. Sea v un vértice en A y sea $t \leq L(f + e_{\delta(G)})$ un entero positivo. Usamos inducción sobre t para probar que para todo $t \leq L(f + e_{\delta(G)})$ y para todo $v \in A$, el vértice v no dispara después del instante $t + 1$.

- ($t = 0$). El vértice v no puede ser disparado después de $t = 1$, puesto que $f(v) \not\leq \deg_A(v)$.
- ($i \leq t$). Suponemos que el hecho es verdadero para todo $i \leq t$.
- ($t + 1$). Sea $B = V(G)^* - A$. La hipótesis de inducción implica que

$$f_{(v)}^{(t)} \leq f(v) + \deg_B(v)$$

Entonces

$$f_{(v)}^{(t)} \not\leq \deg_A(v) + \deg_B(v) = \deg(v)$$

Esto es, tenemos que en el instante t el vértice v es estable, y en consecuencia no puede ser disparado en el instante $t + 1$. ■

Corolario 32 *Si f es un configuración crítica, entonces, dados v, w dos vértices tales que $\{v, w\} \in E(G)$ se tiene que $f(v) \neq 0$ o $f(w) \neq 0$.*

Prueba. Este hecho es consecuencia del tercer ítem del teorema anterior. Supongamos que existe $v, w \in v(G)^*$ tal que $\{x, y\} \in E(G)$ y $f(v) = f(w) = 0$. Sea $A = \{x, y\}$, tenemos que $f(x), f(y) \not\leq 1 = \deg_A(x) = \deg_A(y)$. ■

Podemos usar el ítem 1 como la base de un algoritmo de tiempo lineal (tiempo real con respecto al tamaño de G) que reconoce el conjunto de las configuraciones

críticas, este algoritmo es llamado El Test de Encendidos (*The Burning Test*, o \mathcal{BT} para abreviar) y trabaja como sigue:

con input (G, f) (donde G es un grafo de pila de arena y f es una configuración estable sobre G , el algoritmo \mathcal{BT} realiza el cálculo descrito a continuación:

1. \mathcal{BT} simula el proceso de estabilización de $f + e_{\delta(G)}$
2. \mathcal{BT} cuenta el número de veces que cada vértice fue disparado durante la estabilización
3. Si todos los vértices fueron disparados exactamente una vez, \mathcal{BT} acepta f , en caso contrario \mathcal{BT} rechaza.

Es importante señalar que podemos usar el Burning Test para probar que existe una biyección entre el conjunto de configuraciones críticas sobre G y el conjunto de árboles generados de G , esto es, podemos usar el Burning Test y el teorema de la matriz de Kirchhoff para probar que la ecuación

$$|K(G)| = |\det(L(G))|$$

es válida por todo grafo de arena G , el símbolo $L(G)$ denota al laplaciano reducido de G .

Capítulo 4

Estadística de avalanchas críticas

En el capítulo anterior hemos enunciado y probado la cota de Tardos [11], la cual afirma que la longitud de las avalanchas generadas por una configuración f sobre un grafo de arena G está acotada superiormente por $O(\|f\| |V(G)| d(G))$. En este capítulo intentaremos establecer cotas inferiores y superiores en la longitud de las avalanchas que pueden ocurrir sobre diferentes clases de grafos de arena. Concentraremos nuestra atención en un cierto tipo de avalanchas que llamaremos *Avalanchas Críticas* y en clases de grafos de grado acotado.

4.1. Avalanchas críticas y clases de grado acotado

Empezemos observando que en la cota de Tardos ocurren dos tipos de parámetro de naturaleza radicalmente diferente: el parámetro $\|f\|$ que depende de la configuración, y el parámetro $|V(G)| d(G)$ que depende del grafo. Note que estos parámetros son independientes, un grafo pequeño puede soportar una configuración de gran peso, mientras que un grafo inmenso puede soportar una configuración de peso pequeño. Haremos un intento por uniformizar estos parámetros, para ello introduciremos la noción de *avalancha crítica*.

Definición 33 *Dado G un grafo de arena, una avalancha crítica sobre G es una avalancha generada por la suma de dos configuraciones críticas.*

En adelante usaremos el símbolo n para denotar la cantidad $|V(G)^*|$ (siempre que el contexto lo permita). Note que dadas f y g dos configuraciones críticas se tiene $\|f + g\| \leq 2n^2$.

Definición 34 *Dada \mathcal{C} una clase de grafos de arena, diremos que \mathcal{C} es una clase de grado acotado si y solo si existe $k_{\mathcal{C}} \in \mathbb{N}$ tal que para todo $G \in \mathcal{C}$ y para todo $v \in V(G)^*$ se tiene que $\text{grad}_G(v) \leq k_{\mathcal{C}}$.*

Note que si \mathcal{C} es una clase de grado acotado, $G \in \mathcal{C}$ y f, g son dos configuraciones críticas sobre G se tiene que $\|f + g\| \in O(n)$.

En lo que queda de este trabajo, estudiaremos cotas inferiores y superiores en la longitud de las avalanchas críticas que pueden ocurrir sobre diferentes clases de grado acotado. Para empezar enunciaremos la cota de Tardos adaptada a este nuevo contexto.

Teorema 35 *(Cota de Tardos)*

Dada \mathcal{C} una clase de grado acotado, dado $G \in \mathcal{C}$ y dadas $f, g \in \mathcal{K}(G)$ se tiene que

$$L(f + g) \in O(n^2 d(G))$$

donde $L(f + g)$ denota la longitud de las avalanchas generadas por $f + g$.

Note que $d(G) \in O(n)$, donde n es el tamaño del grafo, de lo anterior se tiene que, en el peor caso, la cota de Tardos nos da una cota de orden cubico en la longitud de las avalanchas. Para el caso de los reticulos es posible obtener mejores cotas, considere el teorema a continuacion.

Teorema 36 *Dado $d \geq 1$, el simbolo \mathcal{L}_d denota la clase de los reticulos d -dimensionales.*

Sea G un reticulo d -dimensional de tamaño n y sean $f, g \in \mathcal{K}(G)$, se tiene lo siguiente

$$L(f + g) \in O\left(n^{\frac{d+2}{d}}\right)$$

Primero demostraremos el siguiente teorema:

Teorema 37 *(Moore-Nilsson) Sea G un reticulo d -dimensional de lado ℓ y sean $f, g \in \mathcal{K}(G)$, se tiene lo siguiente $L(f + g) \in O(\ell^{d+2})$.*

Prueba. Sea G un reticulado cubico d -dimensional y sea $k = 2d$.

Una forma habitual de ejecutar el modelo de pila de arena es con una actualización en paralelo: en cada instante actualizamos todos los vértices simultáneamente de la siguiente manera:

$$s_i \rightarrow s_i - \begin{cases} k & \text{si } s_i \geq k \\ 0 & \text{si } s_i < k \end{cases} + \sum_{j \in N(i): s_j \geq k} 1$$

Es fácil mostrar que si en el instante cero vale la desigualdad $s_i < 2k$ (para todo vértice i), entonces esto seguiría siendo cierto, por lo que se puede pensar en este como un autómata celular con $2k$ estados.

Considere un reticulado d -dimensional con ℓ vértices en cada lado y supongamos que ℓ es impar, podemos particionar el interior en una serie de j cascarones de lado $1, 3, 5, \dots, 2j - 1 = \ell$.

Un toppling en un cascarón dado envía al menos un grano de arena hacia el exterior (al siguiente cascarón, mas cerca al borde) y a lo sumo envía un grano de arena hacia el interior (al siguiente cascarón). Por tanto, el flujo de arena hacia el exterior desde el i -ésimo al $(i + 1)$ -ésimo cascarón es por lo menos $\tau_i - \tau_{i+1}$ donde τ_i es el número de topplings en el i -ésimo cascarón.

Por otra parte, el i -ésimo cascarón tiene un volumen de $(2i - 1)^d$ y dados f la configuración inicial y un vértice v se satisface que $f(v) \leq 4d - 1$ (dado que f es la suma de dos avalanchas críticas), luego el flujo hacia el exterior del i -ésimo cascarón puede ser a lo sumo de $(4d - 1)(2i - 1)^d$ antes que toda la arena haya salido de allí (que de hecho nunca sucede). Por lo tanto, tenemos que

$$\tau_i - \tau_{i+1} \leq (4d - 1)(2i - 1)^d \text{ para todo } i \leq j$$

Entonces el número total de toppings es

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^j \tau_i &= \sum_{i=1}^j \sum_{i'=i}^j \tau_{i'} - \tau_{i'+1} \\
&\leq (4d-1) \sum_{i=1}^j \sum_{i'=i}^j (2i'-1)^d \\
&< (4d-1) \frac{j(j+1)}{2} (2j-1)^d \\
&= (4d-1) \frac{(\ell+1)(\ell+3)}{8} \ell^d \in O(\ell^{d+2})
\end{aligned}$$

Ahora, si tomamos $n = |V(G)^*|$ entonces $\ell = n^{1/d}$ y obtenemos

$$L(f+g) \in O\left(n^{\frac{d+2}{d}}\right)$$

donde $f, g \in K(G)$. ■

4.2. Estadística de avalanchas críticas tridimensionales

En esta sección probamos que la longitud esperada de las avalanchas críticas tridimensionales es $\Omega(n^4) = \Omega(|\mathcal{L}_n|^{4/3})$ [9] donde \mathcal{L}_n denota el retículo tridimensional de lado n .

Notación 38 Dado $n \geq 1$ usaremos el símbolo $K(n)$ para denotar el conjunto $K(\mathcal{L}_n)$.

Dadas $f, g \in K(n)$ usamos el símbolo $L(f+g)$ para denotar la longitud de las avalanchas críticas generadas por $f+g$, y usamos el símbolo $f \leq g$ para indicar que para todo $v \in V(\mathcal{L}_n)^*$ se satisface la desigualdad $f(v) \leq g(v)$.

Dado $n \geq 1$ usamos el símbolo w_n para denotar la *configuración maximal estable*, que es la configuración definida por: para todo $v \in V(\mathcal{L}_n)^*$ tenemos que $w_n(v) = 5$.

El siguiente lema es sencillo.

Lema 39 Sea f, g, h y t cuatro configuraciones sobre \mathcal{L}_n , entonces se tiene que:

1. $f, g, h, t \leq w_n$.
2. Si $f \leq h$ y $g \leq t$, entonces $L(f + g) \leq L(h + t)$.
3. $L(f + g) \leq L(w_n + w_n)$.

El lema nos dice que si queremos acotar superiormente la longitud de toda avalancha crítica que pueda ocurrir en \mathcal{L}_n , es suficiente acotar superiormente la cantidad $L(w_n + w_n)$.

Teorema 40 $L(w_n + w_n) \in \Omega(|\mathcal{L}_n|^{4/3})$.

Prueba. Dado \mathcal{L}_n el retículo tridimensional de lado n , usamos el símbolo $\delta(\mathcal{L}_n)$ para denotar el conjunto $\{w \in V(\mathcal{L}_n)^* : \{w, *\} \in E(\mathcal{L}_n)\}$.

Usamos el símbolo δ_n para indicar la configuración definida por :

$$\text{dado } v \in V(\mathcal{L}_n)^*, \delta_n(v) = 6 - \deg_{V(\mathcal{L}_n)^*}(v)$$

Vamos a probar que existe un constante C tal que $\forall n \geq 1$ se satisface la desigualdad

$$L(w_n + w_n) \geq Cn^4 \in \Omega(|\mathcal{L}_n|^{4/3}).$$

Recuerde que toda avalancha generada por $2w_n$ tiene la misma longitud. Fijemos $n \geq 2$, queremos acotar inferiormente la longitud de una avalancha específica generada por $2w_n$.

Dado $n \geq 2$, podemos identificar el sumidero de \mathcal{L}_{n-2} con $\delta(\mathcal{L}_n)$, el borde de \mathcal{L}_n . Si hacemos esta identificación, podemos pensar que \mathcal{L}_{n-2} está encajado en \mathcal{L}_n y podemos escribir la configuración w_n como $w_{n-2} + \delta_n + \gamma_n$, donde γ_n es alguna configuración sobre \mathcal{L}_n .

Note que

$$2w_n = (w_n + \delta_n) + (w_{n-2} + \gamma_n)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} St_n(2w_n) &= St_n(St_n(w_n + \delta_n) + St_n(w_{n-2} + \gamma_n)) \\ St_n(w_n + \delta_n) &= w_n \text{ y } L(w_n + \delta_n) = |V(\mathcal{L}_n)^*| = n^3 \end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que existe una configuración β_n tal que podemos pasar de la configuración $2w_n$ a la configuración $2w_{n-2} + \beta_n$. Por otra parte, tenemos que la avalancha parcial que nos lleva desde $2w_n$ hasta $2w_{n-2} + \beta_n$ tiene una longitud igual a n^3 . Esta avalancha parcial (esta no es una avalancha máxima) es la primera etapa de todo el proceso de estabilización.

En la segunda etapa trabajamos sobre el subgrafo \mathcal{L}_{n-2} con la configuración $2w_{n-2}$. Es fácil chequear que después de $(n-2)^3$ topplings podemos pasar de la configuración $2w_{n-2}$ a una configuración $2w_{n-4} + \beta_{n-2}$. Si continuamos de esta forma, llegaremos al corazón (centro) de \mathcal{L}_n , y habremos generado $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ avalanchas parciales cuyas longitudes están acotadas inferiormente por $n^3, (n-2)^3, \dots, (n-2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2))^3$ y $(n-2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1))^3$ respectivamente. Por lo tanto tenemos que:

$$L(w_n + w_n) \geq \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} (n-2i)^3 \in \Omega(n)^4$$

■

Lema 41 Para todo $f_1, f_2, \dots, f_{70} \in K(n)$ la configuración $2w_n$ es accesible desde $f_1 + f_2 + \dots + f_{70}$.

Prueba. Recuerde que dado $f \in K(n)$ y dado $\{v, w\} \in E(\mathcal{L}_n)$, tenemos que $f(w) \geq 0$ o $f(v) \geq 0$. Sea f_1, \dots, f_7 siete configuraciones críticas, dado $v \in V(\mathcal{L}_n)^*$ tenemos que \mathbf{o} existe $i \leq 7$ tal que $f_i(v) \geq 0$ \mathbf{o} para cualquier vecino w de v y para cualquier $i \leq 7$ tenemos que $f_i(w) \geq 0$. Supongamos que para todo $i \leq 7$ se tiene que $f_i(v) = 0$, en este caso podemos elegir cualquier vecino de v , digamos w , y disparar. Esto nos permite poner al menos un grano sobre v , teniendo cuidado de dejar al menos un grano en w . Es claro que si comenzamos con la configuración $\sum_{i \leq 7} f_i$ podemos elegir una secuencia de máximo $|V(\mathcal{L}_n)^*|$ topplings para obtener una configuración h tal que para cualquier $v \in V(\mathcal{L}_n)^*$ se satisface que $h(v) \geq 0$.

Entonces, dados $f_1, f_2, \dots, f_{70} \in K(n)$ tenemos que

$$\sum_{i \leq 70} f_i \rightarrow 2w_n$$

Vale la pena mencionar que el número 70 en el enunciado del lema anterior, es una constante que está completamente determinada por la dimensión d del reticulado en el que estamos trabajando. Dado $d \geq 2$, podemos probar un resultado análogo para reticulos d -dimensionales reemplazando $70 = 2(2(3) - 1)(2(3) + 1)$ por $2(2d - 1)(2d + 1)$. ■

Teorema 42 (*Configuraciones críticas generan, con alta probabilidad, avalanchas muy largas*).

Dado $n \geq 1$ tenemos que:

$$\Pr_{f, g \in K(n)} \left[L(f + g) \geq \frac{L(w_n + w_n)}{2^{70}} \right] \geq \frac{1}{69}$$

Prueba. Dado f_1, f_2, \dots, f_{70} setenta configuraciones críticas, tenemos que $\sum_{i \leq 70} f_i \rightarrow 2w_n$. Esto implica que

$$L \left(f_{70}, \sum_{i \leq 69} f_i \right) \geq L(w_n + w_n)$$

También tenemos que

$$\begin{aligned} \circ L(f_{70}, \oplus_{i \leq 69} f_i) &\geq \frac{L(w_n + w_n)}{2} \\ \circ L \left(f_{69}, \sum_{i \leq 68} f_i \right) &\leq \frac{L(w_n + w_n)}{2} \end{aligned}$$

Argumentando en esta forma podemos probar que existe $i \leq 70$ tal que

$$L(f_i, \oplus_{j \leq i-1} f_j) \geq \frac{L(w_n + w_n)}{2^{70}}$$

Esto es, tenemos que

$$\Pr_{f_1, \dots, f_{70}} \left[\exists i \leq 70 \left(L(f_i, \oplus_{j \leq i-1} f_j) \geq \frac{L(w_n + w_n)}{2^{70}} \right) \right] = 1$$

Note que para cualquier $f \in K(n)$ y para cualquier $i \geq 1$ tenemos que

$$\Pr_{f_1, \dots, f_{70}} [\oplus_{j \leq i-1} f_j] = \frac{1}{|K(n)|}$$

Dada f_1, \dots, f_α una secuencia de configuraciones críticas sobre \mathcal{L}_n y dada $i \leq \alpha - 1$ definimos $g_i = \oplus_{j \leq i} f_j$. Tenemos que

1. El siguiente procedimiento es un buen método para generar, uniformemente al azar, dos elementos de $K(n)$.

- Elija uniformemente al azar f_1, \dots, f_α , ($\alpha \geq 2$).
- Elija uniformemente al azar $i \in \{2, \dots, \alpha\}$.
- Calcule f_i y g_{i-1} .

2. Se tiene que

$$\Pr_{f_1, \dots, f_{70}} \left[\exists_{2 \leq i \leq 70} \left(L(f_i, g_{i-1}) \geq \frac{L(w_n + w_n)}{2^{70}} \right) \right] = 1$$

De los ítem 1 y 2 obtenemos

$$\begin{aligned} \Pr_{f, g \in K(n)} \left[L(f, g) \geq \frac{L(w_n + w_n)}{2^{70}} \right] &= \\ \Pr_{2 \leq i \leq 70; f_1, \dots, f_{70}} \left[L(f_i, g_{i-1}) \geq \frac{L(w_n + w_n)}{2^{70}} \right] &\geq \frac{1}{69} \end{aligned}$$

■

Sea $X_n : K(n)^2 \rightarrow \mathbb{N}$ la variable aleatoria definida por $X_n(f, g) = L(f + g)$

Corolario 43 $E[X_n]$, el valor esperado de X_n , pertenece a $\Omega(n^4)$.

Prueba. Sabemos que existe una constante positiva K tal que

$$\Pr_{f, g \in K(n)} [X_n(f, g) \geq Kn^4] \geq \frac{1}{69}$$

Tenemos entonces que

$$\frac{K}{69}n^4 \leq E[X_n]$$

Por lo tanto, se sigue que $E[X_n] \in \Omega(n)^4 = \Omega(|\mathcal{L}_n|^{4/3})$. ■

Capítulo 5

Pilas de Arena de Ramanujan

En este capítulo estudiaremos uno de los problemas centrales en la teoría del modelo de pilas de arena, a saber: el cálculo de cotas superiores en la longitud de las avalanchas. Lo que haremos es estudiar el comportamiento de las pilas de arena sobre secuencias de grafos de Ramanujan. Para grafos generales, la mejor cota superior conocida es cúbica. Existen clases de grafos para los cuales es posible obtener mejores cotas.

La cota de Tardos nos permite obtener una cota de orden $O(n^2 \log(n))$ para la longitud de las avalanchas sobre grafos de Ramanujan. Para obtener este tipo de cota es suficiente probar que los grafos de Ramanujan son grafos de diámetro logarítmico.

En el capítulo anterior discutimos, en mayor o menor profundidad, cada uno de los siguientes resultados:

1. Si \mathcal{C} es una clase de grafos de arena, $G \in \mathcal{C}$ es un grafo de tamaño n y $f, g \in K(G)$ entonces $L(f + g) \in O(n^4)$. Esta cota es un corolario inmediato de la cota de Tardos.
2. Si \mathcal{C} es una clase acotada de grafos de arena, $G \in \mathcal{C}$ es un grafo de tamaño n y $f, g \in K(G)$ entonces $L(f + g) \in O(n^3)$. Esta segunda cota también es un corolario de la cota de Tardos, pero en ella hacemos uso del que \mathcal{C} sea una clase acotada.

3. Dado $d \geq 1$ y dado \mathcal{L}_n el reticulo d -dimensional de orden n se tiene que $L(f + g) \in O(n^{d+2}) = O(|\mathcal{L}_n|^{\frac{d+2}{d}})$.

En todos los casos hemos conseguido establecer cotas superlineales. En este capitulo continuaremos con este estudio pero restringiendonos a clases acotadas de grafos de arena de alta conectividad (*Pilas de arena de Ramanujan*). Lo que haremos es estudiar el comportamiento de las pilas de arena sobre secuencias de grafos de Ramanujan (recuerde que la noción de grafo de Ramanujan es una noción espectral). Más específicamente intentaremos usar las herramientas de la teoría espectral de grafos para establecer cotas subcuadraticas en la longitud de las avalanchas críticas sobre secuencias de grafos de Ramanujan.

5.1. Cotas subcúbicas.

Un grafo de arena de Ramanujan es un grafo de Ramanujan en el que se escoge uno cualquiera de sus vertices para que desempeñe el rol del sumidero. En esta seccion probaremos que si $\{G_n\}_{n \geq 1}$ es una secuencia de grafos de arena de Ramanujan k -regulares, entonces dado $n \geq 1$ y dados $f, g \in K(G_n)$ se tiene que $L(f + g) \in O(n^2 \log(n))$. La cota de Tardos [11] implica que $L(f + g) \in O(|G_n| \delta(G_n))$, donde $\delta(G_n)$ es el diametro de G_n , lo que nosotros haremos es probar que los grafos de Ramanujan son grafos de diametro de logaritmico.

Nota. A partir de este momento fijaremos un k y fijaremos una secuencia $\{G_n\}_{n \geq 1}$ de grafos de Ramanujan k -regulares.

Teorema 44 Sea $\{G_n\}_{n \geq 1}$ una secuencia de grafos de Ramanujan k -regulares, la secuencia $\{G_n\}_{n \geq 1}$ es una secuencia de diámetro logaritmico.

Prueba. Tomemos $n \geq 1$, sea G_n el n -ésimo grafo en la secuencia y supongamos que $|G_n| = m$. Además supongamos que A es la matriz de adyacencia de G_n , se tiene lo siguiente:

1. La matriz A es simétrica y ortogonalmente diagonalizable.

2. Si $u_1 = k > u_2 \geq \dots \geq u_m \geq -k$ es el espectro de G_n , entonces, $|u_j| \leq 2\sqrt{k-1}$, con $2 \leq j \leq m$.

3. Sea μ_0 una distribución de probabilidad sobre el conjunto $V(G_n)$. La matriz $\frac{A}{k}$ es la matriz de transición del proceso Markov $(\{X_{i \geq 1}\}, \mu_0)$ definido por:

- $X_0 :=$ escoja al azar un elemento de $V(G_0)$, de acuerdo a la distribución μ_0 .
- $X_{n+1} :=$ Dado X_n , escoja uniformemente al azar un vecino de X_n

Dado μ_i el vector de probabilidad definido por las ecuaciones

$$(\mu_i)_j = \Pr[X_i = j], \quad 1 \leq j \leq m$$

La teoría de cadenas de Markov (consulte la referencia [12]) nos dice que:

$$\mu_i = \left(\frac{A}{k}\right)^i \mu_0$$

4. G_n es conexo, i, e la cadena es regular, i, e existe una distribución estacionaria μ_∞ tal que $\mu_i \rightarrow \mu_\infty$. Además, dado que G_n es k -regular, se tiene que $\mu_\infty = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right)$

5. Sea v_1, v_2, \dots, v_m una base ortonormal de autovectores de $\frac{A}{k}$, con $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{m}}\right)$. Existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, tales que $\mu_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$.

Dado $i \geq 1$, tenemos que

$$\mu_i = \left(\frac{A}{k}\right)^i \mu_0 = \left(\frac{A}{k}\right)^i \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j \left(\frac{A}{k}\right)^i v_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j \left(\frac{u_j}{k}\right)^i v_j$$

donde u_1, \dots, u_m son los autovalores de la matriz $\frac{A}{k}$. Note que

$$\left(\frac{A}{k}\right) (\alpha_1 v_1) = \alpha_1 \left(\left(\frac{u_1}{k}\right) v_1\right) = \alpha_1 v_1 = \mu_\infty$$

pues $u_1 = k$ y $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}$. Entonces

$$\mu_i = \alpha_1 v_1 + \sum_{j=2}^m \alpha_j \left(\frac{u_j}{k}\right)^i v_j$$

Es claro que $\mu_i \rightarrow \alpha_1 v_1$, dado que si $2 \leq j \leq m$ entonces $u_j < k$.

Sea $\alpha = \max \{\alpha_j : j = 1, \dots, m\}$. Lo que queremos probar es que $\left(\alpha \sum_{j=2}^m \left(\frac{u_j}{k}\right)^i v_j\right)$ converge rápidamente a cero. Para esto nos olvidamos de α , porque es una constante, y analizamos el termino $\sum_{j=2}^m \left(\frac{u_j}{k}\right)^i v_j$.

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=2}^m \left(\frac{u_j}{k}\right)^i v_j \right\| &\leq \sum_{j=2}^m \left\| \left(\frac{u_j}{k}\right)^i v_j \right\| = \sum_{j=2}^m \left(\frac{|u_j|}{k}\right)^i \|v_j\| \\ &\leq \left(\frac{2\sqrt{k-1}}{k}\right)^i \sum_{j=2}^m \|v_j\| \\ &\leq \left(\frac{2\sqrt{k-1}}{k}\right)^i (m-1) \end{aligned}$$

Queremos medir la velocidad de convergencia, esto es, dado $\epsilon > 0$ se quiere encontrar un $m(\epsilon)$ tal que

$$\left(\frac{2\sqrt{k-1}}{k}\right)^{m(\epsilon)} (m-1) \leq \epsilon$$

Supongamos que para $m(\epsilon)$ vale la desigualdad anterior, se tiene entonces que

$$\left(\frac{2\sqrt{k-1}}{k}\right)^{m(\epsilon)} \leq \frac{\epsilon}{m-1}$$

por lo que

$$m(\epsilon) \log \left(\frac{2\sqrt{k-1}}{k}\right) \leq \log \left(\frac{\epsilon}{m-1}\right)$$

lo cual implica que

$$m(\epsilon) \geq \frac{\log \left(\frac{\epsilon}{m-1}\right)}{\log \left(\frac{2\sqrt{k-1}}{k}\right)}$$

En particular, si tomamos $\epsilon = \frac{1}{2\sqrt{m}}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
m(\epsilon) &= \frac{\left\lceil \log \left(\frac{1}{\frac{2\sqrt{m}}{m-1}} \right) \right\rceil}{\log \left(\frac{2\sqrt{k-1}}{k} \right)} \\
&\leq \frac{\log \left(\frac{1}{\frac{2\sqrt{m}}{2}} \right)}{-c} = \frac{\log \left(\frac{1}{m\sqrt{m}} \right)}{-c}
\end{aligned}$$

donde

$$c = -\log \left(\frac{2\sqrt{k-1}}{k} \right) \gneq 0$$

Y podemos concluir que

$$m(\epsilon) \leq \frac{\log(1) - \log(m^{3/2})}{-c} = \frac{3}{2c} \log m$$

Si se toma $k_0 = \lceil \frac{3}{2c} \log(m) \rceil$, tenemos que

$$\left\| \left(\frac{A}{k} \right)^{k_0} \mu_0 - \alpha_1 v_1 \right\| \leq \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

Y esto implica que $\forall j \leq m, \left(\left(\frac{A}{k} \right)^{k_0} \mu_0 \right)_j \geq \frac{1}{2\sqrt{m}}$.

Mostraremos ahora que $\delta(G_n) \leq \frac{3}{2c} \log(|G_n|)$. Supongamos $V(G_n) = \{1, 2, \dots, m\}$ y sea A_n la matriz de adyacencia de G_n . Dado $i \in V(G_n)$ tomamos la distribución β_i definida por

$$\beta_i(k) = \delta_{ik}$$

Dado $i \geq 1$ y dada ϑ_i la distribución definida por la ecuación

$$\left(\frac{A_n}{k} \right)^{k_0} \beta_i = \vartheta_i$$

Se tiene entonces que para todo $l \leq m$ se satisface la desigualdad $\vartheta_i(l) \gneq 0$. Recuerde que $\vartheta_i(l)$ es la probabilidad de llegar a j tras k_0 pasos, si se empieza un camino aleatorio en i . Ahora, como esta probabilidad es diferente de cero, tiene que existir un camino entre i y j de longitud acotada por k_0 . Ahora, como i, j eran vértices arbitrarios de G_n se tiene que

$$\delta(G_n) \leq \frac{3}{2c} \log(|G_n|)$$

Y podemos afirmar que $\{G_n\}_{n \geq 1}$ es una secuencia de diametro logarítmico ■

Lema 45 Sea $(G_n)_{n \geq 1}$ una secuencia de grafos de Ramanujan k -regulares, existe una constante c tal que dado $n \geq 1$ y dada $f, g \in K(G_n)$ se tiene que

$$L(f, g) \leq c \|f + g\| m \log(m)$$

donde $\|f + g\|$ es el número de granos de arena al inicio de la avalancha y m es el tamaño del grafo, esto es, $m = |V(G_n)|$.

Prueba. Use la Cota de Tardos y el teorema de diámetro logarítmico. ■

La cota obtenida en el lema anterior no es la mejor cota que podemos establecer. El teorema a continuación muestra que es posible obtener una cota en la longitud de las avalanchas críticas sobre grafos de Ramanujan del tipo

$$L(f, g) \leq O(\|f + g\| \sqrt{m})$$

Teorema 46 Sea $(G_n)_{n \geq 1}$ una secuencia de grafos de Ramanujan k -regulares, dado $n \geq 1$ y dadas $f, g \in K(G_n)$ se tiene que

$$L(f) \leq \frac{\|f + g\| \sqrt{m}}{k - 2(\sqrt{k} - 1)}$$

donde $\|f + g\|$ es el número de granos de arena al inicio de la avalancha y m es el tamaño del grafo, es decir, $m = |V(G_n)|$.

Prueba. Sea $n \geq 1$, sea G_n un grafo de la secuencia con $|V(G_n)| = m$ y sean C_i y C_e las configuraciones inicial y final, es decir, $f + g = C_i$ y $C_e = St_G(f + g)$. Así:

$$\|f + g\| = \sum_{x \in V(G_n)} C_i(x)$$

Sean $0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_m$ los autovalores del laplaciano reducido de G_n que notaremos L_{G_n} y sea $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ una base ortonormal de autovectores. El vector tabla f^* queda definido por:

$$L_{G_n} f^* = C_i - C_e$$

Por consiguiente, podemos expresar f^* como $\sum_{i=1}^m a_i \phi_i$ y podemos expresar los correspondientes a_i 's como

$$\begin{aligned} a_i &= \langle f^*, \phi_i \rangle = \frac{1}{\sigma_i} \langle f^*, \sigma_i \phi_i \rangle \\ &= \frac{1}{\sigma_i} \langle f^*, L_{G_n} \phi_i \rangle = \frac{1}{\sigma_i} \langle L_{G_n} f^*, \phi_i \rangle \\ &= \frac{1}{\sigma_i} \langle C_i - C_e, \phi_i \rangle, \quad [\text{Eq. 1}] \end{aligned}$$

La longitud de la avalancha con inicio en f es simplemente la suma de las entradas del vector tabla f^* ; es decir,

$$L(f, g) = \sum_{x \in V(G_n)} f^*(x) = \langle \mathbf{1}_m, f^* \rangle \quad [\text{Eq. 2}]$$

De [Eq. 1] y [Eq. 2] obtenemos:

$$\begin{aligned} L(f, g) &= \sum_{x \in V(G_n)} f^*(x) = \left\langle \mathbf{1}_m, \sum_{i=1}^m a_i \phi_i \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{1}_m, \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i} \langle C_i - C_e, \phi_i \rangle \phi_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i} \langle C_i - C_e, \phi_i \rangle \langle \mathbf{1}_m, \phi_i \rangle \\ &\leq \frac{1}{\sigma_i} \left(\sum_{i=1}^m \langle C_i - C_e, \phi_i \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^m \langle \mathbf{1}_m, \phi_i \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sigma_i} \|C_i - C_e\|_2 \|\mathbf{1}_m\|_2 \\ &\leq \frac{1}{\sigma_i} \|C_i - C_e\|_2 \sqrt{m} \end{aligned}$$

donde $\|C_i - C_e\|_2$ está acotado por el número de granos de arena $\|f + g\|$. Se

tiene entonces que

$$L(f, g) \leq \frac{1}{\sigma_i} \|f + g\| \sqrt{m},$$

Observe que $\sigma_1 = k - \mu_1 \leq k - 2(\sqrt{k-1})$, luego

$$L(f, g) \leq \frac{\|f + g\| \sqrt{m}}{K - 2\sqrt{K-1}}$$

que era lo que queríamos demostrar. ■

Bibliografía

- [1] Biggs, N. *Algebraic graph theory*, 2nd. ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1994.
- [2] Chartrand, G. and Zhang, P. *Introduction to Graph Theory*. The Walter Rudin Student Series in Advanced Mathematics. Ed. Mc. Graw Hill, New York, 2005.
- [3] Davidoff, G., Sarnak, P. and Valette, A. *Elementary Number Theory, Group Theory, and Ramanujan Graphs*. London Mathematical Society Student Texts 55. Cambridge University Press, 2003.
- [4] Hoory, S., Linial, N. and Wigderson A. Expander Graphs and Their Applications. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Volume 43, Number 4, October 2006.
- [5] Sarnak, P. What is an expander? Notices Amer. Math. Soc., 51(7):762-763, 2004.
MR2072849.
- [6] Bak, P., Tang, C., and Wiesenfeld, K. Self-organized criticality. Physical Review A, Volume 38, Number 1, July, 1988.
- [7] Moreno, C. Pilas de arena sobre grafos dirigidos y algo de complejidad. Revista Integración, Escuela de Matemáticas, universidad Industrial de Santander, vol. 24, No. 2. Bucarmanga, 2006.
- [8] Dhar, D. Self Organized Critical State of the Sandpile Automaton models. Physical Review Letters, 64(14):1613-1616, 1990.

- [9] Moore, C. and Nilsson, M. The Computational Complexity of Sandpiles. *Journal of Statistical Physics* 96: 205-224, 1999.
- [10] Mejia, C. and Montoya, A. The Complexity of Three-Dimensional Critical Avalanches. *LNCS.6350:153-162*, 2010.
- [11] Tardos, G. Polynomial bound for a chip firing game on graphs. *SIAM J. Discrete Mathematics*. **1** (1988) 397-398.
- [12] Haggstrom, O. *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*. London Mathematical Society, London UK, 2002.