PROBLEMAS ALGORÍTMICOS ASOCIADOS AL MODELO ABELIANO PILAS DE ARENA

Sergio Andrés Montoya Torres

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2011

PROBLEMAS ALGORÍTMICOS ASOCIADOS AL MODELO ABELIANO PILAS DE ARENA

Sergio Andrés Montoya Torres

Monografía presentada a la Facultad de Ciencias de la Universidad Industrial de Santander como requisito parcial para optar al título de MAGISTER EN MATEMÁTICAS

Director:
Juan Andrés Montoya

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2011

Índice general

Introducción **ii**

1. El modelo abeliano pilas de arena **1**

1.1. Definiciones básicas 1

1.2. Estructuras algebraicas asociadas al modelo abeliano pilas de arena 7

2. Problemas algorítmicos asociados al modelo pilas de arena **15**

2.1. Problemas algorítmicos 15

3. Pilas de arena sobre grillas unidimensionales **22**

3.1. Pilas de arena en dimensión 1 22

3.2. $GC[\mathcal{L}_1]$ pertenece a $LOGDCFL$ 25

3.3. $SPP[\mathcal{L}_1]$ es TC^0- duro 31

4. Pilas de arena sobre grillas bidimensionales **35**

4.1. Pilas de arena en dimensión 2 35

4.2. La Complejidad en 2D: un problema abierto. 39

4.2.1. El cruce de información en 2D 44

4.2.2. $SPP[\mathcal{L}_2]$ podría pertenecer a NL. 49

5. Pilas de arena sobre grillas tridimensionales **54**

5.1. El problema de predicción en 3D 54

5.2. La dureza relativa de los problemas algorítmicos en 3D 56

Bibliografía **60**

Introducción

El modelo de pilas de arena surge en 1987 con el artículo de Bak, Tang y Weisenfeld [1]. A partir de este modelo se introdujo el concepto de auto-organización crítica (*SOC-Self-Organized Criticality*), el cual codifica una característica importante que presenta este modelo y que ha sido utilizado para describir diversos sistemas en la naturaleza tales como las quemas forestales, los terremotos, fluctuaciones en la bolsa de valores, eventos de extinción, entre otros. Intuitivamente, el modelo afirma que si se tiene una pila de arena de forma cónica, fija, es decir estable o firme, con una distribución inicial o *configuración* de granos de arena, y si se adicionan suficientes granos de arena en algún punto arbitrario sobre la superficie de ésta, entonces se provocará una *avalancha* de arena la cual se propagará hasta que en algún momento quede la pila de arena nuevamente en un estado estable y con una distribución de granos de arena similar a la distribución original. El modelo abeliano de pilas de arena *ASM* (*Abelian Sandpile Model*) o *Chip-Firing Game*, introducido por Dhar [3, 4], es el nombre dado a una subclase de modelos de pilas de arena cuya dinámica tiene una estructura algebraica de grupo abeliano, esta estructura ha permitido estudiar en profundidad algunas de las propiedades de este modelo.

El *ASM* se define naturalmente considerando un retículo o grilla de n puntos (lugares), indexados mediante enteros $i = 1, 2, ..., n$, donde a cada punto i se le asocia un número no negativo h_i, que denota la altura de la pila de arena o cantidad de granos de arena en dicho lugar, y un número $n_i > 0$, que designa la cantidad de puntos vecinos o lugares adyacentes al punto i. Se dice que la pila de arena es estable cuando $h_i < n_i$ para todo i. Si la pila de arena es inestable entonces genera una dinámica, por esta razón, la pila de arena es considerada un autómata celular finito debido a que es un modelo matemático que representa un sistema dinámico que varía a través del tiempo a pasos discretos y cuya dinámica es gobernada por un operador local. La dinámica de la pila de arena o *time evolution* se define a través de las siguientes reglas:

1. *Adición de granos de arena*. Se elige un punto i del retículo de manera aleatoria y se adiciona un grano de arena a la pila de arena correspondiente a dicho punto.

2. *Toppling*[1]. Si al adicionar el grano de arena se tiene que $h_i \geq n_i$ entonces el punto i se vuelve inestable y por lo tanto su pila de arena se desmorona transfiriendo un grano de arena a cada una de las pilas de arena correspondientes a los puntos vecinos del punto i. Este proceso de transferencia determina una nueva distribución de granos de arena sobre los puntos de la grilla.

Si al realizar un *toppling* en un vértice dado resulta otro vértice inestable entonces se hace *toppling* para que se estabilice y el proceso se continua hasta que todos sus puntos sean estables. Este proceso de estabilización no siempre es finito, para ello se debe garantizar la existencia de un punto del retículo denominado *sumidero* el cual no hace *toppling* y por lo tanto no devuelve granos de arena a ningún otro punto.

[1]Una traducción literal de este término al español es el de *derrumbamiento* o *desmoronamiento*.

El procedimiento anterior define una *cadena finita de Markov*[23] sobre el espacio de las configuraciones estables. Es decir, si la dinámica dada se repite muchas veces, adicionando suficientes granos de arena, el sistema pierde memoria de su estado inicial y llega a un estado estacionario.

Además, el modelo parece tener la propiedad de auto-organización crítica, la cual estipula que el sistema converge espontáneamente a estados críticos, los cuales, cuando se considera una operación binaria definida por el proceso de estabilización exhiben una estructura algebraica de grupo abeliano. El modelo se dice abeliano, dado que si se tiene una configuración inestable con dos o más puntos inestables, la configuración estable obtenida al hacer *toppling* comenzando en un punto inestable i es la misma que al hacer *toppling* empezando en otro punto inestable j.

CAPÍTULO 1

El modelo abeliano pilas de arena

1.1. Definiciones básicas

El modelo abeliano pilas de arena puede definirse sobre cualquier clase de grafo, pero el caso que más interés ha despertado es cuando se define sobre grillas de dimensión 1,2 y 3, dado que estas son los modelos discretos canónicos del espacio euclidiano. En esta sección se introducen algunas definiciones y resultados básicos acerca del modelo.

Definición 1. *Un grafo de arena es un par* (G, s) *tal que* $G = (V, E)$ *es un grafo conexo y* $s \in V(G)$.

En adelante se usará el símbolo G para hacer referencia a la pareja (G, s). El vértice s en V es un elemento especial que se denomina *sumidero*. El símbolo $V(G)^*$ denotará el conjunto $V(G) - \{s\}$.

Definición 2. *Una configuración sobre* G *es una función* $f : V(G)^* \to \mathbb{N}$.

Es decir, una configuración asigna a cada vértice de G un número no negativo, que representa el número de granos de arena apilados sobre él. Además, si $|V(G)^*| = n$ la configuración se puede ver como un vector $\big(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\big) \in \mathbb{N}^n$ donde $V(G)^* = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. El número total de granos de arena que f dispone sobre G es el peso de f que se notará con $\|f\|$ y se define por:

$$\|f\| = \sum_{v \in V(G)^*} f(v)$$

Es importante aclarar que para cualquier configuración f sobre un grafo de arena G se tendrá que $f(s) = 0$.

Definición 3. *Dada una configuración f sobre G y dado $v \in V(G)^*$, se dice que v es f-estable si y sólo si $deg(v) > f(v)$, donde $deg(v)$ denota el número de aristas incidentes en v. Si todo vértice en $V(G)^*$ es f-estable se dice que f es una configuración estable, de lo contrario se dice inestable.*

Es posible asociar un autómata $SP(G)$ a cada grafo de arena G, el autómata $SP(G)$ se define de la siguiente manera.

Definición 4. *Sea G un grafo de arena, el* autómata de arena *asociado a G es el autómata celular $SP(G)$ definido por:*

1. *El conjunto de células de $SP(G)$ es el conjunto $V(G)^*$.*
2. *El conjunto de configuraciones de $SP(G)$ es el conjunto de configuraciones sobre G.*
3. *Dada una configuración f de $SP(G)$ y una célula v de $SP(G)$, el estado de v bajo f es igual a $f(v)$.*
4. *Dada f una configuración, el conjunto de transiciones posibles desde f está dado por la regla de transición:*

Dado $v \in V(G)^*$, si $f(v) \geq deg(v)$ entonces $f \to f_v$ es una transición posible, donde f_v es la configuración sobre G definida por:

$$f_v(u) = \begin{cases} f(u) - deg(u), \text{ si } u = v \\ f(u) + 1, \text{ si } \{u, v\} \in E(G) \\ f(w), \text{ si } \{u, v\} \notin E(G) \end{cases}$$

Toda transición de $SP(G)$ es llamada un disparo(*firing*) o un *toppling*. Ahora, siempre que ocurra una transición $f \to f_v$ se dice que el vértice v disparó o que un *toppling* en el vértice v ha ocurrido. La elección de v puede hacerse de manera arbitraria, es decir, se puede elegir cualquier vértice inestable, dispararlo y generar una nueva configuración, en este sentido el autómata de arena es un autómata no determinístico.

El sumidero nunca dispara, todo grano de arena transferido a s se pierde, dado que la función de s es simplemente la de recibir granos de arena y eliminarlos, debido a que $f(s) = 0$ para toda f. Por lo tanto, se dice también que la dinámica del modelo es disipativa.

Definición 5. *Una secuencia de disparos $f \to f_1 \to \ldots \to f_n$ es llamada una avalancha, con configuración inicial f y longitud $\ell(f) = n$. Si f_n es una configuración estable se dice que f_n es una estabilización de f y como no es posible disparar más vértices, se dice que la avalancha $f \to f_1 \to \ldots \to f_n$ es maximal.*

Ahora, si se fija una configuración f sobre G, se pueden considerar los conjuntos: $Aval(G, f)$, el conjunto de avalanchas cuya configuración inicial es f; $Aval_M(G, f)$, el conjunto de avalanchas maximales con configuración inicial f y $St(G, f)$, el conjunto de estabilizaciones de f. Además, se notará con SC_A al vector tabla (*score vector*) de una avalancha A, dado por $(t_v)_{v \in V(G)^*}$, donde t_v es el número de veces que el vértice v disparó durante la ocurrencia de A.

Teorema 1 (*El teorema fundamental de las pilas de arena*)**.**

Sea G un grafo de arena y sea f una configuración sobre G. Se tiene que:

1. *Toda avalancha con inicio en f es finita.*
2. *$|St(G, f)| = 1$.*
3. *Dadas $A, B \in Aval_M(G, f)$, se tiene que $SC_A = SC_B$.*

Prueba. 1) Sea G un grafo de arena, sea f una configuración sobre G, sea $v \in V(G)^*$ y t un entero positivo. Podemos fijar una avalancha R generada por f y usar el símbolo $s(v, t)$ para representar el número de veces que el vértice v ha encendido antes del instante t, durante la ocurrencia de la avalancha R.

Afirmación. Dados $u, v \in V(G)^*$ y $t \leq \ell(f)$ se tiene que:

$$|s(u, t) - s(v, t)| \leq \|f\|$$

Prueba de la afirmación. Sean $u, v \in V(G)^*$ tales que $s(u, t) \lneqq s(v, t)$. Ahora, considere los conjuntos:

$$A = \{w | s(w, t) \leq s(u, t)\} \quad y \quad B = \{w | s(w, t) \gneqq s(u, t)\}$$

Se puede observar que los vértices del conjunto B han disparado más veces que los vértices del conjunto A. Además, se tiene que el número de granos de arena en A ha aumentado, el incremento total es igual a:

$$I = \sum_{w \in A, r \in B : \{w,r\} \in E(G)} \big(s(r, t) - s(w, t)\big)$$

De modo que $I \leq \|f\|$ y esto implica que para todo $w \in A$ y para todo $r \in B$ la desigualdad $|s(w, t) - s(r, t)| \leq \|f\|$ se cumple y así queda probada la afirmación.

Ahora, sea $v \in V(G)^*$, si la distancia de v al sumidero es 1 entonces v puede disparar a lo más $\|f\|$ veces en virtud de la afirmación anterior y en

vista de que el sumidero nunca dispara. Inductivamente se puede probar que si la distancia de v al sumidero es k entonces v dispara a lo más $k\|f\|$ veces. Por lo tanto, todo vértice puede disparar a lo más $D(G)\|f\|$ veces, donde $D(G)$ es el diámetro de G. Así, una cota superior para la longitud de una avalancha maximal es $|V(G)|D(G)\|f\|$, conocida como *La cota de Tardos*[7].

2) Sean G un grafo de arena, $v \in V(G)$ y f una configuración sobre G. Se define el operador de *toppling* T_v como $T_v(f) = f_v$, los operadores T_u y T_v conmutan para todo $u, v \in V(G)$, esto es: dada una configuración f, se tiene que:

$$T_v\big(T_u(f)\big) = T_u\big(T_v(f)\big)$$

Ahora, sea $C(G)$ el dígrafo infinito cuyo conjunto de vértices es el conjunto de configuraciones sobre G y cuya relación de accesibilidad es la relación dada por:

$$f \to g \Leftrightarrow \exists v \in V(G), g = T_v(f)$$

Se puede observar que el conjunto de avalanchas maximales producidas por f corresponde al conjunto de caminos maximales de $\mathcal{C}(G)$ que comienzan en f. Además, no es difícil ver que $\mathcal{C}(G)$ tiene *la propiedad de confluencia*, es decir, dados $f, g, h \in V\big(\mathcal{C}(G)\big)$, si $f \to g$ y $f \to h$ entonces existe t tal que $g \to t$ y $h \to t$, para ello basta usar la conmutatividad del operador *toppling*. Pero satisfacer la propiedad de confluencia implica que todo par de caminos maximales que comiencen en el mismo vértice tienen el mismo vértice final [5]. Por lo tanto, cualquier par de avalanchas maximales que comiencen en la misma configuración tienen la misma configuración final.

3) Sea G un grafo de arena tal que $V(G) = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$, donde $n+1$ es el sumidero, y sea f una configuración sobre G. El *laplaciano reducido*

de G es la matriz $L(G) = [a_{ij}]_{i,j \leq n}$ definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} -deg(i),\ si\ i = j \\ 1,\ si\ \{i,j\} \in E(G),\ i \neq j \\ 0,\ si\ \{i,j\} \notin E(G),\ i \neq j \end{cases}$$

Ahora, si un vértice v dispara entonces se obtiene una nueva configuración f_v, la cual se puede expresar como $f + L_v(G)$, donde $L_v(G)$ es la v-ésima fila de $L(G)$. Por lo tanto, para toda configuración f y para toda avalancha maximal A producida por f se tiene que la estabilización de f denotada por $St(f)$ es igual a:

$$St(f) = f + L(G)SC_A,$$

esta ecuación se conoce como la *ecuación de movimiento de las pilas de arena*.

Se puede observar también que dada una avalancha maximal A producida por f, el vector SC_A es una solución al sistema:

$$St(f) - f = L(G)^T SC_A$$

y como el *Teorema de la matriz de Kirchhoff* [21] afirma que $|\det L(G)|$ es igual al número de árboles generadores de G se tiene que $L(G)$ es invertible dado que G es conexo. Así, si A y B son dos avalanchas maximales entonces SC_A y SC_B son iguales a la solución única del sistema. ■

El resultado anterior permite, dada cualquier configuración f sobre un grafo de arena G, hablar del vector tabla de f, que se denotará con el símbolo SC_f, donde $SC_f = SC_A$, y A es cualquier avalancha maximal con inicio en f. Se usará el símbolo $\ell(f)$ para denotar la longitud de las avalanchas maximales con inicio en f. Además, dados $C(G) = \mathbb{N}^{V(G)^*}$, el conjunto de todas las configuraciones sobre G y $ST(G)$, el conjunto de todas las configuraciones estables sobre G, se puede definir dos funciones $st_G : C(G) \to C(G)$ y $SC_G : C(G) \to C(G)$ de la siguiente manera:

1. $st_G(f) = St(f)$, *la estabilización de* f.

2. $SC_G(f) = SC_f$.

Se puede observar que las funciones anteriormente introducidas son computables, dado que las avalanchas son finitas; basta con simular el autómata $\mathcal{SP}(G)$ en el *input* f, para calcular $St(f)$. Una vez calculado $St(f)$ se puede calcular SC_f usando la ecuación de movimiento de las pilas de arena.

1.2. Estructuras algebraicas asociadas al modelo abeliano pilas de arena

En esta sección se introduce una operación binaria, sobre el conjunto de configuraciones estables de un grafo de arena G, definida por el proceso de estabilización, que permitirá asociar a G un monoide conmutativo y un grupo abeliano. Dicho grupo abeliano se conoce como el *Grupo de Picard* de G y sus elementos son las llamadas *configuraciones críticas*. Intuitivamente, las configuraciones críticas son configuraciones estables de alta complejidad, que están próximas a ser inestables y que caracterizan el comportamiento del sistema en el término largo. Parte del interés que despierta el modelo abeliano pilas de arena, es que este parece exhibir la propiedad de *auto-organización crítica* [1], la cual estipula que el sistema converge espontáneamente a sus estados críticos, los cuales en el caso del modelo abeliano pilas de arena, corresponden a las configuraciones críticas.

Definición 6. *Sean G un grafo de arena y $ST(G)$ el conjunto de configuraciones estables sobre G. La operación binaria $\oplus$ se define de la siguiente manera:*

$$\oplus : ST(G) \times ST(G) \to ST(G)$$
$$f \oplus g = st_G(f + g)$$

Teorema 2. *El par* $\big(ST(G), \oplus\big)$ *es un monoide conmutativo.*

Prueba. Sean $f_1, f_2, f_3 \in ST(G)$. Es inmediato que $f_1 \oplus f_2 = f_2 \oplus f_1$ dado que $f_1 \oplus f_2 = st_G(f_1 + f_2) = st_G(f_2 + f_1) = f_2 \oplus f_1$. Un modulo para $\big(ST(G), \oplus\big)$ es la configuración nula, es decir, la configuración que asigna cero granos de arena a todo vértice. Ahora, la igualdad $f_1 \oplus (f_2 \oplus f_3) = (f_1 \oplus f_2) \oplus f_3$ se tiene como consecuencia del teorema fundamental, dado que se puede considerar como configuración inicial $f_1 + f_2 + f_3$ y llegar a la misma configuración estable estabilizando en cualquier orden. ■

Nota: Observe que dadas $f, g \in C(G)$ se puede definir $f \oplus g$ como $st_G(f+g)$ o como $st_G(st_G(f) + st_G(g))$ dado que es posible expresar a $st_G(f+g)$ como

$$st_G(f + g) = st_G(f) \oplus st_G(g),$$

En adelante, se notará por $\mathcal{M}(G)$ al monoide $\big(ST(G), \oplus\big)$ y se hará referencia a éste como el *monoide de arena* de G.

Se sabe que el núcleo(*kernel*) de un monoide conmutativo finito (que es igual a la intersección de todos sus ideales) es un grupo abeliano [5]. Por lo tanto el par

$$\Big(Ker\big(\mathcal{M}(G)\big), \oplus \restriction_{(Ker(\mathcal{M}(G)))^2}\Big)$$

es un grupo abeliano que se notará con el símbolo $\mathcal{K}(G)$, el cual es conocido con los nombres de *grupo de Picard*, *grupo crítico* o *grupo de arena* de G y los elementos de este grupo son precisamente las configuraciones críticas, pero ¿cómo reconocer una configuración crítica? El siguiente es un resultado que caracteriza dichas configuraciones.

Teorema 3. *Sean G un grafo de arena y f una configuración estable sobre G. Entonces, f es crítica si y sólo si existe una configuración $g \neq 0$ tal que $f \oplus g = f$.*

Prueba. Suponga que f es crítica, se tiene que $f \oplus e_{\mathcal{K}(G)} = f$, donde $e_{\mathcal{K}(G)}$ es la identidad del grupo crítico. Note que si G contiene un vértice de grado mayor o igual a 2 entonces $e_{\mathcal{K}(G)} \neq 0$, en caso contrario, la única configuración estable es la configuración nula, la cual en este caso es crítica.
Suponga ahora que no existe $g \neq 0$ tal que $f \oplus g = f$. Entonces, el conjunto dado por

$$I = \{h \in \mathcal{M}(G) | f \oplus g = h, g \neq 0\},$$

es un ideal de $\mathcal{M}(G)$, en efecto, $I \neq \emptyset$ puesto que la configuración estable maximal notada por w_G y que se define de la siguiente manera:

$$w_G(v) = deg(v) - 1, \textit{para todo } v \in V(G)^*,$$

pertenece a I, basta tomar $g = w_G - f$ y claramente $f \oplus g = w_G$. Por otro lado, sean $h \in \mathcal{M}(G)$ y $r \in I$. Ahora, como $r \in I$ existe $\varepsilon \neq 0$ tal que $f \oplus \varepsilon = r$, así, $r \oplus h = (f \oplus \varepsilon) \oplus h = f \oplus (\varepsilon \oplus h)$ y por lo tanto $r \oplus h \in I$ dado que $\varepsilon \oplus h \neq 0$ (la estabilización de cualquier configuración inestable es diferente de la nula).
Finalmente, como $f \notin I$, esto implica que f no pertenece a la intersección de todos los ideales de $\mathcal{M}(G)$ y en consecuencia f no es crítica. ■

El anterior resultado se puede generalizar aún más, para ello, se define a continuación la relación de *accesibilidad* entre dos configuraciones.

Definición 7. *Sean $f, g \in C(G)$, dos configuraciones sobre un grafo de arena G. Se dice que f es accesible desde g si y sólo si existe una configuración $h \neq 0$ tal que $g \oplus h = f$.*

Por lo tanto, una configuración es crítica si y sólo si es accesible desde si misma. Pero se puede probar (la prueba es análoga a la del teorema anterior) que una configuración es crítica si y sólo si es accesible desde cualquier otra configuración, esto es:

$$f \in \mathcal{K}(G) \Leftrightarrow \big(\forall g \in \mathcal{M}(G)\big)\big(\exists h \in C(G)\big)\big(h \neq 0 \wedge g \oplus h = f\big).$$

Observación. Note que la configuración maximal w_G de un grafo de arena G es crítica, dado que para toda $f \in ST(G)$ la ecuación $f \oplus (w_G - f) = w_G$ es válida.

Definición 8. *Sea G un grafo de arena. El borde de G es el conjunto $\delta(G)$ dado por*

$$\delta(G) = \{v \in V(G)^* | v \text{ es vecino de } s\},$$

es decir, $\delta(G)$ es el conjunto de vértices vecinos del sumidero.

Nota: A lo largo de todo el trabajo se supondrá que si G es un grafo de arena y $u, v \in V(G)^*$ entonces el número de aristas que conectan u con v es menor o igual a 1. Por otro lado, si $v \in \delta(G)$ el número de aristas que conectan v y s puede ser mayor que 1.

A partir de la anterior definición, dado un grafo de arena G, se puede definir una configuración sobre G que se denotará con el símbolo $e_{\delta(G)}$ y que se define como:

$$e_{\delta(G)}(v) = \textit{número de aristas conectando } v \textit{ con } s$$

Esta configuración recibirá el nombre de *configuración borde*.

Lema 1. *Sean f una configuración estable sobre G y $v \in V(G)^*$. Entonces, $SC_{f+e_{\delta(G)}}(v) \leq 1$, es decir, todo vértice en G dispara a lo más una vez durante la estabilización de $f + e_{\delta(G)}$.*

Prueba. Sea A una avalancha maximal producida por $f + e_{\delta(G)}$. La avalancha A se puede expresar como una secuencia de vértices $v_1, v_2, \ldots, v_{\ell(f+e_{\delta(G)})}$ tales que v_i es el vértice que dispara en el instante i durante la ocurrencia de A. Sea $t \leq \ell(f + e_{\delta(G)})$, el símbolo $f^{(t)}$ representará la configuración obtenida después del t-ésimo *toppling*.

Afirmación. Para cualquier $i \leq \ell(f + e_{\delta(G)})$ se tiene que:

1. Para todo $j, k \leq i$, si $j \neq k$ entonces $v_j \neq v_k$.

2. Para todo $j \leq i$ se tiene la desigualdad $f^{(i)}(v_j) \lneqq deg(v_j)$.

El item 1 afirma que hasta el instante i-ésimo ningún vértice ha disparado más de una vez mientras que el segundo item afirma que los primeros i vértices están estables después del i-ésimo *toppling*.

Prueba de la afirmación. Si $i = 1$, en el item 1 no hay nada que probar. Para el item 2, se puede observar que $f^{(1)}(v) = f(v) + e_{\delta(G)(v)} - deg(v)$ y $e_{\delta(G)}(v) \leq deg(v)$. Luego, $f^{(1)}(v) \leq f(v) \leq deg(v)$ por lo tanto $f^{(1)}(v)$ es estable. Ahora, suponga que existe $k \leq i$ tal que $v_k = v_{i+1}$, se tiene que:

$$f^{i+1}(v_{i+1}) \leq f(v_{i+1}) - 2deg(v_{i+1}) + E_i,$$

donde E_i es la suma del número de veces que los vecinos de v_{i+1} han disparado antes del instante $i + 1$. Note que $E_i \leq deg(v_{i+1})$. Por lo tanto:

$$f^{i+1}(v_{i+1}) \leq f(v_{i+1}) - deg(v_{i+1}) + E_i - deg(v_{i+1}) \lneqq 0$$

lo cual es una contradicción. Luego, $v_{i+1} \neq v_k$ para todo $k \leq i$.
Suponga ahora que $v_{i+1} \neq v_k$ para todo $k \leq i$. Sea $k \leq i$, se tiene que:

$$f^{i+1}(v_k) \leq f(v_k) - deg(v_k) + E_{k,i+1},$$

donde $E_{k,i+1}$ es la suma del número de veces que los vecinos de v_{i+1} han disparado antes del instante $i + 2$. Además, se tiene que $E_{k,i+1} \leq deg(v_k)$, por lo tanto, $f^{i+1}(v_k) \leq f(v_k)$ y en consecuencia v_k es estable en el instante $i + 1$. ■

El siguiente teorema es una buena caracterización de las configuraciones críticas. El reconocimiento de configuraciones críticas, es uno de los problemas algorítmicos más interesantes que se deriva del modelo abeliano pilas de arena, más adelante se definirá formalmente y se estudiarán algunos resultados referentes a su complejidad computacional.

Teorema 4 (*Teorema de Dhar*)**.** *Sean G un grafo de arena y f una configuración estable sobre G.*

1. *f es crítica si y sólo si $f \oplus e_{\delta(G)} = f$.*
2. *f es crítica si y sólo si para todo $v \in V(G)^*$ se tiene $SC_{f+e_{\delta(G)}}(v) = 1$*
3. *f es crítica si y sólo si no existe $A \subseteq V(G)^*$ tal que para todo $v \in A$ se tiene que $f(v) \lneqq deg_A(v)$, donde $deg_A(v)$ es igual al número de aristas conectando v con un vértice en A.*

Prueba. 1) Si $f \oplus e_{\delta(G)} = f$, se tiene que f es crítica dado que $e_{\delta(G)}$ es distinta de la configuración nula. Ahora, dado $v \in V(G)^*$ se define el operador G_v como

$$G_v(f) = f \oplus e_v,$$

para toda $f \in \mathcal{K}(G)$, donde e_v es la configuración que asigna un grano de arena al vértice v y cero granos de arena a los demás vértices de G.

Se puede observar que para $u, v \in V(G)^*$ se tiene que $G_u(G_v) = G_v(G_u)$. Sean

$$T = \prod_{v \in V(G)^*} G_v^{deg(v)} \quad y \quad H = \prod_{v \in V(G)^*} G_v^{n_v},$$

donde $n_v = deg(v) - r_v$ siendo r_v el número de aristas conectando a v con el sumidero.

Note que $T = H$ y por lo tanto

$$TH^{-1} = id = \prod_{v \in V(G)^*} G_v^{deg(v)-n_v} = \prod_{v \in V(G)^*} G_v^{r_v},$$

pero $\prod_{v \in V(G)^*} G_v^{r_v}(f) = f \oplus e_{\delta(G)}$ y así, se llega a que $f = f \oplus e_{\delta(G)}$.

2) Suponga que $SC_{f+e_{\delta(G)}}(v) = 1$ para todo $v \in V(G)^*$. Ahora, observe que si $v \in V(G)^* - \delta(G)$, el número de granos de arena que v recibió de sus vértices vecinos, cuando estos dispararon, es igual al número de granos de arena que v les envío a estos cuando v disparó. Si $v \in \delta(G)$, el número

de granos de arena que v recibió de sus vecinos es menor que el número de granos que v envió a sus vecinos, puesto que el sumidero es vecino de v, esta diferencia es precisamente $e_{\delta(G)}(v)$. Por lo tanto, al estabilizar $f + e_{\delta(G)}$ se obtiene nuevamente f y así f es crítica puesto que $e_{\delta(G)}$ es no nula.

Ahora, sea f una configuración crítica. Por el *item 1*, $f \oplus e_{\delta(G)} = f$ y por el *Lema 1* se tiene que $SC_{f+e_{\delta(G)}}(v) \leq 1$ para todo $v \in V(G)^*$. Suponga que existen $u, w \in V(G)^*$, $\{u, w\} \in E(G)$, tales que $SC_{f+e_{\delta(G)}}(u) = 1$ y $SC_{f+e_{\delta(G)}}(w) = 0$. Se tiene entonces que $(f \oplus e_{\delta(G)})(w) \gneqq f(w)$.

3) Suponga que f no es crítica. Por el *item 2* el conjunto definido por:

$$A = \{v | SC_{f+e_{\delta(G)}}(v) = 0\}$$

es no vacío. Suponga además que existe $v \in A$ tal que $f(v) \geq deg_A(v)$. Claramente, el número de vértices adyacentes a v que disparan durante la estabilización de $f + e_{\delta(G)}$ es $deg(v) - deg_A(v)$. Así, cuando el proceso de estabilización finalice, el número de granos de arena en v estará dado por $f(v) + deg(v) - deg_A(v)$, pero esta cantidad es mayor o igual a $deg(v)$. Se tiene entonces que el vértice v quedará inestable después de la estabilización, pero esto es, claramente, una contradicción.

Por otra parte, suponga que existe A tal que para todo $v \in A$ se tiene que $f(v) \lneqq deg_A(v)$. Sea $v \in A$ y sea $t \lneqq \ell(f + e_{\delta(G)})$ un entero positivo. Si $t = 0$ el vértice v no puede disparar antes de $t = 1$ dado que $f(v) \lneqq deg_A(v)$. Suponga ahora, que para todo $i < t$ y para todo $v \in A$, el vértice v no dispara. Luego, si $B = V(G)^* - A$, la hipótesis inductiva implica que:

$$f^t(v) \leq f(v) + deg_B(v),$$

pero como $f(v) \lneqq deg_A(v)$ entonces

$$f^t(v) \lneqq deg_A(v) + deg_B(v) = deg(v).$$

Por lo tanto, en el instante t el vértice v es estable y así, v no puede disparar en el instante $t+1$. De esta manera, se ha probado por inducción sobre t que para todo $v \in A$ vale la ecuación $SC_{f+e_{\delta(G)}}(v) = 0$ y esto implica que f no es crítica. ■

El anterior resultado da lugar al siguiente corolario que presenta otra característica importante de las configuraciones críticas.

Corolario 1. *Si f es una configuración crítica, entonces para todo par de vértices $u, v \in V(G)^*$, tales que $\{u, v\} \in E(G)$, se tiene que $f(u) \neq 0$ o $f(v) \neq 0$.*

Prueba. Basta aplicar el *item 3* del teorema anterior. Suponga que existen $u, v \in V(G)^*$ tales que $\{u, v\} \in E(G)$ y $f(u) = f(v) = 0$. Sea $A = \{u, v\}$ se tiene entonces que $f(u) = f(v) \lneq 1 = deg_A(u) = deg_A(v)$ y esto implica que f no es crítica, que es una contradicción. ■

CAPÍTULO 2

Problemas algorítmicos asociados al modelo pilas de arena

En este capítulo se definen algunos problemas algorítmicos relacionados con el modelo abeliano pilas de arena y se estudian algunos resultados referentes a su complejidad computacional.

2.1. Problemas algorítmicos

El problema de predicción asociado al modelo abeliano pilas de arena es el problema que se define a continuación y que consiste en calcular la estabilización de una configuración.

Problema 1 (*SPP, Sandpile Prediction Problem*)**.**

- *Input:* (G, f)*, donde* G *es un grafo de arena y* $f \in C(G)$*.*
- *Problema: Calcule* $st_G(f)$*.*

En el capítulo anterior se definió el monoide de arena $\mathcal{M}(G)$, el problema a continuación corresponde a calcular la operación asociada al monoide.

Problema 2 (*MC, Monoid Computations*)**.**

- *Input:* (G, f, g)*, donde* G *es un grafo de arena y* $f, g \in \mathcal{M}(G)$*.*
- *Problema: Calcule* $f \oplus g$*.*

El siguiente problema es una restricción del problema MC al conjunto de configuraciones críticas.

Problema 3 (*GC, Group Computations*)**.**

- *Input:* (G, f, g)*, donde* G *es un grafo de arena y* $f, g \in \mathcal{K}(G)$*.*
- *Problema: Calcule* $f \oplus g$*.*

El siguiente problema es el de reconocer configuraciones críticas.

Problema 4 (*RR, Recognition of Critical Configurations*)**.**

- *Input:* (G, f)*, donde* G *es un grafo de arena y* $f \in C(G)$*.*
- *Problema: Decida si* $f \in \mathcal{K}(G)$*.*

Otros problemas importantes son los siguientes:

Problema 5 (*MC***, Mixed Computations*)**.**

- *Input:* (G, f, g)*, donde* G *es un grafo de arena,* $f \in \mathcal{K}(G)$ *y* $g \in \mathcal{M}(G)$*.*
- *Problema: Calcule* $f \oplus g$*.*

Problema 6 (*CSV, Computation of Score Vectors*)**.**

- *Input:* (G, f)*, donde* G *es un grafo de arena y* $f \in C(G)$*.*
- *Problema: Calcule* SC_f*.*

Problema 7 (*SPA, Sandpile Accessibility*)**.**

- *Input:* (G, f, v)*, donde* G *es un grafo de arena,* $f \in C(G)$ *y* $v \in V(G)^*$*.*
- *Problema: Decida si* $SC_f(v) \gneqq 0$*.*

Recuerde que dado G un grafo de arena, el símbolo $e_{\mathcal{K}(G)}$ denota la identidad del grupo crítico $\mathcal{K}(G)$.

Problema 8 (*IC, Computation of Identities*)**.**

- *Input:* G*, donde* G *es un grafo de arena.*
- *Problema: Calcule* $e_{\mathcal{K}(G)}$*.*

Ahora, sea $e_G : V(G)^* \to \mathcal{K}(G)$ la función definida por

$$e_G(v) = e_{\mathcal{K}(G)} \oplus e_v,$$

donde e_v es la configuración que asigna un grano de arena a v y cero a los demás.

Problema 9 (*EC, Computation of* e_G)**.**

- *Input:* (G, v)*, donde* G *es un grafo de arena y* $v \in V(G)^*$*.*
- *Problema: Calcule* $e_G(v)$*.*

Observación. El tamaño de las instancias para cada uno de los anteriores problemas se puede medir de la siguiente manera:

- Dada (G, f) una instancia de SPP o de CSV su tamaño está dado por $|G| + \|f\|$.
- Dada (G, f, g) una instancia de MC, MC^* o GC su tamaño está dado por $|G|$.
- Dada (G, f) una instancia de RR su tamaño está dado por $|G|$.
- Dada (G, f, v) una instancia de SPA su tamaño está dado por $|G|+\|f\|$.
- Dado G una instancia de IC su tamaño está dado por $|G|$.
- Dada (G, v) una instancia de EC su tamaño está dado por $|G|$.

La *cota de Tardos* implica que el problema de predicción SPP puede ser resuelto en tiempo polinomial y en consecuencia cada uno de los problemas enunciados anteriormente puede ser resuelto en tiempo polinomial, puesto que todos ellos son reducibles a SPP: los problemas MC, GC y MC^* se reducen a calcular la estabilización de una configuración de la forma $f+g$, el problema RR se reduce a calcular la estabilización de $f+e_{\delta(G)}$. Por otro lado se puede usar el *Teorema de Dhar* (Teorema 4) para diseñar un algoritmo de tiempo lineal que resuelva RR, este algoritmo es conocido como BTA(*Burning Test Algorithm*) y trabaja básicamente de la siguiente manera:

Con *input*: (G, f), donde G es un grafo de arena y f es una configuración estable sobre G, el algoritmo BTA hace lo siguiente:

1. Simula el proceso de estabilización de $f + e_{\delta(G)}$.
2. Cuenta el número de veces que disparó cada vértice durante el proceso de estabilización.
3. Si todo vértice disparó exactamente una vez acepta, de lo contrario rechaza.

Es interesante anotar que es posible usar este algoritmo para definir una biyección explícita entre el conjunto de configuraciones críticas de G y el conjunto de árboles generados de G, lo cual implica que $|\mathcal{K}(G)| = |detL(G)|$ [5].

El problema CSV se reduce a calcular la estabilización de una configuración dada f y resolver entonces la ecuación matricial $st_G(f) - f = L(G)^T SC_f$ (lo cual puede hacerse en tiempo polinomial). El problema SPA es más fácil que CSV puesto que CSV consiste en contar el número de veces que cada vértice dispara durante el proceso de estabilización mientras que SPA consiste en decidir si un vértice dado dispara o no.

El problema IC que consiste en calcular la identidad del grupo crítico, se puede resolver implementando el siguiente algoritmo:

Con *input* G, un grafo de arena.

1. Calcule $x = w_G \oplus w_G$.
2. Calcule $y = w_G - x$.
3. Calcule $z = y \oplus w_G$.
4. Imprima $e_{\mathcal{K}(G)} = z$

A continuación se prueba que la configuración obtenida mediante el anterior algoritmo es en efecto la identidad del grupo crítico.

Proposición 1. *Sea w_G la configuración maximal sobre un grafo de arena G, si $x = w_G \oplus w_G$ y $y = w_G - x$, entonces $z = y \oplus w_G$ es la identidad de $\mathcal{K}(G)$.*

Prueba. La configuración z es crítica puesto que $z \oplus e_{\delta(G)} = (y \oplus w_G) \oplus e_{\delta(G)} = y \oplus (w_G \oplus e_{\delta(G)}) = y \oplus w_G = z$.

Además, observe que $w_G \oplus z = w_G$, esto es:

$$\begin{aligned} w_G \oplus z &= w_G \oplus (w_G \oplus (w_G - w_G \oplus w_G)) \\ &= st_G(w_G + (w_G \oplus (w_G - w_G \oplus w_G)) \\ &= st_G(w_G + st_G(w_G + (w_G - w_G \oplus w_G)) \\ &= st_G(w_G + w_G + (w_G - w_G \oplus w_G)) \\ &= st_G(w_G \oplus w_G + (w_G - w_G \oplus w_G)) \\ &= st_G(w_G) \\ &= w_G \end{aligned}$$

Ahora, sea $f \in \mathcal{K}(G)$. Como f es accesible desde la maximal, existe $r \neq 0$ tal que $w_G \oplus r = f$ luego $z \oplus f = z \oplus (w_G \oplus r) = (z \oplus w_G) \oplus r = w_G \oplus r = f$. Por lo tanto, z es la identidad de $\mathcal{K}(G)$. ■

La anterior proposición muestra que el problema IC se reduce al cálculo de estabilizaciones. Finalmente, el problema EC se reduce a calcular las estabilizaciones de configuraciones de la forma $e_{\mathcal{K}(G)} + e_v$.

Dada $\mathcal{C}$ una clase de grafos de arena y dado $\mathcal{L}$ uno de los problemas introducidos en este capítulo, se usará el símbolo $\mathcal{L}[\mathcal{C}]$ para denotar la restricción del problema $\mathcal{L}$ a la clase $\mathcal{C}$. Ahora, dados $m, n \geq 1$ se usará el símbolo $\mathcal{G}_m^n$ para denotar la grilla n-dimensional de orden m, que es el grafo definido por:

1. $V\big(\mathcal{G}_m^n\big) = [m]^n$, donde $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$.
2. $E\big(\mathcal{G}_m^n\big) = \Big\{\big(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\big) : \sum_{i=1}^{n} \big|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{y_i}\big| = 1\Big\}$.

Además, se usará el símbolo $\mathcal{L}_m^n$ para denotar el grafo de arena definido por:

1. $V(\mathcal{L}_m^n) = V(\mathcal{G}_m^n) \cup \{s\}$, donde s será el sumidero de $\mathcal{L}_m^n$ y $s \notin V(\mathcal{L}_m^n)$.
2. Si $e \in E\big(\mathcal{G}_m^n\big)$ entonces $e \in E\big(\mathcal{L}_m^n\big)$. Además, si $v \in \delta(\mathcal{G}_m^n)$, se agregan $2n - deg_{\mathcal{G}_m^n}(v)$ aristas a $E\big(\mathcal{L}_m^n\big)$, las cuales conectarán a v con el sumidero.

Finalmente, dado $n \geq 1$, se usará el símbolo $\mathcal{L}_n$ para denotar la clase de grafos de arena definida por:

$$\mathcal{L}_n = \left\{ \mathcal{L}_m^n : m \geq 1 \right\}.$$

En los siguientes capítulos se estudiará la restricción de los problemas algorítmicos antes definidos, a las clases $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$.

CAPÍTULO 3

Pilas de arena sobre grillas unidimensionales

En este capítulo se estudia la restricción del modelo abeliano pilas de arena a la clase de las*grillas unidimensionales*. Adicionalmente se estudian algunos resultados referentes a la complejidad computacional de los problemas algorítmicos enunciados en el anterior capítulo, cuando estos problemas se restringen a tal clase de grafos.

3.1. Pilas de arena en dimensión 1

Dado $n \geq 1$ el símbolo $\mathcal{G}_n^1$ denotará la grilla unidimensional de orden n, cuyo conjunto de vértices es igual a $[n]$, (donde $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$). El símbolo $\mathcal{L}_n^1$ denotará la *grilla de arena unidimensional* de orden n, la cual es obtenida a partir de $\mathcal{G}_n^1$ agregando un vértice especial s, *el sumidero*. Además, dado un vértice v en el borde de $\mathcal{L}_n^1$ existirá una arista en $\mathcal{L}_n^1$ conectando v con s. Note que si $v \in V(\mathcal{L}_n^1)^*$ se tiene que $deg(v) = 2$. Finalmente, el símbolo $\mathcal{L}_1$ denotará la clase $\{\mathcal{L}_n^1 : n \geq 1\}$.

La siguiente figura representa una grilla de arena unidimensional de orden 10, donde cada celda representa un vértice y las celdas en gris representan al sumidero. Además, si dos celdas son adyacentes significa que existe una arista entre los vértices correspondientes a cada celda.

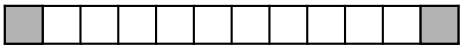
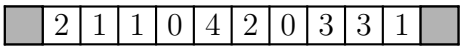


Figura 3.1: $\mathcal{L}_{10}^1$

Una configuración de granos de arena sobre una grilla de arena unidimensional se puede representar de la siguiente manera:



donde el número en cada celda representa el número de granos de arena sobre el respectivo vértice asociado a la celda.

En esta clase particular de grafos de arena, un vértice es inestable si tiene más de un grano de arena. Además, si una configuración tiene al menos un vértice inestable, se dirá que es inestable, de lo contrario se dice estable. Por lo tanto, la configuración de la figura anterior es un ejemplo de una configuración inestable, mientras que la configuración de la siguiente figura es una configuración sobre $\mathcal{L}_{10}^1$ que es estable.

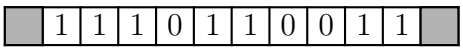


Figura 3.2: Una configuración estable

Dada una configuración crítica f sobre $\mathcal{L}_n^1$, la configuración f se caracteriza por tener a lo más un vértice $v \in V(G)^*$ tal que $f(v) = 0$. Por ejemplo, la configuración f sobre $\mathcal{L}_{10}^1$ de la *figura 3.3* no es crítica dado que tiene dos vértices u, v tales que $f(u) = f(v) = 0$.

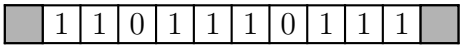
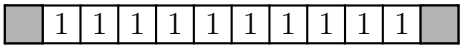


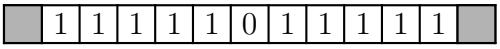
Figura 3.3: Una configuración estable no crítica

Note que una configuración de este tipo no satisface el *item 3* del *Teorema de Dhar*, basta tomar como A el conjunto conformado por todos los vértices $v \in V(\mathcal{L}_n^1)^*$ asociados a las celdas ubicadas entre el primer cero y el segundo cero, estos vértices satisfacen la desigualdad $f(v) \lneqq deg_A(v)$.

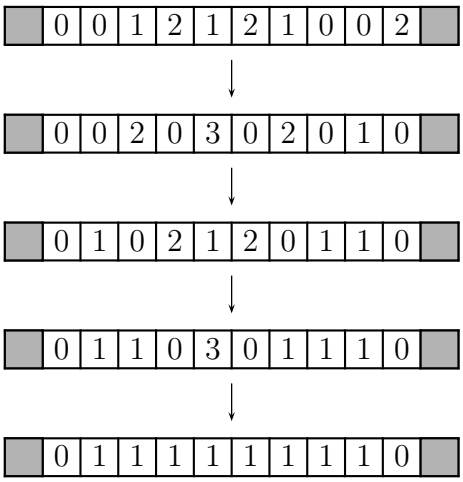
Una configuración importante relacionada con uno de los problemas algorítmicos mencionados en el anterior capítulo es la configuración identidad. Dado n par la configuración identidad sobre $\mathcal{L}_n^1$ es igual a la configuración maximal:



Si n es impar la configuración identidad tiene la siguiente forma:



Es importante ilustrar una avalancha maximal en $\mathcal{L}_n^1$, la simulación se puede representar de la siguiente manera:



Finalmente, es claro que es posible establecer una biyección entre el conjunto de configuraciones estables de $\mathcal{L}_n^1$ y el conjunto de todas las palabras de longitud n sobre el alfabeto $\{0,1\}$, donde las configuraciones críticas sobre $\mathcal{L}_n^1$ corresponden a las palabras de longitud n que tienen a lo más un cero. Por lo tanto, el problema de reconocer configuraciones críticas es equivalente al problema de reconocer las palabras en el lenguaje $\mathcal{L} \subset \{0,1\}^n$ dado por:

$$\mathcal{L} = \{w : w \textit{ tiene a lo más un cero}\}.$$

el cual es regular.
A continuación se estudia un algoritmo que resuelve el problema $GC[\mathcal{L}_1]$ de manera eficiente. El algoritmo es una maquina de Turing determinista de tiempo polinomial y de espacio logarítmico con acceso a una pila auxiliar.

3.2. $GC[\mathcal{L}_1]$ pertenece a $LOGDCFL$

En esta sección se estudiará la prueba dada por Miltersen [12] de que $GC[\mathcal{L}_1]$ pertenece a la clase $LOGDCFL$, que es la clase de los lenguajes que son reducibles, usando espacio logarítmico, a un lenguaje libre de contexto determinista. Se sabe que:

$$NC^1 \subseteq LOGDCFL \subseteq AC^1 \subseteq NC^2$$

donde NC^i es la clase de problemas que se pueden resolver en paralelo en tiempo $\mathcal{O}(\log^i n)$ utilizando un número polinomial de procesadores, mientras que AC^i es la clase problemas que se pueden resolver por una RAM en paralelo utilizando un número polinomial de procesadores en tiempo $\mathcal{O}(\log^i n)$. El teorema de Miltersen implica que $GC[\mathcal{L}_1] \in NC^2$.

La clase $LOGDCFL$ tiene una interesante caracterización vía máquinas (*machine characterization*).

Definición 9. *Una pdTM es una máquina de Turing de espacio logarítmico y tiempo polinomial con acceso a una pila auxiliar.*

Teorema 5 (*Sudborough*)**.**

$L \in LOGDCFL$ si y sólo si existe una $pdTM$ que resuelve L.

Nota: Una prueba del anterior teorema puede encontrarse en [14].

A continuación se muestra que el problema $GC[\mathcal{L}_1]$ puede ser resuelto utilizando una $pdTM$, lo cual implica que $GC[\mathcal{L}_1]$ pertenece a la clase $LOGDCFL$, para ello, se establecen primero algunos hechos relacionados con la dinámica de las pilas de arena unidimensionales.

Lema 2. *Sea f una configuración sobre $\mathcal{L}_n^1$. Suponga que existe $i \in [n]$ tal que:*

1. *$f(i) = 2$.*
2. *Para todo $j \neq i$ se tiene que $f(j) \leq 1$.*

Además, suponga que existen $j_1 \lneqq i \lneqq j_2$ tales que $f(j_2) = f(j_1) = 0$ y dado $k \in \{j_1 + 1, \ldots, j_2 - 1\} - \{i\}$ se tiene que $f(k) = 1$.
Entonces, $st_{\mathcal{L}_n^1}(f)$ es la configuración definida por:

$$st_{\mathcal{L}_n^1}(f)(v) = \begin{cases} 0, \textit{ si } v = j_1 + j_2 - i. \\ 1, \textit{ si } v \in \{j_1, \ldots, j_2\} - \{j_1 + j_2 - i\}. \\ f(v), \textit{ en otro caso.} \end{cases}$$

Prueba. Sea f una configuración sobre $\mathcal{L}_n^1$ que satisface las condiciones de la anterior afirmación. Sea $i \in [n]$ tal que $f(i) = 2$ y sean $j_1, j_2 \in [n]$ tales que $f(j_1) = f(j_2) = 0$, con $j_1 \lneqq i \lneqq j_2$. Suponga que i se encuentra a distancia $k = 1$ de j_1, como i es inestable, i dispara, entonces $i + 1$ y j_1 reciben un

grano de arena lo cual implica que j_1 tendrá un grano de arena, i ninguno e $i+1$ dos, por lo tanto $i+1$ será inestable y disparará, este proceso se repite sucesivamente hasta llegar al vértice j_2-1 el cual disparará y entonces j_2-2 quedará con un grano de arena, dado que había disparado previamente, j_2-1 con ninguno y j_2 con uno y así se llega a la estabilización de f. Por lo tanto, el vértice $j_2-1=j_1+j_2-(j_1+1)=j_1+j_2-i$ no tendrá granos de arena y los demás tendrán un grano de arena.

Suponga que se cumple la afirmación para cuando i está a distancia $k-1$ de j_1 (el vértice que no tiene granos de arena). Ahora, suponga que i está a distancia k de j_1. Como i es inestable, i disparará, quedando sin granos de arena y entonces $i-1$ e $i+1$ como reciben un grano de arena, quedarán inestables, luego, $i-1$ e $i+1$ dispararán e i tendrá dos granos de arena nuevamente pero no disparará todavía, si lo harán los vértices $i-2$ e $i+2$, sucesivamente se sigue este proceso hasta llegar a que j_1+1 y j_2-1 disparen, de modo que quedarán sin granos de arena y los vértices j_1 y j_2 quedarán con un grano de arena cada uno. La configuración parcial f' cumple con las condiciones de la afirmación e i, que tiene dos granos de arena, hasta ese momento, se encontrará a distancia $k-1$ del vértice j_1+1, el cual no tiene granos de arena. La hipótesis inductiva implica que la estabilización de f', que es la misma de f satisface lo siguiente: si v es el vértice de $\mathcal{L}_n^1$ que satisface la igualdad $st_{\mathcal{L}_n^1}(f')(v)=0$ entonces $v=j_1+1+j_2-1-i=j_1+j_2-i$. ■

El anterior lema permite calcular eficientemente la estabilización de un tipo muy especial de configuraciones. Si se quisiera calcular la estabilización de cualquier configuración, se podría intentar reducir este problema más general al problema que ya se resolvió eficientemente. Dada f una configuración sobre $\mathcal{L}_n^1$, se puede descomponer f en configuraciones que satisfagan las condiciones del lema anterior y luego estabilizarlas.

Sean f, g dos configuraciones críticas sobre $\mathcal{L}_n^1$, note que para $h=f+g$ se tiene que para todo $v\in\mathcal{L}_n^1$ el valor de $h(v)$ pertenece al conjunto $\{0,1,2\}$.

Sean $i_1 \lneqq i_2 \lneqq \ldots \lneqq i_k$ las posiciones donde h toma el valor de 2 y sea $t = h - e_{i_2} - \ldots - e_{i_k}$. Se define la secuencia $t_1, \ldots, t_k$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} t_1 &= st_{\mathcal{L}_n^1}(t) \\ t_2 &= st_{\mathcal{L}_n^1}(t_1 + e_{i_2}) \\ &\vdots \\ t_k &= st_{\mathcal{L}_n^1}(t_{k-1} + e_{i_k}) \end{aligned}$$

La abelianicidad del modelo implica que $st_{\mathcal{L}_n^1}(h) = t_k$. Recuerde además, que dadas f, g dos configuraciones críticas sobre $\mathcal{L}_n^1$ se tiene que $st_{\mathcal{L}_n^1}(f+g)(v) \in \{0, 1\}$, para todo $v \in \mathcal{L}_n^1$, por lo tanto, una posible descripción de $st_{\mathcal{L}_n^1}(f+g)$ está dada por la única posición v en donde $st_{\mathcal{L}_n^1}(f+g)$ es igual a cero.

Teorema 6. *$GC[\mathcal{L}_1]$ puede ser resuelto usando una pdTM.*

Prueba. Sea (n, f, g) una instancia de $GC[\mathcal{L}_n^1]$. Suponga que el conjunto de vértices de $GC[\mathcal{L}_n^1]$ es el conjunto $[n+1] \cup \{0\}$, donde los vértices 0 y $n+1$ representan al sumidero. Además, dada una configuración f sobre $GC[\mathcal{L}_n^1]$ se tiene que $f(0) = 0$ y $f(n+1) = 0$.

Al inicio de la computación la instancia es escrita en la cinta de entrada, suponga que la instancia es la palabra $0x_1x_2 \ldots x_n0$, con $x_i = h(i) = (f+g)(i)$. Además, se supone que la pila y la cinta de trabajo están vacías.

Note que el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ se puede particionar en los siguientes tres conjuntos:

1. $T_0 = \{i : h(i) = 2\}$.
2. $N_0 = \big\{i : h(i) = 0 \ y \ \forall j\big(h(j) = 2 \Rightarrow i \lneqq j\big)\big\}$.
3. $M_0 = \big\{i : h(i) = 0 \ y \ \exists j\big(h(j) = 2 \ y \ j \lneqq i\big)\big\}$.

Sea $T_0 = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, donde $i_1 \lneqq i_2 \lneqq \ldots \lneqq i_k$. Se definen como se

hizo anteriormente, $t = h - e_{i_2} - \ldots - e_{i_k}$ y la secuencia $t_1, t_2, \ldots t_k$, esto es:

$$\begin{aligned} t_1 &= st_{\mathcal{L}_n^1}(t) \\ t_2 &= st_{\mathcal{L}_n^1}(t_1 + e_{i_2}) \\ &\vdots \\ t_k &= st_{\mathcal{L}_n^1}(t_{k-1} + e_{i_k}) \end{aligned}$$

Se sabe que $t_k = st_{\mathcal{L}_n^1}(h)$. Ahora, dado $l \leq k$ se define:

1. $T_l = \{i_{l+1}, i_{l+2}, \ldots, i_k\}$.
2. $N_l = \big\{i : t_l(i) = 0 \ y \ \forall j\big(i \in T_l \Rightarrow i \lneqq j\big)\big\}$.
3. $M_l = \big\{i : t_l(i) = 0 \ y \ \exists j\big(j \in T_l \ y \ j \lneqq i\big)\big\}$.

Observe que $T_k = M_k = \emptyset$. Además, para calcular t_k es suficiente con calcular N_k (N_k describe totalmente la configuración t_k). Luego, se debe calcular N_k, para ello, se calcula la secuencia:

$$(N_1, T_1, M_1), \ldots, (N_k, T_k, M_k)$$

Finalmente, se puede observar que T_i y M_i son determinados por sus primeros elementos (los cuales se denotan con los símbolos d_i y m_i), dado que a lo largo de toda la computación se tiene acceso al *input* (el cual es guardado en la cinta de entrada).

La computación es dividida en dos etapas, la primera es la *inicialización* que consiste en la computación de h y la segunda consiste en la computación de (N_i, d_i, m_i) desde la tripla $(N_{i-1}, d_{i-1}, m_{i-1})$ calculada previamente.

Inicialización

1. Dados $a_1, \ldots, a_r$ los elementos de N_0 se escribe la palabra $a_1\#a_2\#\ldots\#a_r$ sobre la pila.
2. Se calcula d_0 y m_0 y se guardan estos dos números sobre la cinta de trabajo (usando $\mathcal{O}(\log(n))$ celdas).

Segunda Etapa

Suponga que se ha calculado la tripla $(N_{i-1}, d_{i-1}, m_{i-1})$.

1. Se calcula α, el máximo de N_{i-1}, el cual es el número escrito en el tope de la pila.

2. Se calcula $z = m_{i-1} + \alpha - d_{i-1}$. (Note que $\alpha \lneqq z \lneqq m_{i-1}$)

3. Si existe un $t \in T_0$ tal que $d_{i-1} \lneqq t \lneqq z$ entonces se tiene que $N_i = N_{i-1} - \{\alpha\}$ (se borra el número en el tope de la pila), $m_i = z$ y $t_i = \underset{t \in T_0}{mín}\{d_{i-1} \lneqq t\}$. De lo contrario, si no existe $t \in T_0$ tal que $d_{i-1} \lneqq t \lneqq z$ se tiene entonces que $N_i = (N_{i-1} \cup \{z\}) - \{\alpha\}$ (se borra el número en el tope de la pila y luego se escribe z), $t_i = \underset{t \in T_0}{mín}\{d_{i-1} \lneqq t\}$ y $m_i = \underset{j \in M_0}{mín}\{j \gneqq m_{i-1}\}$.

4. La etapa finaliza cuando T_i sea un conjunto vacío.

Es fácil comprobar que si $b_1\#\ldots\#b_r$ es la palabra escrita sobre la pila al final de la computación, entonces $N_k = \{b_1, \ldots, b_r\}$. Por lo tanto, la estabilización de $f + g$ puede ser calculada utilizando una $pdTM$. ■

Corolario 2. $GC[\mathcal{L}_1] \in NC^2$.

Así, como se ha comprobado que $GC[\mathcal{L}_1] \in NC^2$, se puede probar que $SPP[\mathcal{L}_1]$ pertenece a NC^2, esto a su vez implica que los problemas $MC[\mathcal{L}_1]$, $MC^*[\mathcal{L}_1]$, $CSV[\mathcal{L}_1]$, $SPA[\mathcal{L}_1]$, $IC[\mathcal{L}_1]$ y $EC[\mathcal{L}_1]$ pertenecen a NC^2 [12].

Por otro lado, es importante comentar que el problema $RR[\mathcal{L}_1]$ puede ser resuelto en tiempo constante usando un número polinomial de procesadores, dado que el lenguaje:

$$\mathcal{L} = \{w \in \{0,1\}^n : \textit{en } w \textit{ ocurre a lo más un cero}\}$$

puede ser reconocido usando una familia de circuitos de tamaño polinomial y profundidad 3.

3.3. $SPP[\mathcal{L}_1]$ es TC^0- duro

En esta sección se demostrará que el problema de predicción es TC^0- duro, es decir, que $SPP[\mathcal{L}_1]$ es lo suficientemente complejo como para que no sea posible resolverlo usando familias uniformes de circuitos de tamaño polinomial y profundidad acotada. Se mostrará que es posible calcular, usando circuitos de profundidad constante, una reducción del problema *MAJORITY* (el problema consistente en decidir si una cadena de *bits* tiene más unos que ceros) en el problema $SPA[\mathcal{L}_1]$ y como *MAJORITY* es TC^0- *completo*, bajo reducciones de profundidad constante, se tendrá que $SPA[\mathcal{L}_1]$ es TC^0- *duro*, lo cual implica que $SPP[\mathcal{L}_1]$ también lo será, dado que $SPA[\mathcal{L}_1]$ es reducible a $SPP[\mathcal{L}_1]$.

Sea $\mathcal{L}^1_{3n}$ la grilla de arena unidimensional sobre $\{0,\ldots,3n+1\}$, donde los vértices 0 y $3n+1$ asumen la función del sumidero. Suponga que f es una configuración sobre $\mathcal{L}^1_{3n}$ la cual satisface las siguientes condiciones:

1. Si $i \leq n$, entonces se tiene que $f(i) = 0$.
2. Si $i \in \{n+1,\ldots,2n\}$, entonces se tiene que $f(i) \in \{1,2\}$.
3. Si $i \geq 2n+1$, entonces se tiene que $f(i) = 0$.

Observe que de la forma como se ha definido la configuración f se tiene que:

$$\|f\| = \sum_i f(i) \leq 2n.$$

Teorema 7. *Existen $i, j \in \{0,1,\ldots,3n+1\}$ tales que:*

1. *$i \lneqq j$ y $j - i \in \big\{\|f\|, \|f\|-1\big\}$.*
2. *Si $k \notin \{i, i+1,\ldots,j\}$, entonces $st_{\mathcal{L}^1_{3n}}(f)(k) = 0$.*
3. *Si $k \in \{i, i+1,\ldots,j\}$, entonces $st_{\mathcal{L}^1_{3n}}(f)(k) \in \{0,1\}$; existiendo al menos un k tal que $st_{\mathcal{L}^1_{3n}}(f)(k) = 0$ donde $i \lneqq k \lneqq j$.*

Prueba. Sean $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k$ las posiciones donde f toma el valor 2. Sea f_0 la configuración que toma el valor 1 sobre el conjunto $\{n+1, \ldots, 2n\}$ y el valor 0 sobre el complemento de este conjunto. Note que:

$$f = f_0 + e_{i_1} + \ldots + e_{i_k}$$

La abelianicidad del modelo implica que:

$$st_{\mathcal{L}^1_{3n}}(f) = st_{\mathcal{L}^1_{3n}}(f_{k-1} + e_{i_k}),$$

donde $f_1 = st_{\mathcal{L}^1_{3n}}(f_0 + e_{i_1})$ y dado f_r se tiene que:

$$f_{r+1} = st_{\mathcal{L}^1_{3n}}(f_r + e_{i_{r+1}})$$

Es fácil calcular f_1, dado que $f_0 + e_{i_1}$ es una configuración que satisface las condiciones del *Lema 2*, esto es, existirá una posición $j_1 \in \{n+1, \ldots, 2n\}$ tal que $f_1(j_1) = 0$, si $j \in \{n, \ldots, 2n+1\} - \{j_1\}$ entonces $f_1(j) = 1$ y para el complemento se tiene que $f_1 = f_0$. Ahora, para calcular f_2 puede ocurrir que $j_1 = i_2$, en este caso $f_1 + e_{i_2}$ toma el valor 1 sobre el intervalo $I_1 = \{n, \ldots, 2n+1\}$ y toma el valor 0 fuera de I_1, lo cual implica que $f_2 = f_1 + e_{i_2}$ dado que $f_1 + e_{i_2}$ es estable. Por otro lado, si $j_1 \neq i_2$ se tiene que $f_1 + e_{i_2}$ toma el valor de 0 fuera de I_1, $(f_1 + e_{i_2})(j_1) = 0$, $(f_1 + e_{i_2})(i_2) = 2$ y $f_1 + e_{i_2}$ toma el valor de 1 en cualquier otro punto de I_1. De igual manera es posible calcular fácilmente f_2, dado que $f_1 + e_{i_2}$ es una configuración que satisface las condiciones del *Lema 2*. Por lo tanto, f_2 es una configuración de uno de los siguientes dos tipos:

1. (Tipo 1) Existe un intervalo $I_2 \supseteq \{n+1, \ldots, 2n\}$ tal que la configuración f_2 toma el valor 1 sobre I_2 y fuera de este mismo toma el valor 0. Note que la longitud del intervalo es $n+1$.

2. (Tipo 2) Existe un intervalo $I_2 \supseteq \{n+1, \ldots, 2n\}$ tal que la configuración f_2 toma el valor 0 fuera de I_2 y toma el valor 1 sobre $I_2 - \{x\}$, donde $x \in I_2$ y $st_{\mathcal{L}^1_{3n}}(f_1 + e_{i_2})(x) = 0$. Note que la longitud del intervalo es $n+2$.

Inductivamente se llega a que para cualquier $j \leq k$, la configuración f_j es una configuración de uno de los siguientes dos tipos:

1. (Tipo 1) Existe un intervalo $I_j \supseteq \{n+1, \ldots, 2n\}$ tal que la configuración f_j toma el valor 1 sobre I_j y fuera de este mismo toma el valor 0. Además, la longitud de I_j es $n + j - 1$.

2. (Tipo 2) Existe un intervalo $I_j \supseteq \{n+1, \ldots, 2n\}$ tal que la configuración f_j toma el valor 0 fuera de I_j y toma el valor 1 sobre $I_j - \{x\}$, donde $x \in I_j$ y $f_j(x) = 0$. Además, la longitud de I_j es $n + j$.

Si se toma $j = k$ el teorema queda demostrado. ■

Sea *MAJORITY* el problema de decidir si una cadena de *bits* de longitud n tiene más unos que ceros y sea Maj la función asociada a este problema, denominada *función mayoría*. Ahora, para $(x_1, \ldots, x_n)$, donde $x_i \in \{0, 1\}$, la función Maj está definida como:

$$Maj(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, \textit{ si } \sum x_i \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1. \\ 0, \textit{ caso contrario.} \end{cases}$$

Observe que para $(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{2n})$ donde $x_{n+1} = x_1, \ldots, x_{2n} = x_n$ se tiene que $Maj(x_1, \ldots, x_{2n}) = 1$ si y sólo si $\sum x_i \geq n + 2$ si y sólo si $\sum x_i \gneqq n + 1$.

Teorema 8. *$SPA[\mathcal{L}_1]$ es TC^0- duro.*

Prueba. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$, tal que $x_k \in \{0, 1\}$, $1 \leq k \leq n$. Sea $m = 2n$ y sea $(y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n)$. Se define la configuración f_x sobre $\{0, 1, \ldots, 3m + 1\}$ como:

$$f_x(i) = \begin{cases} y_j + 1, \textit{ si } i = m + j \textit{ y } j \in \{1, \ldots, m\}. \\ 0, \textit{ caso contrario.} \end{cases}$$

Observe que f_x satisface las condiciones del *Teorema 7*. El conjunto de nodos que al finalizar el proceso de estabilización tienen granos de arena,

será llamado la sombra de f_x. Ahora, si $Maj(x) = 1$, entonces la sombra de f_x será extensa, llenando al menos $n + 2$ posiciones. Por otro lado, si $Maj(x) = 0$ se tendrá que la sombra de f_x es angosta, llenando a lo más $n + 1$ posiciones. Sea A_m el conjunto dado por:

$$A_m = \{(i, j) : 0 \leq i \leq m, \quad j \gneqq 2m \quad y \quad j - i \geq m + n + 1\}$$

Note que $Maj(x_1, \ldots, x_n) = 1$ si y sólo si:

$$\bigvee_{(i,j)\in A_m} \Big(((\mathcal{L}_m^1, f, i + 1) \in SPA[\mathcal{L}_1]) \wedge ((\mathcal{L}_m^1, f, j - 1) \in SPA[\mathcal{L}_1]) \Big)$$

Por lo tanto, se ha probado que se puede calcular la función Mayoría usando una familia uniforme de circuitos de profundidad 3, con una compuerta $\vee$ en el primer nivel; compuertas $\wedge$ en el segundo nivel y el último nivel compuesto por compuertas-oráculo para $SPA[\mathcal{L}_1]$. De este modo se tiene que $SPA[\mathcal{L}_1]$ es TC^0- *duro.* ■

Finalmente, sea $PARITY$ el problema de decidir si una cadena de n *bits* tiene un número impar de unos. Se sabe que $PARITY$ está en TC^0 y que $PARITY$ es reducible a $MAJORITY$, pero dado $\epsilon > 0$ se sabe que $PARITY$ no está en $AC^{1-\epsilon}$ [15]. Por lo tanto, como $AC^{1-\epsilon}$ es cerrado bajo reducciones de profundidad constante, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3. *$SPP[\mathcal{L}_1]$ es TC^0- duro, $SPP[\mathcal{L}_1]$ pertenece a AC^1 pero dado $\epsilon \gneqq 0$ se tiene que $SPP[\mathcal{L}_1] \notin AC^{1-\epsilon}$.*

CAPÍTULO 4

Pilas de arena sobre grillas bidimensionales

En este capítulo se estudian algunos aspectos relacionados con la dinámica del modelo abeliano de pilas de arena sobre grillas bidimensionales.

4.1. Pilas de arena en dimensión 2

Dado $n \geq 1$, el símbolo $\mathcal{G}_n^2$ denotará la grilla bidimensional de orden n, cuyo conjunto de vértices es igual a $[n] \times [n]$, donde $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. El símbolo $\mathcal{L}_n^2$ denotará la *grilla de arena bidimensional* de orden n, la cual es obtenida a partir de $\mathcal{G}_n^2$ agregando un vértice especial s, *el sumidero*. Además, dado un vértice v en el borde de $\mathcal{L}_n^2$ existirán $4 - deg_{\mathcal{G}_n^2}(v)$ aristas en $\mathcal{L}_n^2$ conectando v con s. Note que si $v \in V(\mathcal{L}_n^2)^*$ se tiene que $deg(v) = 4$. Finalmente, el símbolo $\mathcal{L}_2$ denotará la clase $\{\mathcal{L}_n^2 : n \geq 1\}$.

La siguiente figura representa una grilla de arena unidimensional de orden 5, donde cada celda representa un vértice y las celdas en gris representan al

sumidero. Además, si dos celdas son adyacentes significa que existe una arista entre los vértices correspondientes a cada celda.

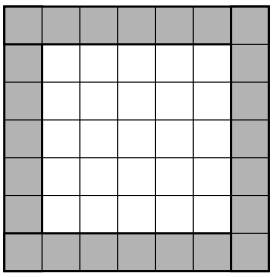
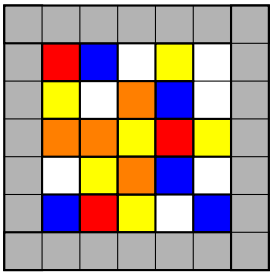


Figura 4.1: $\mathcal{L}_5^2$

Una configuración de granos de arena sobre una grilla de arena bidimensional se puede representar de la siguiente manera:



donde el color en cada celda representa el número de granos de arena sobre el vértice asociado a la celda. (blanco=0, azul=1, amarillo=2, naranja=3, rojo=4).

La configuración de la figura anterior es un ejemplo de una configuración inestable, dado que en esta clase de grafos de arena, un vértice es inestable si y sólo si tiene más de tres granos de arena. A continuación se representa una avalancha maximal generada por dicha configuración.

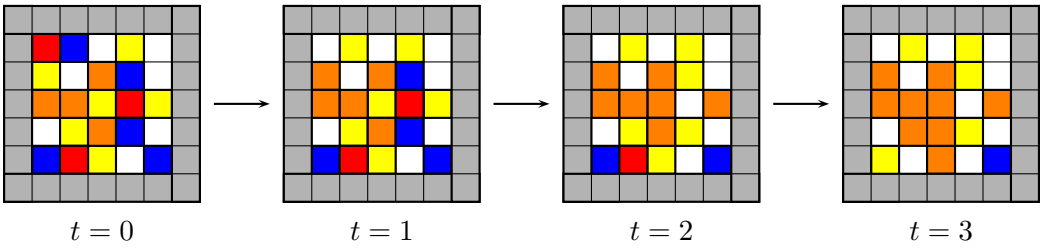


Figura 4.2: Una avalancha maximal en 2D

La configuración identidad para el caso bidimensional, es un objeto muy interesante por las particulares simetrías que posee, y por la estructura fractal que parece exhibir.

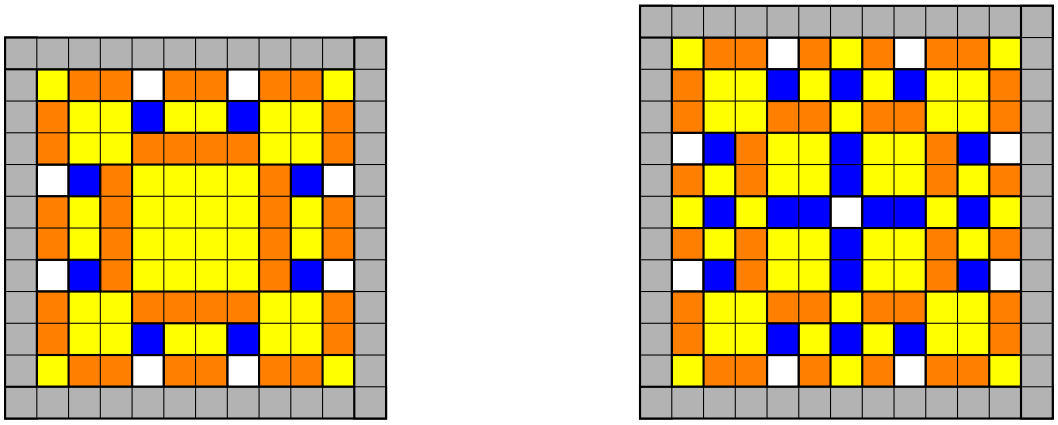
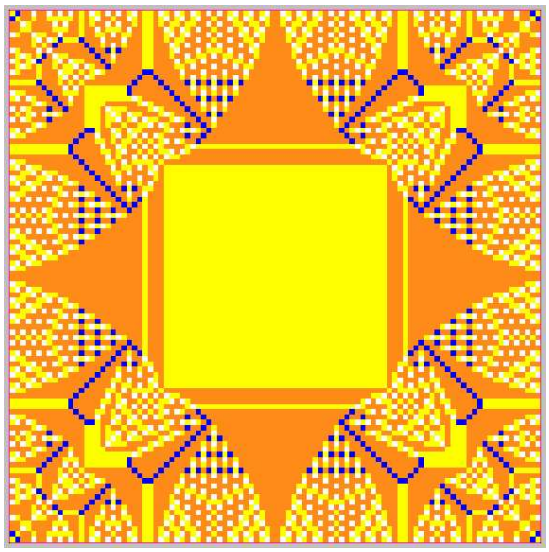
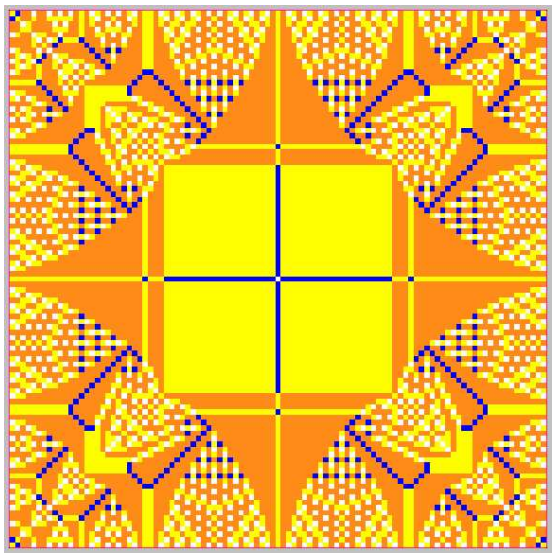


Figura 4.3: La identidad $e_{\mathcal{L}_n^2}$ con $n = 10$ (Izq) y $n = 11$ (Der).

Note que la forma de la identidad de $\mathcal{L}_n^2$ depende de si n es par o impar (al igual que en el caso unidimensional). En las siguientes figuras puede observarse la identidad para $n = 100$ y para $n = 101$.



$e_{\mathcal{L}^2_{100}}$



$e_{\mathcal{L}^2_{101}}$

4.2. La Complejidad en 2D: un problema abierto.

Determinar qué tan duro es $SPP[\mathcal{L}_2]$ es uno de los problemas abiertos más importantes dentro de esta teoría, por lo mismo, no se resolverá en este trabajo, pero lo que si se hará es estudiar, o al menos mencionar, algunos resultados referentes a la complejidad de dicho problema.

Sea $MCVP[\mathcal{P}]$ el problema de evaluar circuitos planos monótonos booleanos.

Problema 10 (*MCVP[$\mathcal{P}$]], Planar Monotone Circuit Value Problem*)**.**

- *Input:* $(\mathcal{C}, \mu)$*, donde* $\mathcal{C}$ *es un circuito booleano plano y monótono y* μ *es una valuación.*
- *Problema: Calcule* $\mathcal{C}(\mu)$*.*

Se sabe que el anterior problema es NC^1- *duro* bajo reducciones de espacio logarítmico y se sabe también que $MCVP[\mathcal{P}]$ está en NC^3. A continuación se probará que $MCVP[\mathcal{P}]$ puede ser reducido en espacio logarítmico a los problemas $SPA[\mathcal{L}_2]$ y $RR[\mathcal{L}_2]$, con ello, se mostrará que $SPA[\mathcal{L}_2]$ y $RR[\mathcal{L}_2]$ son NC^1-duros, este resultado fue establecido originalmente por Moore [17].

Teorema 9. $SPA[\mathcal{L}_2]$ *es* NC^1- *duro.*

Prueba. Sea $(\mathcal{C}, \mu)$ una instancia de $MCVP[\mathcal{P}]$ tal que $\mathcal{C}$ es un circuito plano cuyo *Fan-in* está acotado por dos y cuyo *Fan-out* está acotado por uno. Sea $G_{\mathcal{C}}$ el grafo subyacente de $\mathcal{C}$, se puede computar en espacio logarítmico un embebimiento de $G_{\mathcal{C}}$ en $\mathcal{L}_2^{p(n)}$, donde n es el tamaño de $G_{\mathcal{C}}$ y $p(X)$ es un polinomio adecuado. Además, se puede suponer que la imagen de $G_{\mathcal{C}}$

está totalmente contenida en el interior de $\mathcal{L}_2^{p(n)}$. Un vértice $v \in V\left(\mathcal{L}_2^{p(n)}\right)$ pertenece a la imagen de dicho embebimiento si y sólo si v es la imagen de algún vértice $w \in V(G_{\mathcal{C}})$ o v se encuentra en la imagen de alguna de las aristas de $G_{\mathcal{C}}$ (el embebimiento envía vértices de $G_{\mathcal{C}}$ en vértices de $\mathcal{L}_2^{p(n)}$ y envía aristas de $G_{\mathcal{C}}$ en caminos simples de $\mathcal{L}_2^{p(n)}$). En el primer caso se dirá que v es un *vértice-compuerta* y en el segundo, que v es *vértice-alambre*. Note que dado v un *vértice-compuerta*, v tiene exactamente una preimagen, la cual se notará con el símbolo w_v. Por otro lado, dado o el vértice asociado al *output* del circuito, el símbolo v_o denotará su imagen. Se define una configuración f sobre $\mathcal{L}_2^{p(n)}$ como:

1. Si v es un *vértice-compuerta* y su preimagen w_v es una $\wedge$-compuerta entonces $f(v) = 2 = deg(v) - 2$.

2. Si v es un *vértice-compuerta* y su preimagen w_v es una $\vee$-compuerta entonces $f(v) = 3 = deg(v) - 1$.

3. Si v es un *vértice-alambre* entonces $f(v) = 3 = deg(v) - 1$.

4. Si v es un *vértice-compuerta* y su preimagen w_v es una compuerta de entrada tal que $\mu(w_v) = 1$ entonces $f(v) = 4$.

5. Si v es un *vértice-compuerta* y su preimagen w_v es una compuerta de entrada tal que $\mu(w_v) = 0$ entonces $f(v) = 0$.

6. Para todos los demás vértices $v \in V\left(\mathcal{L}_2^{p(n)}\right)$, $f(v) = 0$.

Algunos elementos de la construcción se ilustran en la figura 4.4. La idea principal de esta construcción es que se puedan simular los siguientes hechos:

1. La compuerta w_v evalúa 1 ó 0, esto puede determinarse si v dispara ó no dispara, respectivamente.

2. Una señal que fluye a través de un alambre dado, esto puede lograrse a través del flujo de granos de arena en el correspondiente camino simple en la grilla $\mathcal{L}_2^{p(n)}$.

Alambre y señal

1	1	1				
1	1	0	4	3	3	3
1	1	1				

Compuerta $\vee$

3	3	3	3			
			3	3	3	3
3	3	3	3			

Compuerta $\wedge$

3	3	3	3			
			2	3	3	3
3	3	3	3			

Figura 4.4: Dispositivos lógicos en $\mathcal{L}_2$

Finalmente, se define un importante elemento en la construcción, que se denomina *diodo* y que está diseñado para garantizar que el flujo de granos de arena sea dirigido y de esta manera sea análogo al flujo de señales en el circuito. Un diodo tiene la siguiente estructura:

			3	3			
3	3	3	3	2	3	3	3

$\longrightarrow$

(Dirección de la señal)

Ahora, si no se tiene suficiente espacio, es decir, si hay superposición de diodos o de diodos y alambres entonces se puede subdividir la grilla tantas veces como sea necesario eliminando la superposición de dichas construcciones.

Luego de hacer la construcción no es difícil comprobar que:

$$SC_f(v_o) \gneqq 0 \ \textit{ si y sólo si } \mathcal{C}(\mu) = 1$$

Por lo tanto, se tiene que $MCVP[\mathcal{P}]$ es reducible en espacio logarítmico a $SPA[\mathcal{L}_2]$ puesto que la construcción puede ser calculada en espacio logarítmico. ■

Teorema 10. *$RR[\mathcal{L}_2]$ es NC^1- duro.*

Prueba. Sea $(\mathcal{C}, \mu)$ una instancia de $MCVP[\mathcal{P}]$ tal que $\mathcal{C}$ es un circuito plano cuyo *Fan-in* está acotado por dos y cuyo *Fan-out* está acotado por uno. Se

utilizará el mismo embebimiento, que se definió en la prueba anterior, del grafo subyacente $G_{\mathcal{C}}$ del circuito en la grilla $\mathcal{L}_2^{p(n)}$, donde n es el tamaño de $G_{\mathcal{C}}$ y $p(X)$ es un polinomio adecuado, suponiendo también que la imagen de $G_{\mathcal{C}}$ está totalmente contenida en el interior de $\mathcal{L}_2^{p(n)}$. Ahora, sea C^* el subgrafo de $\mathcal{L}_2^{p(n)}$ cuyos vértices son los vértices correspondientes a los nodos del circuito y a los alambres del circuito. Es claro que cualquier vértice de C^* tiene un vecino fuera de C^*, además, note que el complemento de C^* es un subgrafo conexo de $\mathcal{L}_2^{p(n)}$. Por lo tanto, si $v \in V(C^*)$ se pueden definir los siguientes enteros positivos:

1. $k_v = \left|\left\{w \in V(C^*) : \{v, w\} \in E(\mathcal{L}_2^{p(n)})\right\}\right|$.
2. $r_v = \left|\left\{w \notin V(C^*) : \{v, w\} \in E(\mathcal{L}_2^{p(n)})\right\}\right|$.

Ahora, se define la configuración $f_{(\mathcal{C},\mu)}$ sobre $\mathcal{L}_2^{p(n)}$ como:

1. Si $v \notin V(C^*)$ entonces $f_{(\mathcal{C},\mu)}(v) = 3$.
2. Si v es un *vértice-alambre* entonces $f_{(\mathcal{C},\mu)}(v) = 3 - r_v$.
3. Si v es un *vértice-compuerta* y su preimagen w_v es una $\wedge$-compuerta entonces $f_{(\mathcal{C},\mu)}(v) = 2 - r_v$.
4. Si v es un *vértice-compuerta* y su preimagen w_v es una $\vee$-compuerta entonces $f_{(\mathcal{C},\mu)}(v) = 3 - r_v$.
5. Si v es un *vértice-compuerta* y su preimagen w_v es una compuerta de entrada tal que $\mu(w_v) = 1$ entonces $f_{(\mathcal{C},\mu)}(v) = 4 - r_v$.
6. Si v es un *vértice-compuerta* y su preimagen w_v es una compuerta de entrada tal que $\mu(w_v) = 0$ entonces $f_{(\mathcal{C},\mu)}(v) = 0$.

Ahora, se probará que la configuración así definida es crítica si y sólo si $\mathcal{C}(\mu) = 1$. Recuerde que $f_{(\mathcal{C},\mu)}$ es crítica si y sólo si todo $v \in V(\mathcal{L}_2^{p(n)})$ dispara exactamente una vez durante el proceso de estabilización de $f_{(\mathcal{C},\mu)} + e_{\delta(\mathcal{L}_2^{p(n)})}$.

Por lo tanto, se comenzará por adicionar un grano de arena a todo vértice sobre el borde de $\mathcal{L}_2^{p(n)}$.

Afirmación: Durante el proceso de relajación de $f_{(\mathcal{C},\mu)}+e_{\delta(\mathcal{L}_2^{p(n)})}$, todo vértice $v \notin V(C^*)$ dispara antes de que algún vértice en $V(C^*)$ dispare.

Prueba de la afirmación. Recuerde que para cualquier vértice v fuera de $V(C^*)$ se tiene que $f_{(\mathcal{C},\mu)}(v) = 3$. El vértice v será inestable si y sólo si al menos uno de sus vecinos ha disparado con anterioridad. Note que después de adicionar la configuración borde, todo vértice en el borde de $\mathcal{L}_2^{p(n)}$ dispara, sin que disparen los vértices en $V(C^*)$ (se ha supuesto que $V(C^*)$ está en el interior de $\mathcal{L}_2^{p(n)}$). Así, para probar la afirmación, es posible usar inducción sobre la distancia al borde.

- (Distancia cero) Los vértices en el borde disparan antes de que dispare cualquier vértice en $V(C^*)$.
- (Distancia k) Suponga que cualquier vértice fuera de $V(C^*)$ cuya distancia al borde es menor o igual a k dispara antes de que dispare cualquier vértice en $V(C^*)$.
- (Distancia $k+1$) Sea v un vértice tal que la distancia de v al borde es igual a $k+1$. Existe $w \notin V(C^*)$ tal que $\{v, w\} \in E(\mathcal{L}_2^{p(n)})$ y la distancia de w al borde es igual a k. Por la hipótesis inductiva se tiene que el vértice w dispara antes de que dispare algún vértice en $V(C^*)$. Observe que después de disparar w, v se vuelve inestable. Así, v dispara justo después de que dispare w. Por lo tanto, v dispara antes de que algún vértice en $V(C^*)$ dispare.

Por lo tanto, los vértices fuera de $V(C^*)$ habrán disparado antes de que algún vértice en $V(C^*)$ dispare. Observe que cuando haya disparado el último vértice fuera de $V(C^*)$, los vértices en $V(C^*)$ tendrán los valores correctos, es decir, el subgrafo C^* tendrá una configuración que permitirá evaluar el par $(\mathcal{C}, \mu)$. Después de evaluar el circuito, note que los únicos vértices que

no han disparado son los asociados a las compuertas de entrada del circuito a los que la valuación μ les asigna el valor cero, más otros nodos internos de C^*. Se puede conectar el vértice o asociado al *output* del circuito, con las componentes antes mencionadas, mediante alambres y diodos. De manera tal que si $\mathcal{C}(\mu) \neq 1$ entonces el *output* no dispara ó si $\mathcal{C}(\mu) = 1$ entonces el output dispara, transmitiendo señales a los vértices de C^*, los cuales dispararán. Se tiene entonces que $\mathcal{C}(\mu) = 1$ si y sólo si $f_{(\mathcal{C},\mu)}$ es crítica. ■

Desafortunadamente la cota inferior ($SPP[\mathcal{L}_2]$ es NC^1- duro) y la superior ($SPP[\mathcal{L}_2]$ está en P) son muy distantes la una de la otra. El problema abierto a resolver, relativo a las complejidad de $SPP[\mathcal{L}_2]$, es encontrar cotas ajustadas. Ahora, si se supone que una de las dos cotas es ajustada, ¿cuál de las dos cotas, la inferior o la superior, es la correcta? o lo que es lo mismo: ¿$SPP[\mathcal{L}_2]$ es *P-completo* o está en NC?

En lo que queda de este capítulo se estudiarán dos resultados que sugieren que $SPP[\mathcal{L}_2]$ no es *P-completo*.

4.2.1. El cruce de información en 2D

En esta parte del estudio se mencionan algunos resultados referentes a la posibilidad de implementar el algoritmo utilizado por Moore para evaluar circuitos booleanos no planares. En [13] Gajardo y Goles prueban que no es posible construir dispositivos similares a los que define Moore, que simulen en la grilla de arena bidimensional mediante la transferencia de granos de arena, el cruce de información en un circuito no planar. El objetivo de esta subsección es presentar dicho resultado.

Sea $\mathcal{L}_n^2$ la grilla de arena bidimensional de orden n, con la vecindad de von Neumann (la que se ha utilizado hasta el momento) y sea $\mathcal{S}_m \subset \mathcal{L}_n^2$ una subgrilla de arena de orden m, conexa y con $m < n$. Considere el siguiente

marco de referencia para $\mathcal{S}_m$: la *fila Sur* es la fila desde la celda $(1,1)$ a la celda $(m,1)$, la *fila Norte* es la fila desde la celda $(1,m)$ a la celda (m,m), la *columna Oeste* es la columna desde la celda $(1,1)$ a la celda $(1,m)$ y la *columna Este* es la columna desde la celda $(m,1)$ a la celda (m,m). Una configuración estable sobre $\mathcal{S}_m$ se dice que es *transportadora* OE si al adicionar un grano de arena sobre la columna Oeste de $\mathcal{S}_m$, alguna celda de la columna Este recibe granos de arena después del proceso de estabilización. De la misma manera, una configuración es *transportadora* NS, si al adicionar un grano de arena sobre la fila Norte de $\mathcal{S}_m$, alguna celda de la fila Sur recibe granos de arena. Ahora, una configuración sobre $\mathcal{S}_m$ es *S-aislada* si es transportadora OE y ninguna celda de la fila Sur recibe granos de arena cuando se adiciona un grano de arena en la columna Oeste, de manera similar se dice que una configuración es *O-aislada* si es transportadora NS y ninguna celda en la columna Oeste recibe granos de arena cuando se adiciona un grano de arena en la fila Norte.

Definición 10. *Una configuración c sobre $\mathcal{S}_m \subset \mathcal{L}_n^2$, $m < n$, se dice que es un cruce si es una configuración S-aislada y O-aislada a la vez.*

Observe que en este tipo de configuración no interesa si los granos de arena se devuelven hacia el lado Oeste o hacia el lado Norte ya que basta con asignar diodos para que los granos de arena no regresen al punto de origen. Además, la orientación o marco de referencia de $\mathcal{S}_m$ es arbitraria, aunque para utilizar una orientación uniforme sobre toda la grilla de arena $\mathcal{L}_n^2$ es posible hacerlo mediante el uso de alambres apropiados, con el fin de que de todos los cruces tengan la misma orientación.

Lema 3. *Sea v una vértice en $\mathcal{S}_m$. Si v dispara k veces es porque o tiene un vecino que disparó k veces antes o v inició con más de tres granos de arena. Si v está en el borde de $\mathcal{S}_m$ y $k \geq 2$ entonces o v tiene dos vecinos que dispararon k veces antes o tiene un vecino que disparó $k+1$ veces o v inició con más de $k+2$ granos de arena.*

Prueba. Para que un vértice con k granos de arena pueda disparar k veces, este debe recibir al menos $4k - i$ granos de arena. Si un vértice v está en el interior de $\mathcal{S}_m$ entonces tiene 4 vecinos y si cada uno de ellos dispara $k - 1$ veces entonces recibe $4k - 4$ granos de arena. Por otro lado, si v se encuentra sobre el borde de $\mathcal{S}_m$ tiene 3 vecinos y si cada uno de ellos dispara el vértice v recibe $3k - 3$ granos de arena. Por lo tanto, si v cumple con alguna de las condiciones del lema, v dispara k veces. ■

El lema anterior implica que si se adiciona un grano de arena a una celda en la columna Oeste de $\mathcal{S}_m$ ó en la fila Norte de $\mathcal{S}_m$, entonces cada celda de $\mathcal{S}_m$ dispara a lo más una vez durante la ocurrencia de la avalancha generada por dicha adición. Esto permite definir el siguiente concepto.

Definición 11. *Sea f una configuración estable sobre $\mathcal{S}_m$ y sea $\mathcal{O}$ un subconjunto de celdas sobre el borde de $\mathcal{S}_m$. El grafo avalancha asociado a $\mathcal{O}$ se define como el dígrafo $G_{\mathcal{O}} = (V_{\mathcal{O}}, E_{\mathcal{O}})$ tal que:*

1. *$V_{\mathcal{O}}$ es el conjunto de celdas que disparan si un grano de arena es adicionado a cada una de las celdas de $\mathcal{O}$.*

2. *$(u, v) \in E$ si y sólo si u, v son vecinos y u dispara antes que v.*

Note que un *grafo avalancha* no tiene ciclos y además, si el grado de entrada de un vértice v es k entonces v debe tener al menos $4 - k$ granos de arena al inicio de la avalancha. Note también que si v es un vértice de $G_{\mathcal{O}}$ de grado de entrada cero, entonces $v \in \mathcal{O}$.

Teorema 11. *No existen cruces en $\mathcal{L}_n^2$.*

Prueba. Suponga que existe un cruce c para algún $S_m \subset \mathcal{L}_n^2$, con $m < n$. Sea $G_O = (V_O, E_O)$ el grafo avalancha asociado a la columna Oeste y sea $G_N = (V_N, E_N)$ el grafo avalancha asociado a la fila norte. Sea S el subgrafo

de G_O cuyo conjunto de vértices es $V_O - V_N$. Como S es acíclico, contiene vértices con grado de entrada igual a cero, distintos a los que están en el borde Oeste, puesto que en caso contrario G_N sería no conexo. Ahora, sea v un vértice de S con grado de entrada igual a cero. Como todo antecesor de v en G_O pertenece a V_N entonces cuando ocurra la avalancha generada por la adición de los granos de arena en la fila norte, el vértice v disparará, lo cual es una contradicción puesto que $v \notin V_N$. ■

El teorema anterior implica que no es posible construir un cruce mediante interacciones planares. En [13] Gajardo y Goles también muestran que tampoco es posible mediante un tipo específico de interacciones no planares, el caso que consideran es la grilla de arena $\mathcal{L}_n^2$ dotada con la vecindad de Moore. Dado v_{ij} en $\mathcal{L}_n^2$, la vecindad de Moore de v_{ij} es el conjunto de vértices:

$$N_{v_{ij}} = \left\{v_{(i-k)(j-l)} : k, l \in \{0, 1, -1\}\right\} - \{v_{ij}\}.$$

A continuación se muestra dicho resultado, que es fácil de obtener si adaptan convenientemente las definiciones previas, a $\mathcal{L}_n^2$ con la vecindad de Moore.

Teorema 12. *No existen cruces para $\mathcal{L}_n^2$ con la vecindad de Moore.*

Prueba. Suponga que existe uno, sea c un cruce para algún $\mathcal{S}_m \subset \mathcal{L}_n^2$, con $m < n$. Sea $G_O = (V_O, E_O)$ el grafo avalancha asociado a la columna Oeste de $\mathcal{S}_m$ y sea $G_N = (V_N, E_N)$ el grafo asociado a la fila Norte de $\mathcal{S}_m$. Sea S el subgrafo de G_O cuyo conjunto de vértices es $V_O - V_N$. Como $\mathcal{L}_n^2$ con la vecindad de Moore es no planar, a diferencia de la anterior prueba, el subgrafo S puede que no tenga vértices con grado de entrada igual a cero, distintos a los del borde Oeste, si los tiene, un argumento análogo al de la prueba anterior se puede utilizar para llegar a una contradicción. Suponga entonces que todo vértice con grado de entrada igual a cero se encuentra en el borde Oeste de $\mathcal{S}_m$, esto implica que debe existir un camino en S que va de la columna Oeste a la columna Este de $\mathcal{S}_m$, sea $P = (v_1, v_2, \ldots v_k)$ tal camino, en donde $v_i \in V_O - V_N$. Se define el conjunto V_{Sur} de manera inductiva como:

1. La fila Sur de $\mathcal{S}_m$ pertenece a V_{Sur}

2. Si $u \notin P$ y a su vez es vecino de un vértice v que pertenece a V_{sur} entonces u también pertenece a V_{Sur}.

Ahora, considere el subconjunto H, el cual es generado por el conjunto $(V_N \cap V_{Sur}) - V_O$. Como V_{Sur} está definido utilizando la vecindad de von Neumann y el camino P separa a $\mathcal{S}_m$ en dos partes, entonces H debe tener un vértice con grado de entrada igual a cero, sea w tal vértice. Se tiene que todo antecesor de w en G_N no se encuentra ni en V_{Sur} ni en P. Por lo tanto, para que w no dispare cuando ocurra una avalancha desde la columna Oeste hasta la columna Este, w debe tener más antecesores en G_N que vecinos en P pero esto es geométricamente imposible. ■

Los anteriores teoremas no garantizan que para cualquier tipo de vecindad se llegue al mismo resultado, en [13] Gajardo y Goles prueban que el problema $SPA[\mathcal{L}_2]$ es *P-completo*, cuando se considera la vecindad de von Neumann de radio $r \geq 2$. Se finaliza esta subsección, presentando dicho resultado.

Teorema 13. *$SPA[\mathcal{L}_2]$ es P-completo con la vecindad de von Neumann de radio $r \geq 2$.*

Prueba. Considere la vecindad de von Neumann de radio $r = 2$. Las construcciones de los dispositivos lógicos y del cruce de información se observan en las siguientes figuras. Para $r > 2$ la construcción es análoga.

Alambre y señal

1		1		1						
1		1		1						
1	2	1	2	0	1	8		7		7
1		1		1						
1		1		1						

Un cruce

					7					
					7					
					7					
7		7		7		7		7		7
					7					
					7					
					7					

Compuerta $\wedge$

7		7		7		7		7					
							6		7		7		7
7		7		7		7		7					

Compuerta $\vee$

7		7		7		7		7					
							7		7		7		7
7		7		7		7		7					

Por lo tanto, es posible hacer una construcción como la que se hizo en la prueba del *Teorema 9* y con ello se tiene que el problema de evaluar cualquier circuito monótono puede ser reducido al problema $SPA[\mathcal{L}_2]$ con la vecindad de von Neumann de radio $r \geq 2$. ■

4.2.2. $SPP[\mathcal{L}_2]$ podría pertenecer a NL.

Sea $\mathcal{L}^2_{\log n}$ la grilla de arena bidimensional cuyo conjunto de vértices es igual a $[n] \times [\lfloor \log n \rfloor]$, es decir $\mathcal{L}^2_{\log n}$ es una grilla de arena de altura logarítmica. Considere el problema a continuación.

Problema 11 ($RR[\mathcal{L}^2_{\log}]$, *Reconocimiento de configuraciones no críticas en grillas de altura logarítmica*)**.**

- *Input:* (f, n)*, donde* f *es una configuración estable sobre la grilla de arena bidimensional* $\mathcal{L}^2_{\log n}$*.*
- *Problema: Decida si* f *no es crítica.*

A continuación se mostrará que el problema $RR[\mathcal{L}^2_{\log}]$ pertenece a NL, que es la clase de los problemas de decisión que pueden ser resueltos en espacio logarítmico por una máquina de Turing no determinista.

Teorema 14. $RR[\mathcal{L}^2_{\log}] \in NL$.

Prueba. Se mostrará que $co - RR[\mathcal{L}^2_{\log}] \in NL$, lo cual es suficiente dado que $co - NL = NL$. Sea f una configuración estable sobre $\mathcal{L}^2_{\log n}$ y sea M_N la máquina de Turing no determinista de espacio logarítmico definida a continuación.

En la primera etapa de la computación, M_N escribe el *input*, que en este caso es la configuración estable f, sobre la cinta de entrada de la siguiente manera:

$$f(v_{11}) \dots f(v_{1\lfloor \log n \rfloor}) \# f(v_{21}) \dots f(v_{2\lfloor \log n \rfloor}) \# \dots \# f(v_{n1}) \dots f(v_{n\lfloor \log n \rfloor})$$

Para esto M_N utiliza $Cn \log n$ celdas.

Recuerde que para determinar que f no es crítica, es suficiente exhibir un conjunto $A \subset V(\mathcal{L}^2_{\log n})$, tal que para todo $v \in A$ se tiene que $deg_A(v) > f(v)$. Se utilizará el no determinismo de M_N para calcular los elementos de dicho conjunto y posteriormente se verificará usando $k \log n$ celdas de la cinta de trabajo de M_N, que el conjunto A, calculado no determinísticamente, es un testigo de la no criticalidad de la configuración f.

A lo largo de la computación, la cinta de trabajo utilizará la misma cantidad de celdas, la cual es $3\lfloor \log n \rfloor + 2$, para trabajar con a lo más 3 columnas de $\mathcal{L}^2_{\log n}$. En donde las posiciones $\lfloor \log n \rfloor + 1$ y $2\lfloor \log n \rfloor + 2$ estarán ocupadas siempre por el símbolo # para separar los elementos de cada columna.
En la segunda etapa de la computación M_N hace lo siguiente en los primeros tres pasos:

Paso 1

i) Adivina los elementos de A que pertenecen a las dos primeras columnas de $\mathcal{L}^2_{\log n}$ y escribe en la cinta de trabajo lo siguiente:

$$x_{11}x_{12} \dots x_{1\lfloor \log n \rfloor} \# x_{21}x_{22} \dots x_{2\lfloor \log n \rfloor} \# \underbrace{[][] \dots []}_{\lfloor \log n \rfloor veces}$$

donde:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \ si \ v_{ij} \in A. \\ 0, \ si \ v_{ij} \notin A. \end{cases}$$

y [] son celdas vacías.

ii) M_N verifica que para todo $v_{1j} \in A$, en la primera columna de $\mathcal{L}^2_{\log n}$, se tiene que $deg_A(v_{1j}) > f(v_{1j})$, para ello, se compara $f(v_{1j})$ con el número de vecinos de v_{1j} en A, tales vecinos corresponden a las celdas en las posiciones j, $j-1$ y $\lfloor \log n \rfloor + j + 1$ en la cinta de trabajo. Por lo tanto, si en la correspondientes celdas hay un 1 significa que el respectivo vecino pertenece a A, de lo contrario no.

Paso 2

i) M_N Adivina los elementos de A que pertenecen a la columna 3 de $\mathcal{L}^2_{\log n}$ y escribe en las celdas vacías de la cinta de trabajo, de la siguiente manera:

$$x_{11}x_{12}\ldots x_{1\lfloor \log n \rfloor}\#x_{21}x_{22}\ldots x_{2\lfloor \log n \rfloor}\#x_{31}x_{32}\ldots x_{3\lfloor \log n \rfloor}$$

donde $x_{3j} = 1$ si $v_{3j} \in A$ y es igual a cero en caso contrario.

ii) M_N verifica que para todo $v_{2j} \in A$, en la segunda columna de $\mathcal{L}^2_{\log n}$, se tiene que $deg_A(v_{2j}) > f(v_{2j})$, para ello, se compara $f(v_{2j})$ con el número de vecinos de v_{2j} en A, tales vecinos corresponden a las celdas en las posiciones j, $\lfloor \log n \rfloor + j$, $j+2$, y $2\lfloor \log n \rfloor + j + 2$ en la cinta de trabajo. Por lo tanto, si en la correspondientes celdas hay un 1 significa que el respectivo vecino pertenece a A, de lo contrario no.

Paso 3

i) M_N Borra el contenido de las celdas correspondientes a la columna 1, adivina los elementos de A que pertenecen a la columna 4 de $\mathcal{L}^2_{\log n}$ y escribe en la cinta de trabajo, la palabra:

$$x_{41}x_{42}\ldots x_{4\lfloor \log n\rfloor}\#x_{21}x_{22}\ldots x_{2\lfloor \log n\rfloor}\#x_{31}x_{32}\ldots x_{3\lfloor \log n\rfloor}$$

donde $x_{4j}=1$ si $v_{4j}\in A$ y es igual a cero en caso contrario.

ii) M_N verifica que para todo $v_{3j}\in A$, en la tercera columna de $\mathcal{L}^2_{\log n}$, se tiene que $deg_A(v_{3j}) > f(v_{3j})$, para ello, se compara $f(v_{3j})$ con el número de vecinos de v_{3j} en A, tales vecinos corresponden a las celdas en las posiciones j, $\lfloor \log n\rfloor + j$, $2\lfloor \log n\rfloor + j$ y $2\lfloor \log n\rfloor + j + 2$ en la cinta de trabajo. Por lo tanto, si en la correspondientes celdas hay un 1 significa que el respectivo vecino pertenece a A, de lo contrario no.

La computación de la máquina M_N continua de esta manera. En cada instante de la computación se tienen escritas, en la cinta de trabajo, descripciones de la intersección de A con tres columnas consecutivas de la grilla. Dada una de estas configuraciones, se verifica que todos los vértices que pertenecen a la intersección de A con la columna de en medio, satisfacen la desigualdad respectiva. ■

El teorema anterior no prueba que $SPP[\mathcal{L}_2]$ pertenezca a NL, el teorema anterior ni siquiera prueba que $RR[\mathcal{L}_2]$ pertenezca a NL, aún así, se puede considerar que el teorema anterior proporciona evidencia respecto a que el problema $SPP[\mathcal{L}_2]$ es fácil (está en NL). Es importante recalcar que el teorema anterior está lejos de ser trivial: la dinámica del modelo abeliano pilas de arena sobre las grillas de altura logarítmica es una dinámica compleja que estamos aun muy lejos de entender a cabalidad.

Para terminar este capítulo es preciso señalar que existen otros trabajos en los que se estudia la complejidad de $SPP[\mathcal{L}_2]$ y problemas relacionados.

Así por ejemplo, Schulz en [19] define el siguiente problema y prueba que es *NP-completo*.

Problema 12 (*DIST, Distancia al conjunto de configuraciones críticas*)**.**

- *Input:* (f, k)*, donde* f *es una configuración sobre* $\mathcal{L}_2^n$ *y* $k \in \mathbb{N}$*.*
- *Problema: Decida si existe* $g \in C(\mathcal{L}_n^2)$*, tal que* $\|g\| = k$ *y* $f \oplus g$ *es crítica.*

El problema anterior consiste básicamente en determinar el mínimo número de granos de arena que se deben adicionar a una configuración definida sobre una grilla bidimensional, para que ésta sea crítica. Por lo tanto, el problema $DIST$ está estrechamente relacionado a $RR[\mathcal{L}_2]$ y de esta manera, el resultado de Schulz, afirmando que dicho problema es *NP-completo*, sugiere que el problema $RR[\mathcal{L}_2]$ es difícil (¿*P-completo*?).

CAPÍTULO 5

Pilas de arena sobre grillas tridimensionales

En este capítulo se estudia la complejidad computacional de los problemas algorítmicos asociados al modelo abeliano pilas de arena en dimensión 3. Para empezar se mostrará como es posible adaptar las construcciones de Moore a grillas de dimensión 3 y obtener mejores resultados. En una segunda subsección se mencionan algunos aspectos relacionados con la dureza relativa de los problemas algorítmicos, mostrando que GC es el núcleo de complejidad de los problemas algorítmicos asociados al modelo pilas de arena sobre grillas tridimensionales.

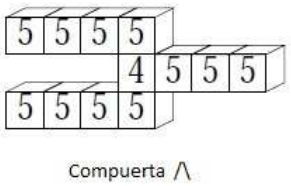
5.1. El problema de predicción en 3D

Dado $n \geq 1$, el símbolo $\mathcal{G}_n^3$ denotará la grilla tridimensional de orden n, cuyo conjunto de vértices es igual a $[n] \times [n] \times [n]$, donde $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. El símbolo $\mathcal{L}_n^3$ denotará la *grilla de arena tridimensional* de orden n, la cual es obtenida a partir de $\mathcal{G}_n^3$ agregando un vértice especial s, *el sumidero*.

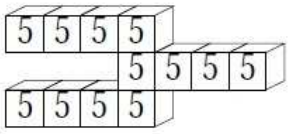
Además, dado un vértice v en el borde de $\mathcal{L}_n^3$ existirán $6 - deg_{\mathcal{G}_n^3}(v)$ aristas en $\mathcal{L}_n^3$ conectando v con s. Note que si $v \in V(\mathcal{L}_n^3)^*$ se tiene que $deg(v) = 6$. Finalmente, el símbolo $\mathcal{L}_3$ denotará la clase $\{\mathcal{L}_n^3 : n \geq 1\}$.

Teorema 15. *$SPA[\mathcal{L}_3]$ y $RR[\mathcal{L}_3]$ son P-Completos.*

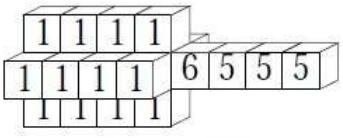
Prueba. A diferencia del caso bidimensional, es posible, sin la restricción a circuitos planos, reducir el problema $MCVP$ a $SPA[\mathcal{L}_3]$ y también a $RR[\mathcal{L}_3]$, los algoritmos son análogos a los de la reducciones de $MCVP[\mathcal{P}]$ a $SPA[\mathcal{L}_2]$ y a $RR[\mathcal{L}_2]$ respectivamente, solo que para estos casos se adiciona un elemento que resuelve el problema del cruce de información. Los elementos básicos de las construcciones en $\mathcal{L}_3$ se ilustran a continuación:



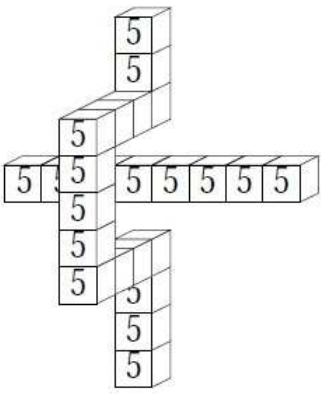
Compuerta $\wedge$



Compuerta $\vee$



Alambre y señal



Un Cruce

Es entonces posible evaluar circuitos en grillas de arena tridimensionales y esto hace que los problemas $SPP[\mathcal{L}_3]$ y a $RR[\mathcal{L}_3]$ sean *P-completos.* ■

5.2. La dureza relativa de los problemas algorítmicos en 3D

En esta sección se continúa estudiando la complejidad computacional de los problemas algorítmicos sobre grillas tridimensionales, pero mostrando la relación existente entre el problema $GC[\mathcal{L}_3]$ y los demás problemas algorítmicos asociados al modelo abeliano pilas de arena que se han estudiado hasta el momento. Es importante aclarar que el análisis de la complejidad en esta sección está basado en la noción de NC-Turing reducibilidad, puesto que los problemas algorítmicos estudiados en este trabajo están en P y porque el interés es conocer la calculabilidad en tiempo poli-logarítmico de dichos problemas.

Lema 4. *$IC[\mathcal{L}_3]$ puede ser resuelto en tiempo constante si se tiene acceso a un oráculo para $GC[\mathcal{L}_3]$.*

Prueba. Sea w_n la configuración maximal sobre $\mathcal{L}_n^3$ y sea $e_{\mathcal{K}(n)}$ la identidad de $\mathcal{K}(\mathcal{L}_n^3)$. Recuerde que en el capítulo 2 se estudió un algoritmo que calcula la identidad del grupo crítico y del cual se pueden deducir las siguientes ecuaciones:

1. $w_n^{-1} = w_n - (w_n \oplus w_n)$.
2. $e_{\mathcal{K}(\mathcal{L}_3)} = w_n \oplus w_n^{-1}$.

Luego, el cálculo de la identidad se puede hacer en tiempo constante, si se tiene acceso a un oráculo para $GC[\mathcal{L}_3]$. ■

Lema 5. *La inversa de una configuración crítica puede ser calculada en tiempo $\mathcal{O}\big(\log(n)\big)$ si se tiene acceso a un oráculo para $GC[\mathcal{L}_3]$.*

Prueba. Dado $v \in V(\mathcal{L}_n^3)^*$, se define sobre $\mathcal{L}_n^3$ la configuración $w_v = w_n - e_v$, la cual es crítica en virtud del *Teorema de Dhar*. Ahora, sea $f \in \mathcal{K}(\mathcal{L}_n^3)$ se tiene que:

$$f^{-1} = \left(\bigoplus_{v \in V(\mathcal{L}_n^3)^*} f(v) w_v \right) \oplus \left(\underbrace{w_n^{-1} \oplus \ldots \oplus w_n^{-1}}_{\|f\| \, veces} \right).$$

Note que la expresión de la derecha de la ecuación puede ser calculada en tiempo $\mathcal{O}\big(\log(n)\big)$ usando un número polinomial de procesadores si se tiene acceso a un oráculo para $GC[\mathcal{L}_3]$. ■

Teorema 16 (*La dureza relativa de los problemas de predicción*)**.**

i) $SPP[\mathcal{L}_3]$ *y* $CSV[\mathcal{L}_3]$ *son* NC^2*-Turing equivalentes.*

ii) $SPP[\mathcal{L}_3]$ *es* NC^2*-Turing reducible a* $MC[\mathcal{L}_3]$*.*

iii) $MC^*[\mathcal{L}_3]$ *puede ser resuelto en tiempo* $\mathcal{O}(\log^2 n)$ *si se tiene acceso a un oráculo para* $EC[\mathcal{L}_3]$ *y* $GC[\mathcal{L}_3]$*.*

iv) $EC[\mathcal{L}_3]$ *es NC-Turing reducible a* $GC[\mathcal{L}_3]$*.*

v) $RR[\mathcal{L}_3]$ *es NC-Turing reducible a* $GC[\mathcal{L}_3]$*.*

Prueba. i) Sea $n \geq 1$. Recuerde que para cualquier configuración f sobre $\mathcal{L}_n^3$ se tiene que:

$$st_{\mathcal{L}_n^3}(f) = f + L(\mathcal{L}_n^3)^T SC_f,$$

esta ecuación permite calcular $st_{\mathcal{L}_n^3}(f)$ en tiempo $\mathcal{O}(\log^2 n)$ si se tiene acceso a un oráculo para $CSV[\mathcal{L}_3]$. Por lo tanto, $SPP[\mathcal{L}_3]$ es Turing reducible a $CSV[\mathcal{L}_3]$. Ahora, si se tiene acceso a un oráculo para $SPP[\mathcal{L}_3]$ entonces la ecuación matricial:

$$st_{\mathcal{L}_n^3}(f) - f = L(\mathcal{L}_n^3)^T X$$

se puede resolver en tiempo $\mathcal{O}(\log^2 n)$ y su solución es SC_f, esto implica que $CSV[\mathcal{L}_3]$ es Turing reducible a $SPP[\mathcal{L}_3]$ y así $SPP[\mathcal{L}_3]$ y $CSV[\mathcal{L}_3]$ son NC^2-Turing equivalentes.

ii) Dadas (n, f, g) una instancia de $MC[\mathcal{L}_3]$, resolver MC para esta entrada, se reduce a resolver $SPP[\mathcal{L}_3]$ con la entrada $(n, f + g)$.

iii) Sea (n, f, g) una entrada de $MC^*[\mathcal{L}_3]$. Observe que:

$$f \oplus g = f \oplus g \oplus \underbrace{e_{\mathcal{K}(n)} \oplus \ldots \oplus e_{\mathcal{K}(n)}}_{\|g\| - veces}$$

Además, g se puede expresar como $\sum_{v \in V(\mathcal{L}_3^n)^*} g(v)e_v$. Por lo tanto:

$$f \oplus g = f \oplus \left(\bigoplus_{v \in V(\mathcal{L}_3^n)^*} g(v) e_{\mathcal{L}_3^n}(v) \right)$$

Así, se pueden usar n^3 procesadores para calcular $\{g(v)e_{\mathcal{L}_3^n}(v)\}_{v \in V(\mathcal{L}_3^n)^*}$, en tiempo $\mathcal{O}\big(\log^2(n + \|g\|)\big)$ con acceso a un oráculo para $EC[\mathcal{L}_3]$. Finalmente, se pueden utilizar los mismo n^3 procesadores para calcular el lado derecho de la ecuación anterior, en tiempo $\mathcal{O}\big(\log^2(n+\|f\|+\|g\|)\big)$, si se tiene acceso a un oráculo para $GC[\mathcal{L}_3]$.

iv) Se puede observar que:

$$e_{\mathcal{L}_3^n}(v) = e_v \oplus e_{\mathcal{K}(n)} = e_v \oplus (w_v \oplus w_v^{-1}) = w_n \oplus w_v^{-1}$$

Por lo tanto, para calcular $e_{\mathcal{L}_3^n}(v)$ basta con calcular w_v^{-1}, que al igual que la configuración maximal w_n es crítica, esto puede hacerse en tiempo $\mathcal{O}(\log(n))$, si se tiene acceso a un oráculo para $GC[\mathcal{L}_3]$. Luego, es posible resolver $EC[\mathcal{L}_3]$ en tiempo $\mathcal{O}(\log(n))$ si se tiene un oráculo para $GC[\mathcal{L}_3]$.

v) Recuerde que f es crítica si y sólo si $f \oplus e_{\delta(\mathcal{L}_3^n)} = f$. Se tiene entonces que $RR[\mathcal{L}_3]$ es *NC-Turing reducible* a $MC^*[\mathcal{L}_3]$, pero ya se probó que $MC^*[\mathcal{L}_3]$ es reducible a $GC[\mathcal{L}_3]$. ■

Corolario 4. *$GC[\mathcal{L}_3]$ y $SPP[\mathcal{L}_3]$ son NC-Turing equivalentes.*

Prueba. Por el teorema anterior se tiene que $GC[\mathcal{L}_3]$ es *P-completo*. Como se mencionó al comienzo del capítulo $SPP[\mathcal{L}_3]$ es *P-completo*. Esto significa que $GC[\mathcal{L}_3]$ y $RR[\mathcal{L}_3]$ son *NC-Turing equivalentes*. ■

Como se ha visto, el problema $GC[\mathcal{L}_3]$ es uno de los problemas más importantes asociados al modelo abeliano pilas de arena y esto se debe en gran parte a que el problema involucra los elementos que caracterizan al modelo, como modelo de auto-organización crítica, puesto que el conjunto de configuraciones críticas se puede ver como un estado estacionario en la dinámica del modelo (toda configuración crítica es accesible desde cualquier otra configuración y $\mathcal{K}(G)$ es un ideal). Por otro lado $GC[\mathcal{L}_3]$ presenta interesantes características cuando se le estudia desde el punto de vista de la complejidad en el caso promedio (*Average-case Analysis*), el lector interesado puede consultar [10].

Bibliografía

[1] Per Bak, Chao Tang and Kurt Wiesenfeld. *Self-Organized Criticality: An Explanation of* $1/f$ *Noise. Physical Review Letters* **59** (1987), 381-384.

[2] Per Bak, Chao Tang and Kurt Wiesenfeld. *Self-Organized Criticality: An Explanation of* $1/f$ *Noise. Physical Review Letters A* **38** (1988), 364-374.

[3] Deepak Dhar. *Self-Organized Critical State of Sandpile Automaton Models. Physical Review Letters* **64** (1990), 1613-1616.

[4] Deepak Dhar. *The Abelian Sandpile Model and Related Models. Physica A*, 263: 4-25, 1999.

[5] Babai László. *The Abelian Sandpile Model.* Manuscrito, disponible en *http://people.cs.uchicago.edu/ laci/REU05/* .

[6] Bjorner A. and Lovasz L. *Chip Firing Games on Directed Graphs.* European J. Combinatorics. 12(4): 305-328, 1992.

[7] Tardos Gabor. *Polynomial bound for a chip firing game on graphs.* SIAM J. Discrete Mathematics 1, 397-398, 1988.

[8] Mejía C. and Montoya A. *The Complexity of Three-Dimensional Critical Avalanches*. LNCS 6350: 153-162 2010.

[9] Mejía C. and Montoya A. *On the complexity of sandpile prediction problem*. Electronic Notes in Theoretical Computer Science. 252: 229-245. 2009.

[10] Mejía C. and Montoya A. *On the Complexity of Sandpile Critical Avalanches*. Theoretical Computer Science. 412: 3964-3974. 2011.

[11] Mejia Carolina. *Pilas de Arena Sobre Grafos Dirigidos y Algo de Complejidad*. Revista Integración. Vol 24-2: 101-105, 2006.

[12] Miltersen P. *The Computational Complexity of One-dimensional Sandpiles*. *Theory of Computing Systems*. 41(1):119-125, 2007.

[13] Gajardo A. and Goles E. *Crossing information in two dimensional Sandpiles*. Theor. Comput. Sci., vol 369(1-3), pp 463-469 (2006).

[14] I. Sudborough. *On the tape complexity of deterministic context-free languages*. Journal of the Association for Computing Machinery, 25:405-414, 1978.

[15] J. Hastad. *Computational Limitations of Small-Depth Circuits*. ACM doctoral dissertation award 1986. MIT Press, 1987.

[16] Speer Eugene. *Asymmetric Abelian Sandpiles Models*. Journal of Statistical Physics. Springer Netherlands. Vol. 71, Numbers 1-2: 61-74. 1993.

[17] Moore C. and Nilsson M. *The Computational Complexity of Sandpiles*. Journal of Statistical Physics. Springer Netherlands. Vol. 96, Numbers 1-2: 205-224. 1999.

[18] Schulz Mathias. *A NP-Complete Problem for the Abelian Sandpile Model*. http://www.wolframscience.com/conference/2006/presentations/materials/schulz-complex_systems-17-1-2.pdf.

[19] *Schulz Mathias. How far is it to the next recurrent configuartion? An NP-Complete Problem for the Abelian Sandpile Model*. Parallel Processing Letters, Vol. 19, No. 2 (2009)265-281.

[20] Guglielmo Paoletti. *Abelian Sandpile Models and Sampling of Trees and Forests*. Universitá degli Studi di Milano. Tesi di laurea. 2007.

[21] Tutte, W. T. *Graph Theory*. Cambridge University Press, p. 138, 2001.

[22] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer-Verlag. 2005. Disponible en http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/

[23] Olle Häggström. *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*. London Mathematical Society. Students Texts 52. 2002.