

CONDICIONES PARA LA REPRESENTACIÓN AXIOMÁTICA
DE CLASES DE ESTRUCTURAS, EN VARIOS CONTEXTOS.

PEDRO HERNÁN ZAMBRANO RAMÍREZ

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
JUNIO DE 2.002

Agradecimientos

En primer lugar, doy gracias a Dios por haberme permitido culminar mis estudios de pregrado satisfactoriamente.

Agradezco a mis papás y a mis hermanos Daniel, Liliana y David, por haberme soportado en estos últimos cinco años, ya que muchas veces me privé de momentos especiales con ellos. Además doy gracias a mis papás por haberme introducido desde pequeño en este mundo tan fascinante de las matemáticas. Quiero agradecer a doña Amalia Torres, por haberme “aguantado” como monitor de la biblioteca durante un buen tiempo; a mis compañeros de la carrera de Matemáticas con los que compartí estos últimos cinco años, en especial al “grupito” de mi semestre; y al Colegio Nacionalizado Braulio González, donde realicé parte de mis estudios de secundaria.

Agradezco al profesor Xavier Caicedo, por sus aportes valiosos en este trabajo; a Javier Moreno, por haber leído algunos borradores de este trabajo y haberme sugerido incluir algunos resultados complementarios; al profesor Andrés Montoya, por haber aceptado la tediosa labor de dirigir este trabajo; a los profesores Myriam Acevedo, Lorenzo Acosta y Gustavo Rubiano, por haber sido unos excelentes profesores que tuve en la carrera; al profesor Rodrigo De Castro, quien me dictó el primer curso de Lógica que tomé en la carrera (el cual influyó en la decisión de seguir por esta línea); al profesor Jesús Hernando Pérez, por haberme aceptado en su grupo de Lógica durante algo más de un año y al profesor Andrés Villaveces, por sus excelentes cursos de Teoría de Modelos que tuve el privilegio de tomar.

Adicionalmente, sería injusto no agradecerle a los demás profesores de la Universidad Nacional de Colombia que contribuyeron a mi formación en este centro educativo.

A mis papás,
Teresa y Ricardo

y a Casanare,
tierra que me ha dado tanto

Índice General

Introducción	v
1 Representación en Álgebra Universal	1
1.1 Definición de álgebra.	1
1.2 Teorema de Birkhoff	6
1.2.1 Esquema de la prueba	6
1.2.2 Prueba	7
1.3 Otros teoremas similares.	13
2 Caracterización de Clases Elementales	17
2.1 Construcción de ultraproductos.	17
2.2 Caracterización de las clases elementales	26
2.2.1 Esquema de la prueba	26
2.2.2 Prueba	27
2.3 Otros teoremas similares.	28
3 Un teorema de Shelah	38
3.1 Definiciones preliminares	38
3.2 Demostración del teorema.	41
4 Una mirada categórica.	46
4.1 Definiciones preliminares.	46
4.2 Grafos	50
4.3 Los croquis como manera de axiomatización.	53
4.4 La lógica multisortada.	56
4.5 Representación en categorías.	63
5 Algunas regularidades encontradas	68

Introducción

Es interesante en Teoría de Modelos, preguntarnos sobre condiciones que debe cumplir una clase de estructuras en una cierta lógica para que sea axiomatizable (es decir, que exista una teoría T en dicha lógica, para la cual la clase sea exactamente la clase de estructuras que validen T , según la noción de semántica considerada).

En este trabajo, se pretende dar una respuesta parcial a esta pregunta, estudiando algunos casos particulares que han sido considerados hasta el momento.

El primer teorema en este sentido del que se tuvo conocimiento, es un resultado debido a Birkhoff en el contexto del Álgebra Universal, el cual caracteriza las clases ecuacionales mediante la cerradura bajo ciertas construcciones algebraicas. Este hecho curioso llevó a estudiar casos similares en contextos distintos, llegándose a resultados muy similares como por ejemplo un resultado de Keisler que caracteriza las clases elementales en primer orden como aquellas clases cerradas para ultraproductos, ultraraíces e isomorfismos.

Aunque varios de los resultados estudiados corresponden a caracterizaciones, nos interesa estudiar en particular una de esas direcciones: ver bajo qué condiciones una clase de estructuras puede ser axiomatizable. Resultados de este último tipo hay varios, entre ellos el teorema de Shelah, que dice que una clase elemental abstracta es una clase proyectiva con omite una cierta colección de tipos.

En el primer capítulo, estudiamos el teorema de Birkhoff que caracteriza a las clases de álgebras ecuacionales (es decir, aquellas que son exactamente la clase de todas las álgebras que satisfacen un conjunto de igualdades entre términos) como aquellas clases cerradas bajo subálgebras, imágenes homomorfas y productos directos. La prueba de este hecho presenta una

construcción genérica que “codifica” la noción de verdad en este contexto: el álgebra libre asociado a una clase de álgebras $\mathcal{K}$ y a un conjunto de variables X . Lo que queremos decir con la frase anterior, es que una identidad (igualdad ente términos) con variables en X es satisfecha en dicha álgebra, si y solo si, es satisfecha en la clase $\mathcal{K}$. Aquí, la teoría considerada dentro de esta prueba es el conjunto de identidades que son satisfechas en cada álgebra de la clase considerada.

En el segundo capítulo, estudiamos un resultado debido a Keisler que caracteriza a las clases elementales en primer orden (es decir, aquellas clases cuyos miembros son exactamente todos los modelos de una teoría, en primer orden) como aquellas clases que son cerradas bajo ultraproductos, ultraraíces e imágenes isomorfas. En la demostración están involucrados dos resultados importantes: el teorema de Loš, que caracteriza la validez de una sentencia en un ultraproducto utilizando el ultrafiltro usado en la construcción del ultraproducto (el cual lleva a una primera caracterización semi-algebraica de las clases elementales) y el teorema de Keisler-Shelah, que codifica la noción de equivalencia elemental mediante la isomorfía entre ciertas ultrapotencias. La teoría considerada dentro de la prueba de Keisler es el conjunto de sentencias en primer orden, que son satisfechas por cada una de las estructuras de la clase.

En el tercer capítulo, estudiamos un teorema debido a Shelah, el cual muestra que una clase elemental abstracta (o CEA) es una clase proyectiva con omisión de tipos (o clase PC). Las condiciones pedidas para que una clase de estructuras sea una clase elemental abstracta forman una manera de axiomatizar algunas de las cerraduras que presentan las clases elementales (por ejemplo, las cerraduras que presentan bajo subestructuras elementales, imágenes isomorfas y uniones de cadenas elementales), además de axiomatizar la existencia de subestructuras elementales de cualquier estructura de la clase, cuyo cardinal está acotado por un cardinal fijo (cuya existencia está también axiomatizada). En este caso, el lema de skolemización permite encontrar una extensión del lenguaje asociado a una CEA, tal que para cada estructura de la clase existe una expansión que cumple una serie de propiedades, que ayudan a armar una colección de tipos sobre dicha colección que es omitida por dichas expansiones, y de manera que si una estructura omite dicha colección de tipos, entonces la reducción al lenguaje de la CEA está en la CEA. La omisión de tipos puede ser vista como una manera de axiomatización,

ya que una estructura omite un tipo p , si y solo si, satisface la sentencia infinitaria $\forall \bar{x} \bigvee_{\varphi(\bar{x}) \in p} \neg \varphi(\bar{x})$, por tanto la omisión de una colección de tipos Γ puede ser visto como la satisfacción de la sentencia $\bigwedge_{p \in \Gamma} \forall \bar{x} \bigvee_{\varphi(\bar{x}) \in p} \neg \varphi(\bar{x})$. Sin embargo, este resultado tiene una diferencia sutil respecto a los vistos con anterioridad, puesto que las estructuras de la CEA no son las que omiten la colección de tipos que considera Shelah en su resultado, si no que las omiten expansiones de dichas estructuras.

En el cuarto capítulo, resaltamos un resultado en Teoría de Categorías que muestra que las categorías accesibles (que dentro de su definición pedimos la cerradura bajo co-límites κ -dirigidos, para algún κ cardinal regular infinito) son exactamente las categorías equivalentes a la categoría de modelos de una teoría básica infinitaria sobre un lenguaje particular en la lógica multisorteadas. En este contexto, los croquis están codificando la noción de verdad en la lógica multisorteadas, ya que a partir de un croquis se puede encontrar una sentencia básica infinitaria (en el lenguaje asociado al croquis) donde los modelos del croquis son los mismos modelos de la sentencia, y a partir de una sentencia básica infinitaria se puede encontrar un croquis donde las categorías de los modelos del croquis y de los modelos de la sentencia son equivalentes.

La justificación de haber elegido este orden en la presentación del trabajo es la siguiente: una CEA vista como una categoría, resulta ser una categoría accesible, una clase elemental es un ejemplo particular de CEA (ya que esta última pretende axiomatizar algunas de las cerraduras que la primera presenta) y una clase ecuacional es un tipo particular de clase elemental (puesto que la satisfacción de la identidad $p(\bar{x}) \approx q(\bar{x})$ es exactamente la satisfacción de la sentencia $\forall \bar{x} (p(\bar{x}) = q(\bar{x}))$).

De esta manera, la presentación de estos resultados está hecha de manera que cada uno de los resultados de los tres primeros capítulos es un caso particular del resultado estudiado en el capítulo inmediatamente posterior, teniéndose que el teorema en el contexto categórico es el resultado más general considerado dentro del presente trabajo.

Capítulo 1

Representación en Álgebra Universal

Históricamente, el primer resultado conocido que menciona condiciones necesarias y suficientes para que ciertas clases de estructuras fueran axiomáticas fue en el contexto del Álgebra Universal.

Por este motivo, para dar un sabor histórico al trabajo, se presenta en este capítulo introductorio un teorema debido a Birkhoff que presenta condiciones necesarias y suficientes para que una clase de álgebras sea axiomática.

El teorema de Birkhoff asegura que una clase de álgebras es ecuacional (es decir, está representada por una teoría en el lenguaje del álgebra) si y solo si es una variedad (en este capítulo introducimos esta noción, pero lo más relevante por ahora es el hecho de que se refiere a que la clase sea cerrada bajo ciertas construcciones).

1.1 Definición de álgebra.

En esta parte del capítulo, presentaremos brevemente algunas nociones básicas que se necesitan para poder entender el teorema de Birkhoff.

Definición 1.1.1. Un **lenguaje de álgebras** es un conjunto $\mathfrak{F}$ de símbolos de función, donde a cada $f \in \mathfrak{F}$ se le asocia un número natural $a(f)$, el cual se llamará **aridad de f** .

Se define $\mathfrak{F}_n := \{f \in \mathfrak{F} \mid a(f) = n\}$

Definición 1.1.2. Sea $\mathfrak{F}$ un lenguaje de álgebras, y A un conjunto no vacío. Se denomina **álgebra** (ó $\mathfrak{F}$ -álgebra) a la tupla $\mathfrak{A} := \langle A, \mathfrak{F} \rangle$, donde a cada

$f \in \mathfrak{F}$ se le asocia una función $f^{\mathfrak{A}} : A^{a(f)} \rightarrow A$, la cual se denominará **operación en A**. El conjunto A es denominado **universo** del álgebra $\mathfrak{A}$. Es usual notar con $|\mathfrak{A}|$ al universo de $\mathfrak{A}$. Puesto que $A^0 = \{\emptyset\}$, la interpretación de un símbolo de función de aridad 0 es una función constante. Por esta razón, podemos tomar como una constante en A , la interpretación de un símbolo de función de aridad 0.

Definición 1.1.3. Sea $\mathfrak{F}$ un lenguaje de álgebras y X un conjunto de variables. Una **identidad** de tipo $\mathfrak{F}$ sobre X es una expresión de la forma $p \approx q$ donde p y q son términos cuyas variables están en X . Al conjunto de las identidades de tipo $\mathfrak{F}$ sobre X se denotará por $Id(X)$ (no se hace explícito el lenguaje salvo que sea necesario).

Definición 1.1.4. Sea $\mathfrak{F}$ un lenguaje de álgebras. Se dice que un $\mathfrak{F}$ -álgebra $\mathfrak{A} = \langle A, \mathfrak{F} \rangle$ **satisface la identidad** $p(x_1, \dots, x_n) \approx q(x_1, \dots, x_n)$ si y solo si dados $a_1, \dots, a_n \in A$, se tiene que $p^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = q^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)$. Este hecho, se denota por $\mathfrak{A} \models p \approx q$.

Se dice que una clase de $\mathfrak{F}$ -álgebras $\mathcal{K}$ satisface $p \approx q$ si y solo si $\mathfrak{A} \models p \approx q$ para todo $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$.

Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\mathfrak{F}$ -álgebras y Σ un conjunto de identidades. Se dice que $\mathcal{K}$ satisface Σ (lo que se notará por $\mathcal{K} \models \Sigma$) si y solo si $\mathcal{K} \models \varphi$ para toda identidad $\varphi \in \Sigma$. Se denota por $Id_{\mathcal{K}}(X)$ al conjunto de identidades de tipo $\mathfrak{F}$ sobre X que son satisfechas en $\mathcal{K}$.

Ahora, ilustraremos la noción de álgebra con unos ejemplos bien conocidos.

Ejemplo 1.1.5. Siendo $\mathfrak{F} := \{\cdot, ^{-1}, e\}$ un lenguaje de álgebra con $a(\cdot) = 2$, $a(^{-1}) = 1$ y $a(e) = 0$. Un **grupo** $\mathfrak{G} := \langle G, \cdot, ^{-1}, e \rangle$ es un $\mathfrak{F}$ -álgebra que satisface las siguientes identidades

- (i) $x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$
- (ii) $x \cdot e \approx e \cdot x \approx x$
- (iii) $x \cdot (x)^{-1} \approx (x)^{-1} \cdot x \approx e$

Si adicionalmente $\mathfrak{G}$ satisface:

- (iv) $x \cdot y \approx y \cdot x$

se dice que el grupo es **abeliano**

Ejemplo 1.1.6. Siendo $\mathfrak{F} := \{+, \cdot, -, 0\}$ un lenguaje de álgebra con $a(+) = a(\cdot) = 2$, $a(-) = 1$ y $a(0) = 0$. Un **anillo** $\mathfrak{R} := \langle R, +, \cdot, -, 0 \rangle$ es un $\mathfrak{F}$ -álgebra tal que:

- (i) $\langle R, +, -, 0 \rangle$ es un grupo abeliano
- (ii) $\langle R, \cdot \rangle$ es asociativo ($\mathfrak{R}$ satisface la identidad $x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$).
- (iii) $\mathfrak{R}$ satisface las identidades $x \cdot (y + z) \approx x \cdot y + x \cdot z$ y $(x + y) \cdot z \approx x \cdot z + y \cdot z$

A continuación, ilustraremos con otro ejemplo la noción de álgebra, el cual va a ser importante dentro del desarrollo del presente capítulo, ya que va a codificar las identidades (igualdades entre términos) que son satisfechas en una clase de álgebras.

Ejemplo 1.1.7. Dados $\mathfrak{F}$ un lenguaje de álgebras y X conjunto de variables, se define $T(X)$ (el conjunto de términos con variables en X) como el conjunto mas pequeño que tiene a $X \cup \mathfrak{F}_0$ y tal que si $p_1, \dots, p_n \in T(X)$ y $f \in \mathfrak{F}_n$ ($n < \omega$), entonces $f(p_1, \dots, p_n) \in T(X)$.

Se define el **álgebra de términos** del lenguaje $\mathfrak{F}$ con variables en X , como la estructura $\mathbf{T}(X) := \langle T(X), \mathfrak{F} \rangle$, donde a cada $f \in \mathfrak{F}_n$ ($n < \omega$) se le asocia la función

$$\begin{aligned} f^{\mathbf{T}(X)} : T(X)^n &\rightarrow T(X) \\ (p_1, \dots, p_n) &\mapsto f(p_1, \dots, p_n) \end{aligned}$$

Para introducir otro ejemplo de álgebra que nos va a servir más adelante, son necesarias las siguientes definiciones.

Definición 1.1.8. Sea $\mathfrak{A} := \langle A, \mathfrak{F} \rangle$ una $\mathfrak{F}$ -álgebra. Se dice que θ es una **congruencia** de $\mathfrak{A}$ si y solo si es una relación de equivalencia sobre A , tal que dados $f \in \mathfrak{F}_n$ y $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$ donde $a_i \theta b_i$ ($1 \leq i \leq n$), se tiene que $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \theta f^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_n)$.

Dada $a \in A$, se notará su clase de equivalencia como $\frac{a}{\theta}$.

A la colección de congruencias de $\mathfrak{A}$ se le denotará por $Con(\mathfrak{A})$.

Proposición 1.1.1. Sea $\Theta = \{\theta_i\}_{i \in I}$ una colección de congruencias sobre un $\mathfrak{F}$ -álgebra $\mathfrak{A}$. Se tiene que $\Lambda = \bigcap \Theta$ es una congruencia de $\mathfrak{A}$.

Demostración. Primero, veamos que Λ es relación de equivalencia:

1. Sea $a \in |\mathfrak{A}|$. Puesto que cada θ_i es relación de equivalencia, se tiene que $(a, a) \in \theta_i$ para todo $i \in I$.
2. Sea $(a, b) \in \Lambda$, luego $(a, b) \in \theta_i$ para todo $i \in I$. Puesto que cada θ_i es de equivalencia, entonces $(b, a) \in \theta_i$ para cada $i \in I$.
3. Sean $(a, b), (b, c) \in \Lambda$. Luego $(a, b), (b, c) \in \theta_i$ para todo $i \in I$. Como cada θ_i es de equivalencia, entonces $(a, c) \in \theta_i$ para todo $i \in I$.

Por lo tanto, Λ es relación de equivalencia sobre $|\mathfrak{A}|$.

Sean $f \in \mathfrak{F}_n$, $a_j, b_j \in |\mathfrak{A}|$ ($j \in \{1, \dots, n\}$) tales que $a_j \Lambda b_j$, luego $a_j \theta_i b_j$ para cada $i \in I$. De esto, y como cada θ_i es congruencia, se tiene que $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \theta_i f^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_n)$ para cada $i \in I$, luego $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Lambda f^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_n)$. $\square$

Definición 1.1.9. Sea $\mathfrak{A} := \langle A, \mathfrak{F} \rangle$ una $\mathfrak{F}$ -álgebra y θ una congruencia de $\mathfrak{A}$. El **álgebra cociente** se define por $\frac{\mathfrak{A}}{\theta} := \langle \frac{A}{\theta}, \mathfrak{F} \rangle$ donde dado $f \in \mathfrak{F}_n$ se define la operación $f^{\frac{\mathfrak{A}}{\theta}}$ como $f^{\frac{\mathfrak{A}}{\theta}}(\frac{a_1}{\theta}, \dots, \frac{a_n}{\theta}) := \frac{f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)}{\theta}$. (Aquí las operaciones estan bien definidas ya que en la definición de congruencia es esto lo que precisamente se exige).

Hecho 1.1.2. Sean $\mathfrak{A} := \langle A, \mathfrak{F} \rangle$ una $\mathfrak{F}$ -álgebra, θ una congruencia de $\mathfrak{A}$, $p(x_1, \dots, x_n)$ un $\mathfrak{F}$ -término y $a_1, \dots, a_n \in A$. Se tiene que $p^{\frac{\mathfrak{A}}{\theta}}(\frac{a_1}{\theta}, \dots, \frac{a_n}{\theta}) = \frac{p^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)}{\theta}$.

Demostración. Argumento por inducción sobre términos. $\square$

Definición 1.1.10. Sea $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ una familia de álgebras del mismo tipo $\mathfrak{F}$, donde $\mathfrak{A}_i := \langle A_i, \mathfrak{F} \rangle$. Se define el **producto directo** de las álgebras de dicha familia como la estructura $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i := \langle \prod_{i \in I} A_i, \mathfrak{F} \rangle$, donde la interpretación

de $f \in \mathfrak{F}_n$ en esta estructura se define por $f^{\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i}(g_1, \dots, g_n) := g$, tomándose $g : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ como

$$g : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$i \mapsto f^{\mathfrak{A}_i}(g_1(i), \dots, g_n(i))$$

donde $g_1, \dots, g_n \in \prod_{i \in I} A_i$.

Definición 1.1.11. Sean $\mathfrak{A} = \langle A, \mathfrak{F} \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle B, \mathfrak{F} \rangle$ dos álgebras en un lenguaje $\mathfrak{F}$, con $A \subseteq B$. Se dice que $\mathfrak{A}$ es **subálgebra** de $\mathfrak{B}$ (lo cual se denotará como $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$) si y solo si para todo $f \in \mathfrak{F}$ se tiene que $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \upharpoonright A$. Mas aún, si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, puede probarse que $p^{\mathfrak{A}} = p^{\mathfrak{B}} \upharpoonright A$ para cualquier $p \in T(X)$ y X cualquier conjunto de variables.

Definición 1.1.12. Sean $\mathfrak{A} = \langle A, \mathfrak{F} \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle B, \mathfrak{F} \rangle$ dos álgebras en un lenguaje $\mathfrak{F}$. Una función $F : A \rightarrow B$ se dice **homomorfismo** de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$, si y solo si dados $f \in \mathfrak{F}$ y $a_1, \dots, a_n \in A$, $F(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(F(a_1), \dots, F(a_n))$. Si existe $h : A \rightarrow B$ homomorfismo biyectivo, se dice que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son **álgebras isomorfas** (lo cual se notará como $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) y que h es un **isomorfismo**.

Definición 1.1.13. Siendo $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ homomorfismo, se define $\ker(h) := \{(a, b) \in |\mathfrak{A}|^2 \mid h(a) = h(b)\}$.

Definición 1.1.14. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\mathfrak{F}$ -álgebras. Se definen:

1. $I(\mathcal{K}) := \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \text{ para algún } \mathfrak{B} \in \mathcal{K}\}$
2. $S(\mathcal{K}) := \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \text{ para algún } \mathfrak{B} \in \mathcal{K}\}$
3. $H(\mathcal{K}) := \{\mathfrak{A} \mid \text{existe } h \text{ homomorfismo con } \langle \text{dom}(h), \mathfrak{F} \rangle \in \mathcal{K} \text{ e } \text{Im}(h) = |\mathfrak{A}|\}$
4. $P(\mathcal{K}) := \{\mathfrak{A} \mid \text{existen } \mathfrak{B}_i \in \mathcal{K} (i \in I), \text{ donde } \mathfrak{A} = \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i\}$

Un ejemplo de álgebra que va a ser útil dentro de la demostración del teorema de Birkhoff es el Álgebra Libre, el cual veremos a continuación.

Ejemplo 1.1.15 (álgebra libre). Sean $\mathcal{K}$ una clase de $\mathfrak{F}$ -álgebras, y X conjunto de variables. Se definen $\phi_{\mathcal{K}}(X) := \{\phi \in \text{Con}(\mathbf{T}(X)) \mid \frac{\mathbf{T}(X)}{\phi} \in IS(\mathcal{K})\}$, y $\Theta_{\mathcal{K}}(X) := \bigcap \phi_{\mathcal{K}}(X)$.

Se define el **álgebra libre** como $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) := \frac{\mathbf{T}(X)}{\Theta_{\mathcal{K}}(X)}$.

La proposición 1.1.1 garantiza que $\Theta_{\mathcal{K}}(X) \in \text{Con}(\mathbf{T}(X))$.

Dado $t \in T(X)$, se define $\bar{t} := \frac{t}{\Theta_{\mathcal{K}}(X)}$. El hecho 1.1.2 garantiza que $\overline{p^{\mathbf{T}(X)}(x_1, \dots, x_n)} = \overline{p(x_1, \dots, x_n)} = p^{\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X})}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$.

La importancia de este álgebra, radica en el hecho de que ella codifica las identidades que son válidas en la clase $\mathcal{K}$, como veremos más adelante.

Definición 1.1.16. Se dice que una clase $\mathcal{K}$ de $\mathfrak{F}$ -álgebras es una **variedad** si y solo si es cerrada bajo subálgebras, imágenes homomórficas y productos directos.

Definición 1.1.17. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\mathfrak{F}$ -álgebras. Se define $V(\mathcal{K})$ como la intersección de todas las variedades que tienen a $\mathcal{K}$. $V(\mathcal{K})$ se denominará la **variedad generada** por $\mathcal{K}$.

1.2 Teorema de Birkhoff

El teorema que pretendemos estudiar en este capítulo es el siguiente:

Teorema 1.2.1 (Birkhoff). *Una $\mathfrak{F}$ -clase $\mathcal{K}$ es ecuacional si y solo si es una variedad.*

1.2.1 Esquema de la prueba

A continuación, se dará el esquema de la prueba que se hará en este capítulo.

1. Dada $\mathcal{K}$ una clase de $\mathfrak{F}$ -álgebras, se puede afirmar que $V(\mathcal{K}) = HSP(\mathcal{K})$.
2. Se mostrará que $\mathcal{K}$, $I(\mathcal{K})$, $H(\mathcal{K})$, $S(\mathcal{K})$, $P(\mathcal{K})$ y $V(\mathcal{K})$ satisfacen las mismas identidades.
3. Dada $\mathcal{K}$ una clase de $\mathfrak{F}$ -álgebras, se tiene que $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) \in ISP(\mathcal{K})$.
4. Se probará la equivalencia $\mathcal{K} \models p \approx q$ si y solo si $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) \models p \approx q$ si y solo si $\overline{p} = \overline{q}$ en $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X})$ si y solo si $(p, q) \in \Theta_{\mathcal{K}}(X)$, siendo $p \approx q$ identidad en $\mathfrak{F}$.
5. Se observará que para Y conjunto infinito de variables, se tiene que $Id_{\mathcal{K}}(Y) = Id_{\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X})}(Y)$.
6. Se puede ver que toda álgebra es imagen homomorfa del álgebra libre para un conjunto de variables adecuado.
7. Al ser V variedad, siendo X conjunto infinito de variables, se considera $V' := Mod(Id_V(X))$, y se verá que $V = V'$.

8. Si $\mathcal{K}$ es ecuacional, existe Σ conjunto de identidades tales que $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Sigma)$. De los pasos 1 y 2, $V(\mathcal{K}) \models \Sigma$, luego $V(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$, y como $\mathcal{K} \subseteq V(\mathcal{K})$ se tiene que $\mathcal{K}$ es variedad.

Dentro de la presente monografía, detallaremos solo algunos de los pasos anteriores, debido a que varios de ellos requieren resultados previos que al detallarlos extenderían demasiado el capítulo, y nos alejarían de nuestro propósito central.

1.2.2 Prueba

Lema 1.2.2 (Propiedad universal de extensión de funciones). *Para todo lenguaje de álgebras $\mathfrak{F}$ y todo conjunto X de variables, el álgebra de términos $T(X)$ tiene la propiedad universal de extensión de funciones para la clase de todas las $\mathfrak{F}$ -álgebras (es decir, toda función de X a una $\mathfrak{F}$ -álgebra $\mathfrak{A}$ se puede extender a un homomorfismo de $T(X)$ en $\mathfrak{A}$).*

Demostración. Sea $\mathfrak{F}$ un lenguaje de álgebras, X conjunto de variables, $\mathfrak{A} := \langle A, \mathfrak{F} \rangle$ un $\mathfrak{F}$ -álgebra y $T(X)$ el álgebra de términos. Sea $\alpha : X \rightarrow A$ una función.

Se define $\beta : T(X) \rightarrow A$ de la siguiente manera:

Para $x \in X$ se define $\beta(x) := \alpha(x)$

Para $p_1, \dots, p_n \in T(X)$, $f \in \mathfrak{F}_n$ ($n < \omega$) y suponiendo β definida para $p_1, \dots, p_n$, se define $\beta(f(p_1, \dots, p_n)) := f^{\mathfrak{A}}(\beta(p_1), \dots, \beta(p_n))$.

De esta manera, dados $g \in \mathfrak{F}_m$ y $q_1, \dots, q_m \in T(X)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \beta(g^{T(X)}(q_1, \dots, q_m)) &= \beta(g(q_1, \dots, q_m)) \\ &\quad \text{(por la definición del álgebra de términos)} \\ &= g^{\mathfrak{A}}(\beta(q_1), \dots, \beta(q_m)) \\ &\quad \text{(por la construcción de } \beta) \end{aligned}$$

luego evidentemente β es un homomorfismo. □

Lema 1.2.3. *Si $h : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$ es homomorfismo, $p(x_1, \dots, x_n) \in T(X)$ y $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$, entonces $h(p^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = p^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$.*

Demostración. 1. Si $p = x_i$, es evidente que $h(p^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = h(a_i) = p^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$.

2. Si $p = k$ es una constante, $h(p^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = h(k^{\mathfrak{A}}) = k^{\mathfrak{B}}$ (por la definición de homomorfismo) $= p^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$.
3. Si $p \in \mathfrak{F}_n$ ($n > 0$), por la definición de homomorfismo se tiene que $h(p^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = p^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$.
4. Si $p = f(p_1, \dots, p_m)$ (con $f \in \mathfrak{F}_m$ y $p_1, \dots, p_m \in T(X)$) y cada p_i verifica el resultado, se tiene que

$$\begin{aligned}
& h(f^{\mathfrak{A}}(p_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), \dots, p_m^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n))) \\
&= f^{\mathfrak{B}}(h(p_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)), \dots, h(p_m^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n))) \\
&= f^{\mathfrak{B}}(p_1^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)), \dots, p_m^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)))) \\
&= p^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))
\end{aligned}$$

□

A continuación, se demostrará un lema que va a ser fundamental en la demostración del *Teorema de Birkhoff*, ya que es una caracterización de la validez de identidades en una clase de álgebras.

Lema 1.2.4. *Sea $\mathfrak{F}$ un lenguaje de álgebras, X un conjunto no vacío de variables, y $\mathcal{K}$ una clase de $\mathfrak{F}$ -álgebras. Siendo $p \approx q$ una identidad de tipo $\mathfrak{F}$ sobre X , $\mathcal{K} \models p \approx q$ si y solo si para todo $\mathfrak{A} = \langle A, \mathfrak{F} \rangle \in \mathcal{K}$ y todo $\alpha : T(X) \rightarrow A$ homomorfismo se tiene que $\alpha(p) = \alpha(q)$.*

Demostración. Sean $p = p(x_1, \dots, x_n)$, $q = q(x_1, \dots, x_n)$ términos en $T(X)$. Sean $\mathfrak{A} = \langle A, \mathfrak{F} \rangle \in \mathcal{K}$ y $\alpha : T(X) \rightarrow A$ homomorfismo.

Supongamos que $\mathcal{K} \models p \approx q$. Puesto que $\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n) \in A$, y puesto que $\mathcal{K} \models p \approx q$, se tiene por definición de validez de identidades que $p^{\mathfrak{A}}(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) = q^{\mathfrak{A}}(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n))$.

Como α es homomorfismo, se tiene por el lema 1.2.3 que $\alpha(p^{\mathbf{T}(X)}(x_1, \dots, x_n)) = \alpha(q^{\mathbf{T}(X)}(x_1, \dots, x_n))$, y adicionalmente:

$f^{\mathbf{T}(X)}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$, con $f \in \{p, q\}$ (por la definición de las operaciones en $\mathbf{T}(X)$) y por lo tanto se tiene que $\alpha(p) = \alpha(q)$.

Recíprocamente, siendo $a_1, \dots, a_n \in A$, por la *Propiedad universal de extensión de funciones* (lema 1.2.2), existe un homomorfismo $\beta : T(X) \rightarrow A$ tal que $\beta(x_i) = a_i$ ($1 \leq i \leq n$). Pero:

$$\begin{aligned}
p^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) &= p^{\mathfrak{A}}(\beta(x_1), \dots, \beta(x_n)) \\
&= \beta(p^{\mathbf{T}(X)}(x_1, \dots, x_n)) \text{ (por el lema 1.2.3)} \\
&= \beta(p(x_1, \dots, x_n)) \\
&\quad \text{(por la definición de las operaciones en } \mathbf{T}(X))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta(q(x_1, \dots, x_n)) \text{ (por hipótesis)} \\
&= \beta(q^{\mathbf{T}(X)}(x_1, \dots, x_n)) \\
&\quad \text{(por la definición de las operaciones en } \mathbf{T}(X)) \\
&= q^{\mathfrak{A}}(\beta(x_1), \dots, \beta(x_n)) \text{ (por el lema 1.2.3)} \\
&= q^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)
\end{aligned}$$

Por lo anterior, se puede concluir que $\mathfrak{A} \models p \approx q$, luego $\mathcal{K} \models p \approx q$. $\square$

Hecho 1.2.5. Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras. $V(\mathcal{K}) = H(S(P(\mathcal{K}))) = HSP(\mathcal{K})$.

Referencia. [BuSa], teorema 9.5. $\square$

Proposición 1.2.6. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\mathfrak{F}$ -álgebras. Se tiene que $\mathcal{K}$, $I(\mathcal{K})$, $H(\mathcal{K})$, $S(\mathcal{K})$, $P(\mathcal{K})$ y $V(\mathcal{K})$ satisfacen las mismas identidades.

Demostración. Sean X un conjunto no vacío de variables y $p(x_1 \dots, x_n) \approx q(x_1, \dots, x_n)$ una identidad.

Primero, veamos que $\mathcal{K}$ y $H(\mathcal{K})$ satisfacen las mismas identidades:

Puesto que $\mathcal{K} \subseteq H(\mathcal{K})$, entonces $Id_{H(\mathcal{K})}(X) \subseteq Id_{\mathcal{K}}(X)$.

Supongamos que $\mathcal{K} \models p \approx q$ y sea $\mathfrak{B} \in H(\mathcal{K})$. Sean $b_1, \dots, b_n \in |\mathfrak{B}|$. Como $\mathfrak{B} \in H(\mathcal{K})$, existe $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ y h homomorfismo tal que $dom(h) = |\mathfrak{A}|$ y $h(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}$. Siendo $b_1, \dots, b_n \in |\mathfrak{B}|$, se tiene que existen $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ tales que $h(a_i) = b_i$ ($i = 1, \dots, n$). Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
p^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_n) &= p^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)) \\
&= h(p^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) \text{ (por el lema 1.2.3)} \\
&= h(q^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) \text{ (ya que } \mathfrak{A} \models p \approx q) \\
&= q^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)) \text{ (por el lema 1.2.3)} \\
&= q^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_n)
\end{aligned}$$

Luego $\mathfrak{B} \models p \approx q$, y por ser $\mathfrak{B} \in H(\mathcal{K})$ arbitrario se tiene que $H(\mathcal{K}) \models p \approx q$, luego $Id_{\mathcal{K}}(X) \subseteq Id_{H(\mathcal{K})}(X)$, por lo que se concluye que $\boxed{Id_{\mathcal{K}}(X) = Id_{H(\mathcal{K})}(X)}$.

Por otro lado, puesto que $\mathcal{K} \subseteq I(\mathcal{K}) \subseteq H(\mathcal{K})$, se tiene que $Id_{H(\mathcal{K})}(X) \subseteq Id_{I(\mathcal{K})}(X) \subseteq Id_{\mathcal{K}}(X)$. Pero como se había visto que $Id_{H(\mathcal{K})}(X) = Id_{\mathcal{K}}(X)$, se puede concluir que $\boxed{Id_{\mathcal{K}}(X) = Id_{I(\mathcal{K})}(X)}$.

En la siguiente parte, veremos que $\mathcal{K}$ y $S(\mathcal{K})$ satisfacen las mismas identidades. Puesto que $\mathcal{K} \subseteq S(\mathcal{K})$, entonces se tiene que $Id_{S(\mathcal{K})}(X) \subseteq Id_{\mathcal{K}}(X)$.

Suponiendo $\mathcal{K} \models p \approx q$ y siendo $\mathfrak{B} \in S(\mathcal{K})$, existe $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Por lo tanto, siendo $b_1, \dots, b_n \in |\mathfrak{B}|$ y puesto que $p^{\mathfrak{B}} = p^{\mathfrak{A}} \upharpoonright |\mathfrak{B}|$, entonces se tiene que $p^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_n) = q^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_n)$, luego como $\mathfrak{B}$ es arbitrario en $S(\mathcal{K})$, se tiene que $S(\mathcal{K}) \models p \approx q$, luego $\boxed{Id_{\mathcal{K}}(X) = Id_{S(\mathcal{K})}(X)}$.

Por otra parte, se tiene que $Id_{P(\mathcal{K})}(X) = Id_{IP(\mathcal{K})}(X) \subseteq Id_{\mathcal{K}}(X)$ puesto que $\mathcal{K} \subseteq IP(\mathcal{K})$. Siendo $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{K}$, tomando $\mathfrak{A} := \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ y $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$, suponiendo que $\mathcal{K} \models p \approx q$ se tiene que para todo $i \in I$ $p^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i)) = q^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$. Por lo tanto, $p^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)(i) = q^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)(i)$ para todo $i \in I$, por lo que $p^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = q^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)$, concluyéndose que $P(\mathcal{K}) \models p \approx q$. De esto, $\boxed{Id_{\mathcal{K}}(X) = Id_{P(\mathcal{K})}(X)}$.

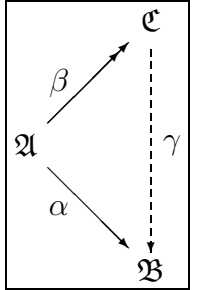
Por último, puesto que $V(\mathcal{K}) = HSP(\mathcal{K})$ (hecho 1.2.5) y de lo anterior, se tiene que $\boxed{Id_{\mathcal{K}}(X) = Id_{V(\mathcal{K})}(X)}$. $\square$

Hecho 1.2.7. Si $\mathcal{K} \neq \emptyset$ es una clase de $\mathfrak{F}$ -álgebras, entonces $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) \in ISP(\mathcal{K})$.

Referencia. [BuSa], teorema 10.12. $\square$

Lema 1.2.8 (AC). Siendo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ $\mathfrak{F}$ -álgebras y $\alpha : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, $\beta : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$ homomorfismos con β sobreyectiva, y además $\ker(\beta) \subseteq \ker(\alpha)$, entonces existe $\gamma : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B}$ homomorfismo tal que $\alpha = \gamma \circ \beta$.

Demostración. Sea $c \in |\mathfrak{C}|$. Puesto que β es sobre, existe $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\beta(a) = c$. Siendo $a' \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\beta(a') = c$, se tiene que $\alpha(a) = \alpha(a')$ puesto que $(a, a') \in \ker(\beta) \subseteq \ker(\alpha)$. Por lo tanto, no hay problemas al definir la función



$$\begin{aligned} \gamma : \mathfrak{C} &\rightarrow \mathfrak{B} \\ c &\mapsto \alpha(a) \text{ para algún } a \in |\mathfrak{A}| \text{ tal que } \beta(a) = c \end{aligned}$$

Se tiene que γ es homomorfismo: Siendo $f \in \mathfrak{F}_n$ y $c_1, \dots, c_n \in |\mathfrak{C}|$, puesto que β es sobre existen $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ tales que $\beta(a_i) = c_i$ ($i \in \{1, \dots, n\}$), y existe $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\beta(a) = f^{\mathfrak{C}}(c_1, \dots, c_n)$. Pero como β es homomorfismo, se tiene que $\beta(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{C}}(c_1, \dots, c_n)$, por lo que $(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), a) \in$

$\ker(\beta) \subseteq \ker(\alpha)$, luego

$$\begin{aligned} \gamma(f^{\mathfrak{C}}(c_1, \dots, c_n)) &= \alpha(a) \\ &= \alpha(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) \\ &= f^{\mathfrak{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \quad (\alpha \text{ es homomorfismo}) \\ &= f^{\mathfrak{B}}(\gamma(c_1), \dots, \gamma(c_n)) \quad (\text{definición de } \gamma) \end{aligned}$$

Por otro lado, sea $a \in |\mathfrak{A}|$. Por lo tanto, $\beta(a) \in |\mathfrak{C}|$. Pero $\gamma(\beta(a)) = \alpha(a)$ por la definición de γ , puesto que a es preimagen de $\beta(a)$ mediante β . Luego se tiene el resultado. $\square$

A continuación se mostrará una equivalencia de la validez de una identidad en una clase, en términos del álgebra libre asociada.

Proposición 1.2.9. *Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\mathfrak{F}$ -álgebras, X un conjunto no vacío de variables y $p \approx q$ una identidad en X . Se tiene que $\mathcal{K} \models p \approx q$ si y solo si $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) \models p \approx q$ si y solo si $\overline{p} = \overline{q}$ en $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X})$ si y solo si $(p, q) \in \Theta_{\mathcal{K}}(X)$.*

Demostración. Sea $v : \mathbf{T}(X) \rightarrow \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X})$ el homomorfismo canónico (es decir, para $p \in T(X)$, $v(p) = \overline{p}$).

Suponiendo que $\mathcal{K} \models p \approx q$, del hecho 1.2.7 y la proposición 1.2.6 es evidente que $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(X) \models p \approx q$.

Suponiendo que $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(X) \models p \approx q$, puesto que $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n} \in \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X})$, en particular se tiene que $p^{\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X})}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) = q^{\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X})}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$, luego se tiene que $\overline{p} = \overline{q}$ en $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X})$.

Suponiendo que $\overline{p} = \overline{q}$ en $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X})$, entonces $v(p) = \overline{p} = \overline{q} = v(q)$, por lo tanto $(p, q) \in \ker(v) \subseteq \Theta_{\mathcal{K}}(X)$ ($\ker(v) \subseteq \Theta_{\mathcal{K}}(X)$ ya que si $(p, q) \in T(X)^2$ es tal que $v(p) = v(q)$, se tiene que $\overline{p} = \overline{q}$ por lo que p y q están relacionados mediante $\Theta_{\mathcal{K}}(X)$).

Sean $(p, q) \in \Theta_{\mathcal{K}}(\overline{X})$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ y $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$. Por la *Propiedad universal de extensión de funciones* (lema 1.2.2), escójase $\alpha : \mathbf{T}(X) \rightarrow \mathfrak{A}$ homomorfismo tal que $\alpha(x_i) = a_i$. Puesto que $\ker(\alpha) \in \phi_{\mathcal{K}}(X)$ (es claro que es relación de equivalencia, y que siendo $d_1, \dots, d_n, e_1, \dots, e_n \in T(X)$ tales que $\alpha(d_i) = \alpha(e_i)$ para $i \in \{1, \dots, n\}$, por ser α homomorfismo se tiene que para $f \in \mathfrak{F}_n$ $\alpha(f^{\mathbf{T}(X)}(d_1, \dots, d_n)) = \alpha(f^{\mathbf{T}(X)}(e_1, \dots, e_n))$, y además:

$$\begin{aligned} h : \frac{\mathbf{T}(X)}{\ker(\alpha)} &\rightarrow \mathfrak{A} \\ \overline{p} &\mapsto \alpha(p) \end{aligned}$$

es un homomorfismo, y no es difícil ver que $\frac{T(X)}{\ker(\alpha)} \in IS(\mathcal{K})$, tenemos entonces que $\ker(\alpha) \supseteq \ker(v) = \Theta_{\mathcal{K}}(\bar{X})$. Por el lema 1.2.8, existe $\beta : \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\bar{X}) \rightarrow \mathfrak{A}$ homomorfismo tal que $\alpha = \beta \circ v$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= \beta(v(p)) \\ &= \beta(\bar{p}) \\ &= \beta(\bar{q}) \text{ (ya que por hipótesis } \bar{p} = \bar{q}) \\ &= \beta(v(q)) \\ &= \alpha(q) \end{aligned}$$

Luego por el lema 1.2.4, $\mathcal{K} \models p \approx q$. □

Corolario 1.2.10 (AC). *Si $\mathcal{K}$ es una clase de $\mathfrak{F}$ -álgebras, X conjunto de variables y $p, q \in T(X)$, para todo conjunto Y de variables con $|Y| \geq |X|$ se tiene que $\mathcal{K} \models p \approx q$ si y solo si $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\bar{Y}) \models p \approx q$.*

Referencia. [BuSa], corolario 11.5. □

Corolario 1.2.11. *Sea $\mathcal{K}$ clase de $\mathfrak{F}$ -álgebras, y X conjunto de variables. Entonces, para todo conjunto infinito de variables Y , $Id_{\mathcal{K}}(X) = Id_{\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\bar{Y})}(X)$.*

Demostración. Siendo $p(x_1, \dots, x_n) \approx q(x_1, \dots, x_n) \in Id_{\mathcal{K}}(X)$, se tiene que $p, q \in T(\{x_1, \dots, x_n\})$. Puesto que $|\{x_1, \dots, x_n\}| < |Y|$, por el corolario 1.2.10 se tiene que $\mathcal{K} \models p \approx q$ si y solo si $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\bar{Y}) \models p \approx q$. De esto, se tiene el resultado. □

Definición 1.2.1. Sea Σ un conjunto de identidades de tipo $\mathfrak{F}$. Se define $Mod(\Sigma) := \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ es } \mathfrak{F}\text{-álgebra y } \mathfrak{A} \models \Sigma\}$.

Se dice que una $\mathfrak{F}$ -clase $\mathcal{K}$ es **ecuacional** si y solo si existe Σ conjunto de identidades tal que $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$. En tal caso, se dice que $\mathcal{K}$ es **axiomatizada** ó **definida** por Σ .

Hecho 1.2.12. *Si $\mathcal{K}$ es una clase de $\mathfrak{F}$ -álgebras y $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, entonces para un conjunto suficientemente grande de variables X , $\mathfrak{A} \in H(\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\bar{X})) := \{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \text{ es } \mathfrak{F}\text{-álgebra y para la cual existe } h : \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\bar{X}) \rightarrow \mathfrak{B} \text{ homomorfismo sobreyectivo}\}$.*

Referencia. [BuSa], teorema 10.11. □

Nos acercamos a la parte final de la demostración del *Teorema de Birkhoff*, que es demostrar que toda variedad es ecuacional.

Lema 1.2.13. Si V es una $\mathfrak{F}$ -variedad y X es un conjunto infinito de variables, entonces $V = \text{Mod}(\text{Id}_V(X))$.

Demostración. Sea $V' := \text{Mod}(\text{Id}_V(X))$. Claramente $V \subseteq V'$.

Por un lado, se tiene que $\text{Id}_V(X) = \text{Id}_{V'}(X)$: En efecto, como $V \subseteq V'$ se tiene que $\text{Id}_{V'}(X) \subseteq \text{Id}_V(X)$ y siendo $p \approx q \in \text{Id}_V(X)$ para $\mathfrak{A} \in V'$ se tiene por definición de V' que $\mathfrak{A} \models p \approx q$, luego $p \approx q \in \text{Id}_{V'}(X)$, teniéndose por lo tanto la igualdad.

Por la proposición 1.2.9, se tiene que $\mathbf{F}_V(\overline{X}) = \mathbf{F}_{V'}(\overline{X})$. Tomando un conjunto infinito Y de variables, por el corolario 1.2.11 se tiene que $\text{Id}_{V'}(Y) = \text{Id}_{\mathbf{F}_{V'}(X)}(Y) = \text{Id}_{\mathbf{F}_V(X)}(Y) = \text{Id}_V(Y)$. De nuevo por la proposición 1.2.9, se tiene que $\Theta_V(Y) = \Theta_{V'}(Y)$. Por lo tanto, $\mathbf{F}_{V'}(\overline{Y}) = \mathbf{F}_V(\overline{Y})$.

Siendo $\mathfrak{A} \in V'$, por el hecho 1.2.12 se tiene que $\mathfrak{A} \in H(\mathbf{F}_{V'}(\overline{Y})) = H(\mathbf{F}_V(\overline{Y}))$, por lo tanto $\mathfrak{A} \in V$ (puesto que por el hecho 1.2.7 $\mathbf{F}_V(\overline{Y}) \in \text{ISP}(V) = V$ y $\mathfrak{A} \in H(V) = V$), luego se tiene que $V = V'$. $\square$

Demostración del teorema de Birkhoff. Supongamos que $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Sigma)$ para algún conjunto no vacío de identidades. Por lo tanto, $V(\mathcal{K}) \models \Sigma$ (por la proposición 1.2.6). Esto implica que $V(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$, y puesto que siempre se tiene que $V(\mathcal{K}) \supseteq \mathcal{K}$, entonces $V(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$, luego $\mathcal{K}$ es una variedad.

La parte recíproca se sigue del lema 1.2.13. $\square$

1.3 Otros teoremas similares.

Existen resultados similares al teorema de Birkhoff en contextos diferentes. A manera de complemento del capítulo, se enunciarán varios de ellos

Definición 1.3.1. Una clase $\mathcal{K}$ cerrada bajo imágenes isomórficas, productos directos y subestructuras, se dice una **cuasivariiedad**.

Definición 1.3.2. Una **fórmula infinitaria de Horn** es una fórmula de la forma $\bigwedge_{i \in I} \varphi_i \rightarrow \psi$, donde I es cualquier conjunto y φ_i, ψ son fórmulas atómicas.

Una clase $\mathcal{K}$ de $\mathfrak{F}$ -álgebras se dice **Horn-definible** si y solo si $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Sigma)$ con Σ un conjunto de fórmulas de Horn sobre $\mathfrak{F}$.

Una **cláusula infinitaria** es una fórmula de la forma $\bigvee_{i \in I} \varphi_i$ donde cada φ_i es una fórmula atómica o es negación de una fórmula atómica.

Una clase $\mathcal{K}$ de $\mathfrak{F}$ -álgebras se dice **cláusula-definible** si y solo si $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Sigma)$

con Σ un conjunto de cláusulas infinitarias sobre $\mathfrak{F}$.

Una clase $\mathcal{K}$ de $\mathfrak{F}$ -álgebras se dice **básica compacta**, si y solo si, para todo lenguaje $\mathfrak{F}_1 \supseteq \mathfrak{F}$ y todo conjunto de $\mathfrak{F}_1$ -fórmulas básicas (atómicas y negación de atómicas) Σ , si todo $\Sigma_0 \in [\Sigma]^{<\omega}$ tiene un modelo $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \upharpoonright \mathfrak{F} \in \mathcal{K}$, entonces Σ tiene un modelo $\mathfrak{B}$ para el cual $\mathfrak{B} \upharpoonright \mathfrak{F} \in \mathcal{K}$.

El resultado que le sigue en generalidad al teorema de Birkhoff, es el siguiente resultado debido a Mal'cev.

Teorema 1.3.1 (Mal'cev). *Una clase de álgebras es Horn-definible en primer orden, si y solo si, es cerrada bajo subálgebras, productos y límites directos*

En lógica infinitaria, es posible pedir menos condiciones para que una clase sea Horn-definible

Teorema 1.3.2 (Cudnovskii (1968)). *Las cuasivarietades son exactamente las clases Horn-definibles.*

Teorema 1.3.3 (Cudnovskii). *Una clase $\mathcal{K}$ de $\mathfrak{F}$ -álgebras es cerrada bajo isomorfismos y subálgebras si y solo si $\mathcal{K}$ es cláusula-definible.*

El siguiente resultado es una caracterización “semi-algebraica” de las clases Horn-definibles en primer orden y de las clases cláusula-definible en primer orden.

Teorema 1.3.4 (McKinsey (1943)). *Si adicionalmente $\mathcal{K}$ es básica compacta, entonces la clase que define a $\mathcal{K}$ es un conjunto de cláusulas finitarias ó de fórmulas de Horn finitarias.*

Hipótesis 1.3.5 (Principio de Vopenka). *Si $\mathcal{K}$ es una clase propia de τ -estructuras (τ un lenguaje) entonces existen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ tales que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.*

Teorema 1.3.6 (E. Fisher (1977)). *El supuesto de que una clase sea definible siempre por un conjunto de cláusulas ó de fórmulas de Horn, es equivalente al principio de Vopenka.*

Entrando en el contexto de las co-álgebras (un concepto similar al de álgebra pero en un contexto categórico) se tiene un resultado muy similar en su enunciado al teorema de Birkhoff, debido a H. Peter Gumm:

Definición 1.3.3. Sea $F : \mathbf{Con} \rightarrow \mathbf{Con}$ un functor (ver definición en el capítulo 4). Una **co-álgebra** de tipo F (ó F -coálgebra) es un par (A, α_A) donde A es un conjunto (que se denominará **conjunto base**) y $\alpha_A : A \rightarrow F(A)$ es una función (que se llamará **co-operación**).

Definición 1.3.4. Sean $\mathcal{A} := (A, \alpha_A)$, $\mathcal{B} := (B, \alpha_B)$ dos F -coálgebras. Un **homomorfismo** de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ es una función $\varphi : A \rightarrow B$ para la cual el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_B \\ F(A) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(B) \end{array}$$

De esta manera, se puede considerar la categoría $\mathbf{Con}_F$ de las co-álgebras de tipo F , considerando como morfismos los homomorfismos entre dichas co-álgebras.

Definición 1.3.5. Una co-álgebra $\mathcal{S} := (S, \alpha_S)$ es llamada **subco-álgebra** de $\mathcal{A} := (A, \alpha_A)$ si $S \subseteq A$ y además la inclusión $i : S \hookrightarrow A$ es un homomorfismo.

Definición 1.3.6. Dadas dos co-álgebras $\mathcal{A} := (A, \alpha_A)$ y $\mathcal{B} := (B, \alpha_B)$ de tipo F , se denota la unión disyunta de A y B por $A + B$, y las inclusiones canónicas se denotan por e_A y e_B . Puesto que siempre existe una única función $\alpha_{A+B} : A + B \rightarrow F(A + B)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{e_A} & A + B & \xleftarrow{e_B} & B \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_{A+B} & & \downarrow \alpha_B \\ F(A) & \xrightarrow{F(e_A)} & F(A + B) & \xleftarrow{F(e_B)} & F(B) \end{array}$$

se define la suma de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ como $\mathcal{A} + \mathcal{B} := (A + B, \alpha_{A+B})$.

Esta definición se puede generalizar, considerando la suma de una colección cualquiera de co-álgebras.

Definición 1.3.7. Una clase $\mathcal{K}$ de co-álgebras de tipo F se dice **co-variedad** si y solo, si es cerrada bajo imágenes homomórficas, subco-álgebras y sumas.

Definición 1.3.8. Sea X un conjunto (sus elementos se tomarán como “colores” y dada $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$ una coálgebra, las funciones $f : A \rightarrow X$ se tomarán como “coloreos”). Un F -coálgebra libre consiste en una F -coálgebra $\mathcal{S}_X = (S_X, \alpha_{S_X})$ junto con un coloreo $\epsilon_X : S_X \rightarrow X$ para el cual existe un único F -homomorfismo $\tilde{f} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}_X$ tal que $\epsilon_X \circ \tilde{f} = f$.

Definición 1.3.9. Un functor $F : \mathbf{Con} \rightarrow \mathbf{Con}$ se dice **acotado** si y solo si existe algún cardinal κ tal que para toda F -coálgebra $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$ y todo $a \in A$, se puede encontrar una subcoálgebra $\mathcal{U}_a = (U_a, \alpha_{U_a})$ de $\mathcal{A}$ tal que $|U_a| \leq \kappa$.

Definición 1.3.10. Sean F un functor acotado, $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$ una coálgebra de tipo F y $a \in A$. Un **comportamiento modelo** es un elemento v de alguna coálgebra libre S_Y . Decimos que v ocurre en a , si para todo coloreo $g : A \rightarrow Y$ tenemos que $\tilde{g}(a) \neq v$. Decimos que $\mathcal{A}$ satisface v (lo cual se notará por $\mathcal{A} \models v$) si v ocurre en cada $a \in A$.

Siendo $V \subseteq S_X$ un conjunto de comportamientos modelos, se define $\text{Mod}(V) := \{\mathcal{A} \in \text{ob}(\mathbf{Con}_F) \mid \text{dado } v \in V, \mathcal{A} \models v\}$, y siendo $\mathcal{K}$ una clase de F -coálgebras, se define $\text{Beh}_X(\mathcal{K}) := \{v \in S_X \mid \mathcal{A} \models v \text{ para todo } \mathcal{A} \in \mathcal{K}\}$

Teorema 1.3.7 (H. Peter Gumm). *Sea F un functor acotado. Para toda variedad $\mathcal{V}$ de F -coálgebras, se tiene que $\mathcal{V} = \text{Mod}(\text{Beh}_X(\mathcal{V}))$.*

Aquellos lectores interesados en ver detalles de este último resultado, se pueden dirigir a [Gu], teorema 7.27.

El parecido con el Teorema de Birkhoff radica en el hecho de que una variedad (una clase de co-álgebras, cerrada bajo ciertas construcciones algebraicas) es axiomatizable mediante la teoría (o mejor dicho, co-teoría) de aquellas “co-sentencias” (los comportamientos modelos) “satisfechas” en cada co-álgebra de la clase.

Nótese la manera como Gumm, define una noción adecuada de co-producto, co-subálgebra, co-álgebra libre, etc.; es decir, define un concepto “análogo” en este nuevo contexto, de cada uno de los conceptos involucrados en el enunciado y en la prueba del Teorema de Birkhoff “clásico”.

Capítulo 2

Caracterización de Clases Elementales

En el capítulo anterior, vimos que las condiciones que debe cumplir una clase de álgebras para que sea axiomatizable en el lenguaje del álgebra eran ser cerrada para ciertas construcciones como productos, subestructuras e imágenes homomorfas.

En este capítulo se intentará ir un paso adelante, en el sentido de presentar una caracterización debida a Keisler de las clases de estructuras que son axiomatizables en primer orden. Veremos que una clase será axiomatizable si y solo si es cerrada para ciertas construcciones algebraicas (ultraproductos, ultraraíces y estructuras isomorfas).

2.1 Construcción de ultraproductos.

Definición 2.1.1. Sea L un lenguaje de primer orden. Una clase K de L -estructuras se dice **elemental** si y solo si existe una L -teoría Σ tal que $K = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ es } L\text{-estructura y } \mathfrak{A} \models \Sigma\}$.

Por simplificar la notación, se define $Mod(\Sigma) := \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ es } L\text{-estructura y } \mathfrak{A} \models \Sigma\}$

Ejemplo 2.1.2. Nótese que toda variedad es una clase elemental.

Ejemplo 2.1.3. Sea $L = \{<\}$ un lenguaje donde $<$ es un símbolo relacional de aridad 2. Sea T_{ord} la teoría determinada por las siguientes sentencias:

1. $\forall x(\neg(x < x))$
2. $\forall x\forall y\forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$
3. $\forall x\forall y(x < y \vee y < x \vee x = y)$
4. $\forall x\forall y(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$
5. $\forall x\exists y(x < y)$
6. $\forall x\exists y(y < x)$

T_{ord} es denominada la teoría de los **órdenes totales densos sin extremos**. Considerando $Mod(T_{ord}) := \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ es } L\text{-estructura y } \mathfrak{A} \models T_{ord}\}$, se observa que $Mod(T_{ord})$ es una clase elemental, pero no es una clase de álgebras, pues el lenguaje considerado no es un conjunto que contiene solamente símbolos de función y símbolos de constante.

Definición 2.1.4. Sea L un lenguaje de primer orden. Una clase K de L -estructuras se dice **cerrada bajo equivalencia elemental** si y solo si dadas $\mathfrak{A} \in K$ y $\mathfrak{B}$ L -estructuras tales que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, se tiene que $\mathfrak{B} \in K$.

Definición 2.1.5. Sea L un lenguaje de primer orden, y $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dos L -estructuras. Una función $f : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$ se dice **homomorfismo**, si y solo si:

1. Dado $c \in L$ símbolo de constante, $f(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.
2. Dados $F \in L$ símbolo de función de aridad $n < \omega$, y $a_0, \dots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$, se tiene que $f(F^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1})) = F^{\mathfrak{B}}(f(a_0), \dots, f(a_{n-1}))$.
3. Dado $R \in L$ símbolo de relación de aridad $m < \omega$, $(a_0, \dots, a_{m-1}) \in R^{\mathfrak{A}}$ implica que $(f(a_0), \dots, f(a_{m-1})) \in R^{\mathfrak{B}}$.

Si f es biyectiva, a f se le denomina **isomorfismo** y se dice que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son estructuras isomorfas (hecho que se denota por $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$).

Definición 2.1.6. Sean L un lenguaje de primer orden y K una clase de L -estructuras. Se dice que K es **cerrada bajo isomorfismos**, si y solo si, dadas $\mathfrak{A} \in K$ y $\mathfrak{B}$ L -estructura isomorfa a $\mathfrak{A}$, se tiene que $\mathfrak{B} \in K$.

Definición 2.1.7. Sea I un conjunto no vacío. $D \subseteq \mathcal{P}(I)$ se dice **filtro** sobre I , si y solo si satisface las siguientes condiciones:

1. $I \in D$.
2. Dados $X, Y \in D$, se tiene que $X \cap Y \in D$.
3. Si $X \in D$ y $X \subseteq Z$, entonces $Z \in D$.

Ejemplos 2.1.8. 1. $D := \{I\}$. este filtro es denominado **filtro trivial**.

2. $D := \mathcal{P}(I)$. este filtro es conocido como **filtro impropio**. Se dice que D es **filtro propio** si $D \subsetneq \mathcal{P}(I)$.
3. Sea $Y \subseteq I$. $D_Y := \{X \subseteq I \mid Y \subseteq X\}$ es un filtro sobre I . este filtro se conoce como el **filtro principal** generado por Y .
4. $D := \{X \subseteq I \mid |I - X| < \omega\}$. este filtro se conoce como **filtro de Fréchet**.
5. Siendo $E \subseteq \mathcal{P}(I)$, se define $D := \bigcap \{F \mid E \subseteq F \text{ y } F \text{ es filtro sobre } I\}$. este filtro se conoce como el **filtro generado** por E .

Definición 2.1.9. Sea I un conjunto no vacío. Un filtro D sobre I , se denomina **ultrafiltro**, si y solo si dado $X \in \mathcal{P}(I)$, $X \in D \iff I - X \notin D$.

Hecho 2.1.1. Sea I un conjunto no vacío. D es ultrafiltro sobre I , si y solo si, D es un filtro maximal sobre I .

Definición 2.1.10. Sean I conjunto no vacío y $E \subseteq \mathcal{P}(I)$. Se dice que E satisface la **propiedad de intersecciones finitas** (PIF) si y solo si dados $A_1, \dots, A_n \in E$ ($n < \omega$) se tiene que $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$.

Teorema 2.1.2 (AC). Sean I conjunto no vacío y $E \subset \mathcal{P}(I)$ con la PIF. Entonces existe un ultrafiltro sobre I que extiende a E .

Demostración. La idea de la demostración radica en utilizar el Lema de Zorn. □

Definición 2.1.11. Sean I un conjunto no vacío, D un filtro sobre I y $\{A_i \mid i \in I\}$ una colección de conjuntos no vacíos. Sea $C := \prod_{i \in I} A_i$ (el producto cartesiano usual).

Siendo $f, g \in C$, se define la relación $\sim_D$ de la siguiente manera: $f \sim_D g$ si y solo si $\{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in D$.

Se tiene que $\sim_D$ es una relación de equivalencia en C . Como ilustración, se mostrará que $\sim_D$ es transitiva: Sean $f, g, h \in C$.

Si $f \sim_D g$ y $g \sim_D h$, entonces $A := \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in D$ y $B := \{i \in I \mid g(i) = h(i)\} \in D$. Como D es filtro sobre I , $A \cap B = \{i \in I \mid f(i) = g(i) = h(i)\} \in D$. Pero evidentemente $A \cap B \subseteq E := \{i \in I \mid f(i) = h(i)\}$, luego $E \in D$ (por ser D filtro sobre I), por lo que $f \sim_D h$.

Se denota como f_D , a la clase de equivalencia de $f \in C$, respecto a $\sim_D$.

Definición 2.1.12. Sean I un conjunto no vacío, D un filtro sobre I y $\{A_i \mid i \in I\}$ una colección de conjuntos no vacíos.

Se define el **producto reducido** de los A_i ($i \in I$) como el conjunto $\{f_D \mid f \in \prod_{i \in I} A_i\}$. El producto reducido es denotado como $\prod_D \langle A_i \mid i \in I \rangle$. Si no lleva a confusiones, se puede denotar como $\prod_D A_i$. Se dice en este caso que I es el **conjunto de índices** de $\prod_D A_i$.

Si D es ultrafiltro, a $\prod_D A_i$ se le denomina **ultraproducto**.

En el caso de que $A_i = A$ para todo $i \in I$ con D ultrafiltro, a $\prod_D A_i = \prod_D \langle A \mid i \in I \rangle$ se le denomina **ultrapotencia**.

A continuación, se mostrará la construcción de ultraproductos de L -estructuras, para un lenguaje L de primer orden.

Definición 2.1.13. Sea L un lenguaje de primer orden. Sean I un conjunto no vacío, D un filtro propio sobre I y $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ una colección de L -estructuras.

Se define el **producto reducido** de los $\mathfrak{A}_i$ ($i \in I$) como la L -estructura $\prod_D \mathfrak{A}_i$ tal que:

1. $\left| \prod_D \mathfrak{A}_i \right| = \prod_D |\mathfrak{A}_i|$.
2. Siendo P símbolo relacional en L de aridad $n < \omega$ y $f_D^k \in \prod_D A_i$ ($1 \leq k \leq n$), $P^{\prod_D \mathfrak{A}_i}(f_D^1, \dots, f_D^n)$ si y solo si $\{i \in I \mid P^{\mathfrak{A}_i}(f^1(i), \dots, f^n(i))\} \in D$.

3. Siendo F símbolo de función en L de aridad $n < \omega$ y $f_D^k \in \prod_D A_i$ ($1 \leq k \leq n$), se define $F^{\prod_D \mathfrak{A}_i}(f_D^1, \dots, f_D^n) := f_D$, donde

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow \bigcup_{i \in I} |\mathfrak{A}_i| \\ i &\mapsto F^{\mathfrak{A}_i}(f^1(i), \dots, f^n(i)). \end{aligned}$$

4. Siendo c símbolo de constante en L , se define $c^{\prod_D \mathfrak{A}_i} := c_D^*$, donde

$$\begin{aligned} c^* : I &\rightarrow \bigcup_{i \in I} |\mathfrak{A}_i| \\ i &\mapsto c^{\mathfrak{A}_i}. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que esta construcción está bien definida. Para más detalles, ver [ChKe].

Definición 2.1.14. Sea L un lenguaje de primer orden. Una clase K de L -estructuras se dice **cerrada bajo ultraproductos**, si y solo si dados un conjunto $I \neq \emptyset$, D ultrafiltro sobre I y $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\} \subseteq K$ se tiene que $\prod_D \mathfrak{A}_i \in K$.

Definición 2.1.15. Sean L lenguaje de primer orden y K una clase de L -estructuras. Se dice que K es **cerrada bajo ultraraíces** si y solo si para toda $\mathfrak{A}$ L -estructura tal que $\prod_D \langle \mathfrak{A} \mid i \in I \rangle$ es una ultrapotencia que está en K , entonces se tiene que $\mathfrak{A} \in K$.

Ahora nos dirigimos al primer gran resultado sobre la validez de fórmulas en ultraproductos, que es el teorema de Łoś.

Lema 2.1.3. Sean L un lenguaje de primer orden, I un conjunto no vacío y $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ una colección de L -estructuras no vacías. Sea $\mathfrak{B} := \prod_D \mathfrak{A}_i$ un ultraproducto. Entonces, para todo término $\tau(x_1, \dots, x_n)$ en L y toda tupla $f_D^1, \dots, f_D^n \in |\mathfrak{B}|$ se tiene que $\tau^{\mathfrak{B}}(f_D^1, \dots, f_D^n) = f_D$, donde:

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow \bigcup_{i \in I} |\mathfrak{A}_i| \\ i &\mapsto \tau^{\mathfrak{A}_i}(f^1(i), \dots, f^n(i)). \end{aligned}$$

Demostración. Si τ es símbolo de función ó si es constante de L , por la misma definición de las interpretaciones de estas en $\mathfrak{B}$ el resultado se tiene trivialmente.

Si $\tau(x, \dots, x_n) := F(\tau_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \tau_m(x_1, \dots, x_n))$ (F símbolo de función en L y τ_k es término, $1 \leq k \leq m$), se supone válido el lema para cada τ_k ($1 \leq k \leq m$), es decir, que $\tau_k(g_D^1, \dots, g_D^n) = g_D^k$ donde:

$$g^k : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} |\mathfrak{A}_i|$$

$$i \mapsto \tau_k^{\mathfrak{A}_i}(g^1(i), \dots, g^n(i))$$

cualesquiera que sean $g_D^1, \dots, g_D^n \in |\mathfrak{B}|$. Siendo $f_D^1, \dots, f_D^n \in |\mathfrak{B}|$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \tau^{\mathfrak{B}}(f_D^1, \dots, f_D^n) &= F^{\mathfrak{B}}(\tau_1(f_D^1, \dots, f_D^n), \dots, \tau_m(f_D^1, \dots, f_D^n)) \\ &= F^{\mathfrak{B}}(g_D^1, \dots, g_D^m) \\ &= g_D \end{aligned}$$

donde:

$$g : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} |\mathfrak{A}_i|$$

$$i \mapsto F^{\mathfrak{A}_i}(g^1(i), \dots, g^m(i))$$

Siendo $i \in I$, se tiene que:

$$\begin{aligned} g(i) &= F^{\mathfrak{A}_i}(g^1(i), \dots, g^m(i)) \\ &= F^{\mathfrak{A}_i}(\tau_1^{\mathfrak{A}_i}(f^1(i), \dots, f^n(i)), \dots, \tau_m^{\mathfrak{A}_i}(f^1(i), \dots, f^n(i))) \\ &= \tau^{\mathfrak{A}_i}(f^1(i), \dots, f^n(i)) \end{aligned}$$

luego se tiene el resultado. $\square$

Lema 2.1.4. Sean L un lenguaje de primer orden, I un conjunto no vacío y $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ una colección de L -estructuras no vacías. Sea $\mathfrak{B} := \prod_D \mathfrak{A}_i$ un ultraproducto. Entonces para toda $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ fórmula en L y toda tupla $f_D^1, \dots, f_D^n \in |\mathfrak{B}|$, $\mathfrak{B} \models \varphi[f_D^1, \dots, f_D^n]$ si y solo si $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi[f^1(i), \dots, f^n(i)]\} \in D$.

Demostración. Sean $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una L -fórmula y $f_D^1, \dots, f_D^n \in |\mathfrak{B}|$.

1. Caso atómicas: Sea $R(x_1, \dots, x_m) \in L$ símbolo de relación de aridad m , y sean $\tau_k(x_1, \dots, x_n)$ ($1 \leq k \leq m$) términos en L tales que $\varphi(x_1, \dots, x_n) = R(\tau_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \tau_m(x_1, \dots, x_n))$. Siendo:

$$\begin{aligned} g^k : I &\rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \\ i &\mapsto \tau_k^{\mathfrak{A}_i}(f^1(i), \dots, f^n(i)) \end{aligned}$$

con $1 \leq k \leq m$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} \models \varphi(f_D^1, \dots, f_D^n) &\iff R^{\mathfrak{B}}(\tau_1(f_D^1, \dots, f_D^n), \dots, \tau_m(f_D^1, \dots, f_D^n)) \\ &\iff R^{\mathfrak{B}}(g_D^1, \dots, g_D^m) \text{ (lema 2.1.3)} \\ &\iff \{i \in I \mid R^{\mathfrak{A}_i}(g^1(i), \dots, g^m(i))\} \in D \\ &\quad \text{(definición 2.1.13 (2))} \\ &\iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models R(g^1(i), \dots, g^m(i))\} \in D \\ &\iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models R(\tau_1, \dots, \tau_m)[f^1(i), \dots, f^n(i)]\} \\ &\quad \in D \\ &\iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(f^1(i), \dots, f^n(i))\} \in D \end{aligned}$$

2. Caso negación: Sea $\psi(x_1, \dots, x_n)$ fórmula en L tal que $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \neg\psi(x_1, \dots, x_n)$, y se supone que el lema vale para ψ .

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} \models \varphi(f_D^1, \dots, f_D^n) &\iff \mathfrak{B} \models \neg\psi(f_D^1, \dots, f_D^n) \\ &\iff \mathfrak{B} \not\models \psi(f_D^1, \dots, f_D^n) \\ &\iff A := \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi(f^1(i), \dots, f^n(i))\} \notin D \\ &\quad \text{(hipótesis de inducción)} \\ &\iff I - A = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \not\models \psi(f^1(i), \dots, f^n(i))\} \in D \\ &\quad \text{(por ser } D \text{ ultrafiltro)} \\ &\iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \neg\psi(f^1(i), \dots, f^n(i))\} \in D \\ &\iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(f^1(i), \dots, f^n(i))\} \in D \end{aligned}$$

3. Caso conjunción: Sean $\psi_1(x_1, \dots, x_n), \psi_2(x_1, \dots, x_n)$ fórmulas en L tales que $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$, suponiéndose que cada ψ_l ($l = 1, 2$) satisface el resultado.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} \models \varphi(f_D^1 \cdots, f_D^n) &\iff \mathfrak{B} \models \psi_1(f_D^1 \cdots, f_D^n) \wedge \psi_2(f_D^1 \cdots, f_D^n) \\
&\iff \mathfrak{B} \models \psi_1(f_D^1 \cdots, f_D^n) \text{ y } \mathfrak{B} \models \psi_2(f_D^1 \cdots, f_D^n) \\
&\iff A_k := \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi_k(f^1(i) \cdots, f^n(i))\} \in D \\
&\quad k = 1, 2 \text{ (hipótesis de inducción)} \\
&\iff A_1 \cap A_2 \in D \\
&\quad (\implies \text{ se tiene por la definición 2.1.7 (2)} \\
&\quad \text{ y } \impliedby \text{ se tiene por la definición 2.1.7 (3)}) \\
&\iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi_1(f^1(i), \cdots, f^1(i)) \\
&\quad \text{ y } \mathfrak{A}_i \models \psi_2(f^1(i), \cdots, f^1(i))\} \in D \\
&\iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models (\psi_1 \wedge \psi_2)(f^1(i), \cdots, f^n(i))\} \in D \\
&\iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(f^1(i), \cdots, f^n(i))\} \in D.
\end{aligned}$$

4. Caso existenciales: Sea $\psi(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ fórmula en L tal que $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \exists x_0 \psi(x_0, x_1, \cdots, x_n)$, suponiéndose que el lema se satisface para $\psi(x_0, x_1, \cdots, x_n)$.

Se tiene que son equivalentes

1. Existe $f^0 \in \prod_{i \in I} |\mathfrak{A}_i|$ tal que $A := \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi(f^0(i), f^1(i), \cdots, f^n(i))\}$ pertenece a D .
2. $B := \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(f^1(i), \cdots, f^n(i))\} \in D$.

En efecto:

(1. $\implies$ 2.) Considérese $i \in A$. Por hipótesis, existe $f^0 \in \prod_{i \in I} |\mathfrak{A}_i|$ tal que

$$\mathfrak{A}_i \models \psi(f^0(i), f^1(i), \cdots, f^n(i)).$$

Por lo tanto, $\mathfrak{A}_i \models \exists x_0 \psi(x_0, f^1(i), \cdots, f^n(i))$, luego $A \subseteq B$ y por la definición 2.1.7 (3) se tiene que $B \in D$ (ya que $A \in D$).

(2. $\implies$ 1.) Dado $i \in B$, se tiene que $\mathfrak{A}_i \models \exists x_0 \psi(x_0, f^1(i), \cdots, f^n(i))$. Tomando un testigo a_i , se puede armar una función parcial

$$\begin{aligned}
f : B &\rightarrow \bigcup_{i \in I} |\mathfrak{A}_i| \\
i &\mapsto a_i \text{ (} \in \mathfrak{A}_i \text{)}
\end{aligned}$$

y sin importar como se extienda a una función $f^0 \in \prod_{i \in I} |\mathfrak{A}_i|$, se tiene que $B = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi(a_i, f^1(i), \dots, f^n(i))\}$ está contenido en $A = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi(f^0(i), f^1(i), \dots, f^n(i))\}$, por la definición 2.1.7 (3) se tiene que $A \in D$ puesto que $B \in D$.

De ésto, y puesto que $\mathfrak{B} \models \exists x_0 \psi(x_0, f_D^1, \dots, f_D^n)$ es equivalente a la proposición (1.) ($\implies$ se tiene ya que un representante del testigo sirve en (1.) y $\impliedby$ se tiene puesto que f^0 sirve de testigo para ψ , todo ésto puesto que ψ valida el resultado por la hipótesis de inducción), por lo tanto $\mathfrak{B} \models \exists x_0 \psi(x_0, f_D^1, \dots, f_D^n)$ es equivalente a la proposición (2.), luego el resultado es cierto para φ . $\square$

Corolario 2.1.5 (teorema de Łoś). Sean L un lenguaje de primer orden, I un conjunto no vacío, $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ una colección de L -estructuras y $\mathfrak{B} := \prod_D \mathfrak{A}_i$ un ultraproducto. Para toda φ L -sentencia, $\mathfrak{B} \models \varphi \iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in D$

Un resultado importante que se deriva del teorema de Łoś es la siguiente versión en ultraproductos del teorema de Compacidad:

Corolario 2.1.6. Sean L un lenguaje de primer orden y Σ un conjunto de L -sentencias. Sea $I = [\Sigma]^{<\omega}$. Sea $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ una colección de L -estructuras, tales que $\mathfrak{A}_i \models i$. Entonces existe un ultrafiltro D sobre I tal que $\prod_D \mathfrak{A}_i \models \Sigma$.

Demostración. Sea $\varphi \in \Sigma$. Se define $\hat{\varphi} := \{i \in I \mid \varphi \in i\}$. Sea $E := \{\hat{\varphi} \mid \varphi \in \Sigma\}$.

Siendo $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Sigma$, se tiene que $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \in \hat{\varphi}_1 \cap \dots \cap \hat{\varphi}_n$, luego E tiene la PIF. Por lo tanto, por el teorema 2.1.2 E puede ser extendido a un ultrafiltro D sobre I .

Si $i \in \hat{\varphi}$, se tiene que $\varphi \in i$, luego $\mathfrak{A}_i \models \varphi$ (puesto que $\mathfrak{A}_i \models i$). Por lo tanto, para cada $\varphi \in \Sigma$ se tiene que $A := \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \supseteq \hat{\varphi}$. Puesto que $\hat{\varphi} \in E \subseteq D$ y por ser D filtro, se tiene que $A \in D$, luego por el corolario 2.1.5 se tiene que $\prod_D \mathfrak{A}_i \models \varphi$, esto para todo $\varphi \in \Sigma$. Es decir: $\prod_D \mathfrak{A}_i \models \Sigma$. $\square$

Dentro de la demostración que estamos estudiando, es importante el siguiente resultado.

Hecho 2.1.7 (Keisler-Shelah). Sean L un lenguaje de primer orden y $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ L -estructuras. Son equivalentes:

1. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$
2. Existen $I \neq \emptyset$ conjunto y D ultrafiltro sobre I tales que $\prod_D \langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I \rangle \cong \prod_D \langle \mathfrak{B}_i \mid i \in I \rangle$.

Referencia. [ChKe], teorema 6.1.15 . □

Del anterior resultado no presentamos prueba, debido a que la combinatoria utilizada es muy densa, razón por la cual colocamos la referencia para aquellos lectores interesados en la demostración.

2.2 Caracterización de las clases elementales

El teorema que queremos estudiar en este capítulo es el siguiente:

Teorema 2.2.1. *Sea K una clase de L -estructuras. Entonces K es elemental si y solo si es cerrada bajo ultraproductos, ultraraíces e isomorfismos.*

2.2.1 Esquema de la prueba

A continuación, se dará el esquema de la prueba con la que culmina este capítulo:

1. En páginas anteriores, presentamos una demostración del teorema de Loš, que dice que dado I un conjunto no vacío, D ultrafiltro sobre I , $\prod_D \langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I \rangle \models \varphi$ si y solo si $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in D$.
2. Tenemos que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ si y solo si existen $I \neq \emptyset$ y D ultrafiltro sobre I tales que $\prod_D \langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I \rangle \cong \prod_D \langle \mathfrak{B}_i \mid i \in I \rangle$ (teorema de Keisler-Shelah). La importancia de este resultado radica en que da una caracterización algebraica de la equivalencia elemental.
3. Luego, probaremos una primera equivalencia: Una clase de estructuras en primer orden es elemental si y solo si es cerrada bajo ultraproductos y equivalencia elemental. Esta equivalencia no es del tipo que nos interesa estudiar puesto que la equivalencia elemental no es una construcción algebraica, pero va a ser útil dentro de la demostración que queremos detallar. Aquí es donde entra en acción el teorema de Keisler-Shelah

4. Demostraremos que K es cerrada bajo ultraproductos y equivalencia elemental, si y solo si, es cerrada bajo ultraproductos, ultraraíces e isomorfismos. De la equivalencia dada en el paso 3, se tiene una caracterización algebraica de las clases elementales en primer orden.

2.2.2 Prueba

Teorema 2.2.2. *Sea K una clase de L -estructuras. Entonces K es elemental si y solo si es cerrada bajo ultraproductos y equivalencia elemental.*

Demostración. ($\Rightarrow$): Supongamos que $K = \text{Mod}(T)$, con T L -teoría. Sea $\mathfrak{A} \in K$. Si $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, evidentemente $\mathfrak{B} \models T$, luego $\mathfrak{B} \in K$.

Siendo $I \neq \emptyset$ un conjunto, D ultraproducto sobre I , y $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\} \subseteq K$, se tiene que $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi\} = I \in D$ para todo $\varphi \in T$. Por lo tanto, del teorema de Łoś (corolario 2.1.5) se tiene que $\prod_D \mathfrak{A}_i \models \varphi$ para todo $\varphi \in T$, luego $\prod_D \mathfrak{A}_i \models T$ y por tanto $\prod_D \mathfrak{A}_i \in K$.

($\Leftarrow$): Supongamos que K es cerrada bajo ultraproductos y equivalencia elemental. Sea $T := \{\varphi \mid \varphi \text{ es } L\text{-sentencia y } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ para todo } \mathfrak{A} \in K\}$. Sea $\mathfrak{B}$ algún modelo de T . Se define $I := [\text{Th}(\mathfrak{B})]^{<\omega}$. Para cada $i = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \in I$, existe un modelo $\mathfrak{A}_i \in K$ tal que $\mathfrak{A}_i \models i$ (de lo contrario, $\varphi := \neg(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n) \in T$ y por tanto $\mathfrak{B} \models \varphi$, contradiciendo el hecho de que $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \subset \text{Th}(\mathfrak{B})$).

Por el corolario 2.1.6, existe un ultraproducto (con conjunto de índices I) $\prod_D \mathfrak{A}_i$ tal que $\prod_D \mathfrak{A}_i \models \text{Th}(\mathfrak{B})$. Puesto que K es cerrado bajo ultraproductos, $\prod_D \mathfrak{A}_i \in K$. Pero todo modelo de $\text{Th}(\mathfrak{B})$ es elementalmente equivalente a $\mathfrak{B}$, por lo tanto $\prod_D \mathfrak{A}_i \equiv \mathfrak{B}$, y por ser K cerrada bajo equivalencia elemental se puede decir que $\mathfrak{B} \in K$.

Por lo tanto, se tiene que $K = \text{Mod}(T)$. Es decir: K es clase elemental. $\square$

Teorema 2.2.3. *Sea K una clase de estructuras en primer orden. K es cerrada bajo ultraproductos y equivalencia elemental, si y solo si, es cerrada bajo ultraproductos, ultraraíces e isomorfismos.*

Demostración. ($\Rightarrow$): Supongamos que K es cerrada bajo ultraproductos y equivalencia elemental. Falta ver que es cerrada bajo ultraraíces e isomorfismos.

Sea $\prod_D \langle \mathfrak{A} \mid i \in I \rangle \in K$. Por el teorema de Loš (corolario 2.1.5) se tiene que $\prod_D \langle \mathfrak{A} \mid i \in I \rangle \equiv \mathfrak{A}$, y por la cerradura bajo equivalencia elemental se tiene que $\mathfrak{A} \in K$, luego K es cerrada bajo ultraraíces.

La cerradura bajo isomorfismos se tiene trivialmente, puesto que dos estructuras isomorfas son elementalmente equivalentes.

($\Leftarrow$): Supongamos que K es cerrada bajo ultraproductos, ultraraíces e isomorfismos. Falta ver que es cerrada bajo equivalencia elemental.

Sean $\mathfrak{A} \in K$ y $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Por el teorema de Keisler-Shelah (hecho 2.1.7), existe $I \neq \emptyset$ y D ultrafiltro sobre I tales que $\prod_D \langle \mathfrak{A} \mid i \in I \rangle \cong \prod_D \langle \mathfrak{B} \mid i \in I \rangle$.

Por la cerradura bajo ultraproductos, $\prod_D \langle \mathfrak{A} \mid i \in I \rangle \in K$, y por la cerradura bajo isomorfismos se tiene que $\prod_D \langle \mathfrak{B} \mid i \in I \rangle \in K$. De la cerradura bajo ultraraíces, se tiene que $\mathfrak{B} \in K$, de donde se sigue que K es cerrada bajo equivalencia elemental. $\square$

Como corolario de los teoremas 2.2.2 y 2.2.3, se tiene finalmente la caracterización de las Clases Elementales en primer orden, como aquellas clases que son cerradas bajo ciertas construcciones algebraicas como son los ultraproductos, las ultraraíces y las imágenes isomórficas.

En la literatura es posible encontrar una amplia variedad de teoremas que caracterizan el tipo de axiomatización que puede presentar una clase elemental en primer orden, cuando dicha clase es cerrada bajo otras construcciones algebraicas. Ejemplo de este tipo de resultados, es el hecho que dice que una clase elemental en primer orden cerrada bajo subestructuras puede ser axiomatizada mediante una teoría universal. Aún así, existen problemas abiertos en esta dirección, como por ejemplo caracterizar el tipo de axiomatización que se puede dar para una clase elemental en primer orden cerrada bajo intersecciones¹

2.3 Otros teoremas similares.

Existen resultados muy similares al presentado en este capítulo, en diferentes contextos.

¹Agradezco al profesor Xavier Caicedo por indicarme este problema abierto

Por ejemplo, considerando solamente espacios normados y funciones uniformemente continuas en el contexto de la lógica multisortada (ver sección 4.4), una clase de este tipo de estructuras consideradas es axiomatizable, si y solo si, es cerrada bajo ciertas construcciones algebraicas, las cuales veremos a continuación:

Definición 2.3.1. Sea $L = (R^L, F^L, S^L)$ un lenguaje de la lógica multisortada (ver definición 4.4.1), que no tiene símbolos de relación (es decir, $R^L = \emptyset$).

Una L -estructura $\mathfrak{A} = (\{\mathfrak{A}_s\}_{s \in S^L}, \{F^{\mathfrak{A}}\}_{F \in F^L})$ es denominada **estructura de espacios normados**, si y solo si:

1. Cada $\mathfrak{A}_s$ ($s \in S^L$) corresponde a un espacio normado.
2. Existe $s_{\mathbb{R}} \in S^L$, tal que $\mathfrak{A}_{s_{\mathbb{R}}} = \mathbb{R}$.
3. Para cada $s \in S^L$, existe $\|\cdot\|_s \in F^L$, cuya aridad $\alpha(\|\cdot\|_s) : 2 \rightarrow S^L$ es la función constante s y cuyo valor suerte es $s_{\mathbb{R}}$. Las interpretaciones de estos símbolos, serán las respectivas normas de cada espacio $\mathfrak{A}_s$ ($s \in S^L$).
4. Para cada $s \in S^L$, existe $+_s \in F^L$, cuya aridad $\alpha(+_s) : 2 \rightarrow S^L$ es la función constante s y cuyo valor suerte es s . Las interpretaciones de estos símbolos, serán respectivamente las “sumas” de cada espacio $\mathfrak{A}_s$ ($s \in S^L$).
5. Para cada $s \in S^L$, existe $0_s \in F^L$ de aridad la función vacía (símbolos de constante) y valor suerte s . Las respectivas interpretaciones, serán los elementos neutros de cada espacio $\mathfrak{A}_s$ ($s \in S^L$).
6. Para cada $s \in S^L$, existe $-()_s \in F^L$ de aridad $\alpha(-()_s) : 1 \rightarrow S^L$ tal que $\alpha(-()_s)(0) = s$, y cuyo valor suerte es s . Las interpretaciones serán respectivamente, las funciones que asocian a cada elemento en $\mathfrak{A}_s$ ($s \in S^L$) su opuesto aditivo.
7. Para cada $s \in S^L$, existe $\cdot_s \in F^L$ de aridad $\alpha(\cdot_s) : 2 \rightarrow S^L$ tal que $\alpha(\cdot_s)(0) = \mathbb{R}$, $\alpha(\cdot_s)(1) = s$ y cuyo valor suerte es s . Las interpretaciones serán respectivamente, los productos por escalar de cada espacio $\mathfrak{A}_s$ ($s \in S^L$).

Un lenguaje que cumpla las anteriores condiciones, es denominado **lenguaje de espacios normados**, y se dice que $\mathfrak{A}$ está basado sobre la familia $(\mathfrak{A}_s \mid s \in S^L)$.

Definición 2.3.2. Sean L un lenguaje de espacios normados.

Dadas dos L -estructuras de espacios normados $\mathfrak{A} = (\{\mathfrak{A}_s\}_{s \in S^L}, \{F^{\mathfrak{A}}\}_{F \in F^L})$ y $\mathfrak{B} = (\{\mathfrak{B}_s\}_{s \in S^L}, \{F^{\mathfrak{B}}\}_{F \in F^L})$, se dice que $\mathfrak{A}$ es **subestructura** de $\mathfrak{B}$ (lo que se denotará por $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), si y solo si, $\mathfrak{A}_s \subseteq \mathfrak{B}_s$ para cada $s \in S^L$, y además $F^{\mathfrak{B}}$ extiende a $F^{\mathfrak{A}}$ para cada $F \in F^L$.

Definición 2.3.3. Sean (X, τ) un espacio topológico, y $(x_\xi)_{\xi \in \Lambda}$ una familia indexada de elementos de X . Si D es un ultrafiltro en Λ y $x \in X$, decimos que x es un D -límite de $(x_\xi)_{\xi \in \Lambda}$, si y solo si, para toda vecindad U de x , el conjunto $\{\xi \in \Lambda \mid x_\xi \in U\}$ está en D .

Se sabe que (X, τ) es Hausdorff compacto, si y solo si, para todo $(x_\xi)_{\xi \in \Lambda}$ en X y todo ultrafiltro D de Λ , existe un único $x \in X$ que es D -límite de $(x_\xi)_{\xi \in \Lambda}$ (denotándolo como $\lim_{\xi, D} x_\xi = x$).

Definición 2.3.4. Sea $(X_\xi \mid \xi \in \Lambda)$ una familia de espacios normados. Se

define $\mathcal{L}_\infty(\Lambda, (X_\xi \mid \xi \in \Lambda)) := \left\{ (x_\xi)_{\xi \in \Lambda} \in \prod_{\xi \in \Lambda} X_\xi \mid \sup_{\xi \in \Lambda} \|x_\xi\| < \infty \right\}$.

Dado $(x_\xi)_{\xi \in \Lambda} \in \mathcal{L}_\infty(\Lambda, (X_\xi \mid \xi \in \Lambda))$, se define $\|(x_\xi)_{\xi \in \Lambda}\| := \lim_{\xi, D} \|x_\xi\|$ (la cual resulta ser una semi-norma).

Se define $N_D := \{(x_\xi)_{\xi \in \Lambda} \in \mathcal{L}_\infty(\Lambda, (X_\xi \mid \xi \in \Lambda)) \mid \|(x_\xi)_{\xi \in \Lambda}\| = 0\}$.

Definición 2.3.5. Siendo D un ultrafiltro sobre Λ , se define el D -ultraproducto de la familia $(X_\xi \mid \xi \in \Lambda)$ de espacios normados, por:

$$\left(\prod_{\xi \in \Lambda} X_\xi \right)_D := (\mathcal{L}_\infty(\Lambda, (X_\xi \mid \xi \in \Lambda))) / N_D$$

Definición 2.3.6. Dado X un espacio normado y $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, denotamos por $B_r(X)$ a la bola cerrada de radio r y centrada en $0 \in X$

Definición 2.3.7. Sean $X^{(0)}, \dots, X^{(m)}$ espacios normados, y $F : X^{(1)} \times \dots \times X^{(m)} \rightarrow X^{(0)}$ una función uniformemente continua sobre

un conjunto $B \subseteq X^{(1)} \times \cdots \times X^{(m)}$. Se dice que $\Delta : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ es un **módulo de continuidad uniforme** para F sobre B , si y solo si, para cualesquiera $(x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m) \in B$ y $\varepsilon > 0$, $\max_k \|x_k - y_k\| < \Delta(\varepsilon)$ implica que $\|F(x_1, \dots, x_m) - F(y_1, \dots, y_m)\| \leq \varepsilon$.

Definición 2.3.8. Suponga que $(\mathfrak{A}^\xi \mid \xi \in \Lambda)$ es una familia de L -estructuras de espacios normados, basados sobre $(\mathfrak{A}_s^\xi \mid s \in S^L)$ (para cada $\xi \in \Lambda$). Dado $F \in F^L$, decimos que $(F^{\mathfrak{A}^\xi} \mid \xi \in \Lambda)$ es una **familia uniforme de funciones**, si y solo si, cumplen las siguientes condiciones:

1. (Condición de acotamiento uniforme) Dado $F \in f^L$ de aridad $\alpha(F) : m \rightarrow S^L$ con $\alpha(F)(k) = s_k$ ($k = 0, \dots, m-1$), para cada sucesión $r_0, \dots, r_{m-1} \in \mathbb{R}^+$, existe $R \in \mathbb{R}^+$, tal que para cualesquiera $\xi \in \Lambda$ y $x_\xi^k \in B_{r_k}(\mathfrak{A}_{s_k}^\xi)$ ($k = 0, \dots, m-1$), tenemos que

$$\|F^{\mathfrak{A}^\xi}(x_\xi^1, \dots, x_\xi^m)\| \leq R$$

2. (Condición de continuidad uniforme) Para cada sucesión $r_0, \dots, r_{m-1} \in \mathbb{R}$, existe una función $\Delta : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, tal que para todo $\xi \in \Lambda$, Δ es un módulo de continuidad uniforme para $F^{\mathfrak{A}^\xi}$ sobre $B_{r_0}(M_{s_0}^\xi) \times \cdots \times B_{r_{m-1}}(M_{s_{m-1}}^\xi)$ (donde la aridad de F satisface $\alpha(F)(k) = s_k$, con $k = 0, \dots, m-1$).

Definición 2.3.9. Decimos que una clase $(\mathfrak{A}^\xi \mid \xi \in \Lambda)$ de L -estructuras de espacios normados es **uniforme**, si y solo si, la familia $(F^{\mathfrak{A}^\xi} \mid \xi \in \Lambda)$ es uniforme

Definición 2.3.10. Sea $(\mathfrak{A}^\xi \mid \xi \in \Lambda)$ una familia uniforme de L -estructuras de espacios normados, donde cada $\mathfrak{A}^\xi$ está basado sobre $(\mathfrak{A}_s^\xi \mid s \in S^L)$. Sea D ultrafiltro sobre Λ .

El D -**ultraproducto** de $(\mathfrak{A}^\xi \mid \xi \in \Lambda)$, el cual denotamos por $\mathfrak{A} = \left(\prod_{\xi \in \Lambda} \mathfrak{A}^\xi \right)_D$,

es la L -estructura definida de la siguiente manera:

$$\mathfrak{A}_s := \left(\prod_{\xi \in \Lambda} \mathfrak{A}_s^\xi \right)_D, \text{ para cada } s \in S^L.$$

Dado $F \in F^L$ (de aridad $\alpha(F) : m \rightarrow S^L$ donde $\alpha(F)(i) = s_{i+1}$ ($i < m$), y cuyo valor suerte es s_0), se define $F^{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A}_{s_1} \times \cdots \times \mathfrak{A}_{s_m} \rightarrow \mathfrak{A}_{s_0}$ de la siguiente manera: Dado $(x_k^\xi)_{\xi \in \Lambda} \in \mathcal{L}_\infty(\Lambda, (\mathfrak{A}_{s_k}^\xi \mid \xi \in \Lambda))$ ($k = 1, \dots, m$),

$$F^{\mathfrak{A}}(((x_1^\xi)_{\xi \in \Lambda})_D, \dots, ((x_m^\xi)_{\xi \in \Lambda})_D) := ((F^{\mathfrak{A}^\xi}(x_1^\xi, \dots, x_m^\xi))_{\xi \in \Lambda})_D.$$

El hecho de que la familia $(F^{\mathfrak{A}^\xi} \mid \xi \in \Lambda)$ sea uniforme, garantiza que $F^{\mathfrak{A}}$ está bien definida (para mas detalles, véase [HeIo]).

Definición 2.3.11. Sean $\mathfrak{A} = (\{\mathfrak{A}_s\}_{s \in S^L}, \{F^{\mathfrak{A}}\}_{F \in F^L})$, $\mathfrak{B} = (\{\mathfrak{B}_s\}_{s \in S^L}, \{F^{\mathfrak{B}}\}_{F \in F^L})$ dos L -estructuras de espacios normados. Un **isomorfismo** entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, es una familia $(T^{(s)} : \mathfrak{A}_s \rightarrow \mathfrak{B}_s \mid s \in S^L)$ de isometrías sobreyectivas, tales que:

Si $F \in F^L$ tiene aridad $\alpha(F) : \{0, \dots, n-1\} \rightarrow S^L$ y valor suerte s_F ,

$$F^{\mathfrak{B}}(T^{(\alpha(F)(0))}(a_0), \dots, T^{(\alpha(F)(n-1))}(a_{n-1})) = T^{(s_F)}(F^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}))$$

con $a_i \in \mathfrak{A}_{\alpha(F)(i)}$ ($i = 0, \dots, n-1$).

Definición 2.3.12 (fórmulas acotadas positivas). Sea L un lenguaje de estructuras de espacios normados. El conjunto de las **L -fórmulas acotadas positivas** se define recursivamente, de la siguiente manera:

1. Si τ es un término de valor suerte $s_{\mathbb{R}}$ y $r \in \mathbb{Q}$,

$$r \leq \tau, \quad \tau \leq r$$

son fórmulas acotadas positivas.

2. Si φ y ψ son fórmulas acotadas positivas,

$$\varphi \wedge \psi, \quad \varphi \vee \psi$$

también son fórmulas acotadas positivas.

3. Si φ es fórmula acotada positiva, x variable y $r \in \mathbb{Q}$,

$$\exists x(\|x\| \leq r \wedge \varphi), \quad \forall x(\|x\| \leq r \rightarrow \varphi)$$

también son fórmulas acotadas positivas.

Para simplificar la notación, definimos $\exists_r x \varphi := \exists x(\|x\| \leq r \wedge \varphi)$ y $\forall_r x \varphi := \forall x(\|x\| \leq r \rightarrow \varphi)$

Definición 2.3.13. La **aproximación** de una fórmula acotada positiva φ , se definirá recursivamente de la siguiente manera:

Si φ es	Las aproximaciones de φ son:
$r \leq t$	$r' \leq t$, con $r' < r$
$t \leq r$	$t \leq r'$, con $r < r'$
$\psi_1 \Box \psi_2$ ($\Box \in \{\wedge, \vee\}$)	$\psi'_1 \Box \psi'_2$, donde ψ'_i es aproximación de ψ_i ($i = 1, 2$).
$\exists_r x \psi$	$\exists_{r'} x \psi'$, donde $r < r'$ y ψ' es aproximación de ψ .
$\forall_r x \psi$	$\forall_{r'} x \psi'$, donde $r' < r$ y ψ' es aproximación de ψ .

Definición 2.3.14. Sea $\mathfrak{A}$ una L -estructura de espacios normados basada en $(\mathfrak{A}_s \mid s \in S^L)$, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula acotada positiva (donde x_k es variable de suerte s_k , $k = 1, \dots, n$) y $a_k \in |\mathfrak{A}_{s_k}|$ ($k = 1, \dots, n$). Decimos que $\mathfrak{A}$ satisface aproximadamente φ en $a_1, \dots, a_n$, si y solo si, $\mathfrak{A} \models \varphi'[a_1, \dots, a_n]$ para toda φ' aproximación de φ . este hecho se denota por $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{A}} \varphi$. Se define $Th_{\mathcal{A}}(\mathfrak{A}) := \{\varphi \mid \varphi \text{ es fórmula acotada positiva y } \mathfrak{A} \models_{\mathcal{A}} \varphi\}$.

En este contexto, existe una versión del teorema de Loš:

Teorema 2.3.1. Sea $(\mathfrak{A}^\xi \mid \xi \in \Lambda)$ una familia uniforme de L -estructuras de espacios normados, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula acotada positiva (donde x_k es variable de valor suerte s_k , para $k = 1, \dots, n$) y D un ultrafiltro sobre Λ . Si $\mathfrak{A}^\xi$ está basado sobre $(\mathfrak{A}_s^\xi \mid s \in S^L)$ y $a_k \in \mathcal{L}_\infty(\Lambda, (\mathfrak{A}_{s_k}^\xi \mid \xi \in \Lambda))$ ($k = 1, \dots, n$), entonces $\left(\prod_{\xi \in \Lambda} \mathfrak{A}^\xi \right)_D \models_{\mathcal{A}} \varphi((a_1)_D, \dots, (a_n)_D) \iff \{\xi \in \Lambda \mid \mathfrak{A}^\xi \models \varphi'(a_1(\xi), \dots, a_n(\xi))\} \in D$ para toda $\varphi'(x_1, \dots, x_n)$ aproximación de $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Referencia. [HeIo], proposición 9.2 □

Definición 2.3.15. Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dos L -estructuras de espacios normados. Se dice que $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{A}} \mathfrak{B}$, si y solo si, $Th_{\mathcal{A}}(\mathfrak{A}) = Th_{\mathcal{A}}(\mathfrak{B})$.

En este contexto, también se tiene una versión del teorema de Keisler-Shelah:

Teorema 2.3.2. Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ L -estructuras de espacios normados, tales que $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{A}} \mathfrak{B}$. Entonces existen Λ y D ultrafiltro sobre Λ , tales que $\left(\prod_{\xi \in \Lambda} \mathfrak{A} \right)_D \cong \left(\prod_{\xi \in \Lambda} \mathfrak{B} \right)_D$.

Referencia. [HeIo], teorema 10.7 □

Definición 2.3.16. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ clases de L -estructuras de espacios normados, tales que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. Se dice que $\mathcal{C}$ es **axiomatizable en $\mathcal{D}$ por sentencias acotadas positivas**, si y solo si, existe Γ conjunto de L -sentencias acotadas positivas, tal que $\mathcal{C}$ es exactamente la clase de estructuras de $\mathcal{D}$ que satisfacen aproximadamente a Γ .

A continuación, enunciaremos un teorema de representación en este contexto:

Teorema 2.3.3. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ clases de L -estructuras de espacios normados, tales que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ es uniforme, cerrada bajo isomorfismos y bajo ultraproductos. Son equivalentes:

1. $\mathcal{C}$ es axiomatizable en $\mathcal{D}$ por sentencias acotadas positivas.
2. $\mathcal{C}$ es cerrada bajo isomorfismos y ultraproductos, y $\mathcal{D} - \mathcal{C}$ es cerrada bajo ultrapotencias (es decir, $\mathcal{C}$ es cerrada bajo ultraraíces, ver [HeIo], sumario del capítulo 13, página 9).

Referencia. [HeIo], proposición 13.6 □

Nótese el gran parecido que este resultado tiene con el teorema visto en la sección 2.2 (la cerradura bajo una noción de ultraproducto, bajo una noción de isomorfismo y bajo una noción de ultraraíz, además de que en su demostración se utilizan resultados muy parecidos a los teoremas de Łoś y de Keisler-Shelah). Este es un resultado muy curioso, ya que involucra nociones analíticas (como lo son la noción de continuidad uniforme y la noción de familia uniforme de funciones, entre otras) que no son propios de la Teoría de Modelos clásica, que se ocupa esencialmente del álgebra.

En el contexto de la lógica intuicionista, tenemos otro resultado similar a los ya vistos.

Definición 2.3.17. Sea L un lenguaje de primer orden. Una **L -estructura intuicionista** es una tupla de la forma $\mathfrak{A} = (\Sigma, \leq, 0, \mathcal{A}, F)$, donde $(\Sigma, \leq)$ es un orden parcial con primer elemento 0, $\mathcal{A} := \{\mathfrak{A}_i \mid i \in \Sigma\}$ es una colección de L -estructuras de primer orden, y F es una función tal que si $i \leq j$,

$F_{ij} := F(i, j)$ es un homomorfismo entre $\mathfrak{A}_i$ y $\mathfrak{A}_j$, de manera que si $i \leq j$ y $j \leq k$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{A}_j & \\ F_{ij} \nearrow & & \searrow F_{jk} \\ \mathfrak{A}_i & \xrightarrow{F_{ik}} & \mathfrak{A}_k \end{array}$$

Definición 2.3.18. Sea $\mathfrak{A} = (\Sigma, \leq, 0, \mathcal{A}, F)$ una L -estructura intuicionista. Siendo $\varphi(\bar{x})$ L -fórmula y $\bar{a} \in |\mathfrak{A}_x|$, se define la noción de forzamiento de $\varphi[\bar{a}]$ en el nodo $x \in \Sigma$, de la siguiente manera:

1. Si $\varphi(\bar{x})$ es atómica, $\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\bar{a}] \iff \mathfrak{A}_x \models \varphi[\bar{a}]$.
2. Si $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$, $\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\bar{a}] \iff \mathfrak{A} \Vdash_x \psi_1[\bar{a}]$ y $\mathfrak{A} \Vdash_x \psi_2[\bar{a}]$.
3. Si $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$, $\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\bar{a}] \iff \mathfrak{A} \Vdash_x \psi_1[\bar{a}]$ o $\mathfrak{A} \Vdash_x \psi_2[\bar{a}]$.
4. Si $\varphi = \neg\psi$, $\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\bar{a}] \iff$ para todo $y \geq x$ $\mathfrak{A} \not\Vdash_y \psi[\bar{a}]$.
5. Si $\varphi = \exists v\psi(v)$, $\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\bar{a}] \iff$ existe $b \in |\mathfrak{A}_x|$ tal que $\mathfrak{A} \Vdash_x \psi[b, \bar{a}]$.
6. Si $\varphi = \forall v\psi(v)$, $\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\bar{a}] \iff$ para todo $y \geq x$ y todo $b \in |\mathfrak{A}_y|$ $\mathfrak{A} \Vdash_y \psi[b, F_{xy}(\bar{a})]$.

Definición 2.3.19. Sea φ una L -sentencia de primer orden. Se dice que una L -estructura intuicionista $\mathfrak{A} = (\Sigma, \leq, 0, \mathfrak{A}, F)$ **satisface** φ , si y solo si, $\mathfrak{A} \Vdash_0 \varphi$.

No es difícil verificar, que una sentencia es forzada en cada $i \in \Sigma$, si y solo si, es forzada en 0.

Definición 2.3.20. Dos L -estructuras intuicionistas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ se dicen **elementalmente equivalentes**, si y solo si, satisfacen las mismas L -sentencias.

Definición 2.3.21. Dados $\{\mathfrak{A}^i \mid i \in I\}$ una familia de L -estructuras intuicionistas (donde $\mathfrak{A}^i := (\Sigma_i, \leq_i, 0_i, \mathcal{A}^i, F^i)$, $i \in I$) y D ultrafiltro sobre I , se definen:

$$\Sigma := \prod_D \langle \Sigma_i \mid i \in I \rangle \text{ (el ultraproducto usual).}$$

$$\leq := \prod_D \langle \leq_i \mid i \in I \rangle.$$

$0 := \{(i, 0_i) \mid i \in I\}/D$.

Siendo $\bar{\gamma} := \gamma/D \in \Sigma$, definimos $\mathfrak{A}_{\bar{\gamma}} := \prod_D \langle \mathfrak{A}_{\gamma(i)} \mid i \in I \rangle$, considerando

$\mathcal{A} := \{\mathfrak{A}_{\bar{\gamma}} \mid \bar{\gamma} \in \Sigma\}$. Para $\bar{\gamma}, \bar{\delta} \in \Sigma$ con $\bar{\gamma} \leq \bar{\delta}$, definimos $F_{\bar{\gamma}, \bar{\delta}} : \mathfrak{A}_{\bar{\gamma}} \rightarrow \mathfrak{A}_{\bar{\delta}}$ como $F_{\bar{\gamma}, \bar{\delta}}(x/D) := \{(i, F_{\gamma, \delta}^i(x(i))) \mid i \in I\}/D$

Las anteriores construcciones están bien definidas. Para ver detalles de la construcción, ver [Ga].

Se define como el **ultraproducto** de la familia $\{\mathfrak{A}^i \mid i \in I\}$ sobre D , la L -estructura intuicionista $\mathfrak{A} = (\Sigma, \leq, 0, \mathcal{A}, F)$.

En este contexto, también hay una versión del *teorema de Loš*, el cual es importante dentro de la demostración del teorema de representación que tenemos en la lógica intuicionista.

Teorema 2.3.4. *Sean $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula, $\{\mathfrak{A}^i \mid i \in I\}$ una colección de L -estructuras intuicionistas (con $\mathfrak{A}^i := (\Sigma_i, \leq_i, 0_i, \mathcal{A}^i, F^i)$) y D ultrafiltro sobre I . Considerando $\mathfrak{A} = (\Sigma, \leq, 0, \mathcal{A}, F)$ el ultraproducto de $\{\mathfrak{A}^i \mid i \in I\}$ sobre D , fijando $\bar{\gamma} \in \Sigma$ y tomando $(a_k)/D \in \mathfrak{A}_{\bar{\gamma}}$ ($k = 1, \dots, n$), se tiene que $\{j \in I \mid \mathfrak{A}^j \Vdash_{\gamma(j)} \varphi(a_1(j), \dots, a_n(j))\} \in D$, si y solo si, $\mathfrak{A} \Vdash_{\bar{\gamma}} \varphi((a_1)/D, \dots, (a_n)/D)$.*

Referencia. [Ga], teorema 10.3

□

Definición 2.3.22. Sean $\mathfrak{A} = (\Sigma, \leq, 0, \mathcal{A}, F)$ una L -estructura intuicionista y $t_0 \in \Sigma$. La estructura $\mathfrak{A}^{t_0} := (\Sigma^{t_0}, \leq \upharpoonright \Sigma^{t_0}, t_0, \mathcal{A}^{t_0}, F^{t_0})$ (con $\Sigma^{t_0} := \{s \in \Sigma \mid s \geq t_0\}$, $\mathcal{A}^{t_0} := \{\mathfrak{A}_s \in \mathcal{A} \mid s \in \Sigma^{t_0}\}$ y F^{t_0} la restricción de F a aquellos $s, t \in \Sigma^{t_0}$ con $s \leq t$) es denominada **truncación** de $\mathfrak{A}$ en t_0 .

El siguiente teorema tiene cierto parecido con la primera caracterización de las clases elementales en primer orden, ya que mezcla cerraduras bajo construcciones algebraicas y bajo equivalencia elemental.

Teorema 2.3.5. *Una clase $\mathcal{K}$ de L -estructuras intuicionistas es axiomatizable, si y solo si, es cerrada bajo ultraproductos, equivalencia elemental y truncaciones.*

Referencia. [Ga], teorema 10.7

□

Hasta la fecha de la publicación de la referencia, no se tenía una forma de caracterizar algebraicamente la noción de equivalencia elemental (como ocurre en primer orden, con el teorema de Keisler-Shelah, y en el contexto de los

espacios normados, con el teorema 2.3.2) para poder llegar a una caracterización netamente algebraica, por lo que en este sentido es poco satisfactorio el resultado anterior.

Nótese como en el contexto de los espacios normados y en el caso de primer orden, la existencia de versiones de los resultados de Loš y de Keisler-Shelah conducen a caracterizaciones algebraicas de las clases elementales. La falta de un resultado análogo al teorema de Keisler-Shelah en el contexto intuicionista, lleva a una caracterización “semi-algebraica” de las clases elementales.

Capítulo 3

Un teorema de Shelah

Del capítulo anterior sabemos que una clase de estructuras es axiomatizable en primer orden si y solo si es cerrada bajo ultraproductos, ultraraíces e isomorfismos. Las dos primeras son construcciones bastante sofisticadas, pero la cerradura bajo estas construcciones implica en particular que la clase sea cerrada bajo submodelos elementales y uniones de cadenas elementales. Estas últimas son construcciones mucho más naturales. Una clase elemental abstracta, es cerrada para estas dos construcciones en particular.

Con los axiomas que se piden para que una clase sea elemental abstracta, se pretende generalizar las clases elementales mediante algunas de las propiedades que estas tienen en términos de algunas construcciones algebraicas como la cerradura bajo isomorfismos, subestructura elemental, uniones de cadenas elementales, entre otras. De aquí el adjetivo de “abstracta”.

3.1 Definiciones preliminares

Definición 3.1.1. Sea L un lenguaje de primer orden, y sea $\mathcal{K}$ una clase de L -estructuras.

Se dice que $\langle \mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}} \rangle$ un orden parcial es una **clase elemental abstracta** (ó CEA), si y solo si, para todo $M_1, M_2, M_3, M_4 \in \mathcal{K}$:

A0. a) Si $M_1 \prec_{\mathcal{K}} M_2$, $f : M_1 \cong M_3$, $g : M_2 \cong M_4$ y $f \subseteq g$, entonces $M_3 \prec_{\mathcal{K}} M_4$.

b) $\mathcal{K}$ es cerrada bajo isomorfismos.

A1. $M_1 \prec_{\mathcal{K}} M_2$ implica que $M_1 \subseteq M_2$.

- A2. $M_1 \prec_{\mathcal{K}} M_3$, $M_2 \prec_{\mathcal{K}} M_3$ y $M_1 \subseteq M_2$ implican que $M_1 \prec_{\mathcal{K}} M_2$.
- A3. Existe un cardinal $LS(\mathcal{K})$ (el cual se denomina **número de Löwenheim-Skolem**) tal que dado $A \subseteq |M_1|$, existe $N \in \mathcal{K}$ con $N \prec_{\mathcal{K}} M_1$, $A \subseteq |N|$ y $\|N\| \leq |A| + LS(\mathcal{K}) + \aleph_0$.
- A4. a) Dada $\{M_i \mid i < \mu\} \subseteq \mathcal{K}$ una $\prec_{\mathcal{K}}$ -cadena (es decir, si $i < j < \mu$ entonces $M_i \prec_{\mathcal{K}} M_j$ y si μ es límite entonces $M_\mu = \bigcup_{\alpha < \mu} M_\alpha$), se tiene que $M = \bigcup_{i < \mu} M_i \in \mathcal{K}$ y además $M_j \prec_{\mathcal{K}} M$ para todo $j < \mu$.
- b) Siendo $N \in \mathcal{K}$ y $\{M_i \prec_{\mathcal{K}} N \mid i < \mu\} \subseteq \mathcal{K}$ una $\prec_{\mathcal{K}}$ -cadena, se tiene que $\bigcup_{i < \mu} M_i \prec_{\mathcal{K}} N$. Es decir, $\bigcup_{i < \mu} M_i$ es el sup en $\mathcal{K}$ de la $\prec_{\mathcal{K}}$ -cadena $\{M_i \prec_{\mathcal{K}} N \mid i < \mu\}$.

A continuación se ilustrará con unos ejemplos la noción que se acaba de definir.

- Ejemplos 3.1.2.** 1. Sean T una teoría consistente en primer orden y $\mathcal{K} := \{\mathfrak{A} \models T \mid \|\mathfrak{A}\| \geq 2^{\aleph_0}\}$. Se define que $\mathfrak{A} \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{B}$ si y solo si $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A}$ es submodelo de $\mathfrak{B}$ $\aleph_0$ -relativamente saturado (es decir, para todo $A \in [|\mathfrak{B}|]^{<\omega}$ y todo $a \in |\mathfrak{B}|$ existe $a' \in |\mathfrak{A}|$ que realiza el tipo $tp(a/A, \mathfrak{B})$). $\langle \mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}} \rangle$ definido de esta manera es una CEA, con $LS(\mathcal{K}) = 2^{\aleph_0}$.
2. Siendo τ un lenguaje fijo, T una teoría de primer orden sobre τ y Γ un conjunto de tipos sobre τ . Tomando $\mathcal{K} := \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ es } \tau\text{-estructura tal que } \mathfrak{A} \models T \text{ y } \mathfrak{A} \text{ omite todo } p \in \Gamma\}$ y $\prec_{\mathcal{K}}$ la relación de subestructura elemental clásica, se tiene que $\langle \mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}} \rangle$ es una CEA con $LS(\mathcal{K}) = \aleph_0$.
3. Sean $\mathcal{K} := \{\mathfrak{G} \mid \mathfrak{G} \text{ es un grupo localmente finito}\}$, y $\prec_{\mathcal{K}}$ la relación de subgrupo clásica. Se tiene que $\langle \mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}} \rangle$ es una CEA con $LS(\mathcal{K}) = \aleph_0$.

Definición 3.1.3. Sea T una teoría en un lenguaje de primer orden τ , y Γ una colección de τ -tipos. Se define:

$MOT(T, \Gamma) := \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ es } \tau\text{-estructura, } \mathfrak{A} \models T \text{ y } \mathfrak{A} \text{ omite todos los tipos de } \Gamma\}$.

Definición 3.1.4. Siendo τ lenguaje de primer orden, decimos que una clase $\mathcal{K}$ de τ -estructuras es una **clase elemental que omite algunos tipos** (lo que notaremos por $\mathcal{K} \in ECOT$) si existen T y Γ tales que $\mathcal{K} = MOT(T, \Gamma)$.

Existen clases elementales que omiten tipos, que no son elementales. Prueba de ello es el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.5. Sea $L_{gr} = \{\cdot, ^{-1}, e\}$ lenguaje de primer orden, donde la aridad de $\cdot$ (símbolo de función) es 2, la aridad de $^{-1}$ (símbolo de función) es 1, y e es símbolo de constante. Sea T_{gr} la L_{gr} -teoría conformada por las siguientes sentencias:

1. $\forall x \forall y \forall z ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$
2. $\forall x (x \cdot e = x \wedge e \cdot x = x)$
3. $\forall x (x \cdot x^{-1} = e \wedge x^{-1} \cdot x = e)$ (x^{-1} denota $^{-1}(x)$)

T_{gr} es denominada **teoría de grupos**

Consideremos el tipo $p := \{(x^n \neq e) \mid 1 \leq n < \omega\}$ (donde x^n denota $x \cdot \dots \cdot x$, n veces).

Considerando $\mathcal{K} := \{\mathfrak{G} \mid \mathfrak{G} \text{ es } L_{gr}\text{-estructura, } \mathfrak{G} \models T_{gr} \text{ y todo } a \in |\mathfrak{G}| \text{ tiene orden finito}\}$ ($a \in |\mathfrak{G}|$ tiene orden finito, si existe $n < \omega$ tal que $a^n = e^{\mathfrak{G}}$), es evidente que $\mathcal{K} = MOT(T_{gr}, \{p\})$.

Se verá que $\mathcal{K}$ no es elemental (en primer orden): Supongamos que existe T L_{gr} -teoría tal que $\mathcal{K} = Mod(T)$. Sea c símbolo de constante que no esté en L_{gr} , y consideremos la teoría $T' := T \cup \{c^n \neq e \mid 1 \leq n < \omega\}$. Dado que se puede encontrar grupos donde sus elementos tienen órdenes finitos arbitrariamente grandes (por ejemplo, algún $\mathbb{Z}_p$ con p primo), por un argumento de compacidad tenemos que T' es consistente, pero esto es contradictorio puesto que si existe $\mathfrak{G} \models T'$, $\mathfrak{G} \upharpoonright L_{gr} \in \mathcal{K}$ ya que $\mathfrak{G} \models T$, y además $c^{\mathfrak{G}}$ no tiene orden finito.

Definición 3.1.6. Siendo $\tau \supseteq \tau_0$ lenguaje de primer orden, T τ -teoría y Γ colección de τ -tipos, definimos:

$PC_{\tau_0}(T, \Gamma) := \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ es } \tau_0\text{-estructura que tiene una } \tau\text{-expansión } \mathfrak{A}^* \in MOT(T, \Gamma)\}$.

Definición 3.1.7. Siendo τ_0 lenguaje de primer orden, decimos que una clase $\mathcal{K}$ de τ_0 -estructuras es una **clase proyectiva que omite algunos tipos** o **clase PC** (lo que notaremos por $\mathcal{K} \in PCOT$) si existen T , Γ y $\tau \supseteq \tau_0$ tales que $\mathcal{K} = PC_{\tau_0}(T, \Gamma)$, con T τ -teoría y Γ colección de τ -tipos.

Observación 3.1.8. Una clase $\mathcal{K} \in PCOT$ es elemental en primer orden, si $\mathcal{K}$ y su complemento son cerradas bajo ultraproductos. En efecto, en

particular $\mathcal{K}$ es cerrada bajo imágenes isomórficas (por ser proyectiva), por hipótesis $\mathcal{K}$ es cerrada bajo ultraproductos y en particular $\mathcal{K}^c$ es cerrada bajo ultrapotencias (que es equivalente a tener que $\mathcal{K}$ es cerrada bajo ultraraíces). Por lo tanto, $\mathcal{K}$ es elemental en primer orden, gracias al teorema 2.2.3.

Aunque la anterior observación mostraba una condición suficiente para que una clase $\mathcal{K} \in PCOT$ sea elemental en primer orden, hasta la fecha es un problema abierto la caracterización de las clases proyectivas que son elementales¹.

Definición 3.1.9. Se dice que un orden parcial $\langle I, \leq_I \rangle$ es **dirigido** si y solo si para todo $s, t \in I$ existe $r \in I$ tal que $s \leq r$ y $t \leq r$.

Definición 3.1.10. Sean $\langle I, \leq_I \rangle$ un orden parcial dirigido, y $A := \{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{K}$ donde $\langle \mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}} \rangle$ es una CEA. Se dice que A es un **sistema dirigido**, si y solo si, dados $i \leq_I j$ se tiene que $\mathfrak{A}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}_j$.

3.2 Demostración del teorema.

Lema 3.2.1. Sea $\langle I, \leq_I \rangle$ un orden parcial dirigido de cardinal infinito $\lambda \geq \aleph_0$. Existe $\{I_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ familia de subconjuntos de I tales que:

- a) Cada I_α es dirigido y $|I_\alpha| < \lambda$.
- b) $\alpha < \beta < \lambda$ implica que $I_\alpha \subset I_\beta$.
- c) $I = \bigcup_{\alpha < \lambda} I_\alpha$.

Demostración. Sea $\{a_i \mid i < \lambda\}$ una enumeración de I .

Si $J \in [I]^{<\omega}$, se escoje $j \in I$ cota superior de J y se considera $J^* := J \cup \{j\}$. En caso de que $J \subseteq I$ sea infinito, se tiene que existe un orden parcial dirigido J^* del mismo cardinal tal que $J^* \subseteq I$ que contiene a J : En efecto, tomando $J_0 := J$ y suponiendo que para cierto $n > \omega$ está definido J_n , se arma J_{n+1} adicionando a J_n una cota superior para cada par de elementos de J_n si no la hay en J_n . Se toma $J^* := \bigcup_{n < \omega} J_n$.

Considerando $I_0 := \emptyset$, $I_{k+1} := (I_k \cup \{a_k\})^*$ para cada $k < \lambda$ y si $k < \lambda$ es

¹Agradezco al profesor Xavier Caicedo, por indicarme la existencia de este problema abierto

límite $I_k := \bigcup_{\mu < k} I_\mu$, se tiene que $I = \bigcup_{\mu < \lambda} I_\mu$ y que evidentemente se satisfacen a) y b). $\square$

A continuación se mostrará un resultado muy similar al axioma A_4 de una CEA, referente a uniones de $\prec_K$ –cadenas, pero en el contexto de los sistemas dirigidos.

Lema 3.2.2 (Límites dirigidos). *Sean $\langle I, <_I \rangle$ un orden parcial dirigido y $\langle \mathcal{K}, \prec_K \rangle$ una CEA. Si $A := \{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{K}$ es un sistema dirigido, entonces:*

- (i) $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i \in \mathcal{K}$.
- (ii) Para todo $i \in I$, $\mathfrak{A}_i \prec_K \bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$
- (iii) Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ es tal que $\mathfrak{A}_i \prec_K \mathfrak{A}$ para todo $i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i \prec_K \mathfrak{A}$.

Demostración. Si I es finito, no es difícil ver que I tiene un máximo. Siendo t tal máximo, es claro que $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_t$, donde evidentemente se cumple (i),

(ii) (por considerarse un sistema dirigido) y (iii) (puesto que $t \in I$).

Suponemos ahora que $|I| = \mu \geq \aleph_0$, y que el resultado es válido para $\lambda < \mu$. Del lema 3.2.1, se tiene que existe una familia $\{I_\alpha \mid \alpha < \mu\}$ de subórdenes parciales de I dirigidos, no vacíos, tales que:

- a) $|I_\alpha| < \mu$
- b) $\alpha < \beta < \mu$ implica que $I_\alpha \subseteq I_\beta \subseteq I$
- c) $I = \bigcup_{\alpha < \mu} I_\alpha$

Se define $\mathfrak{A}^\alpha := \bigcup_{j \in I_\alpha} \mathfrak{A}_j$. Por la hipótesis de inducción (ii), se tiene que $j \in I_\alpha$ implica que $\mathfrak{A}_j \prec_K \mathfrak{A}^\alpha$. Si $\alpha < \beta$, en particular $j \in I_\beta$ si $j \in I_\alpha$, luego $\mathfrak{A}_i \prec_K \mathfrak{A}^\beta$, y de la hipótesis de inducción (iii) se tiene que $\mathfrak{A}^\alpha \prec_K \mathfrak{A}^\beta$. Por el Axioma A_4 a) de la definición de CEA, se tiene que $\bigcup_{\beta < \mu} \mathfrak{A}^\beta = \bigcup_{j \in I} \mathfrak{A}_j \in \mathcal{K}$,

luego (i) se cumple para I .

Dado $j \in I$, existe $\alpha < \mu$ tal que $j \in I_\alpha$. Se tiene que $\mathfrak{A}^\alpha \prec_K \bigcup_{j \in I} \mathfrak{A}_j = \bigcup_{\beta < \mu} \mathfrak{A}^\beta$ (por el axioma A_4 a) de la definición de CEA), y como $\mathfrak{A}_j \prec_K \mathfrak{A}^\alpha$ (por

hipótesis de inducción (ii)), por lo tanto $\mathfrak{A}_j \prec_{\mathcal{K}} \bigcup_{j \in I} \mathfrak{A}_j$ (por la transitividad

de $\prec_{\mathcal{K}}$), luego (ii) se cumple para I .

Siendo $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathfrak{A}_j \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}$ para todo $j \in I$, por la hipótesis de inducción (iii) se tiene que $\mathfrak{A}^\alpha \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}$ para todo $\alpha < \mu$. Luego por el axioma A_4 b) de la definición de CEA, se tiene que $\bigcup_{j \in I} \mathfrak{A}_j = \bigcup_{\beta < \mu} \mathfrak{A}^\beta \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}$, luego (iii) se cumple para I . $\square$

Lema 3.2.3 (Skolemización). *Sea $\langle \mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}} \rangle$ una CEA sobre un vocabulario τ , con número de Löwenheim-Skolem $LS(\mathcal{K})$, y sea $\tau_1 := \tau \cup \{F_i^n \mid i < LS(\mathcal{K}) \text{ y } n < \omega\}$ un nuevo vocabulario donde cada F_i^n es un símbolo de función que no está en τ de aridad n . Si $\mathfrak{A}$ es una τ -estructura, $\mathfrak{A}^*$ denota una τ_1 -expansión de $\mathfrak{A}$ y $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|^n$, se denota por $\mathfrak{A}_{\bar{a}}^*$ la subestructura más pequeña de $\mathfrak{A}^*$ que contiene a $\bar{a}$, y se toma $\mathfrak{A}_{\bar{a}} := \mathfrak{A}_{\bar{a}}^* \upharpoonright \tau$. Entonces, cada $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ tiene una expansión $\mathfrak{A}^*$ tal que para todo $n < \omega$ y $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|^n$:*

- i) $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}$
- ii) $\|\mathfrak{A}_{\bar{a}}\| \leq LS(\mathcal{K})$
- iii) Si $\bar{b}$ es una subsucesión de $\bar{a}$, entonces $\mathfrak{A}_{\bar{b}} \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}_{\bar{a}}$
- iv) Para toda τ_1 -subestructura $\mathfrak{B}^*$ de $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^* \upharpoonright \tau \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}$.

Demostración. Sea $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$.

Si $n = 0$, cada F_i^0 corresponde a un símbolo de constante. Así, tomando $\mathfrak{A}' \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}$ de cardinal $\leq LS(\mathcal{K})$, y $|\mathfrak{A}'| := \{b_i : i < j \leq LS(\mathcal{K})\}$ una enumeración, se considera $(F_i^0)^{\mathfrak{A}^*} := b_i$ si $i < j$ y $F_i^0 := b_0$ en caso contrario.

Considerando $n = 1$ y $a \in |\mathfrak{A}|$, por el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (A3) existe $\mathfrak{A}_a \in \mathcal{K}$ tal que $\mathfrak{A}_a \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}$, $|\mathfrak{A}'| \cup \{a\} \subseteq |\mathfrak{A}_a|$ y $\|\mathfrak{A}_a\| \leq LS(\mathcal{K})$. En caso de que $n \geq 1$ siendo $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|^n$, se toma $A := \bigcup \{\mathfrak{A}_{\bar{b}} \mid \bar{b} \subsetneq \bar{a}\} \cup \{\bar{a}\}$, y aplicando el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (A3) existe $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \in \mathcal{K}$ tal que $A \subseteq |\mathfrak{A}_{\bar{a}}|$ y $\|\mathfrak{A}_{\bar{a}}\| \leq LS(\mathcal{K})$. Considerando $|\mathfrak{A}_{\bar{a}}| := \{a_i \mid i < \|\mathfrak{A}_{\bar{a}}\|\}$, se toma $F_i^n(\bar{a}) := a_i$, si $i < \|\mathfrak{A}_{\bar{a}}\|$, y $F_i^n(\bar{a}) = a_0$, en caso contrario.

Evidentemente, se satisfacen las condiciones i) y ii).

Para ver que se cumple iii), se evidencia por la construcción hecha que $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ implica $\mathfrak{A}_{\bar{b}} \subseteq \mathfrak{A}_{\bar{a}}$. Como $\mathfrak{A}_{\bar{b}} \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}$, entonces por el Axioma A2 se tiene que $\mathfrak{A}_{\bar{b}} \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}_{\bar{a}}$.

Sea $\mathfrak{B}^* \tau_1$ estructura tal que $\mathfrak{B}^* \subseteq \mathfrak{A}^*$. Considérese $\{a_i \mid i < \|\mathfrak{B}^*\|\}$ una enumeración de $|\mathfrak{B}^*|$. Se definen $S := \|\mathfrak{B}^*\|^{<\omega}$ (el cual claramente es un

orden parcial dirigido, con el orden de la inclusión) y $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}^* \upharpoonright \tau$.

Si $\bar{a} \in S$, se tiene que $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}$ y que $\mathfrak{A}_{\bar{a}}^* \subseteq \mathfrak{B}^*$ (ya que $\bar{a} \subseteq |\mathfrak{B}^*|$ y puesto que $\mathfrak{A}_{\bar{a}}^*$ es minimal), luego $\bigcup_{\bar{a} \in S} |\mathfrak{A}_{\bar{a}}^*| \subseteq |\mathfrak{B}^*|$.

Por otro lado, siendo $b \in |\mathfrak{B}^*|$, se tiene que $b \in |\mathfrak{A}_{\bar{b}}^*|$ y por lo tanto $b \in \bigcup_{\bar{a} \in S} |\mathfrak{A}_{\bar{a}}^*|$.

Luego se tiene que $\mathfrak{B}^* = \bigcup_{\bar{a} \in S} \mathfrak{A}_{\bar{a}}^*$.

De lo anterior, se puede afirmar que $\mathfrak{B} = \bigcup_{\bar{a} \in S} \mathfrak{A}_{\bar{a}}$ y como $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \in \mathcal{K}$ para cada $\bar{a} \in S$, del lema de los límites dirigidos (lema 3.2.2) se tiene que $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$. Puesto que $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}$ para todo $\bar{a} \in S$, del mismo lema 3.2.2 se tiene que $\mathfrak{B} \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}$. $\square$

Teorema 3.2.4 (Shelah). *Sea $\langle \mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}} \rangle$ una CEA en un lenguaje τ . Entonces $\langle \mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}} \rangle \in PCOT$.*

Demostración. Sea $\tau_1 \supseteq \tau$ el mismo lenguaje dado en el lema anterior. Se define Γ_n de la siguiente manera: Fijemos $\mathfrak{A}^*$ una τ_1 -estructura (su reducción al lenguaje τ lo notaremos por $\mathfrak{A}$). Un n -tipo completo p (en el lenguaje τ_1) está en Γ_n , si y solo si, si es realizado por $\bar{a} \in |\mathfrak{A}^*|$ en $\mathfrak{A}^*$, entonces para todo $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ se tiene que $\mathfrak{A}_{\bar{b}} \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}_{\bar{a}}$.

Además, se considera $\Gamma := \{p \mid p \text{ es } \tau_1\text{-tipo completo y } p \notin \bigcup_{n < \omega} \Gamma_n\}$.

Definiendo $\mathcal{K}' := MOT(\emptyset, \Gamma)$, se verá que $\mathcal{K} = PC_{\tau}(\emptyset, \Gamma)$:

Si $\mathfrak{A}^* \in \mathcal{K}'$ entonces $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$:

- Caso 1: Si $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}_{\bar{a}}^*$ (es decir, si es finitamente generado), si se toma $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ y como $\bar{a}$ realiza $tp(\bar{a}, \emptyset) \in \Gamma_{|\bar{a}|}$ (puesto que $\mathfrak{A}^*$ omite todos los tipos de Γ), se tiene por lo tanto que $\mathfrak{A}_{\bar{b}} \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}_{\bar{a}}$. Esto último está diciendo implícitamente que $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$.
- Caso 2: Si $\mathfrak{A}^*$ no es finitamente generado, puesto que $\mathfrak{A}^* = \bigcup_{\bar{a} \in S} \mathfrak{A}_{\bar{a}}^*$ donde $S := [|\mathfrak{A}^*|]^{<\omega}$ y como es claro que $\langle S, \subseteq \rangle$ es un orden parcial dirigido, de lo anterior y del Lema de los Límites Dirigidos (lema 3.2.2) se tiene que $\mathfrak{A} = \bigcup_{\bar{a} \in S} \mathfrak{A}_{\bar{a}} \in \mathcal{K}$ (puesto que cada $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \in \mathcal{K}$).

Por último, se verá que cada $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ tiene una τ_1 -expansión $\mathfrak{A}^* \in \mathcal{K}'$:

Tomando $\mathfrak{A}^*$ la Skolemización de $\mathfrak{A}$ (lema 3.2.3), se tiene que si $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ entonces $\mathfrak{A}_{\bar{b}} \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}_{\bar{a}}$. Esto en particular ocurre si $\bar{a}$ realiza a p , luego $p \in \Gamma_{|\bar{a}|}$. De esto, se tiene que $\mathfrak{A}^*$ omite todos los tipos de Γ .

Por lo tanto, se tiene que $\mathcal{K} = PC_\tau(\emptyset, \Gamma)$. □

Es importante notar que este último teorema es de una sola dirección; es decir, nos asegura que una CEA es una clase proyectiva que omite una cierta colección de tipos (es decir, una clase “axiomatizable” mediante una cierta colección de tipos que deben ser omitidos). Pero dada una clase proyectiva que omite una colección de tipos, no podemos asegurar que esta sea una CEA. El único resultado en esta dirección del que tenemos conocimiento es un resultado de Chang, que dice que una clase es definible por una sentencia de $L_{\infty\omega}$ si y solo si es una clase proyectiva de primer orden con omisión de tipos².

²Agradezco al profesor Xavier Caicedo, por señalarme la existencia de este resultado.

Capítulo 4

Una mirada categórica.

Dentro del trabajo en matemáticas, muchas veces no se necesita entrar en detalle sobre algunas estructuras, sino que basta considerar puntualmente los conjuntos considerados y algunas propiedades que tengan las funciones entre dichos conjuntos (no es necesario en varios casos, entrar en detalle sobre los elementos de dichos conjuntos).

Al asumir este punto de vista “sintético”, surge lo que hoy es conocido como *Teoría de Categorías*.

Varias construcciones conjuntistas pueden generalizarse en este nuevo contexto. Por ejemplo, el producto cartesiano de una familia de conjuntos lleva a la definición de producto en una categoría, y la unión de una cadena de conjuntos lleva a la noción de co-límite.

Por esta razón, incluimos en este trabajo un resultado que muestra algunas condiciones de clausura (bajo las generalizaciones categóricas, de algunas construcciones conjuntistas) que debe tener una categoría, para que tenga un comportamiento similar a la categoría de los modelos de cierta teoría, en una lógica infinitaria adecuada.

4.1 Definiciones preliminares.

Definición 4.1.1. Una categoría $\mathfrak{C}$ está definida por:

1. Una colección no vacía cuyos elementos se denominarán **objetos** de $\mathfrak{C}$ (la cual se denotará por $ob(\mathfrak{C})$).
2. Una colección no vacía $\{[A, B]_{\mathfrak{C}}\}_{A, B \in ob(\mathfrak{C})}$ de clases disjuntas dos a dos.

A un elemento $f \in [A, B]_{\mathfrak{C}}$ se le denominará **morfismo** o **flecha** con dominio A y codominio B . Es posible que en algunos casos $[A, B]_{\mathfrak{C}} = \emptyset$. Además, se define $Mor(\mathfrak{C}) := \bigcup_{A, B \in ob(\mathfrak{C})} [A, B]_{\mathfrak{C}}$, la cual se llamará la colección de morfismos de $\mathfrak{C}$.

3. Dados A, B y C elementos de $ob(\mathfrak{C})$, existe una operación $\circ : [A, B]_{\mathfrak{C}} \times [B, C]_{\mathfrak{C}} \rightarrow [A, C]_{\mathfrak{C}}$ que se denominará **composición** (donde se denota $g \circ f := \circ(f, g)$) tal que:
 - (a) Dados $f \in [A, B]_{\mathfrak{C}}, g \in [B, C]_{\mathfrak{C}}$ y $h \in [C, D]_{\mathfrak{C}}$, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
 - (b) Dado $A \in ob(\mathfrak{C})$, existe un morfismo identidad $id_A \in [A, A]_{\mathfrak{C}}$ tal que para cualquier $f \in [A, B]_{\mathfrak{C}}$ se tiene que $f \circ id_A = f$, y para cualquier $g \in [B, A]_{\mathfrak{C}}$ se tiene que $id_A \circ g = g$.

- Ejemplos 4.1.2.**
1. Se define la categoría Con de la siguiente manera:
 $ob(Con)$ es la clase de todos los conjuntos.
 Dados A, B conjuntos, se define $[A, B]_{Con}$ como el conjunto de todas las funciones de A en B .
 La composición entre morfismos es la usual.
 Las identidades, son las funciones identidad.
 2. Se define la categoría Grp de la siguiente manera:
 $ob(Grp)$ es la clase de todos los grupos.
 Dados $(G, \cdot), (H, *)$ grupos, se define $[G, H]_{Grp}$ como la clase de todos los homomorfismos de grupo entre G y H .
 La composición de morfismos es la usual.
 Las identidades, son las funciones identidad.
 3. Siendo $(M, \cdot)$ un monoide, se define la categoría $\mathfrak{M}$ de la siguiente manera:
 $ob(\mathfrak{M}) := \{p\}$ donde p es algún elemento de M .
 $[p, p]_{\mathfrak{M}} := M$.
 Dados $f, g \in [p, p]_{\mathfrak{M}}$, se define $g \circ f := g \cdot f$.
 El morfismo identidad es el elemento identidad del monoide.
 4. Sea $(I, \leq)$ un preorden (es decir, $\leq$ es reflexiva y transitiva). Se define la categoría $\mathfrak{I}$ de la siguiente manera:
 $ob(\mathfrak{I}) := I$.

$$[x, y]_{\mathcal{T}} := \begin{cases} \{(x, y)\} & \text{si } x \leq y \\ \emptyset & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Composición: La natural (seguir la flecha definida por el orden, gracias a la transitividad de $\leq$).

El morfismo identidad para cada $x \in I$, es la pareja (x, x) (la cual tiene sentido considerar, puesto que $\leq$ es reflexiva).

5. Se define la categoría Top de la siguiente manera:

$ob(Top)$ es la clase de todos los espacios topológicos.

Siendo $\mathbb{X} := (X, \mathfrak{G})$ y $\mathbb{Y} := (Y, \mathfrak{F})$ espacios topológicos, se define $[\mathbb{X}, \mathbb{Y}]_{Top} := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ es una función continua}\}.$

La composición de funciones es la usual.

Las identidades, son las funciones identidad.

Definición 4.1.3. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías. Un functor de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$ es una tupla de la forma $F := (F_{ob} : ob(\mathfrak{C}) \rightarrow ob(\mathfrak{D}), F_{Mor} : Mor(\mathfrak{C}) \rightarrow Mor(\mathfrak{D}))$ donde:

1. si $g \in [A, B]_{\mathfrak{C}}$, $F_{Mor}(g) \in [F_{ob}(A), F_{ob}(B)]_{\mathfrak{D}}$.
2. $F_{Mor}(g \circ f) = F_{Mor}(g) \circ F_{Mor}(f)$.
3. $F_{Mor}(id_A) = id_{F_{ob}(A)}$ para todo $A \in ob(\mathfrak{C})$.

Por simplificar la notación, escribimos $F(A) := F_{ob}(A)$ si $A \in ob(\mathfrak{C})$ y $F(g) := F_{Mor}(g)$ si $g \in Mor(\mathfrak{C})$, pero haciendo la observación de que el primero es un objeto de $\mathfrak{D}$ y el segundo es un morfismo en $\mathfrak{D}$. Haciendo esta consideración, denotamos mediante $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ al functor F .

$$\begin{array}{ccc} F : \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathfrak{D} \\ A & \longmapsto & F(A) \\ g \downarrow & \longmapsto & \downarrow F(g) \\ B & \longmapsto & F(B) \end{array}$$

A continuación, se ilustrará con unos ejemplos la noción de functor.

Ejemplos 4.1.4. 1. (functor identidad)

$$\begin{array}{ccc} Id_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathfrak{C} \\ A & \longmapsto & A \\ g \downarrow & \longmapsto & \downarrow g \\ B & \longmapsto & B \end{array}$$

2. (functor olvido)

$$\begin{aligned} U : Grp &\longrightarrow Con \\ (G, \cdot) &\longmapsto G \\ g \downarrow &\longmapsto \downarrow g \\ (H, *) &\longmapsto H \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} F : Con &\longrightarrow Top \\ X &\longmapsto (X, \mathcal{P}(X)) \\ g \downarrow &\longmapsto \downarrow g \\ Y &\longmapsto (Y, \mathcal{P}(Y)) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} F : Con &\longrightarrow Con \\ X &\longmapsto \mathcal{P}(X) \\ g \downarrow &\longmapsto \downarrow g'' \\ Y &\longmapsto \mathcal{P}(Y) \end{aligned}$$

5. Siendo $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña y $A \in ob(\mathfrak{C})$,

$$\begin{aligned} H^A : \mathfrak{C} &\longrightarrow Con \\ X &\longmapsto [A, X]_{\mathfrak{C}} \\ g \downarrow &\longmapsto \downarrow g \circ () \\ Y &\longmapsto [A, Y]_{\mathfrak{C}} \end{aligned}$$

Definición 4.1.5. Se define la categoría Cat (la **categoría de las categorías pequeñas**) de la siguiente manera:

$ob(Cat)$ va a ser la colección de todas las categorías pequeñas.

$[\mathfrak{C}, \mathfrak{K}]_{Cat} := \{F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{K} \mid F \text{ es functor}\}$.

Composición entre morfismos: La natural.

Los morfismos identidad, son los funtores identidad.

A continuación, se presentarán algunas definiciones básicas dentro de la teoría de categorías, que van a ser fundamentales dentro del desarrollo del presente capítulo.

Definición 4.1.6. Sean $\mathfrak{C}$ una categoría y $f \in [A, B]_{\mathfrak{C}}$, con $A, B \in ob(\mathfrak{C})$. Se dice que f es **isomorfismo**, si y solo si, existe $g \in [B, A]_{\mathfrak{C}}$ tal que $f \circ g = id_B$ y $g \circ f = id_A$.

Dos **objetos** $A, B \in ob(\mathfrak{C})$ se dirán **isomorfos** (lo que se notará por $A \cong B$), si existe un isomorfismo $f \in [A, B]_{\mathfrak{C}}$.

De esta manera, se dice que dos categorías pequeñas $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{K}$ son isomorfas si lo son en la categoría Cat .

Definición 4.1.7. Se dice que dos categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{K}$ son **equivalentes** (lo que se notará por $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{K}$), si y solo si, existe un functor $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{K}$ pleno (para cada $A, B \in ob(\mathfrak{C})$, $F \upharpoonright [A, B]_{\mathfrak{C}}$ es sobreyectiva), fiel (para cada $A, B \in ob(\mathfrak{C})$, $F \upharpoonright [A, B]_{\mathfrak{C}}$ es inyectiva) y además para cada objeto $C \in ob(\mathfrak{K})$ existe un objeto $A_C \in ob(\mathfrak{C})$ tal que $F(A_C) \cong C$.

Dos categorías isomorfas son equivalentes. En efecto: Sean $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{K}$ y $G : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{C}$ funtores tales que $F \circ G = id_{\mathfrak{K}}$ y $G \circ F = id_{\mathfrak{C}}$, $A, B \in ob(\mathfrak{C})$ y $C \in ob(\mathfrak{K})$. Tomando $f \in [F(A), F(B)]_{\mathfrak{K}}$, evidentemente $F(G(f)) = f$ con $G(f) \in [G(F(A)), G(F(B))]_{\mathfrak{C}} = [A, B]_{\mathfrak{C}}$, luego F es pleno. Considerando $f, g \in [A, B]_{\mathfrak{C}}$ tales que $F(f) = F(g)$, se tiene por lo tanto que $f = G(F(f)) = G(F(g)) = g$, luego F es fiel. Como $F(G(C)) = C$, entonces se tiene trivialmente que $F(G(C)) \cong C$, donde $G(C) \in ob(\mathfrak{C})$. Por lo tanto, $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{K}$ son equivalentes.

4.2 Grafos

Definición 4.2.1. Un **grafo** $\mathfrak{G}$, consiste de dos clases G (la cual se denominará **clase de vértices**) y F_G (denominada **clase de flechas**), y de dos funciones $or_{\mathfrak{G}}, fin_{\mathfrak{G}} : F_G \rightarrow G$, donde para $f \in F_G$ $or_{\mathfrak{G}}(f)$ es denominado **origen** de f y $fin_{\mathfrak{G}}(f)$ es denominado **final** de f (y se dirá que f es una flecha de $or_{\mathfrak{G}}(f)$ en $fin_{\mathfrak{G}}(f)$). Siendo $a, b \in G$, se define $[a, b]_{\mathfrak{G}} := \{f \in F_G \mid or_{\mathfrak{G}}(f) = a \text{ y } fin_{\mathfrak{G}}(f) = b\}$.

Si la unión disyunta de G y F_G es conjunto, se dirá que $\mathfrak{G}$ es un **grafo pequeño**.

Ejemplos 4.2.2. 1. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Definimos el **grafo subyacente** a la categoría $\mathfrak{C}$ (el cual se denotará por $\mathfrak{C} := (C, F_C, or_{\mathfrak{C}}, fin_{\mathfrak{C}})$)

$C := ob(\mathfrak{C})$.

$F_C := Mor(\mathfrak{C})$.

Siendo $f \in \text{Mor}(\mathfrak{C})$, existen $A, B \in \text{ob}(\mathfrak{C})$ tales que $f \in [A, B]_{\mathfrak{C}}$, de donde se define $\text{or}_{\mathfrak{C}}(f) := A$ y $\text{fin}_{\mathfrak{C}}(f) := B$.

2. Sea $\mathfrak{G} = (G, F_G, \text{or}_{\mathfrak{G}}, \text{fin}_{\mathfrak{G}})$ un grafo. A partir de $\mathfrak{G}$ se armarán los siguientes grafos:

- (a) $\mathfrak{G}^-$, donde $G^- := G \cup \{-\infty\}$ (donde $-\infty$ es un elemento que no está en G) y $F_{G^-} := F_G \cup \{p_a \mid a \in G\}$, donde $[-\infty, a]_{\mathfrak{G}^-} := \{p_a\}$.
- (b) Análogamente, se puede definir un grafo $\mathfrak{G}^+$, donde $G^+ := G \cup \{\infty\}$ (donde ∞ es un elemento que no está en G) y $F_{G^+} := F_G \cup \{c_a \mid a \in G\}$, donde $[a, \infty]_{\mathfrak{G}^+} := \{c_a\}$.

Definición 4.2.3. Sea $\mathfrak{G} = (G, F_G, \text{or}_{\mathfrak{G}}, \text{fin}_{\mathfrak{G}})$ un grafo. Un **camino** en $\mathfrak{G}$ es una sucesión de flechas de la forma:

$$a_0 \xrightarrow{f_1} a_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} a_{n-1} \xrightarrow{f_n} a_n$$

donde $n \in \omega$.

Dado el anterior camino, a a_0 se le denomina **dominio** y a a_n se le denomina **codominio** del camino dado. Si $n = 0$, se tiene el **camino vacío** de dominio y codominio a_0 .

Definición 4.2.4. Dado $\mathfrak{G} = (G, F_G, \text{or}_{\mathfrak{G}}, \text{fin}_{\mathfrak{G}})$ un grafo, una **condición de conmutatividad** en $\mathfrak{G}$ es un par de caminos con el mismo dominio y codominio.

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & \xrightarrow{f_1} & a_1 & \xrightarrow{f_2} & \dots & \xrightarrow{f_n} & a_n \\ g_1 \downarrow & & & & & & \uparrow g_m \\ b_1 & \xrightarrow{g_2} & b_2 & \xrightarrow{g_3} & \dots & \xrightarrow{g_{m-1}} & b_{m-1} \end{array}$$

Definición 4.2.5. Sean $\mathfrak{G}' = (G', F_{G'}, \text{or}_{\mathfrak{G}'}, \text{fin}_{\mathfrak{G}'})$ y $\mathfrak{G} = (G, F_G, \text{or}_{\mathfrak{G}}, \text{fin}_{\mathfrak{G}})$ dos grafos. Un **morfismo** entre grafos es un par de la forma

$F := (F_{\text{vert}} : G \rightarrow G', F_{\text{fl}} : F_G \rightarrow F_{G'})$, donde para todo $f \in [a, b]_{\mathfrak{G}}$ se tiene que $F_{\text{fl}}(f) \in [F_{\text{vert}}(a), F_{\text{vert}}(b)]_{\mathfrak{G}'}$.

Para simplificar la notación, denotaremos $F_a := F_{\text{vert}}(a)$ (para todo $a \in G$) y $F(f) := F_{\text{fl}}(f)$ (para todo $f \in F_G$). De esta manera, al morfismo F lo denotamos por $F : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}'$.

Ejemplo 4.2.6. Al considerar el grafo subyacente de dos categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{K}$, todo functor $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{K}$ es un morfismo entre estos dos grafos.

Definición 4.2.7. Sean $\mathfrak{G}'$ y $\mathfrak{G}$ dos grafos. Un morfismo de grafos $D : (\mathfrak{G}')^- \rightarrow \mathfrak{G}$ es denominado **cono** en $\mathfrak{G}$.

Definición 4.2.8. Sean $\mathfrak{G}'$ y $\mathfrak{G}$ dos grafos. Un morfismo de grafos $D : (\mathfrak{G}')^+ \rightarrow \mathfrak{G}$ es denominado **co-cono** en $\mathfrak{G}$.

Definición 4.2.9. Sean $\mathfrak{G} = (G, F_G, or_{\mathfrak{G}}, fin_{\mathfrak{G}})$ un grafo y $\mathfrak{C}$ una categoría. Se denomina **diagrama** en $\mathfrak{C}$ (de dominio $\mathfrak{G}$), a todo morfismo de grafos $D : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{C}$ (considerando $\mathfrak{C}$ como el grafo subyacente a $\mathfrak{C}$).

Si $\mathfrak{G}$ es un grafo pequeño, se dirá que D es un **diagrama pequeño**.

Para simplificar la notación, se define $D_a := D(a)$ (para cada $a \in G$).

Ejemplos 4.2.10. 1. Siendo $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{K}$ dos categorías, todo *functor* $f : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{K}$ es un diagrama, considerando como dominio el grafo subyacente de $\mathfrak{C}$.

2. En caso de que $\mathfrak{G}$ corresponda al grafo subyacente de un orden parcial dirigido, se dirá que $D : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{K}$ es un **diagrama dirigido**.

Definición 4.2.11. Sea $\mathfrak{G}$ un grafo y $\mathfrak{C}$ una categoría. Un morfismo de la forma $D : \mathfrak{G}^- \rightarrow \mathfrak{C}$ se denomina **cono** del diagrama $D \upharpoonright \mathfrak{G}$, si para todo $f \in [a, b]_{\mathfrak{G}}$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & & D_a \\
 & \nearrow^{D(p_a)} & \downarrow D(f) \\
 D_{-\infty} & & \\
 & \searrow_{D(p_b)} & \\
 & & D_b
 \end{array}$$

Análogamente, un morfismo de la forma $D : \mathfrak{G}^+ \rightarrow \mathfrak{C}$ se denomina **co-cono** del diagrama $D \upharpoonright \mathfrak{G}$, si para todo $f \in [a, b]_{\mathfrak{G}}$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 D_a & & \\
 \downarrow D(f) & \searrow D(c_a) & \\
 & D_\infty & \\
 & \nearrow D(c_b) & \\
 D_b & &
 \end{array}$$

Definición 4.2.12. Sean $\mathfrak{G}$ un grafo y $\mathfrak{C}$ una categoría. Un diagrama $L : \mathfrak{G}^- \rightarrow \mathfrak{C}$ es denominado **límite** del diagrama $L \upharpoonright \mathfrak{G}$, si dado cualquier cono $D : \mathfrak{G}^- \rightarrow \mathfrak{C}$ tal que $D \upharpoonright \mathfrak{G} = L \upharpoonright \mathfrak{G}$, existe un único $\varphi \in [D_{-\infty}, L_{-\infty}]_{\mathfrak{C}}$ tal que $D(p_a) = L(p_a) \circ \varphi$, para todo $a \in G$ (como se ilustra en el diagrama).

$$\begin{array}{ccc}
 D_{-\infty} & \xrightarrow{\exists! \varphi} & L_{-\infty} \\
 \searrow D(p_a) & & \downarrow L(p_a) \\
 & & D_a
 \end{array}$$

Análogamente, un diagrama $C : \mathfrak{G}^+ \rightarrow \mathfrak{C}$ es denominado **co-límite** del diagrama $C \upharpoonright \mathfrak{G}$, si dado cualquier co-cono $D : \mathfrak{G}^+ \rightarrow \mathfrak{C}$ tal que $D(a) = C(a)$ (para todo $a \in G$) y $D(f) = C(f)$ (para todo $f \in F_G$), existe un único $\varphi \in [C_\infty, D_\infty]_{\mathfrak{C}}$ tal que $D(c_a) = \varphi \circ C(c_a)$, para todo $a \in G$ (como se ilustra en el diagrama).

$$\begin{array}{ccc}
 D_a & & \\
 \downarrow C(c_a) & \searrow D(c_a) & \\
 C_\infty & \xrightarrow{\exists! \varphi} & D_\infty
 \end{array}$$

4.3 Los croquis como manera de axiomatización.

Algunas operaciones lógicas se pueden expresar mediante límites y co-límites. Por esta razón, al presentar una categoría destacando algunos límites y co-

límites, se estaría en cierta manera considerando una teoría.

Definición 4.3.1. Un **croquis** es una cuádrupla de la forma $\mathcal{S} := (\mathfrak{S}, D_{\mathcal{S}}, L_{\mathcal{S}}, C_{\mathcal{S}})$, donde $\mathfrak{S}$ es un grafo (el cual se denominará **grafo subyacente**), $D_{\mathcal{S}}$ una clase de condiciones de conmutatividad en $\mathfrak{S}$ (denominado los **diagramas** de $\mathcal{S}$), $L_{\mathcal{S}}$ una clase de conos en $\mathfrak{S}$ (que se llamará los **conos** (límites) de $\mathcal{S}$) y $C_{\mathcal{S}}$ una clase de co-conos en $\mathfrak{S}$ (denominado los **co-conos** (co-límites) de $\mathcal{S}$).

Si la unión disyunta de $D_{\mathcal{S}}$, $L_{\mathcal{S}}$ y $C_{\mathcal{S}}$ es un conjunto, se dice que el croquis $\mathcal{S}$ es **pequeño**.

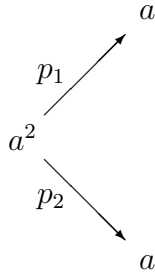
Se dice que $\mathcal{S} := (\mathfrak{S}, D_{\mathcal{S}}, L_{\mathcal{S}}, C_{\mathcal{S}})$ es un croquis **normal**, si y solo si, el grafo $\mathfrak{S}$ es el subyacente a una categoría $\mathfrak{C}$, cada cono en $L_{\mathcal{S}}$ es límite en $\mathfrak{C}$, y cada co-cono en $C_{\mathcal{S}}$ es co-límite en $\mathfrak{C}$.

Ejemplo 4.3.2. Sea $\mathfrak{C}$ la categoría definida de la siguiente manera:

$ob(\mathfrak{C}) := \{a, a^2\}$, $[a, a]_{\mathfrak{C}} := \{id_a\}$, $[a^2, a^2]_{\mathfrak{C}} := \{id_{a^2}\}$ y $[a^2, a]_{\mathfrak{C}} := \{\circ, p_1, p_2\}$.

Sea $\mathfrak{G} = (G, F_G, or_{\mathfrak{G}}, fin_{\mathfrak{G}})$ un grafo donde $G := \{x, y\}$ y $F_G := \emptyset$ (por lo tanto $or_{\mathfrak{G}} = fin_{\mathfrak{G}} = \emptyset$).

Consideramos el morfismo de grafos $H : \mathfrak{G}^- \rightarrow \mathfrak{C}$, donde $H_x = H_y = a$, $H_{-\infty} = a^2$, $H(p_x) = p_1$ y $H(p_y) = p_2$ (como se ilustra en la figura de abajo).



De esta manera, consideramos el croquis $\mathcal{S} := (\mathfrak{C}, D, L, C)$, con $D := \emptyset$, $C := \emptyset$ y $L = \{H\}$.

Como se había dicho anteriormente, presentar una categoría destacando ciertos límites y co-límites se está considerando, en cierta manera, una teoría. Pero esto precisamente se hace al considerar una categoría que “calque”, mediante un functor, las condiciones de conmutatividad, los límites y los co-límites que están detallados en un croquis. Es decir, el croquis está haciendo las veces de “teoría” y el functor considerado está haciendo las veces de “modelo”.

Definición 4.3.3. Sea $\mathcal{S} := (\mathfrak{S}, D, L, C)$ un croquis. Considerando el grafo subyacente de una categoría $\mathfrak{C}$, se dice que el morfismo $F : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{C}$ es un **$\mathfrak{C}$ -modelo** del croquis $\mathcal{S}$ si y solo si:

1. La imagen mediante F de una condición de conmutatividad en D , forma un diagrama conmutativo en $\mathfrak{C}$.
2. Para todo cono $H \in L$, $F \circ H$ es límite en $\mathfrak{C}$.
3. Para todo co-cono $J \in C$, $F \circ J$ es co-límite en $\mathfrak{C}$.

Un **modelo** es por definición un *Con*-modelo.

Ejemplo 4.3.4. Consiremos el croquis del ejemplo 4.3.2.

Un modelo $F : \mathfrak{C} \rightarrow \text{Con}$ de dicho croquis $\mathcal{S} = (\mathfrak{C}, \emptyset, \{H\}, \emptyset)$, está describiendo un álgebra. En efecto:

Puesto que $F \circ H$ es límite en *Con*, entonces se tiene que $F(a^2) = F(a) \times F(a)$, además de que $F(p_1)$ y $F(p_2)$ son las respectivas proyecciones.

$$\begin{array}{c} & & F(a) \\ & \nearrow^{F(p_1)} & \\ F(a^2) & & \\ & \searrow_{F(p_2)} & \\ & & F(a) \end{array}$$

Por lo tanto, $F(\circ) \in [F(a^2), F(a)]_{\text{Con}}$ corresponde a una operación binaria en $F(a)$.

Si consideramos en D' la siguiente condición de conmutatividad:

$$\begin{array}{ccc} a^2 & & \\ p_1 \downarrow & \searrow p_2 & \\ a & \xrightarrow{id_A} & a \end{array}$$

un functor que sea modelo del croquis $\mathcal{S}' = (\mathfrak{C}, D', \{H\}, \emptyset)$ estará codificando un álgebra cuyo universo tiene un solo elemento.

4.4 La lógica multisortada.

Un inconveniente de la lógica de primer orden, es el no poder considerar funciones como:

1. El producto por escalar considerado en un espacio vectorial.
2. La métrica considerada en un espacio métrico.

Esto debido a que solo se consideran funciones de tipo $f : G^i \rightarrow G$ (i algún ordinal y G un conjunto).

Pero precisamente, la lógica multisortada considera funciones como las descritas en los numerales 1. y 2.

Definición 4.4.1. Un **lenguaje** en la lógica multisortada está conformado por un conjunto de símbolos de relación (R^L), un conjunto de símbolos de función (F^L) y un conjunto de suertes (S^L).

A cada $R \in R^L$, se le asocia una función $\alpha(R) : \mu_R \rightarrow S^L$ (μ_R ordinal) (la cual se denominará **aridad** de R).

Análogamente, a cada $f \in F^L$, se le asocian una función $\alpha(f) : \mu_f \rightarrow S^L$ (μ_f ordinal) (la cual se denominará **aridad** de f) y un **valor suerte** $s_f \in S^L$.

Ejemplo 4.4.2. En este capítulo, va a ser importante el siguiente lenguaje (que se denotará por $L(\mathfrak{S})$):

Tomando un grafo pequeño $\mathfrak{S} := (S, F_S, or_{\mathfrak{S}}, fin_{\mathfrak{S}})$, se definen $S^{L(\mathfrak{S})} := S$ y $F^{L(\mathfrak{S})} := F_S$, donde la aridad asociada a cada $f \in [a, b]_{\mathfrak{S}}$ es la función

$$\begin{aligned} \alpha(f) : \{0\} &\rightarrow S^{L(\mathfrak{S})} \\ 0 &\mapsto a \end{aligned}$$

y el valor suerte de f es $s_f := b$.

No se considerarán símbolos de relación (es decir, $R^{L(\mathfrak{S})} := \emptyset$).

En la lógica de primer orden, primero se definía lo que iba a ser un término, para luego a partir de estos, comenzar a construir las fórmulas. A cada variable se le asociará una suerte. Análogamente, como en la lógica de primer orden, se combinan de forma adecuada símbolos de función con variables, pero teniendo en cuenta que se está trabajando con varios tipos de variables (pues pueden tener suertes distintas), y luego se combinan adecuadamente funciones con términos.

Definición 4.4.3. Sean $L = (R^L, F^L, S^L)$ un lenguaje en la lógica multisortada, y X un conjunto de pares ordenados tales que:

1. $(v, s) \in X$ para cada variable v con suerte s .
2. Si $f \in F^L$ tiene aridad $\alpha(f) : \mu_f \rightarrow S^L$ y valor suerte s_f , y siendo $t : \mu_f \rightarrow X$ una función tal que la segunda coordenada de $t(i)$ es $\alpha(f)(i)$ para cada $i < \mu_f$, entonces $((f, t), s_f) \in X$.

Si $(t, s) \in X$, a t se le denomina **L -término**, y a s valor suerte de t .

A la colección de L -términos lo denotamos por $Term(L)$.

Una variable v de suerte s se denotará por v_s .

Lo que nos dice la primera condición es que toda variable es término; la segunda condición nos dice que, “evaluando” adecuadamente términos en símbolos de función, tenemos un nuevo término.

Definición 4.4.4. Una **fórmula atómica** en un lenguaje $L = (R^L, F^L, S^L)$ de la lógica multisortada, es un par ordenado donde:

1. La primera componente es algún $R \in R^L$, o es el símbolo de igualdad $(=)$.
2. La segunda componente es: En el primer caso, una función $t : \mu_R \rightarrow Term(L)$ donde $t(i)$ es un L -término con valor suerte $\alpha(R)(i)$ ($i < \mu_R$); en el segundo caso cualquier conjunto $\{t_1, t_2\}$, donde t_1 y t_2 son términos con el mismo valor suerte.

Si $\alpha(R) : n \rightarrow S^L$ ($n < \omega$) es la aridad de $R \in R^L$ y $t : n \rightarrow \{t_0, \dots, t_{n-1}\}$ es tal que cada $t(i) := t_i$ ($i < n$) es un L -término con valor suerte $\alpha(R)(i)$, para simplificar la notación puede escribirse $R(t_0 \cdots t_{n-1})$ en vez de (R, t) .

Si t_1, t_2 son L -términos con igual valor suerte, se denota por $t_1 = t_2$ a la pareja $(=, \{t_1, t_2\})$.

Las reglas básicas (dadas muy informalmente) para la formación de fórmulas en $L_{\infty, \infty}$ (L lenguaje en la lógica multisortada) son las siguientes: Las fórmulas en $L_{\infty, \infty}$ se construyen usando fórmulas atómicas y los siguientes operadores:

$$\neg, \rightarrow, \bigvee, \bigwedge, \forall \text{ y } \exists,$$

donde $\bigwedge$ y $\bigvee$ es aplicado a conjuntos de fórmulas, $\rightarrow$ es aplicado a dos fórmulas, $\neg$ es aplicado a una fórmula, y $\forall$ y $\exists$ es aplicado a un conjunto de variables y a una fórmula.

Siendo Σ un conjunto de fórmulas, se denota la conjunción de Σ por $\bigwedge \Sigma$, y la disyunción de Σ mediante $\bigvee \Sigma$.

$\square\{\varphi, \psi\}$ ($\square \in \{\bigvee, \bigwedge\}$) es denotado por $\varphi \square \psi$.

Siendo $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ un conjunto de fórmulas, $\bigwedge\{\varphi_i\}_{i \in I}$ es denotado por $\bigwedge_{i \in I} \varphi_i$

($\bigvee\{\varphi_i\}_{i \in I}$ se denota análogamente).

La conjunción $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \forall x(\psi \rightarrow \varphi)$ es denotada por $\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Definición 4.4.5. Sea $L = (R^L, F^L, S^L)$ un lenguaje en la lógica multisortada. Una **L -estructura** $\mathfrak{A}$ es una asignación de un conjunto A_s para cada $s \in S^L$, junto a una relación $R^{\mathfrak{A}}$ “apropiada” para cada $R \in R^L$ y una función $f^{\mathfrak{A}}$ “apropiada” para cada $f \in F^L$ (la palabra “apropiada” hace referencia a que haya compatibilidad de las aridades de cada símbolo de relación y de función, con las relaciones y funciones consideradas como interpretaciones). Denotaremos una L -estructura por $\mathfrak{A} := (\{A_s\}_{s \in S^L}, \{R^{\mathfrak{A}}\}_{R \in R^L}, \{f^{\mathfrak{A}}\}_{f \in F^L})$.

Ejemplo 4.4.6. Siendo $\mathfrak{G}$ un grafo y $L(\mathfrak{G})$ el lenguaje multisortado asociado a $\mathfrak{G}$ (ver ejemplo 4.4.2), las estructuras sobre este lenguaje son los diagramas $D : \mathfrak{G} \rightarrow \text{Con}$ (ya que un diagrama de este tipo asigna un conjunto D_a a cada $a \in S$, y asigna una función de dominio D_a y codominio D_b , a cada $f \in [a, b]_{\mathfrak{G}}$).

Definición 4.4.7. Sean $\mathfrak{A} = (\{A_s\}_{s \in S^L}, \{R^{\mathfrak{A}}\}_{R \in R^L}, \{f^{\mathfrak{A}}\}_{f \in F^L})$ una L -estructura, φ una L -fórmula y a una función de Y (un conjunto de variables que contiene a las variables libres de φ) en $\bigcup_{s \in S} A_s$, que asigna a una variable v_s

un elemento $a(v_s) \in A_s$.

La noción de **semántica** en la lógica multisortada está dada por relación ternaria $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$, definida (de manera muy informal) de la siguiente manera:

1. Si φ una fórmula atómica, hay que considerar dos casos:
 - (a) Si φ es de la forma $t_1 = t_2$ ($t_1, t_2 \in \text{Term}(L)$ con mismo valor suerte s), se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$, si y solo si, al evaluar la tupla $(a(v_s))_{v_s \in \text{VarLib}(\varphi)}$ (de la manera “adecuada”) en $t_1^{\mathfrak{A}}$ y $t_2^{\mathfrak{A}}$, resulta el mismo elemento en A_s .

- (b) Si $\varphi := (R, t)$ para algún $R \in R^L$ (de aridad $\alpha(R) : \mu_R \rightarrow S^L$) y $t : \mu_R \rightarrow Term(L)$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$, si y solo si, la tupla $(a(v_s))_{v_s \in VarLib(\varphi)}$ evaluada “adecuadamente” en cada $t(i)$ ($i < \mu$), está en $R^{\mathfrak{A}}$.
- 2. Si $\varphi := \neg\psi$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$, si y solo si, no se tiene que $\mathfrak{A} \models \psi[a]$ (lo que se denota por $\mathfrak{A} \not\models \psi[a]$).
- 3. Si $\varphi := \bigwedge_{i \in I} \varphi_i$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$, si y solo si, $\mathfrak{A} \models \varphi_i[a]$ para todo $i \in I$.
- 4. Si $\varphi := \bigvee_{i \in I} \varphi_i$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$, si y solo si, existe $i \in I$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi_i[a]$.
- 5. Si $\varphi := \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$, si y solo si, ocurre por lo menos una de las siguientes situaciones:
 - (a) $\mathfrak{A} \not\models \varphi_1[a]$.
 - (b) $\mathfrak{A} \models \varphi_2[a]$.
- 6. Si $\varphi := \forall x(\psi)$ (con x conjunto de variables que contiene algunas variables libres de ψ), se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi$, si y solo si, para cualquier asignación $b : x \rightarrow \bigcup_{s \in S} A_s$ (con $b(v_s) \in A_s$) se tiene que $\mathfrak{A} \models \psi[b, a]$.
- 7. Si $\varphi := \exists x(\psi)$ (con x conjunto de variables que contiene algunas variables libres de ψ), se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi$, si y solo si, existe una asignación $b : x \rightarrow \bigcup_{s \in S} A_s$ (con $b(v_s) \in A_s$) tal que $\mathfrak{A} \models \psi[b, a]$.

Si φ es una sentencia (es decir, no tiene variables libres), se denota por $M \models \varphi$ al hecho de que $M \models \varphi[0]$ (donde 0 es la asignación vacía), y se define:

$$Mod^{(L)}(\varphi) := \{M \mid M \text{ es } L\text{-estructura y } M \models \varphi\}$$

.

Definición 4.4.8. Una fórmula **existencial positiva** (ó E.P.) es una fórmula construida a partir de fórmulas atómicas, y solo utilizando los operadores $\bigwedge$, $\bigvee$ y $\exists$ (no se admiten $\rightarrow$, $\forall$ ni $\neg$).

Una **sentencia básica** (ó S.B.) es una conjunción de sentencias de la forma $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$, donde φ y ψ son fórmulas E.P.

Lema 4.4.1. *Para todo grafo pequeño $\mathfrak{G}$ existe una sentencia básica (infinitaria) φ en el lenguaje $L(\mathfrak{G}^-)$ tal que un diagrama $D : \mathfrak{G}^- \rightarrow \text{Con}$ es un límite, si y solo si, $D \models \varphi$.*

Demostración. Un diagrama $D : \mathfrak{G}^- \rightarrow \text{Con}$ es límite de $D \upharpoonright \mathfrak{G}$, si y solo si, las siguientes condiciones se cumplen:

1. Sean $a, b \in G^-$. Dado $x \in D_a$, para cualquier $f \in [a, b]_{\mathfrak{G}^-}$ se tiene que $D(f)(x) = y$ (la imagen de x mediante cualquier función $D(f)$ es la misma), si y solo si, existe $z \in D_{-\infty}$ tal que $D(p_a)(z) = x$ (es decir, $D(f) \circ D(p_a)(z) = D(p_b)(z) = y$)
2. Sean $z, w \in D_{-\infty}$. Si para todo $a \in G$ se tiene que $D(p_a)(z) = D(p_a)(w)$, entonces $z = w$ (no hay objetos en $D_{-\infty}$ con iguales proyecciones).

Por lo tanto, al considerar la conjunción de las sentencias:

1. $\forall \{v_a \mid a \in G \cup \{-\infty\}\} \left(\bigwedge_{f \in [a, b]_{\mathfrak{G}}} f(v_a) = v_b \leftrightarrow \exists v_{-\infty} \bigwedge_{a \in G} p_a(v_{-\infty} = v_a) \right)$
(para cada $a, b \in G$)
2. $\forall v_{-\infty} \forall v'_{-\infty} \left(\bigwedge_{a \in G} (p_a(v_{-\infty}) = p_a(v'_{-\infty})) \rightarrow (v_{-\infty} = v'_{-\infty}) \right)$

se tiene el resultado. $\square$

Lema 4.4.2. *Dados $\mathfrak{G}$ un grafo y $D : \mathfrak{G}^+ \rightarrow \text{Con}$ un diagrama, existe una sentencia básica ψ tal que D es co-límite, si y solo si, $D \models \psi$.*

Demostración. Para que D sea el co-límite de $D \upharpoonright \mathfrak{G}$, debe cumplirse las siguientes condiciones (ver [ArMa], corolario 2.4.1):

1. Para todo $z \in D_{\infty}$, existe $x \in D_a$ (para algún $a \in G$) tal que $D(c_a)(x) = z$
2. Para todo $x \in D_a$ y todo $y \in D_b$ ($a, b \in G$ arbitrarios), se tiene la siguiente equivalencia:
 $D(c_a)(x) = D(c_b)(y)$, si y solo si, $a = b$ y $x = y$; o si existe $f \in [a, b]_{\mathfrak{G}}$ tal que $D(f)(x) = y$ (ó $D(f)(y) = x$); o si existen una sucesión $(x_0, \dots, x_n)$ (con $n < \omega$, $x_i \in D_{a_i}$, $x_0 = x$, $x_n = y$, $a_0 = a$ y $a_n = b$) y $f_i \in [a_i, a_{i+1}]_{\mathfrak{G}}$ (ó $f_i \in [a_{i+1}, a_i]_{\mathfrak{G}}$) ($i < n$) tales que $D(f_i)(x_i) = x_{i+1}$ (ó $D(f_i)(x_{i+1}) = x_i$).

El lema queda probado, al considerar la conjunción de las siguientes dos fórmulas:

1. $\forall v_\infty \bigwedge_{a \in G} \exists v_a (c_a(v_a) = v_\infty)$
2. $\forall v_a \forall v_b (c_a(v_a) = c_b(v_b) \leftrightarrow \phi_{a,b}^\infty(v_a, v_b))$

donde:

$$\phi_{a,b}^\infty(v_a, v_b) := \bigvee_{\substack{n \in \mathbb{N}^+, a_i \in G \ (i \leq n) \\ a_0 = a, a_n = b}} \exists u_{a_0}^0 \cdots u_{a_n}^n (v_a = u_{a_0}^0 \wedge v_b = u_{a_n}^n \wedge \\ \bigwedge_{i < n} \phi_{a_i, a_{i+1}}(u_{a_i}^i, u_{a_{i+1}}^{i+1}))$$

siendo:

$$\phi_{a,b}(v_a, v_b) := \left((v_a = v_b) \vee \bigvee_{f \in [a,b]_{\mathfrak{G}}} (f(v_a) = v_b) \vee \bigvee_{f \in [b,a]_{\mathfrak{G}}} (f(v_b) = v_a) \right)$$

□

Definición 4.4.9. Sean μ y λ cardinales, con $\lambda \leq \mu$. $L_{\mu,\lambda}$ es el conjunto de fórmulas $L_{\infty,\infty}$ tal que contiene las fórmulas atómicas, y es cerrado bajo conjunción y disyunción de conjuntos con cardinal menor que μ , y cuantificación sobre conjuntos con cardinal menor que λ .

$L_{\mu,\lambda}^*$ es definida como la clase de fórmulas en $L_{\mu,\lambda}$, que son conjunciones de menos de λ fórmulas.

Definición 4.4.10. Dado un croquis $\mathcal{S} = (\mathfrak{S}, D, L, C)$ pequeño, se define el **tamaño límite** (denotado por $\lambda_{\mathcal{S}}$) como el menor cardinal infinito regular mayor que $|G^-|$ (para todo grafo $\mathfrak{G} = (G, F_G, or_{\mathfrak{G}}, fin_{\mathfrak{G}})$ que sea codominio de un cono en L).

El **tamaño máximo** de $\mathcal{S}$ (denotado por $\mu_{\mathcal{S}}$, es el menor cardinal infinito regular, mayor que los siguientes cardinales: $\lambda_{\mathcal{S}}$, $|S|$, $|C|$ y $|G^+|$ (para todo $\mathfrak{G} = (G, F_G, or_{\mathfrak{G}}, fin_{\mathfrak{G}})$ que sea dominio de un co-cono en C).

Lema 4.4.3. Sea $\mathcal{S}$ un croquis pequeño, con grafo subyacente $\mathfrak{S}$. Entonces $Mod(\mathcal{S}) = Mod^{(L)}(\sigma_{\mathcal{S}})$, para L el lenguaje dado por el grafo $\mathfrak{S}$, y para una sentencia básica $\sigma_{\mathcal{S}}$ en $L_{\mu^+, \lambda}^*$ (con $\mu = \mu_{\mathcal{S}}$ y $\lambda = \lambda_{\mathcal{S}}$).

Demostración. Siendo $d = (f, g)$ una condición de conmutatividad en D (con $f = a \xrightarrow{f_1} a_1 \xrightarrow{f_2} \cdots a_{n-1} \xrightarrow{f_n} b$, $g = a \xrightarrow{g_1} b_1 \xrightarrow{g_2} \cdots \xrightarrow{g_{m-1}} b_{m-1} \xrightarrow{g_m} b$), se define φ_d por:

$$\forall v_a [a_n(a_{n-1}(\cdots a_2(a_1(v_a)) \cdots)) = b_m(b_{m-1}(\cdots b_2(b_1(v_a)) \cdots))]$$

De esta manera, $M : \mathfrak{S} \rightarrow \text{Con}$ satisface φ_d , si y solo si, la imagen de la condición de conmutatividad mediante M es un diagrama conmutativo en Con .

Por cada cono $H : \mathfrak{G}^- \rightarrow \mathfrak{S}$ en D , por el lema 4.4.1 se tiene que existe una sentencia básica ψ_H (pero en $L(G^-)$) tal que $M \circ H$ es límite en Con si y solo si $M \circ H \models \psi_H$ (con $M : \mathfrak{S} \rightarrow \text{Con}$ un diagrama). Obteniendo φ_H al reemplazar en ψ_H cada variable v_a de suerte a por una de suerte D_a (dos variables distintas con la misma suerte, se reemplazan por variables distintas) y cada símbolo de función $f \in F_G$ por $D(f)$, se tiene que para un diagrama $M : \mathfrak{S} \rightarrow \text{Con}$, $M \models \varphi_H$ si y solo si $M \circ H$ es un límite en Con .

De igual manera, para un co-cono $J : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{G}^+$ en C se le asocia una sentencia φ_J en $L(\mathfrak{S})$ (pero utilizado el lema 4.4.2).

La conjunción $\sigma_{\mathcal{S}}$ de las sentencias construidas, muestra que $M : \mathfrak{S} \rightarrow \text{Con}$ satisface $\sigma_{\mathcal{S}}$, si y solo si, para cada condición de conmutatividad d en $\mathfrak{S}$ su imagen mediante M es un diagrama conmutativo en Con , para cada H cono (en $\mathfrak{S}$) $M \circ H$ es límite en Con , y para cada J co-cono (en $\mathfrak{S}$) $M \circ J$ es co-límite en Con : Es decir, M es un modelo de $\mathcal{S}$.

De la manera como se definieron μ_s y λ_s , es evidente que $\sigma_{\mathcal{S}} \in L_{\mu_s^+, \lambda_s}^*$. $\square$

En el anterior lema, a partir de un croquis se armó una sentencia básica, donde los modelos del croquis son exactamente los modelos de la sentencia.

Observación 4.4.11. Los modelos de una teoría se pueden ver como una categoría, cuyos objetos son las estructuras que satisfacen la teoría y cuyos morfismos son los homomorfismos entre ellas (una familia de funciones, indexada por el conjunto de suertes, que preservan la estructura); y los modelos de un croquis se pueden ver como una categoría cuyos objetos son los modelos del croquis, y los morfismos son transformaciones naturales entre ellos.

El siguiente resultado realiza lo recíproco del lema anterior: Armar un croquis a partir de una sentencia básica, donde la categoría de los modelos del croquis es equivalente a la categoría de los modelos de la sentencia.

No presentamos la prueba de este resultado, ya que es un poco larga y tediosa, y nos podríamos desviar de nuestro objetivo. Pero aquellos lectores interesados, pueden consultar [Pr]

Hecho 4.4.4. *Dada una sentencia básica φ en un lenguaje multisurtido L , existe un croquis S_φ tal que $\text{Mod}(S_\varphi) \equiv \text{Mod}^{(L)}(\varphi)$.*

Referencia. [Pr], lema 2.3. □

De este hecho y del lema 4.4.3, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 4.4.5. *Dada una categoría $\mathfrak{C}$, son equivalentes:*

1. *Existe un croquis pequeño $\mathcal{S}$ tal que $\mathfrak{C}$ es equivalente a $\text{Mod}(\mathcal{S})$.*
2. *Existen L lenguaje multisurtido y φ L -sentencia básica, tales que $\mathfrak{C}$ es equivalente a $\text{Mod}^{(L)}(\varphi)$.*

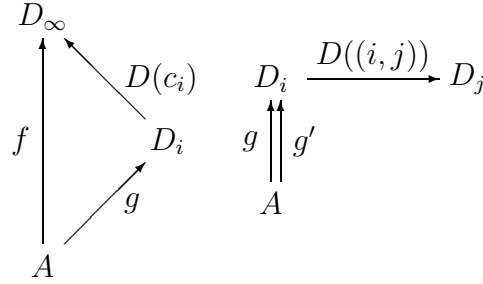
4.5 Representación en categorías.

Definición 4.5.1. Sea κ un cardinal regular infinito. Un orden parcial $(I, \leq)$ se dice **κ -dirigido**, si y solo si, todo $J \in [I]^{<\kappa}$ tiene una cota superior en I . Un diagrama $D : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{C}$, donde $\mathfrak{G}$ corresponde al grafo adyacente a un orden parcial κ -dirigido, se dice que es un **digrama κ -dirigido**.

Un co-límite de un diagrama κ -dirigido, es denominado **co-límite κ -dirigido**.

Definición 4.5.2. Sean $\mathfrak{C}$ una categoría y κ un cardinal regular infinito. Un objeto $A \in \text{ob}(\mathfrak{C})$ se dice **κ -presentable**, si y solo si, dados $D : \mathfrak{J}^+ \rightarrow \mathfrak{C}$ diagrama (con $D \upharpoonright \mathfrak{J}$ κ -dirigido y D co-límite de $D \upharpoonright \mathfrak{J}$) y $f \in [A, D_\infty]_{\mathfrak{C}}$, existe $i \in \text{ob}(\mathfrak{J})$ tal que:

1. Existe $g \in [A, D_i]_{\mathfrak{C}}$ para el cual $f = D(c_i) \circ g$.
2. La anterior factorización es esencialmente única, en el sentido de que si $f = c_i \circ g = c_i \circ g'$, entonces existe $j \geq i$ en $\text{ob}(\mathfrak{J})$ tal que $D((i, j)) \circ g = D((i, j)) \circ g'$



Ejemplo 4.5.3. Los objetos κ -presentables en Con , son los conjuntos de cardinal menor (estricto) que κ . En efecto:

Supongamos que A es κ -presentable. Se tiene que A es co-límite del diagrama κ -dirigido inducido por el orden $([A]^{<\kappa}, \subseteq)$ (donde la función $D(c_B) : B \rightarrow A$ considerada, para $B \in [A]^{<\kappa}$, es la inclusión). Por lo tanto, al considerar la función idéntica $id_A : A \rightarrow A$, se puede factorizar a través de $D(c_B)$ para algún $B \in [A]^{<\kappa}$. Es decir: existe $B \in [A]^{<\kappa}$ y $g : A \rightarrow B$, tal que $id_A = D(c_B) \circ g$. Pero g es inyectiva (siendo $a, b \in A$ tal que $g(a) = g(b)$, se tiene que $a = id_A(a) = D(c_B)(g(a)) = D(c_B)(g(b)) = id_A(b) = b$), luego $|A| \leq |B| < \kappa$.

Recíprocamente, si $|A| < \kappa$, considérese $D : \mathfrak{J}^+ \rightarrow Con$ diagrama donde $D \upharpoonright \mathfrak{J}$ es κ -dirigido y D es co-límite de $D \upharpoonright \mathfrak{J}$.

Sea $f : A \rightarrow D_\infty$. Siendo $x \in A$, existe $i_x \in ob(\mathfrak{J})$ tal que $f(x) \in D(c_{i_x})(D_{i_x})$ (por las propiedades de los co-límites en Con , ver [ArMa], corolario 2.4.19). Puesto que $\mathfrak{J}$ es el grafo adyacente a un orden parcial κ -dirigido, existe una cota superior para $\{i_x \mid x \in A\}$ (puesto que $|A| < \kappa$), la cual denotaremos por i .

Por lo tanto, $f(A) \subseteq D(c_i)(D_i)$, de donde podemos definir $g(x) \in D_i$ como algún $y \in D_i$ tal que $f(x) = D(c_i)(y)$.

De esta manera se tiene que $f(x) = D(c_i)(y) = D(c_i)(g(x))$ (es decir, f es factorizado a través de $D(c_i)$).

Esta factorización es esencialmente única: Por el comportamiento de los co-límites de un diagrama κ -dirigido (el cual es en particular un diagrama dirigido), se tiene que si $D(c_i)(y) = D(c_j)(z)$, entonces existe k cota superior de $\{i, j\}$ tal que $D((i, k))(y) = D((j, k))(z)$ (ver [AdRo], ejercicio 1.a).

De esto, si se tiene que existen $g, g' : A \rightarrow D_i$ tales que $f = D(c_i) \circ g = D(c_i) \circ g'$, existe $j \geq i$ tal que $D((i, j)) \circ g = D((i, j)) \circ g'$.

Por lo tanto, A es κ -presentable.

Por esta razón, un objeto κ -presentable, a menudo es denominado objeto κ -pequeño.

En los teoremas vistos en los capítulos anteriores, se había visto que una clase de estructuras cerrada bajo ciertas construcciones algebraicas, es axiomatizable. Ejemplo de estas construcciones, son las uniones de cadenas (las cuales son co-límites en Con).

Definición 4.5.4. Sea κ un cardinal regular infinito. Una categoría pequeña $\mathfrak{C}$ se dice **κ -accesible**, si y solo si:

1. Cada diagrama $D : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{C}$ κ -dirigido, puede extenderse a un diagrama $D^* : \mathfrak{G}^+ \rightarrow \mathfrak{C}$ que es co-límite de D .
2. Existe un conjunto $\mathcal{A}$ de objetos κ -presentables en $\mathfrak{C}$, donde para cada objeto $A \in ob(\mathfrak{C})$, existe un orden parcial κ -dirigido $\mathfrak{I}$, y un diagrama $D : \mathfrak{I}^+ \rightarrow \mathfrak{C}$ con $D_\infty = A$ y $D_i \in \mathcal{A}$ para cada $i \in ob(\mathfrak{I})$, que es co-límite de $D \upharpoonright \mathfrak{I}$ (es decir, cada $A \in ob(\mathfrak{C})$ es un co-límite κ -dirigido de objetos κ -presentables en $\mathfrak{C}$)

Una categoría se dice **accesible**, si y solo si, es κ -accesible para algún κ cardinal regular infinito.

Ejemplos 4.5.5. 1. Sea $\mathcal{K}$ una CEA, con $LS(\mathcal{K}) = \lambda$.

Denotemos por $\mathfrak{K}$ a la categoría inducida por el orden $(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$.

En esta categoría, un diagrama κ -dirigido (κ cardinal regular infinito) corresponde a un sistema κ -dirigido y un co-límite de este tipo de diagrama es la unión de las estructuras del sistema κ -dirigido.

Tomando $\kappa := \lambda^+$, se tiene que $\mathfrak{K}$ es una categoría κ -accesible. En efecto: Un diagrama κ -dirigido en $\mathfrak{K}$, es en particular un diagrama dirigido (lo cual en este caso corresponde a un sistema dirigido). Por ser $\mathcal{K}$ cerrado bajo la unión de las estructuras de un sistema dirigido (lema 3.2.2), $\mathfrak{K}$ es cerrada bajo co-límites κ -dirigidos.

Por otro lado, siendo $\mathfrak{A} \in \mathfrak{K}$, $(\|\mathfrak{A}\|^{<\kappa}, \subseteq)$ es un orden parcial κ -dirigido. Tomando $\bar{a} \in \|\mathfrak{A}\|^\kappa$, se tiene que existe $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \in \mathfrak{K}$ tal que $\bar{a} \subseteq \mathfrak{A}_{\bar{a}}$, $\|\mathfrak{A}_{\bar{a}}\| \leq |\bar{a}| + \lambda + \aleph_0 < \kappa$ (axioma A3, definición 3.1.1).

Se tiene que $\mathfrak{A}$ es el co-límite del diagrama definido por $\{\mathfrak{A}_{\bar{a}} \mid \bar{a} \in \|\mathfrak{A}\|^{<\kappa}\}$.

Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ es tal que $\|\mathfrak{A}\| < \kappa$ (κ cardinal regular infinito), se tiene que

en esta categoría, $\mathfrak{A}$ es κ -presentable. En efecto, si dado un sistema κ -dirigido $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ se tiene que $\mathfrak{A} \prec_{\kappa} \bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, para cada $x \in |\mathfrak{A}|$ existe $i_x \in I$ tal que $x \in \mathfrak{A}_{i_x}$. Pero $\{i_x \mid x \in |\mathfrak{A}|\}$ tiene una cota superior en I (que llamaremos i), por ser I κ -dirigido y $\|\mathfrak{A}\| < \kappa$. Por lo tanto, $\mathfrak{A} \prec_{\kappa} \mathfrak{A}_i$, luego se tiene que $\mathfrak{A}$ es κ -presentable (no hace falta verificar la condición de la “unicidad”, ya que en esta categoría entre dos objetos a lo más hay un morfismo). Por lo tanto, cada $\mathfrak{A}_{\bar{a}}$ es κ -presentable en $\mathfrak{K}$.

2. Dado un orden parcial κ -dirigido $(I, \leq)$, donde $\lambda := |I|$, la categoría inducida $\mathfrak{J}$ es κ -accesible para todo $\kappa' > \lambda$ infinito regular.
3. Siendo $\mathfrak{C}$ categoría pequeña, la categoría $\text{Funct}(\mathfrak{C}, \text{Con})$ (cuyos objetos son los funtores de $\mathfrak{C}$ en Con y los morfismos son las transformaciones naturales) es ω -accesible, ya que es cerrada bajo co-límites dirigidos (es cerrada bajo cualquier co-límite, ver [AdRo], ejemplo 1.12) y cada objeto es co-límite dirigido de objetos representables (F es representable, si y solo si, es isomorfo a algún H^A , $A \in \text{ob}(\mathfrak{C})$, en $\text{Funct}(\mathfrak{C}, \text{Con})$), donde los objetos representables son ω -presentables.
Este es un ejemplo de una categoría que es accesible, y que no es necesariamente una CEA.

El primer teorema de representación en este contexto, que nos interesa destacar, es el siguiente:

Teorema 4.5.1. *Toda categoría accesible es equivalente a la categoría de modelos de un croquis normal.*

Referencia. [AdRo], teorema 2.58 □

Gracias al teorema 4.4.5 y al teorema anterior, se tiene que una categoría accesible es equivalente a la categoría de modelos de una sentencia básica. Esta dirección es la que nos interesaba estudiar. Adicionalmente, contamos con un resultado de doble vía, en este contexto:

Teorema 4.5.2. *Las categorías accesibles son exactamente las categorías equivalentes a las categorías de modelos de alguna teoría básica.*

Referencia. [AdRo], teorema 5.35 □

En el primer capítulo, vimos el resultado de Birkhoff en Álgebra Universal que muestra que las *variedades* son las clases elementales en este contexto. Pero aquí excluimos de los lenguajes considerados, los símbolos de relación.

En el segundo capítulo, estudiamos una caracterización de las *clases elementales*, en la lógica de primer orden $L_{\omega,\omega}$. Se observó que las clases elementales son exactamente las clases que son cerradas bajo ultraproductos, ultraraíces e isomorfismos. A diferencia del primer capítulo, aquí se consideraron los símbolos de relación.

En el tercer capítulo, se generalizó el concepto de clase elemental, mediante la noción de *clase elemental abstracta* (CEA), “destacando” algunas características que estas presentan. Pero la axiomatización de una CEA difiere un poco de las anteriores, ya que no se hará mediante la satisfacción de una teoría, sino mediante la omisión de una cierta colección de tipos.

Por otro lado, una CEA es cerrada bajo uniones de sistemas dirigidos. Además, cada estructura de una CEA (con número de Löwenheim-Skolem λ) se puede ver como la unión de un sistema λ^+ -dirigido de estructuras de tamaño $\leq \lambda$. Estas construcciones se pueden generalizar dentro del contexto de la Teoría de Categorías (como se observó en este capítulo) mediante la noción de *Categoría Accesible*.

Es este sentido, el último resultado mencionado en este capítulo, es una generalización de los resultados vistos a lo largo del presente trabajo.

Capítulo 5

Algunas regularidades encontradas

Es este trabajo, entendemos por **representación axiomática** de una clase de estructuras, la descripción de dicha clase, como una clase de estructuras que tiene un comportamiento similar a la clase de modelos de una teoría, ó similar a la clase de modelos que omiten una colección de tipos.

A continuación, presentaremos algunas regularidades que se encontraron, en las pruebas de los resultados estudiados en este trabajo.

1. Sin importar el contexto, la clase debe ser cerrada bajo ciertas construcciones algebraicas (en el caso de las álgebras, debe ser una variedad; en el caso de la lógica de primer orden, debe ser cerrada bajo ultraproductos, ultraraíces e isomorfismos; en el caso de las CEA's, la cerradura que más sobresale es la que hay bajo uniones de cadenas; y en el caso categórico, debe ser cerrada bajo co-límites).
2. La teoría natural a tomar, es el conjunto de aquellas “sentencias” (dependiendo del contexto) que son satisfechas en todas las estructuras de la clase. En el caso de las CEA's, se tomó una colección de tipos que son omitidos por alguna expansión de cada una de las estructuras de la clase.
3. Forma de atacar estas demostraciones: todas las pruebas tienen una construcción genérica, que codifica la noción de “verdad” en cada contexto, de manera “algebraica”.

Por ejemplo, en el contexto de las álgebras, se considera el álgebra libre; en la lógica de primer orden, se considera las ultrapotencias (codifica la noción de equivalencia elemental, mediante el teorema de Keisler-Shelah); en las CEA's se considera la Skolemización de las estructuras; y en el contexto categórico, se consideran los croquis.

Definido lo que es una estructura en el contexto dado, se definen las construcciones algebraicas que se van a considerar (las cerraduras que se van a pedir). Hecho esto, se considera la construcción que va a codificar la noción de “verdad”. Luego, viene la prueba del resultado, considerando la teoría ó colección de tipos (según el caso) natural.

Bibliografía

- [AdRo] Adamek, Jiri y Rosicky, Jiri, *Locally presentable and accesible categories*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [ArMa] Arbib, Michael y Manes, Ernest, *Arrows, structures and functors*, Academic Press, Inc., London, 1975.
- [BuSa] Burris, Stanley y Sankappanavar, H.P., *A course in universal algebra*, Springer - Verlag, New York, 1981.
- [ChKe] Chang, C.C. y Keisler, H.J., *Model theory*, North Holland, Amsterdam, 1990
- [Cohn] Cohn, Paul M., *Universal algebra*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1981.
- [Ga] Gabbay, Dov, *Semantical investigation in Heyting's intuitionistical logic*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1981.
- [Gu] Gumm, H. Peter, *Elements of general theory of coalgebras*, preliminary version, <http://www.mathematik.uni-marburg.de/~gumm>
- [HeIo] Henson. C. Ward y Iovino, José, *Ultraproducts in Analysis*, Analysis in logic, Cambridge University Press, Cambridge, 2002
- [MTL] Makowsky, J. A., *Abstract Embedding Relations*, Model - theoretic logics, ed. por Jon Barwise y Solomon Feferman, Springer - Verlag, New York, 1985.
- [Pr] Prieto, Leonardo, *Accesibilidad de las categorías de espacios de Banach y de Hilbert*, Trabajo de grado, Universidad Nacional de Colombia, Santafe de Bogotá, 1995

Índice de Materias

- $\sim_D$, 19
- $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, 5
- $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, 5
- F -coálgebra, 15
- f_D , 20
- $H(\mathcal{K})$, 5
- $I(\mathcal{K})$, 5
- $\mathcal{K} \in ECOT$, 39
- $\mathcal{K} \in PCOT$, 40
- $\mathcal{K} \models \Sigma$, 2
- $ker(h)$, 5
- $MOT(T, \Gamma)$, 39
- $Mod(\Sigma)$, 12, 17
- $P(\mathcal{K})$, 5
- $PC_{\tau_0}(T, \Gamma)$, 40
- $S(\mathcal{K})$, 5
- $V(\mathcal{K})$, 6
- álgebra
 - cociente, 4
 - de términos, 3
 - libre, 5
- álgebras
 - clase ecuacional, 12
 - congruencia en, 3
 - cuasivariiedad, 13
 - definición, 1
 - homomorfismo, 5
 - kernel de un, 5
 - identidad, 2
 - isomorfismo de, 5
 - operaciones, 2
 - producto directo
 - definición, 4
 - operaciones, 4
 - propiedad universal de extensión de funciones, 7
 - satisfacción de identidades, 2
 - universo, 2
 - variedad, 6
 - variedad generada, 6
- anillo, 3
- aridad
 - símbolo de función
 - lógica multisortada, 56
 - lenguaje de álgebras, 1
 - símbolo de relación
 - lógica multisortada, 56
- categoría, 46
 - κ -accesible, 65
 - accesible, 65
 - Cat , 49
 - composición, 47
 - Con , 47
 - de categorías pequeñas, 49
 - diagrama
 - κ -dirigido, 63
 - co-límite, 53
 - co-límite κ -dirigido, 63
 - cono, 52

- dirigido, 52
 - límite, 53
- functor, 48
- Grp, 47
- isomorfismo en una categoría, 50
- morfismos, 47
- objeto κ -presentable, 63
- objetos, 46
- objetos isomorfos, 50
- categorías equivalentes, 50
- categorías isomorfas, 50
- CEA, 38
 - número de Löwenheim-Skolem, 39
- clase básica compacta, 14
- clase cláusula-definible, 13
- clase elemental, 17
 - que omite tipos, 39
- clase elemental abstracta, 38
- clase Horn-definible, 13
- clase PC, 40
- clase proyectiva
 - que omite tipos, 40
- cláusula infinitaria, 13
- co-álgebra, 15
- conjunto de índices, 20
- croquis, 54
 - normal, 54
 - pequeño, 54
 - tamaño límite, 61
 - tamaño máximo, 61
- diagrama
 - pequeño, 52
- dirigido
 - orden parcial, 41
 - sistema, 41
- estructura
 - de espacios normados, 29
 - intuicionista, 34
- filtro, 18
 - de Fréchet, 19
 - generado, 19
 - impropio, 19
 - principal, 19
 - propio, 19
 - trivial, 19
- fórmula existencial positiva, 59
- fórmula infinitaria de Horn, 13
- grafo, 50
 - camino, 51
 - vacío, 51
 - co-cono, 52
 - condición de conmutatividad, 51
 - cono, 52
 - flechas, 50
 - morfismo, 51
 - pequeño, 50
 - subyacente a una categoría, 50
 - vértices, 50
- grupo, 2
 - abeliano, 2
- homomorfismo, 18
- isomorfismo, 18
- κ -dirigido
 - orden parcial, 63
- lenguaje, 56
- lenguaje de álgebras, 1
- lógica multisortada
 - fórmula atómica, 57
 - lenguaje, 56

- L -estructura, 58
 - semántica, 58
- modelo
 - de un croquis, 55
- PIF, 19
- producto reducido
 - de conjuntos, 20
 - de modelos, 20
- propiedad de la intersección finita, 19
- sentencia básica, 59
- subálgebra, 5
- teoría de grupos, 40
- teorema
 - de Birkhoff, 6
 - de Keisler-Shelah, 25
 - de Loš, 25
 - de representación en el contexto categórico, 66
 - de Shelah, 44
 - límites dirigidos, 42
 - Skolemización, 43
- ultrafiltro, 19
- ultrapotencia
 - de conjuntos, 20
- ultraproducto
 - de conjuntos, 20
- valor suerte
 - símbolo de función
 - lógica multisortada, 56