Vol. VIII, Nº 1, Mayo (3004)
Matemáticas: 1–23

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Los Reales Efectivos de Schanuel

Carolina Mejía J. Andrés Montoya

Recibido 29.09.2004 Aceptado 30.09.2004

Resumen

En este artículo se presenta y analiza una construcción de los reales debida a S. Schanuel. La construcción tiene virtudes formales, como lo es, el construir el campo de los reales, directamente desde la estructura de grupo abeliano de los enteros sin requerir la construcción previa del campo de los números racionales. Y tiene ventajas computacionales, siendo como es, una construcción eficiente y que es fácil hacer efectiva.

Una versión efectiva de la construcción es presentada y analizada en el artículo.

Abstract

In this paper a construction of the reals indebted to S. Schanuel is presented. The construction has some advantages. From the formal point of view, it builts the reals directly from the abelian group $\mathbb{Z}$, and it not requires the previous construction of the field $\mathbb{Q}$. From the computational point of view it has some advantages too. Since it is an efficient construction and it is easy to transform in an effective construction.
An effective version of the construction is presented and analized in the paper.

Palabras y frases claves: maquinas de Turing, efectividad, decidibilidad.

Clasificación AMS: Primaria: 03F60. Secundaria: 03D99.

A Hijodimitriou

1. Introducción

El advenimiento de la computación a mediados del siglo XX introduce un nuevo criterio formal en matemáticas, la efectividad. En adelante, en muchos casos, no será suficiente probar que un objeto existe, la prueba ha de ser tan efectiva como sea posible, es decir, la prueba deberá proveernos de un algoritmo que nos permita construir el objeto explícitamente y que nos permita, por lo tanto, codificarlo computacionalmente.

Las construcciones de Cantor y Dedekind y la mayoría de las construcciones de los reales no son efectivas. Pero ¿qué quiere decir que no son efectivas? Turing probó (vea [10]) que en $\mathbb{R}^C$ (reales de Cantor) y $\mathbb{R}^D$ (reales de Dedekind) existen elementos no calculables, es decir, elementos que no pueden ser producidos por algoritmo alguno. Peor aún, las nociones de sucesión de Cauchy, equiconvergencia y de cortadura no son verificables computacionalmente, por lo que, las nociones tras las construcciones no son efectivas, en

cuanto que, no son decidibles. La no efectividad de estas construcciones hace necesario considerar otras opciones.

En este artículo consideramos una novedosa construcción efectiva de los reales, basada a su vez en una construcción novedosa de los reales, la construcción de Schanuel, dicha construcción tiene la virtud de construir los reales sin construir antes el campo de los números racionales. Este ahorro es de por sí, una virtud computacional de la construcción, que es analizada en detalle en [7].

El artículo está organizado de la siguiente manera: En las secciones 2 y 3 introducimos y estudiamos la construcción de Schanuel, la cual produce el campo de los números reales usando la estructura de grupo abeliano de $\mathbb{Z}$. En las secciones 4 y 5 estudiamos la construcción usando como punto de partida un grupo abeliano arbitrario. En la sección 6 presentamos y estudiamos nuestra construcción efectiva de los reales. finalmente en la sección 7 se presentan algunas conclusiones.

2. La construcción de Schanuel

En los primeros años de la década del 80 del siglo pasado, Stephen Schanuel propuso una sorprendente construcción del anillo $(\mathbb{R}, +, *)$. Esta construcción es una construcción eficiente en un sentido informal, dado que no presupone la construcción de $(\mathbb{Q}, +, *)$. Más interesante aún, esta eficiencia informal es realmente una virtud computacional de la construcción, consistente en permitir declaraciones y definiciones mucho más cortas, en lenguajes de programación tipados (para mayor información vea [7]).

La construcción de Schanuel, a pesar de su belleza intrínseca y de sus virtudes computacionales no ha llegado a ser suficientemente conocida por la comunidad matemática. Esto se debe en parte a que el propio Schanuel nunca publicó un escrito al respecto, es decir, un escrito en el que se describiera detalladamente la construcción y se analizaran sus propiedades. Debido a ello es difícil determinar el origen de las ideas de Schanuel, aunque se sabe que este vislumbró la construcción después de estudiar cuidadosamente la Teoría de las Proporciones de Eudoxos, (Eudoxio).

Stephen Schanuel es un famoso matemático, conocido (definitivamente no por su casi inédita construcción) por la llamada Conjetura de Schanuel [2], de gran importancia en la Teoría de la Trascendencia y por su trabajo con W. Lawvere en Teoría de Categorias y mas específicamente en Teoría Objetiva de los Números [6]. La construcción de Schanuel, sin embargo, es quizas la única incursión de este autor en la Teoría Pura de Conjuntos y como tal son muy limitadas sus relaciones con el trabajo del mismo autor en Teoría de Campos (por ejemplo [8]), Teoría de Números y Teoría de Categorías.

Una construcción natural, ingeniosa y eficiente del anillo $(\mathbb{R}, +, *)$ es de gran interés desde el punto de vista de la Teoría Pura de Conjuntos. Si la cons-

trucción es además versátil desde el punto de vista computacional, entonces su interés y pertinencia son mayores. El reciente interés en la construcción de Schanuel tiene su origen en las virtudes computacionales de la construcción [9] y en los trabajos recientes [1], [5] que han hecho explícitas tales virtudes y que han iniciado el estudio de las mismas.

A continuación introduciremos los conceptos fundamentales tras la construcción e introduciremos la construcción propiamente dicha

Definición 1. *$f \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es un cuasi-homomorfismo si y sólo si existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo par $n, m \in \mathbb{Z}$*

$$|f(n+m) - f(n) - f(m)| < M.$$

El conjunto de cuasi-homomorfismos de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ será denotado con el símbolo $qH(\mathbb{Z})$.

Proposición 1. *Si $f, g \in qH(\mathbb{Z})$. Entonces $f + g \in qH(\mathbb{Z})$.*

Demostración. Existen M_1 y M_2 números naturales tales que para todo $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$|f(n+m) - f(n) - f(m)| < M_1 \quad \text{y} \quad |g(n+m) - g(n) - g(m)| < M_2.$$

Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
&|(f+g)(n+m) - (f+g)(n) - (f+g)(m)| \\
&\qquad = |(f(n+m) - f(n) - f(m)) + (g(n+m) - g(n) - g(m))| \\
&\qquad \leq |f(n+m) - f(n) - f(m)| + |g(n+m) - g(n) - g(m)| \\
&\qquad < M_1 + M_2.
\end{aligned}$$

□

Proposición 2. *Si $f, g \in qH(\mathbb{Z})$. Entonces $f \circ g \in qH(\mathbb{Z})$.*

Demostración. Sean M_1 y M_2 como en la prueba anterior. Se tiene que

$$\begin{aligned}
&|(f \circ g)(n+m) - (f \circ g)(n) - (f \circ g)(m)| \\
&\qquad = \big|f(g(n+m)) - f(g(n)) - f(g(m)) \\
&\qquad\qquad + f(g(n) + g(m)) - f(g(n) + g(m))\big| \\
&\qquad \leq |f(g(n+m)) - f(g(n) + g(m))| \\
&\qquad\qquad + |f(g(n) + g(m)) - f(g(n)) - f(g(m))| \\
&\qquad < |f(g(n+m)) - f(g(n) + g(m))| + M_1.
\end{aligned}$$

Podemos acotar el primer sumando de la siguiente manera

$$g(n) + g(m) = g(n+m) + i \quad \text{con} \quad -M_2 < i < M_2.$$

Sea

$$\alpha_0 = \max\{f(-M_2), f(-M_2+1), \ldots, f(0), \ldots f(M_2-1), f(M_2)\},$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\left|f(g(n+m)) - f(g(n)+g(m))\right| &= |f(g(n+m)) - f(g(n+m)+i)| \\ &= |f(g(n+m)) - f(g(n+m)+i) + f(i) - f(i)| \\ &\leq |f(g(n+m)) - f(g(n+m)+i) - f(i)| + |f(i)| \\ &< M_2 + \alpha_0. \end{aligned}$$ □

Definición 2. *Dadas $f, g \in qH(\mathbb{Z})$, $f \simeq g$ si y sólo si existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $|f(n) - g(n)| < M$.*

Ejercicio 1. *$\simeq$ es una relación de equivalencia.*

Proposición 3. *$\simeq$ es una congruencia (es compatible con las operaciones).*

Demostración. Debemos ver que dadas $f, g, f', g' \in qH(\mathbb{Z})$ si $f \simeq f'$ y $g \simeq g'$ entonces $f + g \simeq f' + g'$ y $f \circ g \simeq f' \circ g'$. Las dos pruebas son muy sencillas y similares por lo que solo haremos la primera.

Sean M_1 y M_2 tales que $|f(n) - f'(n)| < M_1$ y $|g(n) - g'(n)| < M_2$,

$$\begin{aligned}\left|(f+g)(n) - \left(f'+g'\right)(n)\right| &= \left|\left(f-f'\right)(n) + \left(g-g'\right)(n)\right| \\ &\leq \left|f(n) - f'(n)\right| + \left|g(n) - g'(n)\right| \\ &< M_1 + M_2. \end{aligned}$$ □

Como $\simeq$ es una congruencia sobre $(qH(\mathbb{Z}), +, \circ)$ podemos construir el cociente $Sh(\mathbb{Z}) = \left(qH(\mathbb{Z}) / \simeq, \widehat{+}, \widehat{\circ}\right)$ donde $\widehat{+}$ y $\widehat{\circ}$ se definen de la manera natural:

- $[f] \widehat{+} [g] = [f+g]$.
- $[f] \widehat{\circ} [g] = [f \circ g]$.

Teorema 1 (Schanuel)**.** *$Sh(\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{R}, +, *)$.*

La prueba de este teorema es el objetivo de la sección siguiente. Presentada de ésta forma, la construcción de Schanuel parece afortunada y arbitraria, el propósito de la siguiente sección es también, revelar el carácter geométrico de esta construcción y de paso explicar porque esta construcción funciona.

3. Análisis de la construcción

La idea tras la construcción es que toda recta con pendiente real y que pase por el origen, puede ser aproximada por un cuasi-homomorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$,

además todo cuasi-homomorfismo aproxima a una de estas rectas, cumpliéndose adicionalmente que dos cuasi-homomorfismos son cuasi-iguales o congruentes si y sólo si aproximan a la misma recta. Estos tres hechos claramente determinan una biyección de $qH(\mathbb{Z})$ en $\mathbb{R}$ que además preserva la suma y preserva el producto.

Dado α un número real, podemos definir una función $f_\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ de la siguiente manera: $f_\alpha(n) = \lceil \alpha * n \rceil$ (donde $\lceil x \rceil$ es la parte entera superior de x).

Proposición 4. *Sea f_α definida como antes:*

1. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, f_α es un cuasi-homomorfismo.*
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{f_\alpha(n)}{n} = \alpha$.
3. *Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $|f_\alpha(n) - (\alpha n)| < 1$.*

Demostración. Dados $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
&\left|f_\alpha(n+m) - f_\alpha(n) - f_\alpha(m)\right| = |\lceil \alpha * (n+m) \rceil - \lceil \alpha * n \rceil - \lceil \alpha * m \rceil| \\
&= |\lceil \alpha * (n+m) \rceil - (\alpha * (n+m)) + (\alpha * n) - \lceil \alpha * n \rceil + (\alpha * m) - \lceil \alpha * m \rceil| \\
&\leq |\lceil \alpha * (n+m) \rceil - (\alpha * (n+m))| + |(\alpha * n) - \lceil \alpha * n \rceil| \\
&\qquad + |(\alpha * m) - \lceil \alpha * m \rceil| < 1 + 1 + 1 = 3.
\end{aligned}$$

La prueba de los numerales 2 y 3 es inmediata. □

Dado lo anterior, tenemos que si L_α es la recta con pendiente α y que pasa por el origen entonces L_α es aproximada por el cuasi-homomorfismo f_α.

Lema 1. *Sean $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ y $M > 0$ tales que, para todo n, $m \in \mathbb{Z}$*

$$|f(n+m) - f(n) - f(m)| < M.$$

Si además, existe $a \neq 0$ tal que $|f(a)| > 2M$, entonces para todo m distinto de 0

$$|f(|m|\, a)| > (|m| + 1)\, M.$$

Demostración. (Por inducción sobre $|m|$).

- Para $|m| = 1$ se tiene por hipótesis.
- Suponemos para $|m|$ entonces para $|m| + 1$ se tiene que

$$M > |f((|m| + 1)\, a) - f(|m|\, a) - f(a)|.$$

Se tiene entonces que

$$M > ||f(|m|\, a + a)| - |f(|m|\, a) + f(a)||$$

por lo que

$$|f(|m|a+a)| > |f(|m|a)+f(a)| - M.$$

Finalmente tenemos que

$$|f(|m|a+a)| > (|m|+1)M + 2M - M = (|m|+2)M. \qquad \square$$

Proposición 5. *Si* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = 0$ *y* $|f(n+m) - f(n) - f(m)| < M$, *f es acotada.*

Demostración. Supongamos que no, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $a > 0$ tal que $|f(a)| > 2M$. Del lema anterior se tiene que $f(|m|a) > (|m|+1)M$, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(|m|a)}{|m|a} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{(|m|+1)M}{|m|a} = \frac{M}{a} > 0.$$

Tenemos entonces que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} \neq 0$, lo cual es una contradicción. $\square$

Es claro que si f es acotada entonces $f \simeq 0$. La proposición anterior nos dice que dada f, si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = 0$ y f es un cuasi-homomorfismo, entonces $f \simeq 0$.

Lema 2. *Dados* $m, n \in \mathbb{N}$, *si* $|f(n+m) - f(n) - f(m)| < M$ *entonces*

$$|nf(m) - mf(n)| < (|m| + |n| + 2)M.$$

Demostración. Primero probaremos por inducción sobre n que

$$|f(m)n - f(mn)| < (|n|+1)M.$$

- Si $n = 0$,

$$\begin{aligned} |f(m)0 - f(0)| &= |f(0)| \\ &= |f(0+0) - f(0) - f(0)| < M \leq (|0|+1)M \end{aligned}$$

por el lema 1.

- Lo suponemos para n y probamos para $n+1$

$$\begin{aligned} &|f(m)(n+1) - f(m(n+1))| = |f(m)n + f(m) - f(m(n+1))| \\ &= |f(m)n - f(mn) - (f(mn+m) - f(mn) - f(m))| \\ &\leq |f(m)n - f(mn)| + |f(mn+m) - f(mn) - f(m)| \\ &< (|n|+1)M + M \leq (|n+1|+1)M. \end{aligned}$$

Probado lo anterior, podemos terminar la prueba de el lema,

$$\begin{aligned} \big|f(m)n - f(n)m\big| &= |f(m)n - f(mn) + f(mn) - f(n)m| \\ &\leq |f(m)n - f(mn)| + |f(mn) - f(n)m| \\ &< (|n|+1)M + (|m|+1)M = (|n|+|m|+2)M. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 2. *Si f es un cuasi-homomorfismo, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \alpha.$$

Demostración. Es suficiente probar que la sucesión $\left(\frac{f(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$, existe N_ε tal que, para todo $n, m \geq N_\varepsilon$. El cociente $\frac{(|n|+|m|+2)M}{|nm|}$ es menor que ε. Dado $\varepsilon > 0$, N_ε como antes y $n, m \geq N_\varepsilon$ tenemos que

$$\left|\frac{f(n)}{n} - \frac{f(m)}{m}\right| = \left|\frac{f(n)m - f(m)n}{nm}\right| < \frac{(|n|+|m|+2)M}{|nm|} < \varepsilon. \qquad \square$$

Proposición 6. *Si f es cuasi-homomorfismo y $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \alpha$ entonces $f \simeq f_\alpha$.*

Demostración. Sea $h = f - f_\alpha$, tenemos que:

- h es un cuasi-homomorfismo.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{h(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(f-f_\alpha)(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{f_\alpha(n)}{n} = 0.$

Lo probado indica que $h \simeq 0$, es decir existe M tal que $|(f - f_\alpha)(n)| = |h(n)| < M$ para todo n y por lo tanto para todo n, $|f(n) - f_\alpha(n)| < M$. $\square$

Recapitulando, hemos probado que:

1. Para todo número real α existe f_α un cuasi-homomorfismo tal que f_α aproxima la recta L_α.
2. Si f es un cuasi-homomorfismo existe α real tal que, $f \simeq f_\alpha$ y f aproxima la recta L_α.

Si identificamos $\mathbb{R}$ con el conjunto $\{L_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$, tenemos entonces una biyección H de $qH(\mathbb{Z})/_\simeq$ en $\mathbb{R}$, la cual esta definida por

$$[f] \longmapsto \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n}.$$

Corolario 1. *H es una biyección.*

Demostración. Es una conclusión inmediata de los resultados anteriores. $\square$

Proposición 7. *Dados $f, g \in qH(\mathbb{Z})$. Si $f \simeq f_\alpha$ y $g \simeq f_\beta$ entonces*

$$f + g \simeq f_{\alpha+\beta}.$$

Demostración. Hemos probado que $f \simeq f_\alpha$ si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \alpha$, será entonces suficiente probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(f+g)(n)}{n} = \alpha+\beta$ pero dado que ya sabemos que: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \alpha$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{n} = \beta$. Lo anterior es inmediato. □

Lema 3. *Dados $f, g \in qH(\mathbb{Z})$ si $f \simeq f_\alpha$ y $g \simeq f_\beta$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(f\circ g)(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(f_\alpha \circ f_\beta\right)(n)}{n}.$$

La prueba es similar a la anterior y por ello se omite.

Proposición 8. *Dados $f, g \in qH(\mathbb{Z})$ si $f \simeq f_\alpha$ y $g \simeq f_\beta$ entonces $f \circ g \simeq f_{\alpha\beta}$.*

Demostración. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(f\circ g)(n)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(f_\alpha \circ f_\beta\right)(n)}{n}$, y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(f_\alpha \circ f_\beta\right)(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_\alpha\left(f_\beta(n)\right)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_\alpha(\lceil \beta * n \rceil)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lceil \alpha * \lceil \beta * n \rceil \rceil}{n} = \alpha\beta. \quad \square$$

Corolario 2. *Para todo par de funciones $f, g \in qH(\mathbb{Z})$, se tiene que:*

- $H([f] + [g]) = H([f]) + H([g])$.
- $H([f] \circ [g]) = H([f])\, H([g])$.

Corolario 3 (Schanuel)**.** *$Sh(\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{R}, +, *)$.*

4. Generalizando la construcción de Schanuel

Dado $(G, +)$ un grupo abeliano, el conjunto $Hom(G, G)$ tiene estructura de grupo abeliano, donde la suma de funciones se define puntualmente, como en el caso $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Es claro que podemos imitar la construcción de Schanuel, partiendo de el grupo $(G, +)$. Pero para ello necesitamos adaptar las nociones de cuasi-homomorfismo y de cuasi-igualdad al nuevo contexto.

Ejercicio 2. *Dada $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, f es un cuasi-homomorfismo si y solo si el conjunto $\{n \in \mathbb{Z} : (\exists a, b \in \mathbb{Z})\,(n = f(a+b) - f(a) - f(b))\}$ es finito.*

Ejercicio 3. *Dadas f, $g \in qH(\mathbb{Z})$ se tiene que $f \simeq g$ si y sólo si el conjunto $\{n \in \mathbb{Z} : (\exists a \in \mathbb{Z})\,(n = f(a) - g(a))\}$ es finito.*

Las dos afirmaciones anteriores son la clave para adaptar convenientemente a un grupo abeliano arbitrario G, las nociones de cuasi-homomorfismo y de cuasi-igualdad entre cuasi-homomorfismos.

Definición 3. *$f \in Hom(G, G)$ es un cuasi-homomorfismo si y sólo si el conjunto $\{n \in G : (\exists a, b)\,(n = f(a+b) - f(a) - f(b))\}$ es un conjunto finito.*

Definición 4. *Dados $f, g \in Hom(G,G)$ dos cuasi-homomorfismos, f y g son cuasi-iguales ($f \simeq g$) si y solo si el conjunto $\{n \in G : (\exists a)(n = f(a) - g(a))\}$ es un conjunto finito.*

Sea $qH(G)$ el conjunto de todos los cuasi-homomorfismos de G en G.

Proposición 9. *Si $f, g \in qH(G)$ entonces $f + g \in qH(G)$.*

Demostración. Sea $A = \{n \in G : (\exists a, b)(n = f(a+b) - f(a) - f(b))\}$ y sea $B = \{n \in G : (\exists a, b)(n = g(a+b) - g(a) - g(b))\}$, el conjunto

$$\{n \in G : (\exists a, b)(n = (f+g)(a+b) - (f+g)(a) - (f+g)(b))\}$$

está contenido en el conjunto

$$A + B = \{n \in G : n = a + b \text{ con } a \in A \text{ y } b \in B\}$$

el cual es finito, pues A y B lo son. □

Proposición 10. *Si $f, g \in qH(G)$ entonces $f \circ g \in qH(G)$.*

Demostración. Veamos que el conjunto C, definido por

$$\{n \in G : (\exists a, b)(n = (f \circ g)(a+b) - (f \circ g)(a) - (f \circ g)(b))\}$$

es finito, sean

$$A = \{n \in G : (\exists a, b)(n = f(a+b) - f(a) - f(b))\}$$

y

$$B = \{n \in G : (\exists a, b)(n = g(a+b) - g(a) - g(b))\}.$$

A y B son finitos. Dado $n \in C$, se tiene que

$$\begin{aligned} n = &[f(g(a) + g(b)) - f(g(a)) - f(g(b))] \\ &+ [f(g(a+b) - g(a) - g(b))] \\ &- [f(g(a+b) + (-g(a) - g(b))) - f(g(a+b)) - f(-g(a) - g(b))] \\ &+ [f(g(a) + g(b) - g(a) - g(b)) - f(g(a) + g(b)) - f(-g(a) - g(b))] \\ &- [f(g(a) + g(b) - g(a) - g(b))]. \end{aligned}$$

Nóte que la primera expresión pertenece a A, la segunda expresión pertenece a $f(B)$, la tercera y la cuarta expresion pertenecen a A y por último tenemos simplemente $f(0)$. En conclusión, C esta contenido en el conjunto $A + f(B) - A + A - f(0)$, el cual es finito. □

Ejercicio 4. *$\simeq$ es una relación de equivalencia en $qH(G)$.*

Proposición 11. *Si $f, g, f', g' \in qH(G)$, $f \simeq f'$ y $g \simeq g'$ entonces:*

1. $f+g \simeq f'+g'$.
2. $f \circ g \simeq f' \circ g'$.

Demostración. Sean A y B como antes. Además sean

$$C = \left\{n \in G : (\exists a)\left(n = f(a) - f'(a)\right)\right\}$$

y

$$D = \left\{n \in G : (\exists a)\left(n = g(a) - g'(a)\right)\right\}.$$

1. Para probar que la equivalencia respeta la suma, es suficiente notar que el conjunto $\{n \in G : (\exists a)\,(n = (f+g)(a) - (f'+g')(a))\}$ está contenido en el conjunto $C + D$.

2. Para probar el item 2, debemos sumar y restar adecuadamente, de manera similar a como se hace en la prueba de la proposición anterior. □

La proposición anterior implica que $\simeq$ es una congruencia y que por lo tanto podemos construir el cociente $qH(G)/_{\simeq}$.

Los siguientes resultados solo los vamos a enunciar. Las pruebas son inmediatas o requieren poco trabajo algebraico.

Ejercicio 5. *Sean* $f, g, h \in qH(G)$

1. $[f] + [0] = [f]$;
2. $[f] \circ [id] = [f]$;
3. $[f] + [-f] = [0]$;
4. $[f+g] = [g+f]$;
5. $([f] + [g]) + [h] = [f] + ([g] + [h])$;
6. $([f] \circ [g]) \circ [h] = [f] \circ ([g] \circ [h])$.

Proposición 12. *Para toda* $f, g, h \in qH(G)$ *se tiene que*

$$f \circ (g+h) - f \circ g - f \circ h \simeq 0.$$

Demostración. El conjunto

$$\{n \in G : (\exists a)\,(n = f \circ (g+h)(a) - (f \circ g)(a) - (f \circ h)(a))\}$$

está contenido en el conjunto

$$\{n \in G : (\exists a, b)\,(n = f(a+b) - f(a) - f(b))\}$$

el cual es finito dado que f es un cuasi-homomorfismo. □

Corolario 4. *La estructura* $Sh(G) = (qH(G)/_{\simeq}, +, \circ)$ *es un anillo con unidad.*

En adelante dado que G es un grupo abeliano, $Sh(G)$ será llamado el anillo de Schanuel asociado a G. Nosotros sabemos que: Si $G = \mathbb{Z}$, el anillo de Schanuel asociado es conmutativo y además es un campo.

Pregunta. *¿Para qué grupos G, $Sh(G)$ es conmutativo? ó ¿para qué grupos G, $Sh(G)$ es campo?*

El presente escrito no responde estas preguntas pero si exhibe grupos G para los cuales el anillo de Schanuel asociado ni es un campo, ni es conmutativo.

Pregunta. *Dado G un grupo abeliano, ¿cómo es $Sh(G)$?*

5. Sh(G) con $G \neq \mathbb{Z}$

Para empezar es inmediato que si G es un grupo abeliano finito entonces $Sh(G)$ es el campo trivial (el campo con solo un elemento 0), dado que todo los cuasi-homomorfismos son equivalentes. ¿Qué pasa si G es infinito?

Consideremos $G = \mathbb{Z}^n$ vamos a probar que $Sh(G)$ es isomorfo a $\mathcal{M}_{nn}$ el anillo de matrices reales de $n \times n$. Para ello haremos lo siguiente:

- Dada $A \in \mathcal{M}_{nn}$ definiremos una función $f_A \in qH(\mathbb{Z}^n)$ tal que, si $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ y $e_j = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ es el j-ésimo generador de $\mathbb{Z}^n$ entonces $\pi_i\left(\lim_{n\to\infty} \frac{f_A(n\cdot e_j)}{n}\right) = a_{ij}$.
- Probaremos que si $f \in qH(\mathbb{Z}^n)$, entonces para todo $1 \leq j \leq n$ el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n\cdot e_j)}{n}$, existe.
- Por último probaremos que dada $A = (a_{ij})_{1<i<n, 1<j<n}$.
  Si $a_{ij} = \pi_i\left(\lim_{n\to\infty} \frac{f_A(n\cdot e_j)}{n}\right)$, entonces $f_A \simeq f$.

Estos son los pasos fundamentales de la prueba, completando algunos detalles podremos concluir que $Sh(\mathbb{Z}^n)$ es isomorfo a $\mathcal{M}_{nn}$ y en consecuencia podremos concluir, que existen grupos abelianos tales que su anillo de Schanuel asociado ni es campo, ni es conmutativo.

Definición 5. *Dado $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$\lceil \overrightarrow{a} \rceil = (\lceil a_1 \rceil, \lceil a_2 \rceil, \ldots, \lceil a_n \rceil) \in \mathbb{Z}^n$$

(con $\lceil a_i \rceil$ la parte entera superior de a_i).

Definición 6. *Dada $A \in \mathcal{M}_{nn}$ definimos $f_A : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ de la siguiente manera $\overrightarrow{a} \mapsto \lceil A\overrightarrow{a} \rceil$, para todo $\overrightarrow{a} \in \mathbb{Z}^n$.*

Proposición 13. *$f_A \in qH(\mathbb{Z}^n)$.*

Demostración. Note que, para todo $\overrightarrow{a} \in \mathbb{Z}^n$, $\|f_A(\overrightarrow{a}) - A\overrightarrow{a}\| < n$.

Sean $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ elementos de $\mathbb{Z}^n$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left\|f_A\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)-f_A\left(\overrightarrow{a}\right)-f_A\left(\overrightarrow{b}\right)\right\| \\
&=\left\|f_A\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)-A\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)+A\overrightarrow{a}+A\overrightarrow{b}-f_A\left(\overrightarrow{a}\right)-f_A\left(\overrightarrow{b}\right)\right\| \\
&\leq\left\|f_A\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)-A\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\right\|+\left\|A\overrightarrow{a}-f_A\left(\overrightarrow{a}\right)\right\|+\left\|A\overrightarrow{b}-f_A\left(\overrightarrow{b}\right)\right\| \\
&<3n. \qquad \square
\end{aligned}$$

Proposición 14. *Para todos* $1\leq i,j\leq n$, *se tiene que* $\pi_i\left(\lim_{n\to\infty}\frac{f_A(ne_j)}{n}\right)=a_{ij}$.

Demostración. $\lim_{n\to\infty}\left|\pi_i\left(\frac{f_A(me_j)}{m}\right)-\pi_i\left(\frac{A(me_j)}{m}\right)\right|=0$, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\pi_i\left(\frac{f_A(me_j)}{m}\right)=\lim_{n\to\infty}\pi_i\left(\frac{Ame_j}{m}\right)=\pi_i\left(\lim_{n\to\infty}m\frac{Ae_j}{m}\right)=a_{ij}. \qquad \square$$

Proposición 15. *Si* $f\in qH\left(\mathbb{Z}^n\right)$, *entonces para todo par* $1\leq i,j\leq n$ *el limite* $\lim_{n\to\infty}\pi_i\left(\frac{f(me_j)}{m}\right)$ *existe.*

Demostración. $\lim_{n\to\infty}\pi_i\left(\frac{f(me_j)}{m}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m}\pi_i\left(f\left(me_j\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f_{ij}(m)}{m}$. Tenemos entonces que el límite existe, dado que $f_{ij}\in qH\left(\mathbb{Z}\right)$. $\square$

Proposición 16. *Sea* f *un cuasi-homomorfismo de* $\mathbb{Z}^n$ *en* $\mathbb{Z}^n$. *Si*

$$\lim_{n\to\infty}\pi_i\left(\frac{f(me_j)}{m}\right)=a_{ij}\quad y\quad A=\left(a_{ij}\right),$$

entonces $f\simeq f_A$.

Demostración. Vamos a probar primero que para todo $1\leq j\leq n$ existe M_j tal que $\left\|f\left(me_j\right)-f_A\left(me_j\right)\right\|<M_j$.

$$\begin{aligned}
\left\|f\left(me_j\right)-f_A\left(me_j\right)\right\| &=\left\|f\left(me_j\right)-A\left(me_j\right)+A\left(me_j\right)-f_A\left(me_j\right)\right\| \\
&\leq\left\|f\left(me_j\right)-A\left(me_j\right)\right\|+\left\|A\left(me_j\right)-f_A\left(me_j\right)\right\| \\
&<\left\|f\left(me_j\right)-A\left(me_j\right)\right\|+n.
\end{aligned}$$

Veamos que $\left\|f\left(me_j\right)-A\left(me_j\right)\right\|$ es acotado.

$$\left\|f\left(me_j\right)-A\left(me_j\right)\right\|\leq\sum_{j=1}^{n}\left|f_{kj}\left(m\right)-ma_{kj}\right|$$

Sabemos que f_{kj} es un cuasi-homomorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ y que $\lim_{n\to\infty}\frac{f_{kj}(m)}{m}=a_{kj}$, por lo que existen $N_1^j, N_2^j,\ldots,N_n^j$ tales que $\left|f_{kj}\left(m\right)-ma_{kj}\right|<N_k^j$ y entonces

$$\left\|f\left(me_j\right)-f_A\left(me_j\right)\right\|<M_j=n+\sum_{k=1}^{n}N_k^j.$$

Dado $\overrightarrow{a} \in \mathbb{Z}^n$, con $\overrightarrow{a} = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ y $\left\| f\left(\overrightarrow{a}\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(a_k e_k\right) \right\| < nM$. Dado que $f \in qH\left(\mathbb{Z}\right)$, además:

$$
\begin{aligned}
&\left\| f\left(\overrightarrow{a}\right) - f_A\left(\overrightarrow{a}\right) \right\| \\
&= \left\| f\left(\overrightarrow{a}\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(a_k e_k\right) + \sum_{k=1}^{n} f\left(a_k e_k\right) - \sum_{k=1}^{n} f_A\left(a_k e_k\right) + \sum_{k=1}^{n} f_A\left(a_k e_k\right) - f_A\left(\overrightarrow{a}\right) \right\| \\
&\leq \left\| f\left(\overrightarrow{a}\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(a_k e_k\right) \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n} f\left(a_k e_k\right) - \sum_{k=1}^{n} f_A\left(a_k e_k\right) \right\| \\
&\qquad + \left\| \sum_{k=1}^{n} f_A\left(a_k e_k\right) - f_A\left(\overrightarrow{a}\right) \right\| < nM + \sum_{k=1}^{n} M_k + nN,
\end{aligned}
$$

donde M y N son números naturales tales que

$$\left\| f\left(n+m\right) - f\left(n\right) - f\left(m\right) \right\| < M$$

y

$$\left\| f_A\left(n+m\right) - f_A\left(n\right) - f_A\left(m\right) \right\| < N. \qquad \square$$

Corolario 5. *La función $H : \mathcal{M}_{nn} \to qH\left(\mathbb{Z}^n\right)/_{\simeq}$ definida por la ecuación $H\left(A\right) = f_A$ es biyectiva.*

Proposición 17. *Si $f \simeq f_A$ y $g \simeq f_B$ entonces:*

1. $f + g \simeq f_A + f_B$.
2. $f \circ g \simeq f_A \circ f_B$.

Demostración. Aunque La prueba de la proposición es fácil, la parte 2 es un poco dispendiosa, por lo cual solo expondremos la primera parte.

Note simplemente que

$$
\begin{aligned}
&\left\| \left(f+g\right)\left(\overrightarrow{a}\right) - f_{A+B}\left(\overrightarrow{a}\right) \right\| \\
&= \left\| f\left(\overrightarrow{a}\right) - f_A\left(\overrightarrow{a}\right) + f_A\left(\overrightarrow{a}\right) + f_B\left(\overrightarrow{a}\right) - f_B\left(\overrightarrow{a}\right) + g\left(\overrightarrow{a}\right) - f_{A+B}\left(\overrightarrow{a}\right) \right\| \\
&\leq \left\| f\left(\overrightarrow{a}\right) - f_A\left(\overrightarrow{a}\right) \right\| + \left\| f_B\left(\overrightarrow{a}\right) - g\left(\overrightarrow{a}\right) \right\| + \left\| f_A\left(\overrightarrow{a}\right) + f_B\left(\overrightarrow{a}\right) - f_{A+B}\left(\overrightarrow{a}\right) \right\| \\
&< M_1 + M_2 + \left\| f_A\left(\overrightarrow{a}\right) + f_B\left(\overrightarrow{a}\right) + \left(A+B\right)\overrightarrow{a} - \left(A+B\right)\overrightarrow{a} - f_{A+B}\left(\overrightarrow{a}\right) \right\| \\
&\leq M_1 + M_2 + \left\| f_A\left(\overrightarrow{a}\right) - A\overrightarrow{a} \right\| + \left\| f_B\left(\overrightarrow{a}\right) - B\overrightarrow{a} \right\| + \left\| \left(A+B\right)\overrightarrow{a} - f_{A+B}\left(\overrightarrow{a}\right) \right\| \\
&< M_1 + M_2 + 3n. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Corolario 6. *La función H es un isomorfismo del anillos $\mathcal{M}_{nn}$ en el anillo $Sh\left(\mathbb{Z}^n\right)$.*

Teorema 3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $Sh\left(\mathbb{Z}^n\right) \cong \mathcal{M}_{nn}$.*

6. Haciendo efectiva la construcción

La construcción del anillo $Sh(\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{R}, +, *)$ no es una construcción efectiva, pero siguiendo las ideas de Bishop [3] podemos hacerla efectiva, modificando ligeramente la construcción original.

Lo primero es observar que un cuasi-homomorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ es casi-impar, es decir, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) \simeq -f(-n)$. En términos más precisos, dada $f \in qH(\mathbb{Z})$ existe M tal que $|f(n) + f(-n)| < M$.

Proposición 18. *Sea $f \in qH(\mathbb{Z})$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $|f(n) + f(-n)| < M$.*

Demostración. Como $f \in qH(\mathbb{Z})$ existe M_1 tal que

$$|f(n+m) - f(n) - f(m)| < M_1$$

así que

$$\begin{aligned} |f(n) + f(-n)| &= |f(n) + f(-n) - f(n + (-n)) + f(0)| \\ &\leq |f(n + (-n)) - f(n) - f(-n)| + |f(0)| \\ &< M_1 + |f(0)| = M. \end{aligned}$$

□

La cuasi-imparidad de los cuasi-homomorfismos, nos permite restringirnos, a considerar solo la "parte positiva" de tales funciones.

Proposición 19. *Si $f \in qH(\mathbb{Z})$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} \geq 0$, existen $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y M_1, $M_2 \in \mathbb{N}$ tales que:*

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\,(|f(n) - g(n)| < M_1)$;
2. $(\forall n, m \in \mathbb{N})\,(|g(n+m) - g(n) - g(m)| < M_2)$.

Demostración. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} \gneq 0$, existe N un número natural, tal que si $m \geq N$ entonces $f(m) \gneq 0$.

Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por:

$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < N \\ f(n) & \text{si } n \geq N \end{cases}$$

La función g está bien definida, y es claro que g posee las propiedades requeridas en el enunciado del lema. □

Supongamos ahora que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = 0$. De los resultados obtenidos en el primer capítulo, sabemos que f es acotada, por lo tanto, La función constante 0 cumple las condiciones 1 y 2 del lema anterior.

El objetivo de estos resultados es reemplazar los cuasi-homomorfismos de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ por funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que satisfagan la siguiente condición:

Condición 1. $(\exists M \in \mathbb{N})\,(\forall n, m \in \mathbb{N})\,(|f(n+m) - f(n) - f(m)|) < M$.

La razón para intentar esta sustitución es que las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ son más versátiles computacionalmente que las funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$. El lector debe tan solo recordar que las funciones recursivas son funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

Definición 7. *Dadas* $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

1. f *es un cuasi-homomorfismo si y sólo si* f *cumple la condición 1.*
2. $qH(\mathbb{N}) = \{(h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}) : h \text{ es un cuasi-homomorfismo}\}$.
3. *Dadas* $f, g \in qH(\mathbb{N})$. f *y* g *son casi-iguales* $(f \simeq g)$ *si y sólo si existe* M *tal que, para todo* $n \in \mathbb{N}$, $|f(n) - g(n)| < M$.

Note que $qH(\mathbb{N})$ está dotado de dos operaciones algebraicas naturales, la suma puntual y la composición.

Ejercicio 6. *La casi-igualdad es una relación de equivalencia.*

Proposición 20. *Si* $f \in qH(\mathbb{N})$ *existe* $g \in qH(\mathbb{Z})$ *tal que:*

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{n} \geq 0$.
2. $f = g \restriction_{\mathbb{N}}$.

Demostración. Sea $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$g(n) = \begin{cases} f(n) & \text{si } n \geq 0, \\ -f(-n) & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Es fácil probar que g satisface las condiciones en el enunciado del lema. □

Definición 8. *Sea*

$$qH^{+}(\mathbb{Z}) = \left\{ f \in qH(\mathbb{Z}) : \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} \gneqq 0 \right\} \cup \{ f \in qH(\mathbb{Z}) : f \simeq 0 \}.$$

Sea $g \in qH^{+}(\mathbb{Z})$ *tal que* $g \not\simeq 0$ *y sea* $N \in \mathbb{N}$ *tal que, si* $n \geq N$, *entonces* $g(n) \geq 0$. *Consideremos la función* $K(g) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *definida de la siguiente manera*

$$K(g) = \begin{cases} g(n) & \textit{si } n \geq N, \\ 0 & \textit{si } n < N. \end{cases}$$

Proposición 21. *La función* $\widetilde{K} : (qH^{+}(\mathbb{Z}), +, \circ)/_{\simeq} \to (qH(\mathbb{N}), +, \circ)/_{\simeq}$ *definida por*

$$\widetilde{K}([g]) = [K(g)]$$

es un isomorfismo.

Demostración. De lo anterior tenemos que $\widetilde{K}$ es biyectiva y es muy fácil probar que:

1. $\widetilde{K}([0]) = [0]$.
2. $\widetilde{K}([id]) = [id]$.
3. Para $f, g \in qH^+(\mathbb{Z})$, $\widetilde{K}([f] + [g]) = \widetilde{K}([f]) + \widetilde{K}([g])$.
4. Para $f, g \in qH^+(\mathbb{Z})$, $\widetilde{K}([f] \circ [g]) = \widetilde{K}([f]) \circ \widetilde{K}([g])$. □

De la sección anterior se tiene que, para toda $f \in qH(\mathbb{Z})$. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \alpha$, entonces $f \simeq f_\alpha$. Esto nos permite concebir a f como un código algorítmico de a. Así pues, $qH^+(\mathbb{Z})/_\simeq$ corresponde a la colección de reales positivos y por la proposición anterior $(qH(\mathbb{N})/_\simeq, +, \circ)$ es isomorfo a $(\mathbb{R}^+, +, *)$.

Definición 9.

1. *Un real positivo de Schanuel es un cuasi-homomorfismo de* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
2. *Un real positivo-efectivo de Schanuel es una función recursiva* f *tal que* $f \in qH(\mathbb{N})$.
3. $ShEf(\mathbb{R}^+) = \{f \in qH(\mathbb{N}) : f \text{ es recursiva}\}$.

Proposición 22.

1. $0 \in ShEf(\mathbb{R}^+)$.
2. $id \in ShEf(\mathbb{R}^+)$.
3. *Si* $f, g \in ShEf(\mathbb{R}^+)$ *entonces* $(f + g) \in ShEf(\mathbb{R}^+)$.
4. *Si* $f, g \in ShEf(\mathbb{R}^+)$ *entonces* $(f \circ g) \in ShEf(\mathbb{R}^+)$.

Demostración. La primera y la segunda parte son inmediatas.

Dadas $f, g \in ShEf(\mathbb{R}^+)$ se tiene que $f, g \in qH(\mathbb{N})$ y por lo tanto $(f + g) \in qH(\mathbb{N})$, dado que $qH(\mathbb{Z})$ es cerrado para la suma. Finalmente es suficiente notar, que la suma de funciones recursivas es recursiva.

La prueba para la operación de composición es similar, y por ello se omite. □

Todo elemento de $ShEf(\mathbb{R}^+)$ es calculable por definición, así que $ShEf(\mathbb{R}^+)$ es un buen primer paso en el camino de hacer efectiva la construcción de los reales de Schanuel, pero aún tenemos que agregar los reales negativos. La manera usual de introducir los reales con signo a partir de los reales positivos es mediante la construcción de un conjunto

$$\left(\mathbb{R}^+ \times \{+\}\right) \bigsqcup \left(\left(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\right) \times \{-\}\right).$$

Pero este no es el camino que seguiremos pues dicha construcción es ineficiente en términos computacionales.

Definición 10.

1. *Un real efectivo de Schanuel es una pareja* (f,g) *tal que* $f,g \in ShEf\left(\mathbb{R}^{+}\right)$.
2. $ShEf\left(\mathbb{R}\right) = ShEf\left(\mathbb{R}^{+}\right) \times ShEf\left(\mathbb{R}^{+}\right)$.

La idea de la definición anterior es identificar la pareja de reales (a,b) con el real $a-b$. Un real positivo a será representado por la pareja $(a,0)$ y un real negativo b por la pareja $(0,b)$. Adicionalmente el conjunto $ShEf\left(\mathbb{R}\right)$ está dotado con dos operaciones binarias naturales, la "suma" y el "producto" definidas por:

Dados f, f', g, g' cuasi-homomorfismos recursivos,

- $(f,g)+(f',g') = (f+f', g+g')$,
- $(f,g)\circ(f',g') = (f\circ f' + g\circ g', f\circ g' + g\circ f')$.

Note que, si f,g,f',g' son cuasi-homomorfismos recursivos $f+f'$, $g+g'$, $f\circ f'+g\circ g'$, $f\circ g'+g\circ f'$ son también cuasi-homomorfismos recursivos, por lo que, las dos operaciones binarias están bien definidas.

Definición 11. *Dados* (f,g), $(f',g') \in ShEf\left(\mathbb{R}\right)$, $(f,g) \equiv (f',g')$ *si y sólo si* $(f+g') \simeq (f'+g)$.

Ejercicio 7. *La relación* $\equiv$ *es una relación de equivalencia.*

Definición 12. $Comp\left(\mathbb{R}\right) = ShEf\left(\mathbb{R}\right)/_{\equiv}$.

Podemos ahora dotar a $Comp\left(\mathbb{R}\right)$ de dos operaciones binarias, la "suma" y el "producto" definidos por:

$$[(f,g)] \oplus \left[\left(f'g'\right)\right] = \left[f+f', g+g'\right]$$

y

$$[(f,g)] \otimes \left[\left(f',g'\right)\right] = \left[\left(f\circ f'\right) + \left(g\circ g'\right), \left(f\circ g'\right) + \left(g\circ f'\right)\right].$$

Proposición 23. *Las operaciones de suma y producto en* $Comp(\mathbb{R})$ *están bien definidas.*

Demostración. Haremos la prueba para la suma. La prueba para el producto es similar.

Sean $(f,g) \equiv (h,k)$ y $(f',g') \equiv (h',k')$. Por hipótesis

$$(f+k) \simeq (g+h) \quad \text{y} \quad \left(f'+k'\right) \simeq \left(g'+h'\right).$$

Existen M_1 y M_2 tales que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\left|(f+k)(n) - (g+h)(n)\right| < M_1 \quad \text{y} \quad \left|\left(f'+k'\right)(n) - \left(g'+h'\right)(n)\right| < M_2.$$

Tenemos entonces que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\left(f + f' + k + k'\right)(n) - \left(g + g' + h + h'\right)(n)\right| < M_1 + M_2 = M.$$

Por lo tanto

$$\left(f + f', g + g'\right) \equiv \left(h + h', k + k'\right). \qquad \square$$

Proposición 24. *Para todo* $[(f,g)] \in Comp(\mathbb{R})$ *se tiene que*

$$[(f,g)] \oplus [(0,0)] = [(f,g)].$$

La prueba es fácil y por ello se omite.

Proposición 25. *Para todo* $[(f,g)] \in Comp(\mathbb{R})$, *existe* $[(h,k)] \in Comp(\mathbb{R})$ *tal que*

$$[(f,g)] \oplus [(h,k)] = [(0,0)].$$

Demostración. Sea $[(f,g)] \in Comp(\mathbb{R})$, y sea $[(h,k)] = [(g,f)]$, debemos probar que

$$[(f,g)] \oplus [(g,f)] = [(0,0)],$$

para ello debemos probar que $(f,g) + (g,f) = (0,0)$ pero

$$(f,g) + (g,f) = (f+g, g+f) \equiv (0,0)$$

ya que $(f+g) + 0 = (g+f) + 0$. $\square$

Proposición 26. *Dada* $[(f,g)] \in Comp(\mathbb{R})$ *se tiene que*

$$[(f,g)] \otimes [(id,0)] = [(f,g)].$$

Demostración. Debemos probar que $(f,g) \circ (id,0) \simeq (f,g)$. Por definición se tiene que

$$(f,g) \circ (id,0) = ((f \circ id) + (g \circ 0), (f \circ 0) + (g \circ id)) = (f,g). \qquad \square$$

Proposición 27.

1. *Las operaciones* $\oplus$ *y* $\otimes$ *son conmutativas y asociativas.*
2. *Dados* $[(f_1,g_1)]$, $[(f_2,g_2)]$, $[(f_3,g_3)] \in Comp(\mathbb{R})$ *se tiene que*

$$[(f_1,g_1)] \otimes ([(f_2,g_2)] \oplus [(f_3,g_3)]) \\ = ([(f_1,g_1)] \otimes [(f_2,g_2)]) \oplus ([(f_1,g_1)] \otimes [(f_3,g_3)]).$$

La prueba de esta proposición es fácil, pero algo larga, y por ello se omite.

Corolario 7. $(Comp(\mathbb{R}), \oplus, \otimes)$ *es un anillo conmutativo con unidad,* $[(0,0)]$ *es el módulo aditivo y* $[(id,0)]$ *es la unidad del anillo.*

En lo que sigue, probaremos que $(Comp(\mathbb{R}), \oplus, \otimes)$ es un anillo de división. Para ello debemos probar una serie de fáciles lemas.

Lema 4. *Dada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función recursiva, la función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por*

$$g(n) = \begin{cases} 0 & si\ f(n) = 0 \\ \left\lceil \frac{n^2}{f(n)} \right\rceil & si\ f(n) \neq 0 \end{cases}$$

es una función recursiva.

Demostración. Es suficiente notar que, de la definición misma de f, podemos fácilmente derivar un algoritmo que calcule f. □

Lema 5. *Dada $[(f,g)] \in Comp(\mathbb{R})$, si $[(f,g)] \neq [(0,0)]$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, $(f-g)(n) > 0$ ó $(f-g)(n) < 0$.*

Demostración. Supongamos que no. Como $f, g \in qH(\mathbb{N})$, existen $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in qH(\mathbb{Z})$ tales que $\widetilde{f} \restriction_{\mathbb{N}} = f$ y $\widetilde{g} \restriction_{\mathbb{N}} = g$. Dados $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \geq n$ tal que $\widetilde{f}(m) - \widetilde{g}(m) < 0$ y existe además $m' \geq n$ tal que $\widetilde{g}(m') - \widetilde{f}(m') < 0$. Esto implica que el cuasi-homomorfismo $\widetilde{g} - \widetilde{f}$ es acotado y por lo tanto $g - f$ es una función acotada. Esto ultimo implica que (f,g) es equivalente a $(0,0)$ lo cual es una contradicción. □

Lema 6. *Dado $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ un cuasi-homomorfismo tal que el limite $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n}$ existe y es diferente de 0. La función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por*

$$g(n) = \begin{cases} 0 & si\ f(n) = 0 \\ \left\lceil \frac{n^2}{f(n)} \right\rceil & si\ f(n) \neq 0 \end{cases}$$

es un cuasi-homomorfismo.

Demostración. Sea $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n}$, entonces $f_\alpha \simeq f$, es decir, existe K tal que $|f(n) - \alpha n| < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $g'(n) = \frac{n^2}{\alpha n}$, note que $|g'(n+m) - g'(n) - g'(m)| = 0$.

Note también que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|g(n) - g'(n)\right| < \left|\frac{n^2}{f(n)} - g'(n)\right| + 1 < N.$$

Por lo tanto

$$\left|\frac{n^2}{f(n)} - \frac{n^2}{\alpha n}\right| = \left|\frac{n^2(\alpha n - f(n))}{n\alpha f(n)}\right| = \left|\frac{n}{\alpha f(n)}\left(f(n) - \alpha n\right)\right| < \frac{K}{\alpha}\left|\frac{n}{f(n)}\right|.$$

Pero como $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \alpha \neq 0$, se tiene que el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{f(n)}$ existe y por lo tanto existe M tal que $\left|\frac{n}{f(n)}\right| < M$. Podemos entonces concluir que $|g(n) - g'(n)| < \frac{K}{\alpha} M = N - 1$.

Lo anterior nos permite probar que g es un cuasi-homomorfismo. Note simplemente que

$$\begin{aligned}
&|g(n+m)-g(n)-g(m)| \\
&= \left|g(n+m)-g(n)-g(m)-g'(n+m)+g'(n)+g'(m)\right| \\
&\leq \left|g(n+m)-g'(n+m)\right|+\left|g(n)-g'(n)\right|+\left|g(m)-g'(m)\right| \\
&< 3N'. \qquad \square
\end{aligned}$$

Proposición 28. *Dada* $[(f,g)] \in Comp(\mathbb{R})$*, si* $[(f,g)] \neq [(0,0)]$*, existe entonces* $[(f',g')] \in Comp(\mathbb{R})$ *tal que*

$$[(f,g)] \otimes \left[\left(f',g'\right)\right] = [(id,0)].$$

Demostración. Como $[(f,g)] \neq [(0,0)]$ debemos considerar dos casos:

CASO 1: Existe N tal que para todo $n \geq N$ $(f-g)(n) > 0$.

Sea $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$h(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < N, \\ (f-g)(n) & \text{si } n \geq N, \end{cases} \qquad h \in qH(\mathbb{N})$$

y tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{h(n)}{n} > 0$.

Del lema anterior, $h^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$h^{-1}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } h(n) = 0 \\ \left\lceil \frac{n^2}{h(n)} \right\rceil & \text{si } h(n) \neq 0 \end{cases}$$

es un cuasi-homomorfismo recursivo, por lo tanto

$$\left[\left(h^{-1},0\right)\right] \in Comp(\mathbb{R}).$$

Consideremos ahora $[(f,g)] \otimes \left[\left(h^{-1},0\right)\right]$. Por definición

$$\begin{aligned}
[(f,g)] \otimes \left[\left(h^{-1},0\right)\right] &= \left[\left(f\circ h^{-1}\right)+(g\circ 0),(f\circ 0)+\left(g\circ h^{-1}\right)\right] \\
&= \left[\left(f\circ h^{-1}\right),\left(g\circ h^{-1}\right)\right].
\end{aligned}$$

Para terminar es suficiente probar que

$$\left[\left(f\circ h^{-1}\right),\left(g\circ h^{-1}\right)\right] \equiv [(id,0)],$$

para ello basta probar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\left(f\circ h^{-1}\right)-\left(g\circ h^{-1}\right)\right)(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{id(n)}{n} = 1,$$

lo cual es fácil, aunque dispendioso, y por ello se omite.

CASO 2: Existe N tal que para todo $n \geq N$ $(g-f)(n) > 0$.

Sea $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$h(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < N \\ (g - f)(n) & \text{si } n \geq N \end{cases}$$

h es un cuasi-homomorfismo recursivo, por lo tanto $\left[\left(0, h^{-1}\right)\right] \in Comp(\mathbb{R})$. Con h^{-1} definida de igual manera a como se definió el inverso en el primer caso, es fácil ver que

$$\left[\left(0, h^{-1}\right)\right] \otimes [(f, g)] = [(id, 0)]. \qquad \square$$

Corolario 8. *$(Comp(\mathbb{R}), \oplus, \otimes)$ es un anillo conmutativo con unidad y es además un anillo de división.*

Definición 13. *Dadas $[(f, g)]$, $[(h, k)] \in Comp(\mathbb{R})$, $[(f, g)] \leq [(h, k)]$ si y sólo si existe un N tal que si $n \geq N$, $(f - g)(n) \leq (h - k)(n)$.*

Ejercicio 8. *1. $\leq$ es una relación de orden.*

2. La definición del orden en $Comp(\mathbb{R})$ es independiente de los representantes.

3. $(Comp(\mathbb{R}), \oplus, \otimes, \leq)$ es un anillo ordenado.

Dado $n \in \mathbb{N}$ sea $\widehat{n} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función definida por $\widehat{n}(m) = nm$. $\widehat{n} \in qH(\mathbb{N})$, $\widehat{n}$ es recursiva y adicionalmente $\widehat{n} = \underbrace{id + id + \ldots + id}_{n \text{ veces}}$

Proposición 29. *Dada $[(f, g)] \in Comp(\mathbb{R})$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $[(f, g)] \leq [(\widehat{n}, 0)]$.*

Demostración. Como $[(f, g)] \in Comp(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(f-g)(n)}{n}$ existe. Sea $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(f-g)(n)}{n}$, por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ existe m tal que $m > \alpha$. Note que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\widehat{m}(n)}{n} = m > \alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(f-g)(n)}{n}$ por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $(f - g)(n) < \widehat{m}(n)$ y entonces $[(f, g)] < [(\widehat{m}, 0)]$. $\square$

Corolario 9. *$(Comp(\mathbb{R}), \oplus, \otimes, \leq)$ es un campo ordenado arquimediano y de cardinal $\aleph_0$.*

Demostración. Que $(Comp(\mathbb{R}), \oplus, \otimes, \leq)$ sea un campo ordenado arquimediano es una consecuencia de los resultados anteriores. Ahora

$$|Comp(\mathbb{R})| \leq \left|ShEf\left(\mathbb{R}^+\right) \times ShEf\left(\mathbb{R}^+\right)\right| \leq |rec(\mathbb{N}) \times rec(\mathbb{N})|.$$

Con $rec(\mathbb{N}) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : f \text{ es recursiva}\}$.

Como $|rec(\mathbb{N})| = \aleph_0$ se tiene que $|Comp(\mathbb{R})| \leq \aleph_0$, pero dado que todo campo ordenado es infinito, se tiene que $|Comp(\mathbb{R})| \geq \aleph_0$. $\square$

$Comp\,(\mathbb{R})$ es un campo ordenado, arquimediano y enumerable y es también una buena versión enumerable del campo real, (suficiente para propósitos prácticos), ya que $Comp\,(\mathbb{R})$ como subconjunto del campo real es denso, contiene a $\mathbb{Q}$ y contiene todos los números algebraicos. Adicionalmente es posible probar que $Comp\,(\mathbb{R})$ contiene a los **Reales de Bishop** [7].

La construcción de los reales de Bishop es una de las muchas construcciones de reales efectivos [3], siendo quizás la mas popular de dichas construcciones.

7. Conclusiones

$Comp\,(\mathbb{R})$ es isomorfo a un subcampo ordenado arquimediano del campo real, subcampo que además es denso en $\mathbb{R}$ y contiene a los reales de Bishop. En resumen, $Comp\,(\mathbb{R})$ es suficiente en la práctica computacional dado que:

1. De todo número real es posible obtener aproximaciones tan precisas como sea necesario usando elementos de $Comp\,(\mathbb{R})$.

2. Contiene todos aquellos reales que es posible codificar computacionalmente.

Adicionalmente, $Comp\,(\mathbb{R})$ es una estructura computacionalmente tratable dado que sus elementos y las operaciones entre ellos son calculables en el sentido más clásico del término.

La única componente no efectiva de la construcción es la igualdad, dado que para determinar si dos elementos $[(f,g)]$ y $[(h,k)]$ de $Comp\,(\mathbb{R})$ son iguales, es necesario determinar si $(f+k)$ y $(g+h)$ son cuasi-iguales, pero desafortunadamente esta última relación no es decidible. Así pues $Comp\,(\mathbb{R})$ es un campo ordenado, arquimediano, efectivo y con igualdad no decidible. Pero este "defecto" es un defecto compartido por todas las construcciones efectivas de los reales que se encuentran en la literatura [11].

Agradecimientos. Los autores agradecen a la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander por el apoyo prestado para la elaboración de este escrito.

Referencias

[1] ARTHAN, R. An Irrational Construction of $\mathbb{R}$ from $\mathbb{Z}$. Prepublicación 2002. Puede verse el artículo completo en www.lemma-one.com/papers

[2] AX, J. On Schanuel's conjectures. Annals of Matemathics. Vol. 93(2), 1972, pags 252-266.

[3] BISHOP, E. BRIDGES, D. *Constructive Analysis*. Springer Verlag, New York, 1985.

[4] CONWAY, J. *On Numbers and Games*. Vol. 6 of L.M.S. Monographs, Academic Press, New York, 1976.

[5] HARRISON, J. *Theorem Proving with Real Numbers*. Springer-Verlag, 1998.

[6] LAWVERE, W. SCHANUEL, S. *Conceptual Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[7] MEJÍA, C. *Reales Efectivos de Schanuel*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2004.

[8] SCHANUEL, S. Heights in Fields. Bull. Soc. Math. France, Vol 107, 1979, pags 433-449.

[9] STREET, R. An Efficient Construction of the Real Numbers. Gazette Australian Math. Society. Vol. 12, 1985, pags. 57-58.

[10] TURING, A. On Computable Numbers with an Application to the Entscheidung Problem. Proocedings of the London Mathematical Society Vol. 42, 1936, pags. 230-265.

[11] VAN DALEN, D. TROELSTRA, A. *Constructivism in Mathematics*. Vol. I y II, North Holland, Amsterdam, 1988.

Dirección de los autores: Carolina Mejía , Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Santander, Colombia, caromejia77@gmail.com — J. Andrés Montoya, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Santander, Colombia, amontoyaa@googlemail.com