UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica

Tesis para optar al Grado de Doctor en Matemáticas

presentada por

JORGE ENRIQUE FIALLO LEAL

Dirigida por

Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

Valencia, diciembre de 2010

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
Departament de Didàctica de la Matemàtica

Dr. D. Ángel Gutiérrez Rodríguez, profesor de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València,

HAGO CONSTAR

- Que la presente memoria titulada *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica* ha sido realizada bajo mi dirección por D. JORGE ENRIQUE FIALLO LEAL en el Departament de Didàctica de la Matemàtica de la Universitat de València, y constituye su tesis para optar al Grado de Doctor en Matemáticas.
- Que esta memoria cumple los requisitos exigidos por la legislación vigente, por lo que autorizo su presentación en la Universitat de València.

En Valencia, a 20 de diciembre de 2010.

Fdo.: Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

A Rocío Liliana, Eliana Margarita y José Alejandro

GRACIAS

A mi segunda casa, la Universidad Industrial de Santander, que me permitió formarme a nivel de licenciatura y de maestría, me recibió en su planta de profesores y me dio el apoyo necesario para la realización del doctorado.

A mi director de tesis, Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez, por haberme orientado con sus sugerencias, revisiones y aportes en la realización de esta memoria, por haber leído y corregido con rigor y paciencia las diferentes versiones, por ayudarme a crecer en el campo de la investigación en Didáctica de la Matemática, y por invitarme a publicar en conjunto.

A los profesores de la Universidad de Valencia, de los cuales aprendí el rigor y la seriedad de la investigación en Didáctica de la Matemática, me brindaron su amistad y creyeron en mí. A José Eugenio, por su gran colaboración y amabilidad ofrecida.

A la Dra. Bettina Pedemonte, quién atendió mis inquietudes y dudas en su visita a la ciudad de Bucaramanga, me dio grandes ideas para el análisis de los datos y valoró positivamente el trabajo realizado.

A las directivas, estudiantes y profesoras del Gimnasio Cantillana, quienes me abrieron sus puertas y me brindaron su colaboración y amistad. A la profesora Rubiela García, quien creyó en la propuesta, siempre estuvo atenta a mis sugerencias, hizo respetar los tiempos asignados a la experimentación y siguió trabajando en esta línea.

A mis compañeros de doctorado, especialmente a Leonor, Elgar y Edna, por sus sugerencias, apoyo y compañía en el transcurso de estos años.

A mis compañeros y directivas de la Universidad Industrial de Santander, quienes siempre me han apoyado en esta etapa de mi vida con su amistad y colaboración.

A Rocío Liliana, Eliana Margarita y José Alejandro, por su amor, paciencia, apoyo y alegría que me brindan.

ÍNDICE

1. Introducción

Van Hiele (1957) señala una de las problemáticas de la enseñanza de la trigonometría: el abuso de las fórmulas. Este problema es producto de una enseñanza de la trigonometría caracterizada por un enfoque algebraico consistente en la manipulación de símbolos, operaciones y propiedades abstractas que no ayuda a la comprensión de los conceptos y propiedades, a conectar unos y otras, ni a establecer relaciones entre las diferentes representaciones. Son pocos los estudios de investigación que se han dedicado al tema de la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría como lo señalan Markel (1982), Goldin y otros (1983), Weber (2005) y Brown (2006a) y como se puede corroborar al realizar una revisión bibliográfica del tema. Las pocas investigaciones encontradas señalan la complejidad de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, debida a la desconexión entre las diferentes formas de ver las razones trigonométricas: como razones entre los lados del triángulo rectángulo, como coordenadas del círculo goniométrico o trigonométrico, como distancias, y como funciones (Kendal y Stacey, 1997; Montiel, 2005; Brown, 2006b). Cuando se usa el enfoque de funciones circulares se agrava la situación (Markel, 1982), dado que se elimina el papel del triángulo rectángulo, y por lo tanto no se puede construir basándose en el conocimiento previo de los estudiantes. El concepto de circulo trigonométrico, no está integrado en la estructura cognitiva de los estudiantes (Figueiredo, 2010). Otra dificultad tiene que ver con la complejidad para la comprensión del concepto “razón” (Freudenthal, 2001), involucrado explícitamente en el tema de las razones trigonométricas. Por otro lado, las investigaciones realizadas con profesores en formación o en ejercicio, señalan que éstos tienen deficiencias en la comprensión de ciertos temas trigonométricos (Brito y otros, 2004; Chacón y otros, 2007; Fi, 2006). A los profesores les cuesta desprenderse de sus concepciones de enseñanza adquiridas a lo largo de su experiencia profesional, encontrándose concepciones que atribuyen a los estudiantes la responsabilidad de su fracaso (Briguenti, 1998). Según Montiel (2005), no hay recursos que permitan al profesor el tránsito constructivo triángulo rectángulo $\rightarrow$ círculo trigonométrico $\rightarrow$ función trigonométrica.

Analizando las sugerencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría contenidas en los "Principios y Estándares" (NCTM, 1991, 2003), en los currículos oficiales de la ESO y Bachillerato de la Comunidad Valenciana (Generalitat Valenciana, 2007, 2008) y en los currículos de Educación Secundaria de Colombia (MEN, 1998, 2003, 2006) vemos poca concreción del enfoque metodológico propuesto para la enseñanza de la trigonometría. Tampoco se dan pautas claras sobre el papel que deben desempeñar en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos trigonométricos sus distintas formas de representación (numérica, geométrica, algebraica, analítica y funcional). En este contexto, los libros de texto suelen adoptar posiciones tradicionales, centrados en enseñar conceptos, propiedades importantes y las conocidas aplicaciones al cálculo de elementos de triángulos o de distancias inaccesibles. En contadas ocasiones, los libros de texto hacen uso de las posibilidades que ofrecen las nuevas tecnologías.

Como un aporte a la solución de esta problemática y a la investigación en la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, presentamos una propuesta de enseñanza de las razones trigonométricas con las siguientes características que la diferencian de otras: Basamos nuestra propuesta de enseñanza y de aprendizaje en cuatro ejes:

- Conceptual: Relativo al aprendizaje de los conceptos y propiedades matemáticos implicados.

- Curricular: Relativo a los contenidos matemáticos sugeridos en los currículos oficiales y trabajados en los libros de texto. Incorporación de los procesos de razonamiento y demostración, conexiones y representación.

- Metodológico: Relativo al uso de un enfoque geométrico para la enseñanza de las razones trigonométricas, que incluye un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) como apoyo en un contexto de enseñanza por descubrimiento guiado, el uso de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele para el diseño de las actividades, y el uso de los mapas conceptuales dentro de la fase de explicitación del modelo de Van Hiele.

- Formativo: Relativo al objetivo de mejorar la habilidad de demostración matemática de los estudiantes mediante el requerimiento a éstos de validar sus resultados y descubrimientos.

La unidad de enseñanza se ajusta a la realidad porque abarca todo el intervalo de tiempo de un curso de trigonometría, que tiene en cuenta la realidad curricular, contextual y administrativa de un centro de enseñanza. En los siguientes párrafos reflexionamos sobre estos aspectos que caracterizan nuestra propuesta.

Respecto al uso de SGD como apoyo en un contexto de enseñanza por descubrimiento guiado, en NCTM (2003) se plantea que:

> Las calculadoras y los ordenadores, son herramientas esenciales para enseñar, aprender y hacer matemáticas. Proporcionan imágenes visuales de ideas matemáticas, facilitan la organización y el análisis de datos y hacen cálculos con eficacia y exactitud. Pueden apoyar la investigación de los estudiantes en cada área temática, incluyendo Geometría, Estadística, Algebra, Medida y Números. Cuando disponen de estas herramientas tecnológicas, los alumnos pueden centrar su atención en tomar decisiones, reflexionar, razonar y resolver problemas…. A través de la tecnología puede potenciarse la implicación de los estudiantes en las ideas matemáticas abstractas, y en su dominio. La tecnología enriquece la gama y calidad de las investigaciones, al proveer medios para visualizar ideas matemáticas desde diversas perspectivas (p. 26).

Los SGD proporcionan herramientas a los estudiantes para construir y experimentar con objetos y relaciones geométricas. Sobre la base de su experimentación, los estudiantes hacen conjeturas que se pueden probar con las herramientas disponibles (Healey y Hoyles, 2001). El SGD favorece la interacción entre construir y demostrar, entre hacer sobre el computador y justificar por medio de argumentos teóricos. Un SGD conduce a analizar de manera diferente los procesos involucrados en una actividad de demostrar, pues proporciona a los estudiantes posibilidades de acceso a justificaciones teóricas a través de la mediación semiótica organizada por el profesor alrededor de dichas herramientas (Laborde, 2000).

Hay numerosas investigaciones que, durante más de dos décadas, han dado cuenta del fracaso o del bajo nivel de los estudiantes en la comprensión y elaboración de demostraciones (Battista y Clements, 1995; Clements y Battista, 1992; Fischbein, 1982; Godino y Recio, 2001; Harel y Sowder, 1998; Marrades y Gutiérrez, 2000; Martin y Harel, 1989; Senk, 1985, 1989). En particular, Ibañes y Ortega (2004) realizan un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto en los temas dedicados a las razones trigonométricas. Estos investigadores plantean como una de sus conclusiones que los autores de los textos se preocupan de demostrar los teoremas que enuncian para cumplir con un trámite obligado y no ser acusados de falta de rigor. Hace falta intención didáctica.

Como reacción a esta situación, en los últimos años hay una tendencia general a incluir el aprendizaje de la demostración en los currículos de matemáticas. En NCTM (2003) se plantea que:

> El razonamiento y la demostración matemáticos proporcionan modos potentes de desarrollar y codificar conocimientos sobre una amplia variedad de fenómenos…Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para: reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas; formular e investigar conjeturas matemáticas; desarrollar y evaluar argumentos y demostraciones matemáticos; elegir y utilizar varios métodos de demostración (p. 59).

En España, el currículo de 4º de ESO de la Comunidad Valenciana (Generalitat Valenciana, 2007) afirma que:

> … la finalidad de la enseñanza de las Matemáticas es no sólo su aplicación instrumental, sino también, el desarrollo de las facultades de razonamiento, de abstracción y de expresión.

Y el currículo de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología de la Comunidad Valenciana (Generalitat Valenciana, 2008) afirma que:

> Los alumnos deben alcanzar el grado de madurez necesario, en el manejo del lenguaje formal y de los procesos lógicos deductivos, que les permitan, por ejemplo, seguir, interpretar, y desarrollar demostraciones que no sean excesivamente complicadas, plantear conjeturas, analizar procesos lógicos…

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 1998), se menciona que el razonamiento matemático debe ser una actividad que debe estar presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes y que tiene que ver con:

> … formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos… Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.

En cuanto a los contenidos matemáticos en los que basar la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, no nos podemos limitar a las demostraciones de propiedades de los polígonos y análisis matemático, sino que deben plantearse en cualquier contexto en el que sean pertinentes, como en la enseñanza de la trigonometría.

Como mostraremos en el capítulo 3, son múltiples las investigaciones que se han hecho en torno al aprendizaje y enseñanza de la demostración, la mayoría en el campo de la geometría euclidiana, la teoría de números y el álgebra. Muy pocas han trabajado en el área de la trigonometría. Tomando como referencia las caracterizaciones de corrientes de investigación acerca de la demostración propuestas por Boero (2007), Harel y Sowder (2007) y Mariotti (2006), se identifican las siguientes líneas de investigación: *investigaciones en la corriente histórico–epistemológica; investigaciones en la corriente de la demostración en el currículo; investigaciones en la corriente de las concepciones de demostración de los estudiantes; investigaciones en la corriente del análisis de la relación entre argumentación y demostración; investigaciones en la corriente de propuestas didácticas*.

Nuestro trabajo se enmarca dentro de las dos últimas corrientes de investigación. En la corriente del análisis de la relación entre argumentación y demostración se destacan las investigaciones que proponen usar el constructo de unidad cognitiva (Antonini y Mariotti, 2008; Boero y otros, 1996; Garutti y otros 1998; Mariotti, 2006; Pedemonte 2002, 2005, 2007, 2008). La mayoría de investigaciones sobre la unidad cognitiva se han realizado en geometría y algunas en algebra y teoría de números, pero ninguna en el campo de la trigonometría. En nuestra investigación nos proponemos realizar el análisis de la unidad cognitiva entre los procesos de argumentación y demostración de conceptos y propiedades de las razones trigonométricas en un SGD, desde una perspectiva amplia y diferente de los estudios de esta línea de investigación, que no tienen en cuenta las demostraciones inductivas o empíricas.

1.1 Objetivos de la investigación

En nuestro trabajo de investigación para la obtención del DEA, surgieron ingenuamente las siguientes preguntas acerca del tema:

P1: ¿Existe continuidad o distancia cognitiva entre los procesos de argumentar y demostrar en el desarrollo de demostraciones de propiedades de las razones trigonométricas?

P2: ¿Se puede adaptar la noción de unidad cognitiva para analizar los procesos de desarrollo de demostraciones inductivas o empíricas?

Posteriormente en el trabajo llevado a cabo en la revisión de la literatura, búsqueda de antecedentes y definición de nuestro marco teórico surgió la siguiente pregunta:

P3: ¿Se puede adaptar el modelo de Pedemonte para el análisis de la continuidad estructural y del sistema de referencia teniendo en cuenta los tipos de demostraciones planteados por Marrades y Gutiérrez?

Las respuestas a las anteriores preguntas nos darán herramientas e información para dar respuesta a la siguiente pregunta:

P4: ¿Cuáles son las dificultades que se presentan en el estudiante cuando se aproxima al proceso de demostración de los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas en un SGD?

Para dar respuesta a todas las preguntas anteriores nos hemos propuesto realizar esta investigación, teniendo en cuenta los siguientes objetivos:

OBJETIVO GENERAL

El objetivo de esta investigación es aportar información para la mejor comprensión del proceso de aprendizaje de la demostración en el contexto del estudio de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Diseñar, implementar y evaluar una unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un entorno de geometría dinámica, enfocándola además hacia el desarrollo de las habilidades de demostración.

2. Analizar la existencia de continuidad o distancia cognitiva entre los procesos de argumentar y demostrar en el desarrollo por los estudiantes de demostraciones de propiedades de las razones trigonométricas.

3. Identificar y caracterizar los orígenes de las dificultades que se presentan en los procesos de planteamiento de conjeturas y de construcción de demostraciones en el contexto de aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica.

1.2 Estructura de la memoria

Nuestro campo de investigación abarca contenidos y conceptos teóricos y metodológicos de varias líneas de investigación en didáctica de la matemática. Por esta razón, empezamos realizando en el capítulo 2 una revisión bibliográfica de los diferentes temas y corrientes investigativas que tuvimos en cuenta, a saber: la enseñanza de la trigonometría, incluyendo lo planteado para la enseñanza de la demostración en trigonometría; el uso de SGD en la enseñanza de la trigonometría, con especial énfasis en los trabajos que lo usan para la enseñanza de los proceso de conjeturar y demostrar; el modelo de Van Hiele; los mapas conceptuales; y la enseñanza de la demostración.

En el capítulo 3 presentamos el marco teórico, el cual comprende las definiciones y caracterizaciones de las teorías, modelos y aspectos didácticos de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática que hemos utilizado, tanto en el diseño de la experimentación, como en el análisis de los resultados de nuestra investigación. Caracterizamos la metodología de enseñanza y de aprendizaje usada en el diseño de la unidad de enseñanza, apoyándonos en: el análisis de algunas dificultades del aprendizaje de las razones trigonométricas; los procesos de representación y conexiones, razonamiento y demostración; el enfoque geométrico; el uso de los SGD; el modelo de Van Hiele y los mapas conceptuales. Posteriormente caracterizamos los diferentes conceptos, variables, constructos, herramientas y modelos que usamos para representar y analizar las conjeturas y demostraciones de los estudiantes.

En el capítulo 4 describimos la metodología de investigación. Informamos del tiempo dedicado a cada una de las actividades, de la metodología de trabajo en clase, de los papeles de profesor, estudiantes e investigador, y de los compromisos en el aula. Explicamos la forma de recolección de la información y el tratamiento que se realizó con cada una de estas fuentes para la obtención de los datos. Presentamos e ilustramos con ejemplos las herramientas, criterios y procedimientos que usamos para el análisis de los datos y obtención de conclusiones.

De acuerdo a nuestro primer objetivo especifico de investigación, diseñamos una unidad de enseñanza teniendo en cuenta todos los aspectos mencionados en los primeros párrafos de este capítulo y lo expuesto en los capítulos 2 y 3. En el capítulo 5 describimos en detalle las seis actividades que conforman dicha unidad de enseñanza. Presentamos los aspectos generales, incluyendo los objetivos de enseñanza y de aprendizaje que permean todas las actividades. Informamos de la metodología de enseñanza, de los papeles del profesor, de los contenidos, del uso de los archivos suministrados en cada una de las sub-actividades, y de la forma en que se han propuesto las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y los mapas conceptuales. A continuación se describen una a una las seis actividades, con sus objetivos de aprendizajes específicos y una descripción de cada sub-actividad. Presentamos algunas actuaciones que se esperan de los estudiantes y sugerencias para los profesores.

En el capítulo 6 presentamos el análisis de la unidad cognitiva en cinco secciones, de acuerdo a la caracterización propuesta. En cada sección presentamos los casos que se clasificaron en las siguientes categorías: *unidad cognitiva inductiva o empírica*; *ruptura referencial – continuidad estructural inductiva*; *ruptura referencial – argumentación inductiva – demostración genérica intelectual*; *unidad referencial – argumentación inductiva – demostración deductiva*; *unidad cognitiva deductiva*.

En el capítulo 7 realizamos la evaluación de la unidad de enseñanza analizando las actividades propuestas en cada una de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele. Analizamos el logro del aprendizaje de los múltiples conceptos involucrados y el desarrollo de habilidades de demostración. Presentamos varios ejemplos que sustentan el análisis y realizamos una síntesis final de la pertinencia de la unidad de enseñanza.

El capítulo 8 está dedicado a las conclusiones finales. Presentamos de manera resumida varias contribuciones y resultados originales a la investigación en la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría y a la investigación del proceso de demostración matemática en la secundaria y el bachillerato, que hemos venido presentando en el transcurso de cada uno de los capítulos 3, 4, 5, 6 y 7. Presentamos las limitaciones y futuras investigaciones que se desprenden de nuestro trabajo.

En el capítulo 9 presentamos las referencias bibliográficas consultadas.

Finalmente presentamos diversos anexos que complementan la lectura de la presente memoria. El anexo 1 presenta el cuestionario del test inicial de identificación de los conocimientos previos de los estudiantes. Los anexos 2 a 7 corresponden a las seis actividades entregadas a los estudiantes que participaron en la experimentación de esta investigación. El anexo 8 muestra otros ejemplos del análisis de la unidad cognitiva realizado con otras actividades a los dos grupos, pero que presentan resultados iguales a los expuestos en el capítulo 6.

2. Antecedentes: Revisión Bibliográfica

Presentamos en este capítulo los antecedentes y la revisión bibliográfica que hemos tenido en cuenta para el planteamiento de nuestra investigación, el diseño, desarrollo y evaluación de una unidad de enseñanza y el análisis de los resultados de las actuaciones de los estudiantes.

La sección 2.1 está dedicada a la enseñanza de la trigonometría. Empezamos realizando un análisis resumido de la enseñanza de la trigonometría en Colombia, basado en los documentos orientadores del currículo colombiano. Teniendo en cuenta la realidad curricular en las instituciones colombianas, la cual refleja que la trigonometría se enseña a través del uso de textos escolares, realizamos un análisis de algunos textos de bachillerato y presentamos los enfoques planteados para la enseñanza de la trigonometría en estos textos. En este análisis se incluye lo planteado para la enseñanza de la demostración en trigonometría. En esta misma sección, presentamos un resumen de las investigaciones más citadas y encontradas en esta área del conocimiento y las publicaciones de propuestas innovadoras de enseñanza de algunos temas de trigonometría, libros de texto y páginas de internet que tuvimos en cuenta para el diseño de nuestra unidad de enseñanza.

La sección 2.2 está dedicada al uso de la geometría dinámica en la enseñanza de la trigonometría, haciendo énfasis especialmente en los trabajos que usan SGD para la enseñanza de los procesos de argumentación y demostración.

Hemos usado el modelo de Van Hiele para organizar la unidad de enseñanza. Es por esto que en sección 2.3 presentamos un breve resumen de las investigaciones que consultamos y tuvimos en cuenta para nuestro diseño.

Usamos los mapas conceptuales en la fase de explicitación del modelo de Van Hiele y también como una herramienta de diseño curricular, de aprendizaje y de evaluación, por lo que en la sección 2.4 presentamos algunas investigaciones consultadas para tales fines.

Dedicamos la sección 2.5 a presentar un resumen de las principales investigaciones en la enseñanza de la demostración, categorizadas en cinco líneas de investigación.

2.1 Enseñanza de la trigonometría

Según Van Hiele (1957) normalmente se suelen enseñar muchas fórmulas en trigonometría. “Esto le da la sensación al alumno de que para dominar la trigonometría se necesitan muchas valencias. Y cuando les faltan esas valencias no hacen ningún esfuerzo por alcanzar resultados a pesar de que se pueden alcanzar perfectamente con los medios de que disponen. El tratamiento del seno y la tangente como funciones no tiene nada que ver con todo esto. Eso se ve mucho más tarde y se acerca más bien al álgebra” (Van Hiele 1957, p. 122).

Internacionalmente, la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría es un campo poco explorado por los investigadores, aunque existen propuestas innovadoras para la enseñanza de algunos contenidos específicos de la trigonometría publicadas en revistas, libros de educación matemática y páginas de internet dirigidas a profesores de matemáticas de secundaria o bachillerato.

2.1.1 Enseñanza de la trigonometría en Colombia

Actualmente las matemáticas escolares en Colombia se rigen por las orientaciones dadas en los “Lineamientos Curriculares de Matemáticas” (MEN, 1998) y en los “Estándares Básicos de Matemáticas” (MEN, 2003, 2006) propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN). Pero se evidencia la falta de claridad de los mismos documentos que sugieren el desarrollo del pensamiento matemático integrado que promueva las diferentes formas de representación y de comprensión de los conceptos matemáticos y las diferentes formas y tipos de demostración como lo veremos a continuación.

Analizando las sugerencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría en estos documentos, encontramos que no existe mucha claridad en cuanto al enfoque propuesto para poder desarrollar procesos generales[1] que tienen que ver con el aprendizaje de la trigonometría, ni para poder conectar las distintas formas de representación (geométrica, algebraica, analítica y funcional) de los conceptos trigonométricos, como se puede deducir de los planteamientos hechos al respecto; inclusive pareciera que la trigonometría quedó relegada a un segundo plano. En los lineamientos curriculares (1998), en torno al aprendizaje y enseñanza de la trigonometría vemos que este contenido podría ser parte de los conocimientos básicos correspondientes al pensamiento espacial y sistemas geométricos y al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, pero no se menciona específicamente la trigonometría, ni se dan sugerencias acerca de su enseñanza. En los estándares básicos de matemáticas para los grados 10 y 11 (MEN, 2003, 2006), se propone, para el pensamiento espacial, describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas y, para el pensamiento variacional, modelar situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas. Respecto de la enseñanza de la demostración, en los lineamientos curriculares se presenta como un ejemplo del tipo de razonamiento deductivo la demostración algebraica de una identidad trigonométrica, pero no se orienta al profesor señalando o explicando algún proceso de razonamiento que le permita llevar a sus estudiantes a razonar de esta manera.

A nivel general, la trigonometría se sigue enseñando únicamente en el grado décimo de bachillerato (14 – 16 años), junto a la geometría analítica, de acuerdo a las propuestas de los libros de texto de las diferentes editoriales. En el grado undécimo y primeros semestres de universidad de las carreras de ciencias e ingenierías, se supone que ya se sabe la trigonometría y en las materias de análisis matemático (funciones, cálculo diferencial e integral) se realizan ejemplos y aplicaciones con funciones trigonométricas.

Haciendo una revisión de algunos textos escolares colombianos actuales, se identifican dos enfoques para la presentación de los contenidos de trigonometría en el grado décimo, que no difieren mucho de los propuestos hace al menos tres décadas. Uno de estos enfoques parte del estudio de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, incluye las identidades trigonométricas fundamentales y realiza algunas demostraciones de ellas sin ningún tipo de explicación ni ilustración de su procedencia. Posteriormente, este enfoque define las

[1] **Procesos generales** como el razonamiento, la resolución y el planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (MEN, 1998, pág. 35).

funciones trigonométricas como una clase de las funciones circulares sin hacer demasiado énfasis en los conceptos de función ni de función circular, presenta algunas identidades que relacionan los ángulos cuadrantales con su ángulo de referencia y las demuestran basándose en las propiedades de los triángulos congruentes y los valores absolutos y signos de las coordenadas de los ángulos. También se presentan y resuelven algunas ecuaciones trigonométricas y se plantean problemas de aplicación. Finalmente se presentan y demuestran las leyes del seno y del coseno.

El otro enfoque empieza definiendo y analizando las funciones trigonométricas en el plano cartesiano, presenta algunas identidades que involucran los ángulos de referencia con los ángulos cuadrantales y las demuestra. A la vez se van proponiendo problemas de aplicación. Luego definen las funciones trigonométricas sobre la circunferencia unitaria y realizan las representaciones y análisis de sus gráficas incluyendo las inversas. Posteriormente se estudian otras aplicaciones y las leyes del seno y del coseno. Finalmente se presentan las identidades y las ecuaciones trigonométricas.

2.1.2 Publicaciones de investigaciones

Algunos investigadores expresan con preocupación que se está quitando importancia a la trigonometría en la escuela secundaria y plantean que incluso los estudiantes universitarios que ingresan con antecedentes y aptitudes excelentes en matemáticas tienen vacíos en los conceptos trigonométricos más fundamentales (Markel, 1982; Weber, 2005). Goldin y otros (1983) reportaron que una de las mayores dificultades que encontraron los profesores de Illinois de primer año de ciencias y matemáticas fue en los temas de trigonometría. Muchos estudiantes tiene una comprensión incompleta o fragmentada de las tres maneras importantes de ver el seno y el coseno: como coordenadas de un punto sobre el círculo unitario, como distancias horizontal y vertical, y como razones entre los lados de un triángulo rectángulo (Brown, 2006b). Entre los factores que contribuyen a que los estudiantes no comprendan los conceptos trigonométricos se destaca el enfoque de las funciones circulares, porque elimina el papel del triángulo rectángulo, y por lo tanto no se puede construir basándose en el conocimiento previo de los estudiantes (Markel, 1982). Los estudiantes que usan el método de la razón, dónde las funciones trigonométricas son definidas como las razones entre pares de lados en un triángulo rectángulo, tienen mayor éxito y una mejor actitud al tema que los que usan el método del circulo unidad, donde el seno y el coseno son definidos como las coordenadas *y*, *x* de un punto en un círculo unidad (Kendal y Stacey, 1997; Orhun, 2001).

Montiel (2005) plantea que en la escuela se trata la función trigonométrica como una extensión de las razones; su única explicación sobre la unidad de medida radica en la equivalencia entre grados y radianes en el círculo trigonométrico. Con esto se despoja de los usos y significados que dan origen a la función trigonométrica, perdiéndose el vínculo con algunas prácticas de referencia en otras asignaturas como el estudio del movimiento en Física. La elección de la unidad de medida en el tránsito de la trigonometría clásica a la trigonometría analítica sigue siendo un problema porque no hay recursos que permitan al profesor el tránsito constructivo triángulo rectángulo → círculo trigonométrico → función trigonométrica.

Brown (2006a) muestra otros factores que afectan la clara comprensión de los conceptos trigonométricos: conceptos débiles de ideas importantes sobre las rotaciones y el círculo goniométrico; poca o ninguna comprensión del papel de la unidad en el circulo goniométrico o aplicación inconsistente de la unidad; dificultad para interpretar los gráficos coordenados como información geométrica y numérica combinada, lo que implica no ver las coordenadas de un punto como números y longitudes dirigidas de los segmentos horizontales y verticales que conectan el punto con los ejes; dificultad para comprender el seno y el coseno como coordenadas, lo que implica la carencia de asociar los signos positivo o negativo de las coordenadas x, y a los signos del seno y coseno de ángulos no agudos; dificultad para entender los números racionales como números y como cocientes. Esto se relaciona con el hecho de que el seno es un número cuando se está describiendo como una distancia o una coordenada, o un cociente de dos números en la trigonometría del triángulo rectángulo.

Para tratar de comprender las dificultades y sugerir propuestas didácticas, algunos investigadores han recurrido a la realización de estudios de carácter histórico-epistemológico. Para el caso de la trigonometría, estos estudios son de gran importancia, dado que al parecer, las dificultades de la invariancia de las razones y de la desconexión entre lo geométrico, métrico, algebraico, analítico y funcional parecen provenir desde la misma evolución histórica de los conceptos involucrados en la trigonometría, como lo podemos deducir del análisis del trabajo de los siguientes investigadores.

Costa (1997) presenta un estudio histórico-epistemológico sobre la trigonometría, el ángulo, y la nomenclatura y simbología. Considera que, estudiar la historia de la trigonometría permite observar el surgimiento y el progreso del análisis y del algebra, los cuales están ligados y contenidos de manera embrionaria en la trigonometría. En su estudio sobre la génesis de la trigonometría, parte del significado del término trigonometría y distingue tres momentos: como la *ciencia analítica* estudiada actualmente, su origen se remonta al siglo XVII, después del desarrollo del simbolismo algebraico; como *geometría aplicada a la astronomía*, sus orígenes se remontan a los trabajos de Hiparco, siglo II a.C., aunque existen trazos anteriores de su uso; como *medidas de triángulos*, su origen se remonta al segundo y tercer milenio antes de Cristo. Destaca que la trigonometría, más que cualquier rama de la matemática, proviene del mundo antiguo a partir de necesidades prácticas, principalmente ligadas a la astronomía, agrimensura y navegación. En cuanto a la trigonometría en Europa a partir del siglo XIV, destaca el uso por primera vez de la noción de cantidades variables y de función. Paralelamente a este desarrollo del concepto de función, destaca el desarrollo de la trigonometría y el surgimiento de figuras importantes como: Regiomontanus (1436-1475), quién estableció la trigonometría como una ciencia independiente de la astronomía, Napier (1550-1617), con la invención de los logaritmos, Rhaeticus (1514-1576), quién introdujo el concepto moderno de las seis funciones trigonométricas como funciones de ángulos en vez de funciones de arco, entendidas como razones por primera vez, Viète (1540-1603), quién dio un tratamiento analítico a la trigonometría, Newton (1642-1727), quién encontró la serie para seno, coseno y tangente, y, Euler (1707-1783), quien define las funciones trigonométricas aplicadas a un número y no a un ángulo como se hace hasta ahora. Respecto al análisis y evolución de las concepciones, definiciones y medidas angulares, plantea que no hay una definición universalmente aceptada para ángulo, sino que existen diversas definiciones en uso como "a) una diferencia de direcciones entre dos líneas rectas, b) una rotación necesaria para trazar uno de sus lados desde una posición inicial hasta el otro lado, permaneciendo en el mismo plano, y c) una porción del plano entre dos semirrectas con origen en un punto" (Schotten, 1893, citado en Costa, 1997). Respecto a la medida de ángulos, plantea que, muchas veces el grado es la única unidad de medida que es introducida en la escuela y no se relaciona con la medida en radianes, la cual surge en el trabajo de Thomson en 1873, como necesidad de simplificación de ciertas fórmulas matemáticas, como las derivadas e integrales de funciones trigonométricas, y físicas, como las expresiones para velocidad y aceleración en movimientos curvilíneos.

Montiel (2005) plantea dos momentos históricos en los que se divide la trigonometría, el de sus inicios prácticos y el de sus fundamentos teóricos. "Los inicios prácticos pueden encontrarse en actividades desarrolladas en diferentes culturas y que no son consideradas actividades matemáticas en el sentido estricto de la palabra. Las actividades que dan inicio al estudio sobre la trigonometría, son en esencia la medición y la astronomía". (Montiel, 2005, p. 68). Esta investigadora realiza un recorrido histórico, vinculando las nociones o conceptos trigonométricos a cada uno de los personajes más sobresalientes y las preguntas que se plantearon para resolver un problema, situándolo en una época y analizando el pensamiento científico que imperaba en ella, tratando de reconstruir el desarrollo de nuevos conceptos con base o en contraste con los previos. Como producto de este recorrido histórico, desde una perspectiva socioepistemológica, plantea que la función trigonométrica sólo puede derivarse de la evolución de una cierta problemática situada. Montiel (2005, 2008) identifica tres prácticas de referencia que denomina: la matematización de la astronomía, la matematización de la física y la matematización de la transferencia del calor. Todas ellas ligadas a las prácticas sociales de *anticipación, predicción y formalización*.

> *La anticipación* se caracteriza por la construcción de modelos a escala de una realidad no "manipulable", la celeste. Esto constituye una transición de lo macro a lo micro, donde la noción de proporción juega un papel fundamental en la construcción de los modelos y las herramientas matemáticas. Aquí las razones se convierten en la abstracción inmediata de la proporción y el triangulo en el referente matemático principal. En tanto la anticipación se vincula con la matematización de la astronomía y en consecuencia a la trigonometría clásica, los modelos matemáticos a construir son de naturaleza geométrica estática. Esto es, la actividad matemática consiste en medir, comparar, aproximar y calcular eventos relacionados con fenómenos macro para representarlos en modelos geométricos proporcionales que permitan anticipar al hecho real.
>
> *Predicción*: la matematización de la física (o, más específicamente, del movimiento oscilatorio) es la práctica de referencia a la construcción de modelos mecánicos que describen movimientos periódicos. Es decir, en este escenario nace el carácter funcional de las relaciones trigonométricas. De nuestro análisis histórico, de naturaleza socioepistemológica, identificamos el paso del fenómeno celeste al modelo mecánico como la transición de la trigonometría en el plano geométrico al plano funcional. El problema geométrico, aquel de las cuerdas subtendidas en un círculo, se aborda desde otro paradigma, donde se abandonan las razones y se centra la atención en las cantidades trascendentes trigonométricas y sus relaciones. Dicho en otros términos, la medida de la semicuerda en función del ángulo central constituye la cantidad que surge del círculo, pero visto éste como una curva (o trayectoria en el plano de la física). De hecho, es la cuadratura de esta curva donde se va a originar la expresión en serie infinita de la función seno: una expresión algebraica de lo trascendente. La actividad matemática consiste entonces en el planteamiento de problemas sobre un movimiento particular, su estudio y su modelación. Dado el contexto físico en el que se planteaban los problemas se usa el radián como unidad de medida para las relaciones trigonométricas, logrando con ello homogeneidad en las ecuaciones.
>
> *Formalización*: históricamente contempla la consolidación de la teoría analítica de las funciones. Las funciones trigonométricas son consideradas ya cantidades trascendentes con un estatus funcional y analítico, y resultan fundamentales en la solución de problemas ligados a fenómenos periódicos. Pero nuevos fenómenos expandieron su uso, por ejemplo, la transferencia de calor, el enfriamiento de los cuerpos, las vibraciones sonoras y las oscilaciones en la marea. Sin embargo, era necesario un cambio de paradigma para resolver los problemas que plateaban tales fenómenos. El problema de la transferencia de calor implica el uso de las funciones trigonométricas como un objeto matemático mayor, por así decirlo, denominado serie trigonométrica. Pero el contexto físico del problema exige un nivel de abstracción avanzado que permita entender la variabilidad dentro de la estabilidad, esto es, entender que en un flujo de calor constante las temperaturas en los puntos difieren. La actividad matemática central consiste en modelar la variación (distinguiendo lo que varía respecto a qué es lo que produce tal variación) y determinar el estado estacionario.
>
> (Montiel 2008)

Otros han buscado las causas de las dificultades en la formación de los profesores. Por ejemplo, los resultados del estudio realizado por Fi (2006) sobre los conocimientos de trigonometría de los estudiantes para profesores de matemáticas de una universidad de los Estados Unidos le llevan a concluir que el conocimiento de los profesores de matemáticas puede no ser lo suficientemente sólido para apoyar la instrucción significativa sobre algunas ideas trigonométricas claves. Por otro lado, los estudios realizados por Chacón y otros (2007), con estudiantes para profesores de matemáticas de la Universidad de Costa Rica, sobre la comprensión en el área de la trigonometría, las llevan a concluir que la formación de los docentes en esta área, no satisface los requerimientos mínimos para enseñar ciertos temas de forma no mecánica (ausencia de explicaciones y justificaciones).

En busca de solución a varias de las dificultades mencionadas, se han realizado investigaciones desde diferentes marcos teóricos y metodológicos. Dugdale (1989) compara dos acercamientos para incorporar representaciones gráficas dentro de una unidad sobre las identidades trigonométricas. El primero complementa un acercamiento tradicional con actividades relacionadas con graficar. El segundo usa representaciones gráficas como fundamento para las identidades trigonométricas. Concluye que los estudiantes del segundo acercamiento muestran una actuación post-experimental superior y variada en lo relacionando con representaciones gráficas de las funciones. Lindegger (2000) usa como marco teórico las teorías cognitivas de Vytgotsky, Vergnaud y la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau para introducir los conceptos de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, a partir de la manipulación de modelos. Concluye que al trabajar sobre una secuencia de enseñanza, basada en la resolución de problemas, a partir de preguntas sencillas, contextualizadas y concretas, se facilita el aprendizaje de estos conceptos. Weber (2005) investiga el conocimiento de los estudiantes de las funciones trigonométricas en el contexto de dos cursos universitarios de trigonometría. Diseña una trayectoria de aprendizaje mediante un paradigma de instrucción experimental basado en la noción de procepto de Gray y Tall y en teorías de aprendizaje objeto–proceso y compara los resultados con un grupo control basado en la lectura. Concluye que los estudiantes que se les enseñó en el curso basado en la lectura desarrollaron un conocimiento muy limitado de estas funciones, mientras que los estudiantes que recibieron la instrucción experimental desarrollaron un profundo conocimiento de las funciones trigonométricas. Challenger (2009), guiado por las estructuras teóricas de desarrollo de esquema matemático propuestas por Sfard y la teoría APOS de Dubinsky, investiga los esquemas de trigonometría desarrollados por un grupo de estudiantes ingleses de 16-18 años de edad. Sugiere que los estudiantes cuyos esquemas incluyen componentes visuales espaciales son más exitosos en la solución de problemas y en las evaluaciones que aquellos cuyos esquemas se centraron en aspectos algebraicos, que las imágenes visuales espaciales tienen un aspecto cualitativo y que ese estilo de enseñanza desempeña un papel considerable en el desarrollo de los esquemas de los estudiantes.

Figueiredo (2010) basada en la Teoría de los Conceptos Nucleares (Casas y Luengo, 2004) investiga los diferentes tipos de representaciones de la estructura cognitiva de 399 estudiantes portugueses, que realizaron tres pruebas, con base en 11 conceptos trigonométricos previamente seleccionados (triángulo rectángulo, catetos, ángulos agudos, hipotenusa, Teorema de Pitágoras, razón trigonométrica, seno, circulo, tangente, resolución de triángulos, fórmula fundamental de trigonometría). Figueiredo (2010) identifica y compara los conceptos más importantes y estudia su relación y evolución, a lo largo de un periodo de cursos escolares. A partir del análisis de los datos, verifica que, con las diferentes técnicas utilizadas, los conceptos que se destacan en la estructura cognitiva de los alumnos son generalmente los mismos, dando un aporte importante al proceso de enseñanza, dado que, las técnicas utilizadas proporcionan informaciones sobre los conocimientos anteriores de los estudiantes, lo que sirve como evaluación diagnóstica sobre sus conocimientos previos. Comprueba que el concepto de círculo trigonométrico, a pesar de aparecer en los textos escolares, no está integrado en la estructura cognitiva de los estudiantes de esta edad. Los conceptos que más se destacan son aquellos que están más ligados al Teorema de Pitágoras, adquiridos en años anteriores de escolaridad. Los conceptos que se destacan como los más importantes en la estructura cognitiva, son los que frecuentemente se utilizan en la resolución de problemas concretos (Teorema de Pitágoras, catetos, hipotenusa, triángulo rectángulo, resolución de triángulos), confirmando de esta manera, la importancia de las actividades prácticas en la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría.

Algunos investigadores han usado calculadoras o diferentes tipos de software para ayudar a superar las dificultades de los estudiantes. Szetela (1979) estudia el efecto de usar la calculadora como una herramienta en la enseñanza de relaciones trigonométricas en clases especiales con actividades diseñadas para el uso de la calculadora. En su estudio muestra que, los estudiantes que usan la calculadora se desempeñan mejor que los estudiantes que están limitados al lápiz y papel, porque son capaces de obtener fácilmente más datos y tener más tiempo para estudiar las relaciones y hacer observaciones. Blackett y Tall (1991) presentan un estudio empírico que se llevó a cabo con alumnos de 15 años de edad. Muestran que el tratamiento experimental utilizando el ordenador ayudó a los estudiantes del grupo experimental a mejorar su rendimiento en comparación con los estudiantes del grupo control. Carreira (1992) realiza un estudio con estudiantes de 10º grado, usando la hoja de cálculo como herramienta en un contexto de aplicación y modelación de problemas trigonométricos. Concluye que el uso de esta herramienta, promueve y facilita la recolección y la organización de datos, y la búsqueda de relaciones funcionales entre ellos. Wenzelburger (1992) reporta un estudio comparativo del aprendizaje de las funciones trigonométricas entre los 8 estudiantes de grado 11º que trabajan con un software para graficar funciones, con los 23 estudiantes del mismo grado que no tienen acceso al software. Muestra, a través de un post-test, que las condiciones dadas por el ambiente computacional favorecen la retención de los conceptos. Sidericoudes (1993) realiza un estudio con 36 estudiantes utilizando el sistema LEGO-Logo para abordar los conceptos de razón, cálculo de distancias, perpendicularidad, funciones trigonométricas, relaciones en el triángulo rectángulo y medidas de ángulos. Muestra cómo el uso del sistema permite y estimula la construcción del pensamiento matemático de los estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas y analiza algunas de las implicaciones en el aprendizaje de la trigonometría cuando se hace uso de la simulación y de modelos no curriculares. Costa (1997) investiga la influencia de dos contextos diferentes para la enseñanza de la trigonometría, el computador y el mundo experimental. Concluye que Cabri es un ambiente fértil para la exploración de los valores y los signos asumidos por el seno y coseno en cada cuadrante, la reducción al primer cuadrante y las simetrías. El software *Graphmatica* facilita la exploración de las gráficas de las funciones y de sus representaciones algebraicas, permite analizar el dominio, la imagen y el periodo de las funciones, conectando las representaciones gráficas y algebraicas. Martins (2003) elabora una secuencia didáctica con la ayuda de Cabri, con el objetivo de investigar si los estudiantes de segundo año de la educación media, que habían trabajado ya con trigonometría en el triángulo rectángulo y el círculo trigonométrico, podían utilizar este conocimiento, en la construcción de las gráficas de las funciones seno y coseno. Concluye que el software es suficientemente eficiente para ayudar a los estudiantes a relacionar los conceptos estudiados en el triángulo rectángulo y el círculo trigonométrico con las funciones seno y coseno. Kiat Ng y Hu (2006) investigan con 29 estudiantes de Grado 9 de una escuela de Singapur, distribuidos en grupos de tres o cuatro, el impacto de usar el simulador *Trigonometric Graphs,* basado en la web y en la discusión en línea asincrónica para la comprensión e interpretación de los estudiantes esbozando transformaciones de curvas trigonométricas. Concluyen que la auto-experimentación con el simulador y el foro de discusión en línea ayudaron a mejorar las habilidades de los estudiantes para esbozar transformaciones singulares/combinadas y explicar el concepto detrás de cada transformación. Fiallo (2006) diseña, implementa y evalúa una unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un SGD enfocándola además hacia el desarrollo de las habilidades de la demostración en los estudiantes de 10º grado. La investigación, llevada a cabo con 100 estudiantes de 10º grado (14–16 años) de tres instituciones de Santander (Colombia), muestra que las construcciones en Cabri permiten conectar las representaciones aritméticas, geométricas, algebraicas y analíticas de los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas. En Cabri se dan unas transiciones de lo numérico hacia lo algebraico y de lo empírico a lo deductivo apoyadas en la visualización y análisis de propiedades geométricas y analíticas producto de la exploración.

2.1.3 Publicaciones de propuestas innovadoras de enseñanza

Munné (2002) presenta cinco propuestas diferentes para demostrar las fórmulas trigonométricas de suma o resta de ángulos. Gutmann (2003) presenta los valores de seno y coseno de la suma de dos ángulos directamente ligados a las medidas de segmentos en la circunferencia unitaria y a la suma y diferencia de esos segmentos, plantea la idea de hablar de “lado seno” y “lado coseno”, explica la construcción del segmento seno y coseno de la suma utilizando segmentos de colores para referirse a los lados seno y coseno. Gutiérrez y Fiallo (2009) presentan una propuesta de enseñanza de la trigonometría en E. Secundaria (4º de ESO y 1º de Bachillerato). Esta propuesta de enseñanza es una adaptación al currículo español de la unidad de enseñanza planteada en esta memoria para estudiantes colombianos. Se propone una enseñanza por descubrimiento guiado basada en el uso de SGD.

2.1.4 Publicaciones de materiales de enseñanza

La mayoría de textos revisados presentan los enfoques tradicionales, mencionados en el capítulo anterior, que ha tenido la enseñanza de la trigonometría en la escuela secundaria y en el bachillerato, salvo algunas propuestas interesantes como el caso de Esteban, Ibañes y Ortega (1998), que presenta la trigonometría desde un recorrido histórico hasta el estudio de la trigonometría hiperbólica, presentando los temas y dando sugerencias de actividades para su desarrollo fundamentadas en algunas teorías de aprendizaje. Shaffer (2006) presenta un libro de actividades de introducción básica a las funciones trigonométricas utilizando el software de geometría dinámica *Sketchpad* en donde se propone a los estudiantes hacer construcciones dinámicas de trigonometría y hacer modelos básicos de aplicaciones prácticas. Ven la relación entre el círculo unidad y las definiciones de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo, y crean un enlace dinámico del círculo unidad a las funciones periódicas.

Otros textos de bachillerato que fueron apoyo para el diseño de la unidad de enseñanza porque presentan algunas demostraciones geométricas de propiedades trigonométricas y que nos sirvieron para la realización de algunas construcciones en Cabri son: Hall y Knight (1961) y Palmer, Leigh y Kimball (1950), que presentan las demostraciones de la relación entre las razones trigonométricas de ángulos relacionados entre si (suma o diferencia entre los ángulos cuadrantales y su ángulo de referencia) basadas en la congruencia de triángulos, así como las demostraciones del seno y coseno de la suma y diferencia de ángulos basadas en la semejanza de triángulos. Ayres (1988), que presenta las demostraciones de las razones trigonométricas de ángulos relacionados entre sí (suma o diferencia entre los ángulos cuadrantales y su ángulo de referencia) basadas en las coordenadas del lado terminal de los ángulos formados en el plano de coordenadas. Este autor representa linealmente las razones trigonométricas como vectores.

2.1.5 Páginas de internet

Al realizar una búsqueda de publicaciones en internet hemos encontrado una gran pobreza de materiales para la enseñanza de la trigonometría. La mayoría de las paginas encontradas se han dedicado a copiar los contenidos de los textos, presentando las definiciones, ejemplos y demostraciones de igual manera a como vienen en ellos. En esta búsqueda se encontraron las siguientes páginas interactivas que, al contrario de las anteriores, intentan darle un carácter más dinámico a la presentación de los contenidos, pero que no favorecen en su totalidad la comprensión de los conceptos y sus relaciones, ni el desarrollo de habilidades de demostración: La página web Geometría Activa (mecd.es, 2005) a través de applets, muestra interactivamente algunos conceptos, relaciones y propiedades de las razones trigonométricas. Muestra a través de figuras geométricas dinámicas y valores numéricos el proceso de solución de triángulos rectángulos y algunas identidades trigonométricas. Aunque es una página interactiva, tiene una metodología dirigista en la que los estudiantes mueven un punto o activan un applet para ver una relación, propiedad o aplicación, pero no se pide ninguna justificación, ni se profundiza en los conceptos involucrados. La página web Descartes (mecd.es, 2001, 2003) presenta los conceptos acompañados de applets que muestran numéricamente e interactivamente las relaciones explicadas. Esta página es muy completa e interactiva y en ella el estudiante lee, mueve, observa y comprueba empíricamente apoyado en datos numéricos la propiedad o relación estudiada, pero no se le piden justificaciones ni mucho menos demostraciones de las propiedades y relaciones estudiadas, llevando a que el estudiante se sienta satisfecho con lo observado y verificado y no sienta la necesidad de la demostración.

2.2 Los Sistemas de Geometría Dinámica en la enseñanza de la trigonometría

Son numerosas las investigaciones acerca del uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. De hecho, la revista *International Journal of Computers for Mathematical Learning* publica contribuciones teóricas, empíricas, prácticas y visionarias que exploran el potencial de las nuevas tecnologías para profundizar nuestra comprensión del campo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Dentro de esta línea de investigación, se destaca el uso de SGD, especialmente para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, pero no se conocen trabajos de investigación que aborden específicamente el problema de la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría con el uso de SGD, salvo algunas propuesta innovadoras que lo tienen en cuenta para el diseño de actividades de visualización, conceptualización y exploración de algunos conceptos y propiedades trigonométricos. A continuación presentamos las publicaciones del uso de SGD que más hemos tenido en cuenta para nuestro trabajo de investigación. Las hemos categorizado teniendo en cuenta los siguientes criterios: *publicaciones que aportan sugerencias didácticas para el uso de SGD, publicaciones que investigan el proceso de demostración a través del uso de SGD.*

2.2.1 Sugerencias didácticas para el uso de SGD

Según Hoyles y Noss (1992), la simple interacción en un ambiente dinámico no garantiza que se aprecien las matemáticas que yacen detrás de su intento pedagógico. El software en el corazón de un micromundo modela fragmentos matemáticos pero él mismo no encarna intenciones pedagógicas. Un micromundo matemático debe ser pensado como algo más que un software. Las piezas de conocimiento son apropiadas (o no) dependiendo de las propias agendas de los estudiantes, cómo se sienten con su participación, la intervención del profesor y, sobre todo, el escenario en el cual las actividades son emprendidas. Los alumnos están forzados (y, puede ser, potenciados) por las herramientas que tienen disponibles, por la sintaxis y la semántica del medio expresivo que tienen a mano. El SGD proporciona herramientas a los estudiantes para construir y experimentar con objetos y relaciones geométricas. Sobre la base de su experimentación, los estudiantes hacen conjeturas que se pueden probar con las herramientas disponibles (Healey y Hoyles, 2001). El SGD favorece la interacción entre construir y demostrar, entre hacer sobre el computador y justificar por medio de argumentos teóricos (Laborde, 2000).

Para analizar el papel del uso de SGD, los siguientes investigadores han diseñado secuencias de enseñanza que plantean sugerencias didácticas. Healy y Hoyles (2001) exploran el papel de las herramientas del software en la resolución de problemas de geometría y cómo estas herramientas, en interacción con actividades que incorporen los objetivos de profesores y estudiantes, median en el proceso de resolución de problemas. A través de análisis de las respuestas de estudiantes exitosos, muestran cómo las herramientas del software dinámico no sólo sirven de andamio al proceso de solución sino también ayudan a los estudiantes a pasar de la argumentación a la deducción lógica. Teniendo en cuenta la labor de los estudiantes menos exitosos, también ilustran cómo las herramientas del software que no pueden ser programadas para ajustarse a los objetivos de los estudiantes pueden impedir expresar sus ideas matemáticas (correctas) y así impedir la solución del problema. Luengo (2005) propone un conjunto de consideraciones didácticas para tener en cuenta en el diseño de software educativo. Presenta un ejemplo de interacción con *Cabri – Euclide* y explica cómo modela el aprendizaje de la demostración con este software. La primera consideración didáctica tiene que ver con la necesidad de reflexionar sobre cómo deben ser las representaciones. La segunda consideración es la relación entre argumentación y demostración matemática. Presenta tres características que identifica como factores importantes en el diseño de software: *organización ternaria*[2], *valor epistémico*[3], *y construcciones no monótonas*[4].

[2] Proposición dada – Regla de deducción – Nueva proposición (Duval, 1991).

[3] El valor epistémico es el grado de certitud o convicción que un usuario da a un enunciado (Duval 1992 - 1993).

[4] Una prueba monótona es aquella en donde los procesos son ciertos todo el tiempo y cada paso tiene que ser correcto. Por eso en el software diseñado los estudiantes pueden construir, borrar, y las pruebas pueden ser propuestas en un orden no jerárquico (Luengo, 2005).

Arcavi y Hadas (2000) consideran las siguientes características en que los SGD tienen el potencial de nutrir, siempre que estén acompañados convenientemente por materiales del currículo y prácticas del aula: *la visualización*[5]*, la experimentación, la sorpresa, la retroalimentación y la necesidad de pruebas y demostraciones*. De manera complementaria, Laborde (2001) identifica y analiza los pasos de la integración de la tecnología en la enseñanza, utilizando como ejemplo la evolución a lo largo del tiempo (3 años) en el diseño de escenarios de enseñanza basados en Cabri para estudiantes de escuela secundaria. Esta autora plantea que el papel desempeñado por la tecnología pasó de ser un proveedor de datos o amplificador visual a ser un componente esencial significativo de las tareas, y como consecuencia, afecta las concepciones de los objetos matemáticos que podrían construir los estudiantes. Como resultado de su investigación, Laborde (2001) concluye que la tecnología no es sólo un elemento adicional en el sistema educativo, ya que interactúa con todos los componentes del sistema. Integrar la tecnología en la enseñanza requiere de tiempo para los profesores, porque toma tiempo para que ellos acepten que el aprendizaje puede ocurrir en situaciones basadas en el ordenador sin hacer referencia a un entorno de lápiz y papel y para poder crear situaciones de aprendizaje adecuadas. Tiempo para que acepten que podrían perder parte de su control sobre lo que hacen los estudiantes. Se requiere más tiempo para comprender sobre el terreno en el aula acerca de las estrategias de los estudiantes frente a una tarea con Cabri que no son capaces de describir. Los profesores toman la decisión de introducir estas nuevas tareas, sólo si están seguros de que el aprendizaje que se espera favorecerá a la institución.

Groman (1996), proporciona tres ejemplos de cómo usa *Geometer's Sketchpad* en un curso para formar profesores de matemáticas de primaria y secundaria, en donde intentan hacer significativo el uso de la tecnología. Arzarello y otros (2002) plantean que el profesor juega un papel muy importante en el acercamiento de los estudiantes al conocimiento teórico. La tecnología en sí misma no conduce a un cambio educativo. Si el profesor no motiva a los estudiantes a encontrar por qué una conjetura (proposición) es verdadera, entonces es posible que las justificaciones dadas por los estudiantes se queden en un nivel perceptivo-empírico.

[5] La visualización generalmente se refiere a la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar, y reflejar una información visual (Arcavi y Hadas, 2000).

2.2.2 Uso de SGD en el proceso de demostración

Un SGD conduce a analizar de manera diferente los procesos involucrados en una actividad de demostrar. Proporciona posibilidades de acceso a justificaciones teóricas a través de la mediación semiótica organizada por el profesor alrededor de herramientas de construcción en ambientes de geometría dinámica (Laborde, 2000). Cuando se usa un SGD se debe superar la barrera de lo perceptivo y empírico ya que los estudiantes pueden llegar a plantear que "la proposición es verdadera porque las propiedades observadas en la figura permanecen igual cuando se arrastra la figura" (Arzarello y otros, 2002). Varios estudios se han dedicado a investigar la forma de superar este obstáculo. Chazan (1993) analiza el uso de *Gometric Supposers* para la verificación en clase de geometría en el marco de una investigación sobre la comprensión por los estudiantes de las semejanzas y diferencias entre las verificaciones empíricas usando medición en ejemplos y la prueba deductiva. Centra su análisis en las razones de ver las *evidencias empíricas como demostraciones* y la *demostración como simple evidencia*. Mariotti (2000) analiza un experimento educativo dirigido a discutir el papel específico jugado por el SGD, con atención particular hacia las características que lo hacen útil para introducir a los estudiantes hacia el pensamiento teórico. Discute el proceso de mediación semiótica referido al surgimiento del significado de la demostración, estrictamente asociado hacia el significado de Teorema.

Hölzl (2001) proporciona un estudio de caso de un proyecto en el que el SGD forma parte integrante del acuerdo pedagógico. Busca otros usos de SGD que van más allá de la mera confirmación para que la situación geométrica sea reconocida en su particularidad. Muestra cómo el poder contrastante de un SGD podría utilizarse en un marco de descubrimiento guiado. Distingue dos maneras de utilizar las funciones de mediación del modo de arrastre, como un modo de prueba por un lado y como un modo de búsqueda por otro. Sus observaciones le llevaron a concluir que el segundo uso de la modalidad de arrastre no es "un asunto de corto plazo" sino resultado de "un proceso de aprendizaje que se caracteriza por diferentes capas de concepciones". Al respecto del uso del modo arrastre, Arzarello y otros (2002) describen el arrastre en un SGD introduciendo una jerarquía de sus funciones. Esta jerarquía es apropiada para clasificar diferentes actitudes y propósitos de los estudiantes cuando investigan un problema geométrico, exploran, conjeturan, validan y justifican. Las características cognitivas de la jerarquía pueden ser usadas para describir las modalidades *ascendente* y *descendente* con las cuales los estudiantes interactúan con las representaciones externas. La génesis de las diferentes funciones del arrastre en los estudiantes no es una cuestión automática, sino que es consecuencia de intervenciones didácticas específicas del profesor en el aprendizaje de las prácticas con Cabri de los estudiantes. Mariotti (2000, 2007) plantea que posiblemente la interpretación que hacen los estudiantes del modo "arrastre" no es la de control ni se puede garantizar que ellos la vean así.

En la búsqueda de actividades que promuevan el razonamiento deductivo, Galindo (1998) discute algunas características de las tareas que promueven la justificación en geometría, y que ayudan a los estudiantes a establecer conexiones entre las construcciones hechas en el computador y los objetos geométricos ideales. Propone tres tipos de tareas que son fuente para buenas ideas de justificación: *las construcciones*, *la exploración de lugares geométricos* y *las cajas negras*. Sinclair (2003) investiga las ventajas y las limitaciones de usar bocetos pre-construidos de geometría dinámica basados en la web en actividades relacionadas con la demostración deductiva en el nivel de la escuela secundaria. Plantea que la pregunta de la tarea y la disposición del boceto deben trabajar juntos para crear un ambiente para la exploración; se debe poner atención explícita a la interpretación visual y a la exploración dinámica que hacen los estudiantes para que ellos se beneficien completamente de sus experiencias con los bocetos.

Para poder llevar a cabo el análisis de las tareas que se proponen en el proceso de demostración, Gutiérrez (2005) sugiere que, además de los métodos tradicionales tenemos otros específicos, propios de este contexto de experimentación en un SGD: archivos creados por los estudiantes con figuras construidas y revisión de la construcción hecha (no se muestran los objetos borrados ni los ocultos); el registro automático de la actividad de los estudiantes (Cabri II plus) y el auto protocolo escrito por los estudiantes. La forma de analizar la información puede ser: análisis de los tipos de arrastre en la pantalla del ordenador (Arzarello y otros, 2002); análisis de las fases de resolución de un problema de demostración (Marrades y Gutiérrez, 2000); análisis de la unidad cognitiva de teoremas (Boero y otros 1996); análisis de tipos de demostraciones (Harel y Sowder, 1998).

2.3 El modelo de Van Hiele

Han sido numerosas las investigaciones que se han realizado acerca del modelo de Van Hiele, destacándose las últimas tres décadas por una gran producción y difusión del modelo en los idiomas inglés y castellano. La mayoría de investigaciones iniciales se enfocaron a evaluar y describir el nivel de razonamiento en geometría de los estudiantes a través del diseño de diferentes test y entrevistas, sugiriendo formas de evaluar y de caracterizar los niveles (Usiskin, 1982; Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Gutiérrez y Jaime, 1998). Algunos han trabajado el modelo en otras áreas fuera de la geometría como la aritmética (Dreyfus y Thompson, 1985; Van Hiele, 1987) y el análisis matemático (Fless, 1988; Land, 1991; Esteban y otros, 2006; Esteban y Llorens, 2003; De la Torre, 2000; Navarro, 2002).

En el campo de la trigonometría no encontramos trabajos que usen el modelo de Van Hiele para llevar a cabos estudios de investigación, aunque existen algunos trabajos de innovación que usan el modelo para la organización de actividades en torno a temas de trigonometría y algún texto que sugiere su uso, debido a la estrecha relación de la trigonometría con la geometría (Esteban y otros, 1998).

Existen trabajos de investigación y publicaciones de artículos o libros que presentan el modelo de Van Hiele como una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría. Explican en qué consiste el modelo describiendo las ideas principales. Describen, analizan e ilustran con ejemplos amplia y detalladamente los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje y sus respectivas características y discuten sobre sus implicaciones prácticas en la clase (Crowley, 1987; Jaime y Gutiérrez, 1990; Jaime, 1993; Corberán y otros, 1994; Guillén, 1997).

En nuestra investigación los trabajos que más se tuvieron en cuenta para el diseño de las fases de aprendizaje en la unidad de enseñanza fueron: Jaime (1993), que sugiere que la tercera fase de aprendizaje no debe interpretarse como fijada temporalmente después de la segunda fase y antes de la cuarta, sino más bien como una actitud permanente de diálogo y discusión en todas las actividades que lo permitan de las diferentes fases de aprendizaje, y Guillén (1997), que presenta una crítica a las investigaciones que afirman haber utilizado las fases de aprendizaje del modelo, pero que no especifican claramente cuál es la parte de la unidad correspondiente a cada una de las fases.

2.4 Los mapas conceptuales

Actualmente se usan los mapas conceptuales como una herramienta de investigación que puede influir positivamente en la enseñanza, el aprendizaje, el currículo, la evaluación y el medio. Novak y Gowin (1988) explican la naturaleza y las aplicaciones de los mapas conceptuales, ilustran con ejemplos la forma de iniciar a los estudiantes en la elaboración de mapas conceptuales y describen sus diferentes aplicaciones. Explican cómo empezaron a utilizar los mapas conceptuales como uno de los instrumentos de evaluación en casi todas sus investigaciones y cómo empezaron a utilizarlos con los estudiantes en las clases, tanto para ayudarles en su aprendizaje como para evaluar lo que habían aprendido. Respecto a su uso en la valuación de los estudiantes, Huerta (1998) presenta su visión de mapa conceptual como instrumento de evaluación, a partir del cual analizar la manera en que los estudiantes organizan un determinado conjunto de conceptos y de relaciones entre dichos conceptos. Discute las objeciones puestas a los mapas conceptuales como instrumentos de evaluación y plantea una técnica en la que los estudiantes completan un test del cual los investigadores derivan los mapas conceptuales cognitivos. En esta técnica utiliza la entrevista clínica como medio complementario para la obtención de información del estudiante y sobre aspectos relativos al uso de los mapas conceptuales como instrumento para la evaluación.

La difusión y adaptación de la herramienta a distintos contextos ha constituido un nuevo objeto de interés dando lugar a nuevos hechos educativos y su problematización tanto en el marco teórico original como en otras nuevas aproximaciones teóricas y disciplinarias (Aguilar, 2006). En el caso especifico de la educación matemática, Huertas y otros (2003) realizan una revisión del estado de investigación de los mapas y sus usos para la investigación en educación matemática e incluyen un conjunto abundante de referencias que dan cuenta del uso de los mapas conceptuales en la investigación en contextos diferentes. Brinkmann (2005) presenta los mapas como una herramienta pedagógica para la educación matemática, que permite mostrar las ideas y conceptos relacionados con un tema en una forma bien estructurada. Presenta las estructuras teóricas y la reglas para construcción de los mapas conceptuales y los mapas mentales.

Respecto a trabajos de investigación en educación matemática, Pérez (2006) presenta una experiencia educativa realizada con dos grupos de estudiantes universitarios mexicanos de Cálculo. La experiencia, llevada a cabo con un grupo experimental con un proceso de enseñanza – aprendizaje apoyado en los mapas conceptuales realizados por el profesor y presentados al inicio del tema y un grupo control con la enseñanza tradicional, muestra que la enseñanza guiada por los mapas conceptuales que el profesor elabora, contribuye a desarrollar la cognición en el estudiante. Serhan (2009) investiga, a través de los mapas conceptuales realizados por los estudiantes de dos cursos de Cálculo de dos universidades, el efecto del uso de calculadoras gráficas en la comprensión de la derivada en un punto. El estudio da una mirada a las diferencias entre las imágenes del concepto "concept image" (Tall y Vinner, 1981) que son retenidas por los estudiantes que usan calculadoras gráficas y por los estudiantes que no las utilizan. Esteban y otros (2006) usan los mapas conceptuales como una herramienta de exploración e integración para las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele. Presentan los resultados de una experiencia de aprendizaje de estudiantes de primer grado de universidad para el concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella. Resaltan la importancia del lenguaje en el aprendizaje de conceptos, como una característica del modelo de Van Hiele y de los mapas conceptuales. Huerta (2006) presenta una investigación en la que explora la *multidimensionalidad* de los mapas conceptuales en estudiantes para profesores de secundaria ya graduados. Con la metodología descrita pretende aportar nuevos elementos al marco teórico, que junto con otros trabajos anteriores está proponiendo para el uso de los mapas conceptuales en Educación Matemática.

2.5 Enseñanza de la demostración.

Son múltiples las investigaciones que se han hecho en torno al aprendizaje y enseñanza de las demostración, como se puede deducir al visitar la página *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* (http://www.lettredelapreuve.it/). Allí se encuentra un gran número de trabajos de investigación dedicados al tema de la demostración desde diferentes perspectivas y en diferentes contextos.

La mayoría de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración se han realizado en el campo de la geometría euclidiana (varias de ellas apoyadas en el uso de SGD). Algunas han estudiado los campos de la teoría de números (Harel, 2001; Antonini y Mariotti, 2007; Castagnola y Tortora, 2007; Furinghetti y Morselli, 2008; Tsamir, Tirosh, Dreyfus, Barkai, y Tabach, 2009), el álgebra (Back y Wright, 1999; Healy y Hoyles, 2000; Pedemonte, 2008), el pensamiento probabilístico (Boero, Consogno, Guala, y Gazzolo, 2009) y algunas han empezado a trabajar las competencias y las concepciones de los profesores en el proceso de demostración (A. J. Stylianides y G. J. Stylianides, 2009; G. J. Stylianides y A. J. Stylianides, 2009; Weiss, Herbst, y Chen, 2009; Tsamir y otros, 2009). No conocemos investigaciones en el campo específico de la enseñanza y aprendizaje de la demostración en trigonometría aparte de Ibañes y Ortega (2003, 2004), que utilizan demostraciones trigonométricas para que los estudiantes de primero de bachillerato reconozcan el proceso de demostración entre diferentes procesos matemáticos y realizan un análisis de las demostraciones que dan los textos de bachillerato a algunas relaciones de las razones trigonométricas.

Para organizar las referencias bibliográficas que más incidencia tuvieron en nuestro trabajo de investigación, nos apoyamos en tres caracterizaciones de corrientes de investigación acerca de la demostración, realizadas por Mariotti (2006), Harel y Sowder (2007) y Boero (2007).

2.5.1 Investigaciones en la corriente histórico - epistemológica

Investigaciones que buscan crear conciencia de que la prueba y la demostración han sido vistas bajo diferentes perspectivas por los matemáticos y todavía se ven desde diferentes perspectivas en las escuelas de diferentes países, así como dentro de las matemáticas (Boero, 2007). ¿Qué es la demostración y cuáles son sus funciones? ¿Cómo son construidas, verificadas y aceptadas las demostraciones en la comunidad de los matemáticos? ¿Cuáles son algunas de las fases críticas en el desarrollo de la demostración en la historia de las matemáticas? (Harel y Sowder, 2007).

Battista y Clements (1995) proponen que el currículo de secundaria debe estimular a los estudiantes a refinar su pensamiento gradualmente, conduciéndolos a comprender los defectos de las justificaciones visuales y empíricas para que ellos descubran y comiencen a usar componentes críticos del pensamiento formal. Al respecto Godino y Recio (2001) plantean que la enseñanza de las matemáticas debe procurar que los estudiantes controlen y dominen las diversas prácticas argumentativas, así como ser conscientes de las relaciones dialécticas entre las mismas. Balacheff (2008) propone que las diferentes concepciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la demostración matemática deben ser explicadas y relacionadas para mantener coherente la comprensión global que tenemos de estos procesos ¿Hay un significado compartido de demostración matemática entre investigadores en educación matemática? ¿Cuál es el estado de nuestro campo? ¿Cómo tomamos en cuenta el contexto y el contenido? La forma en que respondemos a estas preguntas determina nuestra visión de lo que es una demostración matemática desde un punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje. Balacheff (2008) distingue cinco posiciones que incluyen: considerar la demostración matemática como un tipo universal y ejemplar de demostración (Fawcet, 1938), considerar que la demostración matemática tiene una naturaleza idiosincrásica (Harel y

Sowder, 1998), considerar la demostración matemática en el corazón de las matemáticas (Healey y Hoyles, 1998), considerarla una herramienta necesaria para las matemáticas pero que alcanza su significado desde las aplicaciones (Hanna y Jahnke, 1996), o como un campo autónomo específico de las matemáticas (Mariotti, 1997).

Arsac (1987, 2007) analiza diferentes hipótesis elaboradas por los historiadores acerca del origen de la demostración en las matemáticas griega. En particular tiene en cuenta las necesidades internas relativas al desarrollo de las matemáticas y las referidas a influencias externas relacionadas con el desarrollo de la sociedad y la cultura griega (en particular, la filosofía griega). Afirma que cualquier investigación acerca de su enseñanza plantea el problema de su historia, como para cualquier otro concepto matemático, incluso si la demostración no es precisamente un concepto sino más bien una técnica. Al respecto, Harel (2007) describe cómo la estructura psicológica de los "*esquemas de demostración*"[6] de Harel y Sowder (1998) fue revisada y replanteada con un enfoque basado casi exclusivamente en consideraciones históricas y filosóficas. Presenta la *nueva estructura* de los esquemas de demostración como un ejemplo de cómo se pueden explotar la historia y la epistemología de las matemáticas para desarrollar herramientas que son útiles para analizar actuaciones de los estudiantes en el ámbito de la demostración. Harel y Sowder (1998) plantean la estructura de los esquemas de demostración como una herramienta para analizar las formas como los estudiantes se convencen a si mismos o persuaden a otros de la certeza de una "observación". Plantean los siguientes esquemas de demostración, cada uno con sus respectivas sub-categorías: *por convicción externa*, *empírico* y *analítico*. Dichos esquemas no son mutuamente exclusivos; una persona puede simultáneamente utilizar más de una clase de esquema.

Desde enfoques filosóficos, Hanna y Janke (1993), además del concepto crucial de aplicación, usan varios conceptos del dominio de la filosofía analítica para presentar un punto de vista de demostración que podría ser clasificado en la categoría de lo dialéctico. Plantean que el punto de vista, a menudo expresado en el proceso social de verificación a través del cual una demostración es aceptada en la comunidad matemática, en cierta forma debería ser imitado en la escuela con sus respectivas limitaciones. Estas limitaciones no descartan crear

[6] Algunos investigadores usan el término "esquemas de prueba", pero de acuerdo a la definición de demostración de Harel y Sowder y a la nuestra, que presentamos en el siguiente capítulo, decidimos usar el término "esquemas de demostración".

situaciones de aula en las cuales los estudiantes sean animados a explorar, plantear y probar conjeturas y a inventar sus demostraciones. La enseñanza de la demostración es siempre confrontada con un doble problema: Encontrar una demostración y al mismo tiempo comunicar su significado. Arzarello (2007) examina su significado comparando las contribuciones de diferentes filosofías acerca de la naturaleza del conocimiento matemático. La idea principal es que sólo saber lo que es, o puede ser una demostración, no sirve para abordar el problema didáctico de su aprendizaje en la clase. En este artículo Arzarello aborda la dicotomía formal-informal en matemáticas y define la noción de *consecuencia lógica* como el núcleo de las demostraciones matemáticas. Utiliza estos dos planteamientos desarrollados para criticar posiciones (cuasi-) empiristas. Hanna (2007) señala que algunas de las razones generales que llevaron a que la demostración en matemáticas dejara de ser relegada en los currículos de la mayoría de países obedecen a factores dentro de las mismas matemáticas como el uso de demostraciones asistidas por computador, el reconocimiento cada vez mayor a las matemáticas experimentales y la invención de nuevos tipos de demostración que no encajan dentro del modelo estándar de demostración.

Mariotti (1997) plantea un modelo de análisis que permita, no solamente la distinción formal entre la verdad y la validación de las situaciones matemáticas, sino manejar la relación complicada entre las dimensiones intuitiva y teórica de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Plantea la necesidad de realizar un análisis más profundo para entender los procesos mentales involucrados en el razonamiento geométrico, en particular la naturaleza de la llamada “figura geométrica”. Un hecho geométrico, un *teorema*[7] es aceptable sólo porque es sistematizado dentro de una teoría, con una autonomía completa de cualquier verificación o cualquier argumentación en un nivel empírico. Basados en el modelo propuesto, Mariotti y otros (1997) presentan los principales resultados de tres estudios de investigación, llevado a cabo durante cinco años con grupos de estudiantes desde 5º hasta 10º grado. Realizan un análisis histórico-epistemológico de los teoremas matemáticos. Enfocan los teoremas de geometría en este sentido y analizan las características del campo de experiencias, el papel del profesor en la interacción en el aula y las funciones de la exploración dinámica en la generación de la forma condicional de los teoremas y el proceso de demostrar.

[7] “Unidad compuesta de un enunciado matemático, una demostración y una teoría matemática, donde la forma condicional del enunciado desempeña un papel principal” (Mariotti y otros, 1997).

2.5.2 Investigaciones en la corriente de la demostración en el currículo

Investigaciones que tienen como meta proporcionar una descripción del estatus de la demostración en la escuela y su relación con el currículo ¿Cuál es el estatus de la demostración en la escuela? (Mariotti, 2006) ¿Cómo la epistemología de la demostración influye en las opciones curriculares? ¿Cómo el aprendizaje de la demostración en la escuela, y en particular las concepciones de los estudiantes acerca de la demostración, guardan relación con supuestos en tradiciones históricas y epistemológicas subyacentes en el currículo? (Boero, 2007).

Healy y Hoyles (1998, 2007) presentan los resultados de un proyecto nacional sobre las concepciones de demostración de estudiantes de 14 y 15 años en Inglaterra y Gales. Examinan la relación entre competencia y currículo en la conformación del desempeño de los estudiantes sobre el cuestionario y caracterizan las diferentes respuestas de dos estudiantes con diferentes visiones de demostración y de matemáticas. Con base en los datos de esta investigación, Küchemann y Hoyles (2001) reportan los resultados de las respuestas a una pregunta escrita de álgebra y dos preguntas escritas de geometría. En sus conclusiones preliminares sugieren que las respuestas son influidas por el tema (álgebra o geometría), el sexo y el conocimiento matemático general. Además, las respuestas a los ítems más familiares (álgebra) parecen estar sujetas más a la influencia del libro de texto que al conocimiento matemático general y que las respuestas a los ítems menos familiares (geometría) están más sujetas a la variación entre clases. En un estudio más local, usando la idea de evaluación propuesta en Küchemann y Hoyles (2001), Fiallo y Gutiérrez (2007) presentan los resultados cualitativos y cuantitativos de una evaluación diagnóstica aplicada a 100 estudiantes de 10º grado de bachillerato (14 – 16 años) de tres instituciones de Santander (Colombia). Analizan los tipos de demostraciones (Marrades y Gutiérrez, 2000) que realizan los estudiantes al inicio del curso. Szendrei-Radnai y Török (2007) proporcionan una imagen parcial y relativa de las concepciones de los estudiantes húngaros acerca de la demostración al entrar en la Universidad. También suministran una ojeada a la existencia de situaciones alternativas y "agentes" (fuera de la configuración de la escuela: contextos matemáticos, matemáticas diarias para estudiantes) que contribuyen a proporcionar buenas oportunidades para que algunos estudiantes puedan hacer frente a una demostración de una manera coherente.

Ibañes y Ortega (2004) realizan un análisis del tratamiento de las demostraciones trigonométricas en los libros de texto españoles de primer curso de bachillerato. Usan las categorías de contenido matemático definidas para ese fin en Ibañes (2001) y analizan los esquemas de prueba, las técnicas empleadas en las demostraciones -método, estilo y modo-, las funciones de la demostración, el reconocimiento de procesos, las expresiones que utilizan, si hacen consideraciones globales del proceso seguido en la demostración. En un trabajo similar, Stacey y Vincent (2008) usan la definición de demostración y los esquemas de demostración de Harel y Sowder (2007) para analizar los modos de razonamiento explícito en las explicaciones, justificación y demostraciones de varios tópicos en cuatro libros de texto australianos. Concluyen que todos los libros de texto hacen algún intento de explicar cada regla. Ningún libro de texto presenta “reglas sin razón”. Parece ser que el único objetivo es deducir la regla en elaboración para practicar con ejercicios, en lugar de utilizar las explicaciones como una herramienta de pensamiento. Las explicaciones son muy cortas con aspectos esenciales del razonamiento formal, por lo que los estudiantes deben acudir a los profesores para comprenderlas, pero el material proporcionado requiere de profundización en el conocimiento matemático y pedagógico del contenido por parte de los profesores. Algunos de los recursos electrónicos que se agregan, incluyendo demostraciones geométricas dinámicas y plantillas para la construcción, son para llenar las lagunas.

2.5.3 Investigaciones en la corriente de las concepciones de demostración de los estudiantes

Investigaciones que buscan obtener una mejor idea sobre los procesos relacionados con la “demostración” y con “demostrar” y de aportar respuestas a las cuestiones de cuáles son las actuales concepciones de la demostración de los estudiantes (Harel y Sowder, 2007), cuáles son las principales dificultades que encaran los estudiantes en relación a la demostración y cuál puede ser el origen de tales dificultades (Mariotti, 2006; Harel y Sowder, 2007).

Balacheff (1988b) presenta un estudio experimental de la noción de demostración desde el punto de vista de las prácticas matemáticas de los estudiantes. Plantea la siguiente estructura de demostraciones: *empirismo ingenuo, experimento crucial, ejemplo genérico, experimento mental*. El estudio permite ver los procesos de demostración usados por los estudiantes al solucionar un problema de demostración, revisando cómo los estudiantes llegan a sus convicciones de la validez de la solución propuesta a través de la discusión verbal. Concluye que el análisis de las características lingüísticas de las expresiones en la demostración es insuficiente para aclarar el nivel de demostración de los estudiantes. Es cuando se conoce el proceso de producción de la demostración que se puede tomar una decisión acerca de su validez efectiva y de su nivel. Con base en los resultados de su investigación, plantea una jerarquía entre los tipos de demostración. Hay ruptura entre los dos primeros tipos de demostración y los dos últimos. Esta ruptura puede ser caracterizada como el paso de una verdad asegurada en base a una afirmación del hecho a una verdad asegurada en base al razonamiento. También reconoce una conexión entre el empirismo ingenuo y el experimento crucial, cuando el último es usado en la demostración por la necesidad de asegurar la generalidad de la conjetura soportada.

De Villiers (1993) propone un modelo de análisis de las concepciones de la demostración de los estudiantes basado en las siguientes funciones de la demostración: *verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación*. El análisis se efectúa con base en consideraciones epistemológicas y al testimonio personal de matemáticos en activo. Plantea que la convicción no se consigue exclusivamente con la demostración, ni la única función de la demostración es la de verificación/convicción; estas ideas no tienen sentido para el estudiante en los casos evidentes o fácilmente verificables. La función de explicación es más significativa para el estudiante. Debe ponerse más atención a las funciones de descubrimiento y comunicación. La función de sistematización debe dejarse para niveles más avanzados, debería ser omitida en un curso introductorio de la demostración. Basados en este modelo, algunos investigadores han analizado, entre otros asuntos, las concepciones de las funciones de la demostración. Ibañes y Ortega (2003) presentan un estudio sobre el *reconocimiento* de diferentes procesos matemáticos por parte de estudiantes de primer curso de bachillerato. En su estudio muestran que en el reconocimiento, distinción e identificación de las demostraciones matemáticas por parte de los estudiantes, éstos van evolucionando y los elementos diferenciadores basados en razones externas al proceso y funciones del mismo dan paso a características del razonamiento utilizado. Cuando se fijan en las funciones de la demostración, la de explicación es la que más consideran. Los estudiantes que no han recibido una instrucción específica sobre la aplicabilidad de los teoremas no son conscientes de esta posibilidad e incluso creen que se pueden encontrar ejemplos que no satisfagan un teorema ya demostrado. Antonini y Mariotti (2008), a partir de la noción de teorema de Mariotti y otros (1997), proponen un modelo para ser usado en la observación, el análisis y la interpretación de asuntos didácticos y cognitivos relacionados con las argumentaciones y demostraciones indirectas. Señalan la dificultad de algunos estudiantes para convencerse con las demostraciones por contradicción debido a que no son un método para generar una conjetura y no es una argumentación para dar soporte a un enunciado. Dichos autores detectan también que, para estos estudiantes, algunas funciones de la demostración no parecen estar presentes en una demostración por contradicción.

Harel y Sowder (1998) proporcionan evidencias de la existencia de los *esquemas de demostración*. Argumentan que las actividades de aprendizaje que educan la razón de los estudiantes acerca de situaciones en términos de esquemas transformativos, son cruciales en el desarrollo matemático, aún desde los primeros años. Los estudiantes no aprenden que las demostraciones son, primero que todo, argumentos convincentes, que las demostraciones son un producto de la actividad humana, en la cual ellos puede y deben participar y que es parte esencial de la actividad matemática. La meta es ayudar a los estudiantes a refinar sus propias concepciones de lo que constituye una justificación en matemáticas: desde una concepción ampliamente dominada por la percepción superficial, la manipulación simbólica y los rituales, a una concepción que está basada en la intuición, convicción interna y necesidad.

Arzarello y otros (1998) bosquejan un modelo para interpretar los procesos de exploración de situaciones geométricas, cuando se están formulando conjeturas y posiblemente produciendo su demostración. El modelo está basado en los diferentes tipos de control del sujeto con respecto a la situación, a saber las fases *ascendente* y *descendente*, y el paso de una fase a otra. Estos autores analizan la solución a un problema de demostración, poniendo especial atención al momento en que se pasa de la fase ascendente, caracterizada por una actividad empírica que apunta a entender mejor el problema, generar una conjetura o verificar, hacia una fase descendente, donde al resolverlo se intenta construir una justificación deductiva.

Healy y Hoyles (2000) examinan las concepciones de los estudiantes de la demostración en álgebra, encontrando que los estudiantes sostenían simultáneamente dos concepciones diferentes de demostración. Los estudiantes prefirieron argumentos que podrían evaluar, que los convencieran, que explicaran y que excluyeran el álgebra. Predominó el argumento empírico en las propias construcciones de demostración de los estudiantes, aunque la mayoría de estudiantes se dieron cuenta de sus limitaciones. Los estudiantes más exitosos presentaron demostraciones en el lenguaje cotidiano, no usando el álgebra. Otro resultado de este proyecto es reportado en Hoyles y Küchemann (2002), quienes analizan las respuestas a una pregunta escrita sobre la equivalencia de dos enunciados de teoría elemental de números, -una implicación lógica y su recíproca-, para evaluar la verdad de las afirmaciones y justificar sus conclusiones. Distinguen tres estrategias, *empírica*, *enfocada empírica* y *enfocada deductiva*, que representan cambios en la atención desde un acercamiento inductivo hacia uno deductivo. Estos autores presentan también algunas categorías teóricas para clasificar diferentes tipos de significados que los estudiantes asignan a la implicación lógica y las razones que sustentan estos significados. Las categorías distinguen respuestas donde un enunciado de implicación lógica es (o no) interpretado como equivalente a su recíproca, donde el antecedente y el consecuente se ven (o no) como intercambiable, y donde las conclusiones son (o no) influenciadas por datos específicos.

2.5.3.1 Investigaciones en la corriente del análisis de la relación entre argumentación y demostración

Dentro de los trabajos que investigan las concepciones de los estudiantes sobre la demostración, algunos tratan las características del razonamiento relacionados con la demostración, principalmente sobre las relaciones entre la argumentación y la demostración (Boero, 2007). Estudian los aspectos cognitivos que entran en juego durante la construcción de una demostración para poner en evidencia ciertas dificultades que los alumnos enfrentan en su aprendizaje. En esta categoría se busca dar respuesta a preguntas como las siguientes: ¿Existe continuidad o distancia cognitiva entre la argumentación producida en la construcción de una conjetura y su demostración? ¿De qué tipo de continuidad se trata? ¿Qué comparar? ¿Cómo comparar? ¿Cómo identificar la fase de producción de la conjetura y la fase de construcción de la demostración? (Pedemonte, 2005).

Desde una perspectiva clásica epistemológica, algunos estudios han planteado, como una de las fuentes de dificultades, la discrepancia entre la verificación empírica (típica de un razonamiento común) y el razonamiento deductivo (típico de un razonamiento teórico). Fischbein (1982) sugiere que la convicción basada en una validación empírica y la basada en la demostración no están en el mismo orden, aunque pueden cohabitar. Balacheff (1988a) plantea que existe una heterogeneidad de orden epistemológico entre estos dos procesos, debido a que los conocimientos utilizados en ambos procesos son muy diferentes por la diferencia del paso de lo pragmático a lo teórico. Este autor también plantea que el objetivo de la argumentación consiste en obtener la adhesión del interlocutor sin plantear necesariamente el problema de la verdad del enunciado. Esta discrepancia ha sido estudiada y radicalizada por Duval (1989, 1992-1993), quien señala la distinción entre diferentes aproximaciones a la demostración, indicando una oposición entre argumentación y demostración, fundamentada en la diferencia entre el nivel semántico, donde el valor epistémico de un enunciado es fundamental, y el nivel teórico donde, en principio, solamente la validez del enunciado es lo que cuenta.

> La suposición de que en el nivel teórico la dependencia lógica de un enunciado con respecto a los axiomas y teoremas de la teoría es independiente del valor epistémico que uno atribuye a la proposición en juego lleva a Duval a reconocer una ruptura cognitiva entre *argumentación* y *demostración.*
>
> (Mariotti, 2006, p.182)

Duval (1989, 1992-1993, 2007) muestra la distancia cognitiva que separa la argumentación de la demostración a pesar de una proximidad discursiva a veces muy grande y desde el problema de la posibilidad de reconocer una argumentación dada la variedad de las formas discursivas que puede tomar y la diversidad de sus niveles de organización. Duval analiza cómo funciona una demostración para plantear una ruptura entre la argumentación y la demostración, afirmando que el razonamiento deductivo es de un carácter diferente al de la argumentación espontáneamente aplicada en discusiones o en debates relativos a conflictos cognitivos. Una argumentación no funciona en primer lugar sobre el estatus de las proposiciones, sino sobre su contenido. La consideración del estatus de las proposiciones no es esencial.

Douek (1998, 2007) toma el análisis del funcionamiento de la demostración de Duval como punto de referencia para subrayar la necesidad de considerar otros aspectos del proceso de construcción de una demostración dentro de las matemáticas. Plantea que, a pesar de la innegable distancia epistemológica y cognitiva entre la argumentación y la demostración matemática formal como productos socialmente situados, desde el mismo punto de vista epistemológico y cognitivo, la argumentación y la demostración matemática ordinaria tienen, como procesos, muchos aspectos en común. Al respecto, Boero y otros (1996) proponen que, en un contexto educativo adecuado es posible implementar con éxito un proceso de producción de teoremas, caracterizado por un fuerte vínculo cognitivo entre los procesos de argumentación y de demostración. En su investigación surgida en un experimento de enseñanza organizado con estudiantes de 8º grado que tenían que plantear conjeturas y construir demostraciones, observaron que los estudiantes mantenían una gran coherencia entre el texto del enunciado producido por ellos y la demostración construida para justificarlo. Ello lleva a estos autores a proponer el constructo de *unidad cognitiva de un teorema*. Garutti y otros (1998) plantean que el constructo unidad cognitiva de teoremas es una herramienta que puede ser útil para interpretar y predecir las dificultades de los estudiantes en la demostración de enunciados de teoremas, ilustran con ejemplos las potencialidades de esta herramienta e indican posibles desarrollos futuros relacionados con la investigación didáctica e implicaciones para una aproximación a la demostración en la escuela. En los ejemplos se destaca que los estudiantes que logran construir conjeturas de carácter procedimental, tienen más éxitos en hacer las transformaciones a las demostraciones que aquellos que formulan conjeturas de carácter relacional. Cuanto mayor es la brecha entre la exploración necesitada para apropiarse del enunciado y el proceso de demostración, mayor es la dificultad del proceso de demostración. Antonini y Mariotti (2008) sugieren que el constructo de unidad cognitiva también puede ser una herramienta didáctica eficiente para diseñar situaciones de enseñanza y de aprendizaje enfocadas a introducir las demostraciones indirectas.

Pedemonte (2002, 2005, 2007, 2008) usa el constructo de unidad cognitiva de un teorema para analizar y mostrar las posibles continuidades y rupturas entre la argumentación y la demostración. Para el análisis cognitivo de la continuidad que puede existir entre los procesos de argumentación que conducen a la explicación de una conjetura y su demostración desde el punto de vista estructural y del sistema de referencia, Pedemonte plantea una herramienta basada en el modelo cK¢[8] (Balacheff, 1995, Balacheff y Margolinas, 2005) integrado en el modelo de Toulmin[9]. El modelo cK¢ permite analizar el sistema de referencia y el modelo de Toulmin permite analizar la estructura de la argumentación.

Son varios los investigadores que han usado el modelo de Toulmin para analizar la estructura de la argumentación, entre ellos Knipping (2008). Esta autora reconstruye y analiza la racionalidad de los argumentos que se producen durante el proceso de demostración en el aula. Propone un método fundamentado en un proceso de tres etapas: reconstruir la secuenciación y los significados de lo discutido en el aula; analizar argumentos y estructuras de argumentación; y finalmente comparar estas estructuras de argumentación y revelar su fundamento. Para la segunda etapa del modelo, analiza primero argumentos locales sobre la base del modelo de Toulmin y luego analiza la estructura argumentativa global del proceso de demostración. Para ilustrar lar relaciones en el análisis global de la discusión en el aula usa

[8] cK¢: conception, knowing, concept (Balacheff & Margolinas, 2005, p. 105)

[9] Toulmin elabora un modelo de representación de las argumentaciones matemáticas, en el que identifica seis características estructurales que se deben analizar y organizar durante el proceso de argumentación: el enunciado (claim), los datos (data), los permisos de inferir (warrant), el indicador de fuerza del argumento (modal qualifiers), las refutaciones potenciales (rebuttals) y el soporte del permiso de inferir (backing). En el siguiente capitulo presentamos el modelo.

una representación esquemática de la estructura general argumentativa. Compara los argumentos locales y las estructuras de argumentación globales reconstruidas para mostrar cómo este método puede revelar las diferencias en la lógica del proceso de demostración. Weber y otros (2008) usan el modelo de Toulmin para tratar el problema de la búsqueda por parte de los estudiantes de *permisos de inferir* válidos para asegurar sus justificaciones o demostraciones, como consecuencia de las objeciones de otros estudiantes. Observan que los estudiantes desafían con frecuencia los argumentos que presentan sus colegas. Estos desafíos invitan a los estudiantes a ser explícitos acerca de qué principios matemáticos (permisos de inferir) usan implícitamente como base para sus argumentaciones matemáticas. Hollebrands y otros (2010) usan el modelo para analizar la naturaleza de los argumentos de los estudiantes cuando usan el SGD *NonEuclid* para resolver problemas de geometría no euclidiana.

Respecto al modelo cK¢, Balacheff (1995) propone los primeros elementos del modelo para establecer una relación entre tres constructos fundamentales: *concepción, conocimiento* y *concepto*. Con el propósito de formalizar la noción de *concepción*, Balacheff y Gaudin (2002) investigan la complejidad de modelar los conocimientos de matemáticas de los estudiantes bajo las restricciones de reconocer su falta posible de coherencia y su eficiencia local. Balacheff y Margolinas (2005) presentan el modelo cK¢ como un modelo de conocimientos para la sistematización de situaciones didácticas. Analizan la diferencia entre saber y conocimiento como uno de los fundamentos esenciales de la teoría de situaciones didácticas (TSD). Realizan una relectura de la TSD para precisar y ejemplificar los conceptos del *a-didáctico, sujeto, medio, concepción, problemas, operadores, sistema de representación* y *estructura de control,* utilizados en el modelo cK¢. Plantean que este marco permite clarificar y precisar las relaciones entre los constructos concepción, conocimiento y concepto, utilizados a menudo en didáctica, y añaden una precisión para situar el concepto *saber*. Es necesario caracterizar el sistema, las condiciones y el control de su evolución.

Miyakawa (2005) usa el modelo cK¢ como una herramienta metodológica y herramienta de análisis del conocimiento para acceder a los conocimientos movilizados por los estudiantes en la resolución de problemas, y más concretamente en las actividades intelectuales implicadas por la producción de una demostración.

2.5.4 Investigaciones en la corriente de propuestas didácticas

Se refiere a experimentos de enseñanza y proyectos desarrollados para analizar la enseñanza de la demostración en contextos educativos adecuados, que pueden potenciar un acercamiento de los estudiantes a los teoremas y la demostración desde la escuela primaria (Boero, 2007). Son investigaciones que buscan dar respuestas a numerosas preguntas abiertas relativas a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, como: ¿Es posible superar las dificultades que encuentran los estudiantes en relación a la demostración? ¿Cómo pueden ser diseñadas intervenciones de enseñanza? ¿Qué sugerencias generales se pueden dar? (Mariotti, 2006) ¿Por qué enseñar la demostración? ¿Cómo debería enseñarse la demostración? ¿Cómo son construidas, verificadas y aceptadas las demostraciones en el aula? ¿Cuáles son las fases críticas en el desarrollo de la demostración con el estudiante y dentro del aula como comunidad de aprendizaje? ¿Qué entornos de aula son propicios para el desarrollo del concepto de demostración con los estudiantes? ¿Qué formas de interacciones entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor pueden fomentar la concepción de demostración de los estudiantes? ¿Qué actividades matemáticas - posiblemente con el uso de tecnología - pueden mejorar las concepciones de los estudiantes de la demostración? (Harel y Sowder, 2007)

Hanna (2000) presenta los cuatro artículos de investigación de la edición del número extraordinario de la revista *Educational Studies in Matematics* correspondientes a investigaciones empíricas del uso de SGD con estudiantes para ayudarles a desarrollar razonamiento lógico matemático, producir demostraciones válidas de proposiciones geométricas y enriquecer su comprensión de las matemáticas. Plantea que una de las tareas cruciales de los educadores matemáticos es entender el papel de la demostración en la enseñanza, a fin de que podamos resaltar su uso en el aula. En necesario que los profesores discutan con los estudiantes la función de la demostración en las matemáticas, señalando su importancia y sus limitaciones. En el aula el papel crucial de la demostración es la promoción de la comprensión matemática, y así nuestro reto más importante es encontrar formas más efectivas de usar la demostración con este propósito. Una de estas formas potencialmente más efectivas es usar SGD, lo cual marca nuevos rumbos en los acercamientos a la enseñanza de la demostración.

En esta edición especial, Mariotti (2000) describe un experimento de enseñanza de dos años que tuvo como meta introducir a los estudiantes en el pensamiento teórico. Estudia el proceso de mediación semiótica relacionado con el surgimiento de significados de demostración en estudiantes. Destaca la gran ventaja de Cabri de permitir distinguir entre un dibujo y una figura, pero, a la vez, la gran desventaja de que posiblemente la interpretación que hacen los estudiantes del modo “arrastre” no es la de control ni se puede garantizar que ellos la vean así.

Jones (2000) investiga la *matematización progresiva* del sentido que van dando los estudiantes a lo que van haciendo con el software a través de las interpretaciones y explicaciones que los estudiantes dan de las propiedades geométricas de los cuadriláteros que ellos construyen y de la posibilidad de hacer clasificaciones inclusivas. Muestra cómo los estudiantes evolucionan desde expresiones imprecisas y de la vida diaria a razonamientos matemáticos de situaciones geométricas que trascienden la herramienta usada.

Marrades y Gutiérrez (2000), apoyados en los trabajos de Balacheff (1988b), Bell (1976) y Harel y Sowder (1998), proponen una estructura de tipos de demostraciones útil para analizar, organizar y describir las demostraciones elaboradas por los estudiantes. Estos autores realizan un análisis detallado de cómo y por qué eligen los estudiantes ejemplos para componer demostraciones empíricas.

Por su parte, Hadas y otros (2000) presentan dos secuencias de actividades diseñadas con el objetivo de crear la necesidad de la explicación deductiva, aprovechando la sorpresa o la incertidumbre que causan los resultados obtenidos de manera empírica.

Arzarello y otros (2002, 2007) analizan el uso del arrastre en SGD introduciendo una jerarquía de sus funciones. El arrastre se revela crucial en la dialéctica entre los aspectos perceptivos y teóricos que se lleva a cabo en el razonamiento geométrico en general cuando se plantea e un contexto de geometría dinámica. Plantean dos principales tipologías cognitivas de uso del arrastre, que están relacionadas con los tipos de control mencionados en la sección 2.5.3 y que pueden ser apropiadas de acuerdo a la situación concreta: *Procesos ascendentes:* de las figuras a la teoría, con el objeto de explorar libremente una situación, mirando sus regularidades, invariantes, etc. *Procesos descendentes:* desde la teoría a las figuras, con el objeto de validar o refutar conjeturas o chequear propiedades.

Fiallo (2006) analiza los tipos de demostración de Marrades y Gutiérrez (2000) que emergen a través de la aplicación de una unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un entorno de geometría dinámica enfocándola además hacia el desarrollo de las habilidades de la demostración en los estudiantes de 10º grado. Con los datos obtenidos en esta investigación, Gutiérrez y Fiallo (2007) presentan algunos ejemplos de los diferentes tipos de demostración producidas por los estudiantes y muestran su progreso durante el experimento de enseñanza.

Un grupo de investigadores italianos han realizado diversos experimentos de enseñanza con el fin de analizar la problemática del aprendizaje de la demostración en clases ordinarias. Varias de esas investigaciones están resumidas en Boero (2007). Entre ellos, Bartolini Bussi y otros (2007a) presentan el trabajo de investigación referente al acercamiento a los teoremas de geometría en la escuela. Proporcionan una estructura teórica unificada de los estudios de investigación que usan en las siguientes investigaciones: Bartolinni Bussi y otros (2007b) reportan un problema de construcción de la geometría del círculo en tercer grado de primaria. Analizan los procesos que han tenido lugar en las aulas como consecuencia de la asignación de esta tarea, y abordan algunos aspectos pertinentes, como la delicada relación entre las prácticas concretas y el pensamiento teórico, y analizan cómo fue intencionalmente provocado el cambio del uno al otro durante la interacción en las clases. Boero y otros (2007) analizan los procesos mentales subyacentes a la producción y demostración de conjeturas en matemáticas, dando algunas pistas sobre situaciones problemáticas adecuadas para la enseñanza de la demostración y sobre la mejor forma de manejar el trabajo en clase para una amplia participación de los estudiantes en la construcción de conjeturas y demostraciones. Parenti y otros (2007) presentan las condiciones peculiares que habilitan la clase para llegar a buenos niveles de participación en discursos teóricos y estudian algunos procesos mentales que están involucrados en estas actividades. Confirman el importante papel que desempeña el profesor en el acercamiento a aspectos teóricos de las matemáticas: en el aula como un mediador cultural, que plantea y coordina discusiones; en el grupo de investigación, como un miembro que hace parte de la planificación de las actividades y en el análisis de los procesos mentales de los estudiantes.

3. Marco teórico

En este capítulo nos centramos en la definición y caracterización de las teorías, modelos y aspectos didácticos de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática que hemos utilizado, tanto en el diseño de la experimentación, como en el análisis de los resultados de nuestra investigación.

En la sección 3.1 caracterizamos la metodología de enseñanza y de aprendizaje usada en el diseño de la unidad de enseñanza para el aprendizaje de las razones trigonométricas y para el desarrollo de las habilidades de demostración. Esta caracterización la apoyamos en el análisis de algunas dificultades del aprendizaje de ciertos conceptos y relaciones de las razones trigonométricas, la enseñanza y el aprendizaje de conceptos, relaciones, propiedades y procesos matemáticos (representación y conexiones, razonamiento y demostración), el papel de la geometría en la enseñanza de las razones trigonométricas y en particular el papel que juega el uso delos Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) como apoyo en un contexto de enseñanza por descubrimiento guiado. Teniendo en cuenta que hemos usado las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, como metodología de organización de las actividades propuestas en la unidad de enseñanza, presentamos brevemente el modelo de Van Hiele y explicamos cómo hemos integrado las fases de aprendizaje de Van Hiele en nuestra unidad. Dado que hemos usado los mapas conceptuales como una herramienta de diseño curricular, de enseñanza (especialmente en la fase de explicitación del modelo de Van Hiele), de aprendizaje y de evaluación, presentamos un breve resumen de este modelo teórico y explicitamos nuestra concepción de mapa conceptual, el uso que le hemos dado y los tipos de mapas que hemos usado. En cada uno de estos aspectos de nuestra caracterización resaltamos el papel del profesor y del estudiante para el logro de los objetivos de enseñanza y de aprendizaje propuestos. Finalmente presentamos brevemente y esquemáticamente los contenidos y relaciones matemáticos abordados en la unidad de enseñanza.

En la sección 3.2 caracterizamos los diferentes conceptos, variables, constructos, herramientas y modelos que usamos para representar y analizar las producciones (conjeturas y demostraciones) de los estudiantes, con miras a establecer las relaciones entre los procesos de argumentación y demostración para señalar cuáles son los aciertos y dificultades que se presentan cuando se plantean propuestas para introducir a los estudiantes al tema de la demostración con SGD.

3.1 Enseñanza y aprendizaje de la trigonometría

Presentamos algunas ideas importantes de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría que hemos tenido en cuenta en el diseño de nuestra unidad de enseñanza de las razones trigonométricas. Como veremos más adelante, no abarcamos toda la rama de las matemáticas llamada "trigonometría", sino que nos hemos centrado en una parte de dicha rama que hemos denominado "razones trigonométricas", la cual no considera el estudio de las "funciones trigonométricas" ni las aplicaciones de la trigonometría. Esta reducción no la hemos hecho porque no consideremos importantes dichos estudios, más bien la hemos hecho por las siguientes razones: i)necesidad de delimitar el tema en un tiempo razonable para la experimentación; ii)uno de nuestros objetivos es "utilizar" el tema de las razones trigonométricas como el "pretexto" para profundizar en el desarrollo de las habilidades de demostración y en el análisis de las relaciones entre los procesos de argumentar y demostrar; iii)dificultad para lograr desarrollar habilidades de argumentar y demostrar, y a su vez lograr desarrollar habilidades para la resolución de problemas de aplicación de conceptos trigonométricos y realizar el estudio analítico de las funciones en el periodo de tiempo previsto para la experimentación; iv)complejidad en la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría que han detectado algunas investigaciones.

Basamos nuestra propuesta de enseñanza y de aprendizaje en cuatro ejes:

1. Conceptual: Relativo al aprendizaje de los conceptos y propiedades matemáticos implicados.

2. Curricular: Relativo a los contenidos matemáticos sugeridos en los currículos oficiales y trabajados en los libros de texto. Incorporación de los procesos de razonamiento y demostración, conexiones y representación.
3. Metodológico: Relativo al uso de un enfoque geométrico para la enseñanza de las razones trigonométricas, que incluye un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) como apoyo en un contexto de enseñanza por descubrimiento guiado, el uso de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele para el diseño de las actividades, y el uso de los mapas conceptuales dentro de la fase de explicitación del modelo de Van Hiele.
4. Formativo: Relativo al objetivo de mejorar la habilidad de demostración matemática de los estudiantes mediante el requerimiento a éstos de validar sus resultados y descubrimientos.

En los siguientes párrafos reflexionamos sobre los principales aspectos de cada eje.

3.1.1 Algunas dificultades en el aprendizaje de la trigonometría

La enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría es un campo poco explorado por los investigadores en didáctica de las matemáticas. Markel (1982), Goldin (1983), Fi (2003) y Brown (2006) plantean que la trigonometría en el plano coordenado es un tema difícil para los estudiantes y que es muy poco lo que se ha hecho para investigar los motivos de dichas dificultades. Hay muchos factores que podrían estar involucrados. Uno de estos problemas radica en que la trigonometría es un tema complicado e interconectado que lleva a que los estudiantes tengan que estar cambiando las definiciones dadas para las razones trigonométricas de acuerdo al enfoque y contexto planteado. Por ejemplo, al cambiar del estudio de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo al plano cartesiano, se cambia de una definición geométrica a una definición analítica, se cambia de analizar los valores de los lados del triángulo rectángulo a analizar los valores de las coordenadas del plano y el radio de la circunferencia, se cambia de un concepto de ángulo como región comprendida entre dos lados del triángulo a un concepto de ángulo como giro o rotación, los valores del ángulo pasan de ser valores de ángulos agudos o rectos ($0º \leq \theta \leq 90º$) a ángulos positivos y negativos, al menos en el intervalo $-360º \leq \theta \leq 360º$. Ahora las razones trigonométricas no son solamente una relación o cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo, sino distancias dirigidas en el plano cartesiano o coordenadas del punto de intersección entre el lado terminal del ángulo y el circulo goniométrico.

Brown (2006) identifica los siguientes factores que afectan la clara comprensión de los conceptos trigonométricos son los siguientes: conceptos débiles de ideas importantes sobre las rotaciones y el círculo goniométrico; poca o ninguna comprensión del papel de la unidad en el circulo goniométrico o aplicación inconsistente de la unidad; dificultad para interpretar los gráficos coordenados como información geométrica y numérica combinada, lo que implica no ver las coordenadas de un punto como números y longitudes dirigidas de los segmentos horizontales y verticales que conectan el punto con los ejes; dificultad para comprender el seno y el coseno como coordenadas, lo que implica la carencia de asociar los signos positivo o negativo de las coordenadas x, y a los signos del seno y coseno de ángulos no agudos; dificultad para entender los números racionales como números y como cocientes. Esto se relaciona con el hecho de que el seno es un solo valor, cuando se está describiendo como una distancia o una coordenada, o un cociente de dos números en la trigonometría del triángulo rectángulo.

Las ideas de Freudenthal (2001) acerca del tema "razón" nos aproximan a la complejidad implícita en el tema de las "razones trigonométricas":

> La razón es una función de un par ordenado de números o valores magnitud. También lo son la suma, la diferencia, el producto y el cociente, pero éstos lo son en sentido algorítmico: hay una receta para obtener el valor de la función correspondiente a un par determinado o al menos para actuar como si se hubiera obtenido – en efecto, ¿qué se ha obtenido si se contesta a 3:4 con $\frac{3}{4}$?
> (Freudenthal, 2001, p. 66).

> La razón también puede obtenerse transformándola en un cociente, pero esta es la violación de la razón. Si se hace, se priva a la razón de lo que la hace valiosa como razón. La razón es una función de un par ordenado de números o valores de magnitud. Pero, ¿Qué hay de los valores de esa función? ¿Números o valores de magnitud, de nuevo? Se puede interpretar así, pero es la manera errónea de hacerlo. En efecto esto identificaría razón con cociente. El significado propio de la razón es hablar sobre igualdad (o desigualdad) de razones sin conocer el tamaño de la razón.
> (Freudenthal, 2001, p. 67).

Freudenthal (2001) plantea que la razón, en cuanto a concepto e incluso en cuanto a objeto mental, requiere un nivel de desarrollo considerablemente alto. Sin embargo la razón en semejanzas, por la sensibilidad y la vista[1] para las razones, se presenta en el desarrollo notablemente pronto. Los niños pueden manejar la semejanza como una equivalencia operativa. Las congruencias y las semejanzas son rasgos incorporados en la parte del sistema nervioso central que procesa nuestras percepciones ópticas, sin embargo con este ojo o sensibilidad para la semejanza, el niño está lejos de la semejanza como objeto mental y como concepto. Criterios para la conservación de la razón como: conservación de la igualdad de

[1] En ingles "the feel and look" (Freudenthal, 2001, p. 81)

longitudes, conservación de la congruencia, conservación de las razones internas, constancia de la razón externa, conservación de los ángulos y decidir acerca de la necesidad y suficiencia de tales criterios, son necesarios para la formación del objeto mental semejanza. Una temprana familiaridad con las aplicaciones que conservan la razón ayuda a visualizar los contextos de la razón que no son visuales a priori, pero se requiere que la razón visualizada se suelte en cierta forma del contexto de las semejanzas globales. "Para construir un puente de razones no visuales a razones visuales, la visualización estricta por semejanza ha de ser debilitada" (Freudenthal, 2001, p. 84).

Estas recomendaciones acerca del tema razón y las dificultades señaladas, las hemos tenido en cuenta e incorporado en el planteamiento de nuestra unidad de enseñanza de la siguiente manera: iniciamos el estudio de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, favoreciendo las concepciones de razón como relación entre lados de un triangulo rectángulo y como cociente. Aprovechamos las ventajas que nos ofrece el programa de geometría dinámica Cabri para la exploración y la visualización geométrica y numérica de las relaciones entre los lados del triángulo rectángulo y los ángulos complementarios. Se visualiza la conservación de la razón a través de la semejanza de triángulos rectángulos y se favorecen las argumentaciones geométricas para las justificaciones de las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos complementarios. Para no perder el sentido de la razón se sugiere que los estudiantes utilicen las ventajas del software para que analicen, comparen y visualicen geométricamente y numéricamente a través del arrastre los variantes e invariantes de cada una de las razones al variar los ángulos o los lados del triangulo rectángulo. Al pasar al plano cartesiano se aprovecha las ventajas de Cabri para seguir visualizando los conceptos y propiedades estudiados en el triángulo rectángulo y su uso cuando sean necesarias, pero se insiste en el análisis de las nuevas definiciones y relaciones en el plano cartesiano y su relación con el triángulo rectángulo. En este contexto, además de la concepción de razón como relación y cociente, se favorece a través de la representación mediante vectores la concepción de razón como distancia o longitud dirigida. A través de la visualización de los vectores y de los triángulos rectángulos en el plano cartesiano se ven relaciones y propiedades de las razones trigonométricas y se insiste en el uso de la definición de razón trigonométrica como relación entre las coordenadas del punto de intercepción del lado final del ángulo y la circunferencia de radio variable *r*.

3.1.2 El razonamiento y la demostración

Como lo mencionamos al inicio de ésta sección, un objetivo de la unidad de enseñanza que planteamos es favorecer el aprendizaje de la demostración. En este contexto, los profesores, además de evaluar el progreso de sus estudiantes en el aprendizaje de conceptos y propiedades trigonométricos, deben evaluar su progreso en el aprendizaje de las habilidades de demostración. No conocemos investigaciones que hayan estudiado específicamente el proceso de demostración en trigonometría, planteando una unidad de enseñanza para tal fin.

Consideramos que nuestra propuesta es un aporte original que amplía el conocimiento de este tema por la didáctica de las matemáticas, dado que a partir de nuestra caracterización de los términos argumentación[2] y demostración[3], planteamos las actividades de trigonometría que conducen al planteamiento de conjeturas[4] y construcción de demostraciones y proponemos un modelo de análisis de la unidad cognitiva entre estos dos procesos. El modelo de análisis está basado en la propuesta de Pedemonte (2005), que hemos adaptado para adecuarlo a las categorías de demostraciones propuestas por Marrades y Gutiérrez (2000) y a las características de las demostraciones que hay que hacer en trigonometría. Según Pedemonte (2009), este es un aporte original y novedoso que incluye las demostraciones empíricas o inductivas que no se ha tenido en cuenta en las investigaciones de la unidad cognitiva, dado que en dichas investigaciones el término demostración incluye únicamente las demostraciones deductivas que conducen a la construcción de un teorema.

Respecto a la demostración, en los "Principios y Estándares" de NCTM (2003) se plantea que el razonamiento y la demostración matemáticos proporcionan modos potentes de desarrollar y codificar conocimientos sobre una amplia variedad de fenómenos.

> "Al final de la escuela secundaria, los estudiantes deberían estar capacitados para comprender y elaborar demostraciones matemáticas, es decir, argumentos que consisten en deducciones o conclusiones lógicamente rigurosas a partir de hipótesis, y deberían apreciar el valor de tales argumentos. Las propuestas de enseñanza deberían capacitar a todos los estudiantes para: reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas; formular e investigar conjeturas

---

[2] Proceso que conlleva a la conformación de una estructura ternaria, compuesta por unos *datos*, *una conclusión* y *un permiso de inferir*.

[3] Proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para *explicar*, *verificar*, *justificar* o *validar* con miras a convencerse a si mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática.

[4] Terna caracterizada por *un* enunciado, *una argumentación* y *un sistema de concepciones* (Pedemonte, 2005)

> matemáticas; desarrollar y evaluar argumentos y demostraciones matemáticos; elegir y utilizar varios métodos de demostración"
>
> (NCTM, 2003, p. 59).

Por otro lado, es reconocido que la mayoría de estudiantes que han accedido a la demostración, lo han hecho en los cursos de geometría de secundaria (NCTM, 2003) y a un nivel intuitivo (Mariotti, 2000). Varias de estas experiencias se basan en la observación de las demostraciones que los profesores transcriben de los textos escolares al tablero; pero los autores de los textos emplean pocos recursos para hacer comprensibles esas demostraciones, en resaltar sus características, en detenerse en sus razonamientos, en reconocer sus técnicas, en destacar sus funciones, y en potenciar su utilización (Ibañes y Ortega, 2004)

Según Mariotti (2000), la geometría deductiva se presenta a los estudiantes como una colección de "definiciones", para nombrar y describir figuras geométricas, y "hechos" expresando propiedades particulares. Estos hechos tienen un alto grado de evidencia y en cualquier caso los argumentos eventualmente proporcionados por el profesor tienen el objetivo específico de la construcción de esas evidencias. El hecho de que a los estudiantes nunca se les pida justificar sus conocimientos, lleva a que éstos tengan un antecedente geométrico intuitivo que debe ser reorganizado de acuerdo con un enfoque deductivo. Lograr que se comprenda la relación entre el conocimiento intuitivo y su sistematización teórica es muy difícil, ya que para el estudiante es muy difícil de comprender por qué se deben cuestionar propiedades bien conocidas y utilizar largos argumentos para apoyar su verdad, que es tan evidente. La idea que tienen los estudiantes, es que el profesor es quien tiene que "justificar" con el objetivo de "convencerlo" de la evidencia de un determinado hecho. Por esta razón Mariotti y otros didactas proponen que no hay que pedir a los estudiantes que demuestren deductivamente propiedades de sobra conocidas por ellos o las que, aunque sean nuevas para ellos, son evidentes a partir de una simple manipulación gráfica o con SGD. El rodeo que proponen para esto es cambiar la petición de demostrar la veracidad por la postura de reconocer, con los estudiantes, que la propiedad es verdadera pero plantear preguntas sobre por qué es verdadera.

En nuestra unidad de enseñanza hemos incorporado la demostración desde el inicio del estudio de las razones trigonométricas, incitando al estudiante a la exploración, análisis y visualización a través de Cabri de las relaciones y propiedades de las razones trigonométricas para que planteen sus propias conjeturas y construyan sus propias demostraciones. La invitación a la demostración la hacemos a través de la solicitud continua de explicaciones matemáticas para las conjeturas planteadas (incluso las evidentes) y desde nuestra concepción de demostración.

En este contexto el papel del profesor es fundamental para recalcar la importancia de la demostración a través de propiedades cada vez más generales y matemáticamente aceptadas, para que los estudiantes no queden conformes con explicaciones suministradas por lo que "ven" en el ordenador. Para que, a través de la discusión y participación de los estudiantes, ellos mismos se den cuenta de las distintas formas de argumentación y explicación de una proposición. Para ayudarles a discutir y construir la estructura lógica de los argumentos propuestos. Para aclarar las ideas, representaciones y conexiones que están en juego. Para hacerles caer en la cuenta de las principales funciones de la demostración planteadas por De Villiers (1993) y para conducir a sus estudiantes al desarrollo de habilidades de demostración cada vez más próximas a las deductivas.

3.1.3 Las conexiones y representaciones

Los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas se definen, se conectan, se representan y se demuestran de diversas formas, involucrando conocimientos numéricos, geométricos, métricos, algebraicos y analíticos, por lo que se necesita de un tratamiento didáctico que permita que los estudiantes vean las conexiones entre conceptos, procesos y relaciones mediante las diferentes formas de representación.

Según los Principios y Estándares (NCTM, 2003), cuando los estudiantes pueden conectar ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera. Pueden ver conexiones matemáticas en la rica interacción entre los temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con otras disciplinas y en sus propios intereses y experiencias. Viendo las matemáticas como un todo, resalta la necesidad de estudiar sus conexiones internas y pensar sobre ellas, tanto en las existentes en el currículo de un determinado curso o nivel educativo como en las que se dan entre niveles. Los estudiantes deberían estar en capacidad de reconocer y usar las conexiones entre ideas matemáticas y de comprender como las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras para producir un todo coherente y reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos.

También en los Principios y Estándares (NCTM, 2003) se plantea que, para entender y utilizar las ideas matemáticas, es fundamental la forma en que se representen. Muchas de las representaciones que hoy nos parecen naturales, tales como los números expresados en el sistema decimal o en el binario, las fracciones, las expresiones algebraicas y las ecuaciones, las gráficas y las hojas de cálculo, son el resultado de un proceso cultural desarrollado a lo largo de muchos años. Cuando los estudiantes acceden a estas representaciones matemáticas y a las ideas que representan, toman posesión de un conjunto de instrumentos que amplían de forma significativa su capacidad para pensar matemáticamente. Las representaciones deberían tratarse como elementos esenciales para sustentar la comprensión de los conceptos y relaciones matemáticos, para que los estudiantes se comuniquen sus enfoques, argumentos y conocimientos, para reconocer las conexiones entre conceptos matemáticos y para aplicar las matemáticas a problemas reales a través de la modelización. Las nuevas formas de representar asociadas a la tecnología electrónica crean la necesidad de una atención, incluso mayor, a la representación. Los estudiantes deberían estar en capacidad de crear y utilizar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas; seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas y usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Teniendo en cuenta las ideas anteriores, en la unidad de enseñanza hemos diseñado las actividades desde un enfoque geométrico apoyado en SGD para favorecer, inicialmente, conexiones entre procesos, representaciones y procedimientos métricos, numéricos y geométricos y, posteriormente, ampliar las conexiones al plano coordenado favoreciendo procesos, representaciones y procedimientos algebraicos y analíticos. En cada una de las conjeturas planteadas por los estudiantes se insiste en que las explicaciones sean cada vez más generales e integrales, invitándolos a que justifiquen lo visualizado en Cabri a través de dibujos geométricos complementados con justificaciones en un lenguaje cada vez más algebraico y analítico. Aquí es fundamental el papel del profesor, quien debe estar continuamente motivando al estudiante para que use las diferentes conexiones y representaciones que se han dado a través del avance en cada uno de los temas propuestos.

3.1.4 El papel de la geometría

En la metodología de enseñanza de las razones trigonométricas planteada en la unidad de enseñanza, partimos de un enfoque geométrico basado en un entorno de software de geometría dinámica (SGD), por lo que tenemos en cuenta las consideraciones de Laborde y otros (2006), quienes hacen caer en la cuenta de la naturaleza dual de los conceptos geométricos (lo espacial y lo teórico) y de la importancia del papel de la visualización y de las representaciones gráficas proporcionadas por el computador:

> La enseñanza de la geometría debería contribuir al aprendizaje de: (1) La distinción entre las relaciones gráficas espaciales y las relaciones geométricas teóricas, (2) El movimiento entre objetos teóricos y su representación espacial, (3) El reconocimiento de relaciones geométricas en un diagrama, (4) La habilidad para imaginar todos los diagramas posibles asociados a un objeto geométrico. La segunda clase de habilidad es particularmente crítica en los procesos de solución de los estudiantes confrontados con problemas geométricos que precisan exploración en la cual puede tener lugar un ciclo de interpretación, conjetura, y demostración gracias a esta flexibilidad entre representaciones espaciales y el conocimiento teórico.
>
> (Laborde, Kynigos, Hollebrands & Strässer, 2006, p. 277)

Según los Principios y Estándares (NCTM, 2003), la geometría es el lugar natural para el desarrollo del razonamiento y de las habilidades para la demostración. La construcción de modelos geométricos y el razonamiento espacial ofrecen vías para interpretar y describir entornos físicos y pueden constituir herramientas importantes en la resolución de problemas. Las ideas geométricas son útiles para representar y resolver problemas en otras áreas de las matemáticas y en situaciones del mundo real; por eso, la geometría debería integrarse, cuando sea posible, con otras áreas. Las representaciones de las razones trigonométricas en el plano cartesiano pueden servir para conectar la geometría y el álgebra. Herramientas como un programa informático de geometría dinámica capacitan para modelizar la variedad de representaciones gráficas de las razones trigonométricas de ángulos de diferentes amplitudes y para tener una experiencia interactiva con ellas. Usando tecnología, los estudiantes pueden generar muchos ejemplos como un medio de establecer y explorar conjeturas, pero un objetivo importante de enseñanza del curso que hemos diseñado es que los estudiantes lleguen a darse cuenta de que generar muchos ejemplos de un determinado fenómeno no constituye una demostración, sino que, después de las exploraciones empíricas, es necesario buscar explicaciones deductivas de la veracidad de las conjeturas encontradas.

En nuestra unidad de enseñanza el uso de las coordenadas cartesianas, las herramientas de cálculo y el uso de la calculadora dinámica de Cabri nos han permitido integrar lo geométrico con lo aritmético, con lo métrico, con lo algebraico y con lo analítico. Todas las relaciones y propiedades propuestas para el estudio de las razones trigonométricas se pueden visualizar y comparar desde una construcción dinámica geométrica que integra lo numérico, métrico, algebraico y analítico y que le permite al estudiante la posibilidad de plantear conjeturas y construir demostraciones. En esta integración de la geometría al tema de las razones trigonométricas, hemos tenido en cuenta algunos planteamientos de propuestas geométricas innovadoras de la enseñanza de la trigonometría dirigidas a profesores de matemáticas de ESO y bachillerato como las planteadas por Esteban, Ibañes y Ortega (1998), quienes presentan en su libro distintos estilos geométricos muy ilustrativos de demostraciones de las relaciones y propiedades trigonométricas, Munné (2002) quien presenta varias propuestas para demostrar las fórmulas trigonométricas de suma o resta de ángulos, y Gutmann (2003) quien presenta unas actividades en las que los valores de seno y coseno de la suma de dos ángulos aparecen ligados a las medidas de segmentos en la circunferencia unidad. También plantea la idea de llamar "lado seno" y "lado coseno" a los segmentos de circunferencias no unidad. Junto a ideas y propuestas de enseñanza extraídas de las referencias anteriores, hemos incluido en nuestra unidad de enseñanza la idea original de representar las razones trigonométricas en el plano cartesiano de Cabri mediante vectores, como manera de conectar elementos geométricos, métricos, numéricos y analíticos para visualizar en todos los cuadrantes las relaciones y propiedades de las razones trigonométricas estudiadas. El estudiante puede ver a través de las representaciones vectoriales que las propiedades encontradas se cumplen para todos los ángulos comprendidos, al menos, en el intervalo -360º $\leq \theta \leq$ 360. También pueden comprender, a través de la visualización geométrica de vectores o de su suma o diferencia, propiedades numéricas y analíticas y relacionar los diferentes sistemas de representación de estas relaciones, inclusive entender los procesos de límite que es necesario considerar cuando se estudian los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 0º, 90º, 180º y 270º. Por ejemplo, cuando el ángulo tiende a 90º desde el primer cuadrante, se ve que las razones coseno y cotangente tienden a cero porque se ve que los vectores representantes de estas razones van disminuyendo su magnitud - esto se justifica analíticamente porque la abscisa x tiende a cero y el cociente de un número que tiende a cero entre otro número diferente de cero que no tiende a x, tiende a cero.

3.1.5 El uso de Sistemas de Geometría Dinámica (SGD)

En todos los aspectos mencionados anteriormente hemos visto que el uso de la tecnología es un elemento común y unificador de todas estas ideas, como una herramienta que nos permite integrar diferentes concepciones de un tema, tener una mayor posibilidad de visualizar, explorar, analizar, plantear conjeturas acerca de las relaciones y propiedades observadas y construir sus demostraciones, así como ver y manipular diversas representaciones que le permitan establecer conexiones entre las diferentes definiciones, relaciones y propiedades de las razones trigonométricas.

Según los principios del NCTM (2003), las calculadoras y los ordenadores, proporcionan imágenes visuales de ideas matemáticas, facilitan la organización y el análisis de datos y hacen cálculos con eficacia y exactitud. Cuando los estudiantes disponen de estas herramientas tecnológicas, pueden centrar su atención en tomar decisiones, reflexionar, razonar y resolver problemas. La capacidad de cálculo de los recursos tecnológicos amplía la serie de problemas asequibles a los estudiantes, y los capacita para ejecutar procedimientos rutinarios con rapidez y seguridad, permitiéndoles así disponer de más tiempo para desarrollar conceptos y para modelizar. A través de la tecnología puede potenciarse la implicación de los estudiantes en las ideas matemáticas abstractas, y en su dominio. La tecnología enriquece la gama y calidad de las investigaciones, al proveer medios para visualizar ideas matemáticas desde diversas perspectivas. Los programas de geometría dinámica permiten la experimentación con objetos geométricos con un enfoque explicito en las transformaciones geométricas.

Laborde y otros (2006) plantean que en los SGD, los diagramas resultan de secuencias de primitivas seleccionadas por el usuario y expresadas geométricamente. Los diagramas creados tienen la característica de ser cuasi-independientes, de tal manera que, cuando el usuario arrastra un elemento del diagrama, éste es modificado según la geometría de sus construcciones. Estos diagramas son considerados objetos externos cuyo comportamiento y retroalimentación precisa decodificación por parte de los estudiantes. La geometría es una manera, entre otras, de interpretación de este comportamiento. Los invariantes espaciales en los diagramas en movimiento representan invariantes geométricos y estos micromundos de geometría pueden ofrecer un enlace firme entre los gráficos espaciales y aspectos geométricos.

Respecto a la mediación de un SGD en el aprendizaje de la demostración, Mariotti (2000) plantea que “Las construcciones geométricas tienen un significado teórico. Las herramientas y reglas de su uso tienen una contraparte en los axiomas y los teoremas de un sistema teórico, de tal forma que cualquier construcción corresponde a un teorema específico. Dentro de un sistema de este tipo, el teorema hace válida la exactitud de la construcción. La relación entre los elementos del dibujo producido por la construcción es afirmada por un teorema relativo a la figura geométrica representada por el dibujo”. También plantea que la novedad de un SGD consiste en la posibilidad de manipulación directa de sus figurasen términos del sistema lógico de la geometría euclidiana. La dinámica de la figura, realizada por el arrastre, conserva la lógica de la construcción; Los elementos de la figura dinámica se relacionan por propiedades geométricas de acuerdo a una relación de condicionalidad lógica.

Esto conlleva a establecer una correspondencia entre el mundo de las construcciones en SGD y el mundo teórico de la geometría euclidiana.

3.1.6 El modelo de Van Hiele

No conocemos hasta el momento trabajos de investigación del uso del modelo de Van Hiele para la enseñanza de la trigonometría, por lo que consideramos nuestra propuesta de unidad de enseñanza como un aporte a esta línea de investigación.

El modelo de Van Hiele está formado por dos componentes: los niveles de razonamiento, que describen la forma como los estudiantes razonan cuando efectúan diversas actividades para un tema, desde el razonamiento intuitivo hasta el razonamiento abstracto formal y las fases de aprendizaje, que ayudan al profesor a organizar las actividades para que sus estudiantes puedan avanzar de un nivel de razonamiento al inmediatamente superior. Las características centrales del modelo son las siguientes (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 305):

(1) Se pueden encontrar varios niveles de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.
(2) Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
(3) Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.
(4) No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que adquiera la experiencia necesaria para llegar a razonar de esa forma.

3.1.6.1 Los niveles de razonamiento

Los niveles de razonamiento son etapas de desarrollo intelectual y cognoscitivo por las cuales todo estudiante atraviesa para lograr un mayor razonamiento. De esta manera es claro que inicialmente un alumno de primaria no tiene el mismo nivel de razonamiento en Geometría que uno de secundaria, puesto que el primero inicia su aprendizaje a través de la observación y le es difícil referirse a los objetos con definiciones y justificaciones claras, mientras que el segundo, si ha seguido un proceso normal de aprendizaje, cuenta con una mayor capacidad de expresión para definir los objetos, teniendo en cuenta sus propiedades y sus características hasta llegar a deducir otras propiedades y características, y llegando inclusive a ser capaz de realizar demostraciones formales. Las principales características de los niveles se resumen en los siguientes párrafos, pero quienes deseen ampliar esta lista de descriptores pueden consultar Burger y Shaghnessy (1986), Crowley (1987), Fuys y otros (1984), Jaime y Gutiérrez (1990).

Nivel 1. Reconocimiento: La principal característica de este nivel consiste en la consideración de los conceptos de manera manipulativa, física y global. No se toman en cuenta elementos ni propiedades matemáticos significativos.

Nivel 2. Análisis: La característica fundamental del segundo nivel es que los conceptos se entienden y manejan a través de sus elementos matemáticos. Ello hace posible la identificación y generalización de propiedades como características del concepto en cuestión. Pero esas propiedades se utilizan de manera independiente, sin establecer relaciones entre ellas, o sea, no se tiene en cuenta que unas implican otras. El descubrimiento y la comprobación de propiedades se llevan a cabo mediante experimentación (razonamiento empírico).

Nivel 3. Clasificación: La característica básica del tercer nivel consiste en el establecimiento de relaciones entre propiedades. Comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos. Utilización de razonamientos deductivos informales para demostrar una propiedad.

Nivel 4. Deducción formal: El cuarto nivel está caracterizado por la comprensión y el empleo del razonamiento formal. Los estudiantes pueden establecer secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra y realizar demostraciones de varios pasos mediante razonamientos deductivos formales.

Nivel 5. Rigor: En el quinto nivel es posible manejar diversas geometrías, procedentes de diferentes sistemas axiomáticos.

3.1.6.2 Las fases de aprendizaje

Van Hiele caracteriza el aprendizaje como el resultado de la acumulación de la cantidad suficiente de experiencias adecuadas. Por ello plantea las fases de aprendizaje como actividades de graduación y organización de las acciones que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le lleven al nivel superior de razonamiento. Las características principales de cada una de las fases son las siguientes (Jaime y Gutiérrez, 1990):

Fase 1. Información: La finalidad de la primera fase es la obtención de información recíproca profesor estudiante. El profesor averigua qué saben los estudiantes sobre el tema que se va a abordar y la forma de razonar que tienen. Los estudiantes entran en contacto con el campo de estudio y saben qué tipo de trabajo van a hacer. Esta fase se puede obviar cuando el profesor tiene información del conocimiento y el nivel de razonamiento de sus estudiantes y éstos sobre el campo de estudio.

En nuestra unidad de enseñanza hemos usado en esta fase el planteamiento de problemas que tienen única solución, infinitas soluciones o no tienen solución, de acuerdo a los datos dados como una forma de motivar a los estudiantes para que reconozcan la necesidad de aprender nuevos conceptos, relaciones y propiedades y desarrollar nuevas habilidades.

Fase 2. Orientación dirigida: El profesor dirige a los estudiantes ala exploración del tema a través de investigaciones basadas en el material que les ha sido proporcionado, para que éstos vayan descubriendo, comprendiendo y aprendiendo los conceptos, propiedades, relaciones, etc. principales en el campo de estudio. La dirección por parte del profesor no significa que éste le indique al estudiante cómo resolver los problemas, sino que debe planificar las situaciones que propone a sus estudiantes para que ellos logren encontrar la solución y, si es necesario, darles pistas o sugerencias que puedan ayudarles a superar obstáculos.

En la unidad de enseñanza, en esta fase, el estudiante parte de algunas orientaciones e informaciones que lo invitan, a través de un archivo de geometría dinámica dado, a explorar y analizar los conceptos, relaciones y propiedades que deben comprender para que sean capaces de conjeturar y demostrar las relaciones y propiedades de las razones trigonométricas. Nuevamente recalcamos aquí la importancia del papel del profesor en la invitación al estudiante para que éste plantee y demuestre sus propias conjeturas, represente en su hoja de trabajo lo que "ve" en el ordenador, utilice y relacione varias representaciones y conecte los conceptos y propiedades estudiados.

Fase 3. Explicitación: El objetivo de la tercera fase es que los estudiantes sean conscientes de las características y propiedades aprendidas anteriormente y que consoliden el vocabulario propio del nivel. Una de las finalidades principales de esta fase es hacer que los estudiantes intercambien sus experiencias, que comenten las regularidades que han observado, que expliquen cómo han resuelto las actividades, que expresen sus diferentes puntos de vista ya que el intento de cada estudiante por justificar su opinión hará que tenga que analizar con cuidado sus ideas (o las de su compañero), ordenarlas y expresarla con claridad.

En la unidad de enseñanza, ésta fase la activamos continuamente en diferentes partes de la actividad, invitando al estudiante a que discuta los conceptos, relaciones, propiedades, conjeturas y demostraciones con sus compañeros y con el profesor. En esta fase, el profesor presenta algunos conceptos e ideas que previamente han explorado los estudiantes y motiva a que diferentes estudiantes expliquen sus resultados, conjeturas y demostraciones para que todos vean diferentes representaciones del mismo concepto y diferentes formas y tipos de demostración de una misma proposición. Aquí el profesor también hace explicitas la necesidad del uso de conceptos y propiedades matemáticos generales para las demostraciones y la necesidad de que los estudiantes expliquen lo que ven en el ordenador.

Fase 4. Orientación libre: La cuarta fase está orientada a la aplicación de los conocimientos y lenguaje que los estudiantes acaban de adquirir a otras actividades e investigaciones diferentes a las anteriores. Las actividades deben permitir resolver situaciones nuevas con los conocimientos que se adquirieron previamente. Se recomienda el planteamiento de situaciones abiertas, en las que el estudiante pueda explorar diversas posibilidades, pero siempre utilizando lo que aprendió anteriormente.

En la unidad de enseñanza, la cuarta fase se caracteriza por la invitación al estudiante al planteamiento y demostración de nuevas conjeturas.

Fase 5. Integración: Esta fase tiene como objetivo establecer y completar la red de relaciones objeto de ese nivel para el concepto que se trabaja. Se trata de que los estudiantes adquieran una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente; se trata de condensar en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento. El profesor puede fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales, sin que estas comprensiones le aporten nuevos conceptos o propiedades al estudiante. Debe ser una acumulación, comparación y combinación de cosas que el estudiante ya conoce.

En la unidad de enseñanza, la fase de integración se caracteriza por la construcción por parte del estudiante de un mapa conceptual. En las tres primeras actividades se entrega un mapa conceptual experto incompleto para que los estudiantes llenen los huecos (celdas y conexiones), en el que se relacionan todas las definiciones, representaciones y propiedades que se han estudiado en la actividad. A partir de la cuarta actividad, el estudiante debe construir su propio mapa conceptual. El profesor debe revisar los mapas entregados por los estudiantes y analizar las relaciones y conexiones que están haciendo para corregir errores conceptuales o en las relaciones establecidas y sugerir cambios o correcciones. Finalmente el profesor les entrega el mapa completo del experto para que ellos comparen y analicen las diferentes definiciones, representaciones, relaciones y conexiones que se pueden establecer en el tema estudiado.

Para la organización de las actividades se decidió utilizar el modelo de las fases de aprendizaje de Van Hiele, sin hacerlas explícitas con su nombre en la hojas de trabajo del estudiante, pero sí en la descripción de las actividades ofrecidas al profesor. Las actividades fueron diseñadas en el orden de la fase 1 a la fase 5. La fase de explicitación (fase 3) se fue desarrollando implícitamente, continuamente y transversalmente en el transcurso de las discusiones de los grupos entre sí y de las discusiones de los grupos con el profesor y con el investigador.

3.1.7 Los mapas conceptuales

En nuestra investigación, los mapas conceptuales han sido utilizados primordialmente como una herramienta de diseño curricular, de enseñanza, de aprendizaje y de evaluación desde la concepción y uso de los mapas conceptuales explicitadas por Novak y Gowin (1988). Estos investigadores consideran que mediante un proceso de aprendizaje por descubrimiento, la mayor parte de los significados conceptuales se aprenden mediante la composición de proposiciones[5] en las que se incluye el concepto que se va a adquirir. Por ello, los mapas conceptuales tienen por objeto representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones.

> Un mapa conceptual es un recurso esquemático para representar un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones. […] Los mapas conceptuales dirigen la atención, tanto del estudiante como del profesor, sobre el reducido número de ideas importantes en las que deben concentrarse en cualquier tarea específica de aprendizaje.
>
> (Novak y Gowin, 1988, p.33).

Según Novak y Gowin (1988), el aspecto más distintivo del aprendizaje humano es nuestra notable capacidad de emplear símbolos orales o escritos para representar las regularidades que percibimos en los acontecimientos y los objetos que nos rodean. Es

[5] Dos o más términos conceptuales unidos por palabras para formar una unidad semántica. (Novak y Gowin, 1988, p. 33)

fundamental ser conscientes del papel explícito que desempeña el lenguaje en el intercambio de información para comprender el valor y los objetivos de los mapas conceptuales. Esta importancia del lenguaje en el aprendizaje de conceptos también es una característica del modelo de Van Hiele, al punto que cada nivel tiene su propio lenguaje. Por ello una herramienta que facilita el análisis del lenguaje en el modelo son los mapas conceptuales, que permiten determinar las relaciones y de esta forma obtener un acercamiento a la estructura cognitiva que un estudiante posee en relación a un concepto en el momento de la elaboración del mapa (Esteban y otros, 2006). Las siguientes son algunas características importantes del uso de los mapas conceptuales (Novak y Gowin, 1988):

Permiten a profesores y estudiantes intercambiar sus puntos de vista sobre la validez de un vínculo proposicional determinado, o darse cuenta de las conexiones que faltan entre los conceptos y que sugieren la necesidad de un nuevo aprendizaje.

Son instrumentos efectivos para detectar las concepciones equivocadas: éstas se notan generalmente por una conexión entre dos conceptos que forman una proposición falsa, o por una conexión que pasa por alto la idea principal que relaciona dos o más conceptos.

Son instrumentos poderosos de evaluación para grupos amplios y para la diversidad de objetivos de aprendizaje que es preciso evaluar: el significado que adquiere un estudiante sobre cualquier concepto no se caracteriza por una adquisición o una carencia completas, sino más bien por un conjunto creciente de vínculos proposicionales entre el concepto en cuestión y otros con los que se relaciona.

Son útiles en la planificación del currículo, en el diseño de la instrucción y en la investigación educativa.

Hemos usado los mapas conceptuales en varias etapas de nuestra investigación:

En la planificación curricular de la unidad de enseñanza; antes de empezar la experimentación, construimos el mapa general de los conceptos y relaciones de las razones trigonométricas más importantes que abarcan la mayoría de los textos de secundaria y bachillerato, incluyendo las aplicaciones, sin llegar al tratamiento de las razones trigonométricas como funciones. Con este mapa global se pudo tener una visión general de toda la temática y se pudieron escoger los conceptos y relaciones que más se ajustaran a nuestros objetivos de enseñanza, de aprendizaje y de investigación con el enfoque, metodología y herramientas que íbamos a utilizar. Luego de planteada cada una de las seis actividades, construimos el respectivo mapa conceptual del experto y su mapa incompleto para ser completado por los estudiantes en las tres primeras actividades.

En la enseñanza; como una herramienta incorporada a la fase de integración del modelo de Van Hiele, para que los estudiantes visualizaran y recordaran esquemáticamente los conceptos y relaciones más importantes de la actividad. También se usaron para sintetizar, corregir y profundizar en dichos conceptos y relaciones.

En el aprendizaje; como medio para afianzar y relacionar las diferentes representaciones y conexiones de los conceptos y relaciones estudiados.

En la evaluación del aprendizaje de los conceptos y relaciones; como medio para detectar y corregir concepciones erróneas y errores en el aprendizaje de los conceptos y las proposiciones estudiados.

3.1.8 Contenidos matemáticos

Son muchos los contenidos matemáticos que abarca el estudio detallado de las razones trigonométricas, por lo que aquí no queremos hacer una exposición exhaustiva de dichos contenidos que se pueden encontrar en los libros de texto de trigonometría. Lo que queremos presentar en este apartado son los temas, conceptos y relaciones más importantes que hemos propuesto en las seis actividades planteadas en la unidad de enseñanza, además de explicar brevemente algunos conceptos y términos utilizados por los textos colombianos de trigonometría, o que fueron propuestos por el autor de la investigación (representación de las razones trigonométricas como vectores) que pueden diferir de la terminología usada en los textos de secundaria o bachillerato españoles para referirnos a los mismos conceptos o propiedades. Finalmente presentamos en un mapa conceptual general un resumen más amplio de lo que podría abarcar la enseñanza de las razones trigonométricas, incluyendo las aplicaciones y otras identidades trigonométricas que no hemos trabajado en nuestra unidad.

Empezamos presentando alguno de los conceptos y terminología usados por nosotros en la unidad de enseñanza.

Ángulos en posición normal o canónica

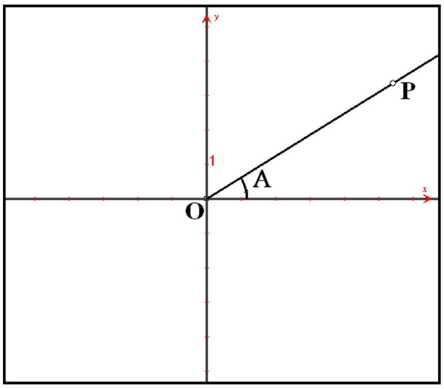


Figura 1: Ángulo en posición normal

El ángulo *A* está determinado por el eje positivo de las *x,* que llamaremos *lado inicial* del ángulo, y la semirrecta *OP* que llamaremos*lado terminal* del ángulo. Éste ángulo lo llamaremos *ángulo en posición normal*. Por convenio, si la semirrecta que determina el lado terminal del ángulo *A* gira desde el lado inicial en sentido contrario a las manecillas del reloj, se dice que el ángulo es positivo y, si gira desde el lado inicial en sentido de las manecillas del reloj, se dice que es negativo.

Definición de las razones trigonométricas para cualquier ángulo

Si θ es un ángulo en posición normal, *P*(*x, y*) es cualquier punto sobre su lado final, diferente de (0, 0), y $r = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces, las razones trigonométricas, expresadas como fracciones, para el ángulo θ se definen de la siguiente manera:

seno de θ: $sen(\theta) = \frac{y}{r}$

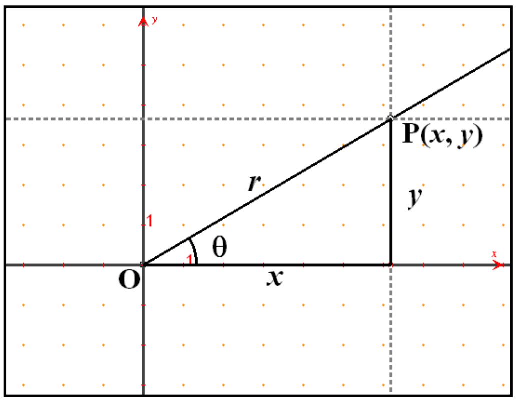
coseno de θ: $cos(\theta) = \frac{x}{r}$

tangente de θ: $tan(\theta) = \frac{y}{x}, x \neq 0$

cotangente de θ: $cot(\theta) = \frac{x}{y}, y \neq 0$

secante de θ: $sec(\theta) = \frac{r}{x}, x \neq 0$

cosecante de θ: $csc(\theta) = \frac{r}{y}, y \neq 0$



Las razones trigonométricas tangente y secante no están definidas para los ángulos cuyo lado terminal coincide con el eje *y*, es decir, para *x* = 0. Las razones cotangente y cosecante no están definidas para los ángulos cuyo lado terminal coincide con el eje x, es decir, para $y = 0$.

Razones trigonométricas de ángulos cuadrantales

Se denominan *ángulos cuadrantales* aquellos cuyo lado terminal coincide con alguno de los ejes coordenados. Los ángulos cuadrantales son 0º, ±90º, ±180º, ±270º y ±360º.

Los valores de las razones trigonométricas para estos ángulos, se obtienen utilizando cualquier punto P distinto de (0,0) ubicado sobre su lado terminal.

Representaciones lineales y visualización de las razones trigonométricas

Cada razón trigonométrica se puede representar por un vector (como se ilustra en la figura 2) en donde: *la longitud del vector* representa el valor absoluto del producto del radio de la circunferencia por la razón trigonométrica representada; *el sentido del vector* representa el valor positivo o negativo de la razón trigonométrica, de manera que cuando la razón trigonométrica es *positiva,* el vector representante apunta *hacia la derecha, hacia arriba* o *hacia fuera del punto O* (origen del sistema coordenado) y cuando la razón trigonométrica es *negativa,* el vector representante apunta *hacia la izquierda, hacia abajo* o *hacia el punto O*.

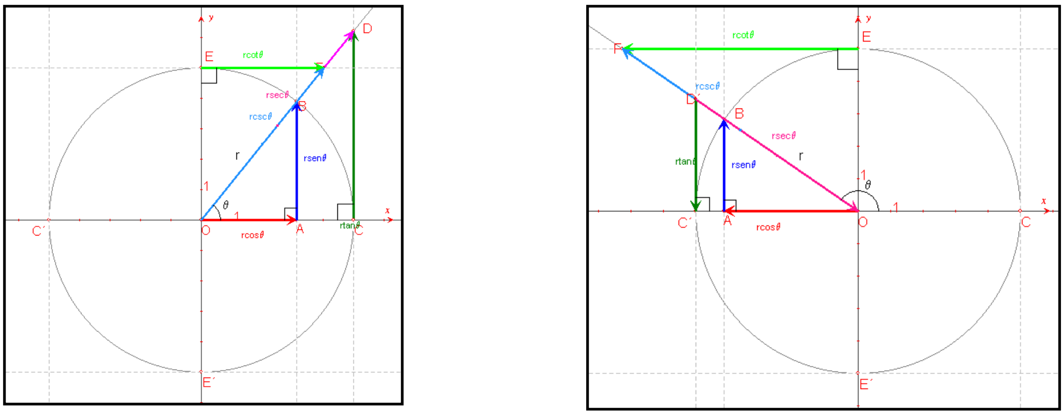


Figura 2: Representación vectorial de las razones trigonométricas

Por convenio, llamamos *lados trigonométricos* del ángulo θ a los siguientes vectores:

Lado seno al vector AB (azul); *lado seno*= $\overrightarrow{rsen\theta}$.

Lado coseno al vector OA (rojo); *lado coseno*= $\overrightarrow{rcos\theta}$.

Lado tangente al vector CD o $D'C'$ (verde oscuro); *lado tangente* = $\overrightarrow{rtan\theta}$.

Lado cotangente a los vectores EF o $E'F'$ (verde claro); *lado cotangente* = $\overrightarrow{rcot\theta}$.

Lado secante a los vectores *OD* o *D´O* (rosado); *lado secante* = $\overrightarrow{rsec\theta}$.

Lado cosecante a los vectores *OF* o *F´O* (celeste); *lado cosecante* = $\overrightarrow{rcsc\theta}$.

Nota: La figura 3 muestra que los lados trigonométricos no sólo están definidos para ángulos en posición normal, sino para cualquier ángulo que no esté necesariamente en posición normal, pero teniendo en cuenta la definición que involucra la relación con la circunferencia de radio *r*.

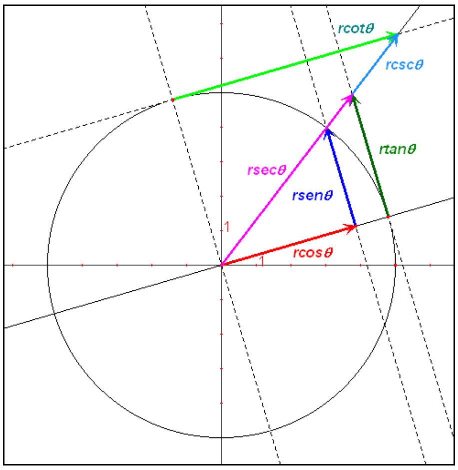
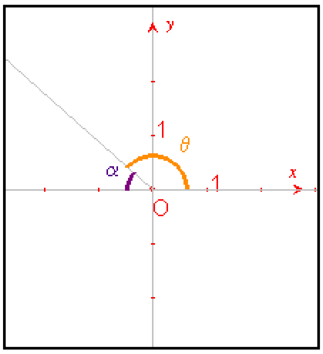


Figura 3: Representación de los lados trigonométricos en otra posición

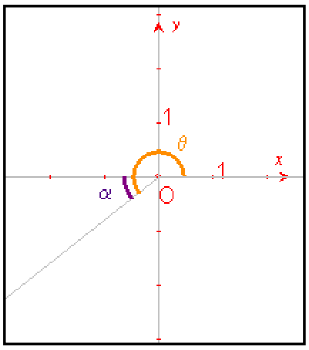
En la unidad de enseñanza se ha intentado simplificar el lenguaje presentando a los estudiantes los criterios de lectura de los vectores en vez de presentarles las definiciones formales (que dicen cómo construir los vectores), ya que las actividades piden a los estudiantes identificar las características de las razones a partir de la visualización de sus vectores.

Ángulos de referencia

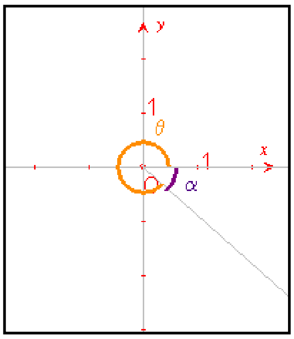
Cada ángulo en posición normal θ tiene como referencia un ángulo agudo α, que se forma con respecto al eje *x*. Este ángulo α tiene como lado inicial el semieje *x* y como lado final, el lado final del ángulo θ. Nos sirve para hallar el valor de las razones del ángulo θ en función de ese ángulo α. El valor de las razones de los ángulos α y θ difieren en algunos casos, solamente en su signo. Estos ángulos se llaman *ángulos de referencia*.



$\alpha = 180^o - \theta$



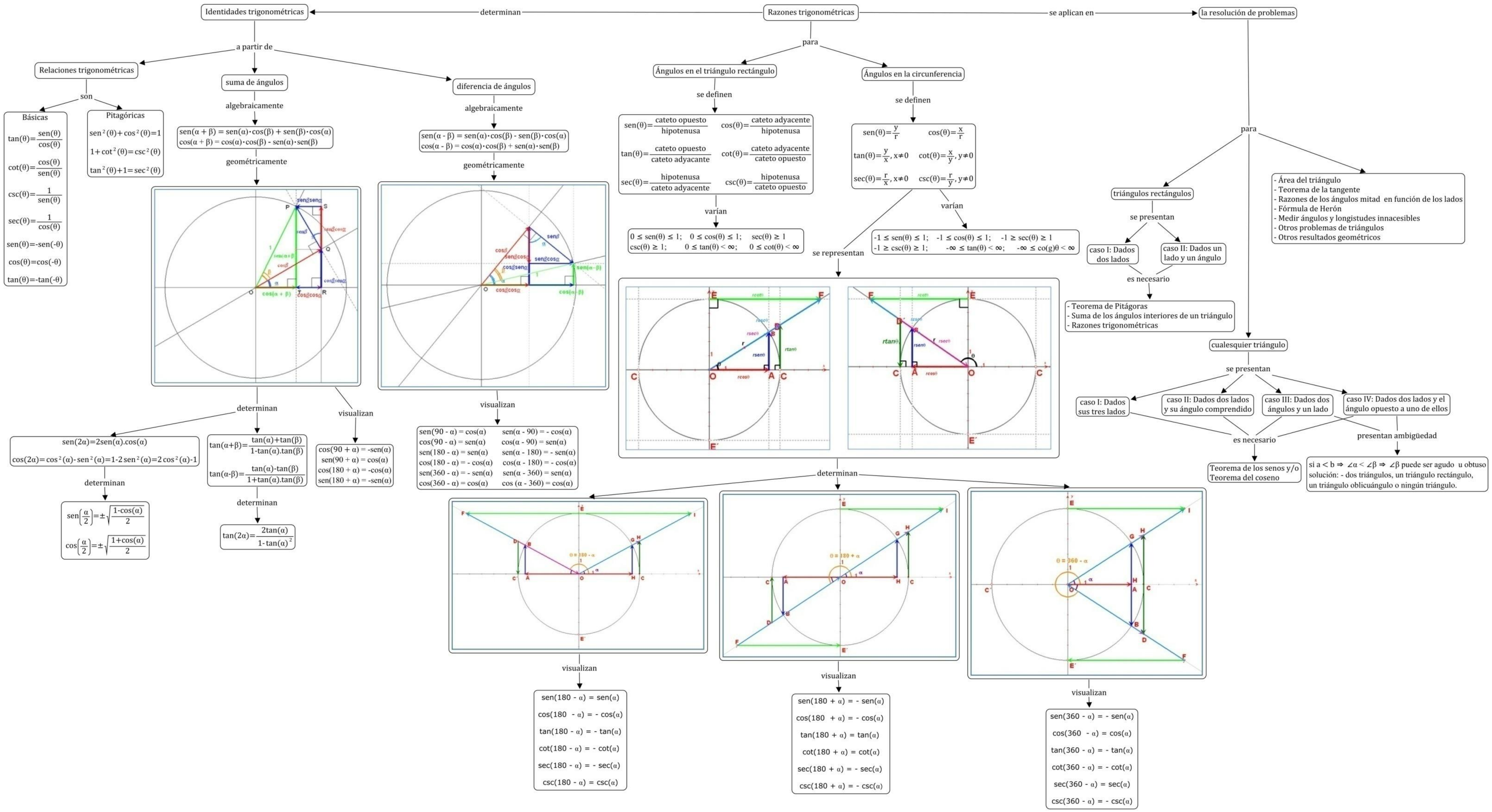
$\alpha = \theta - 180^o$



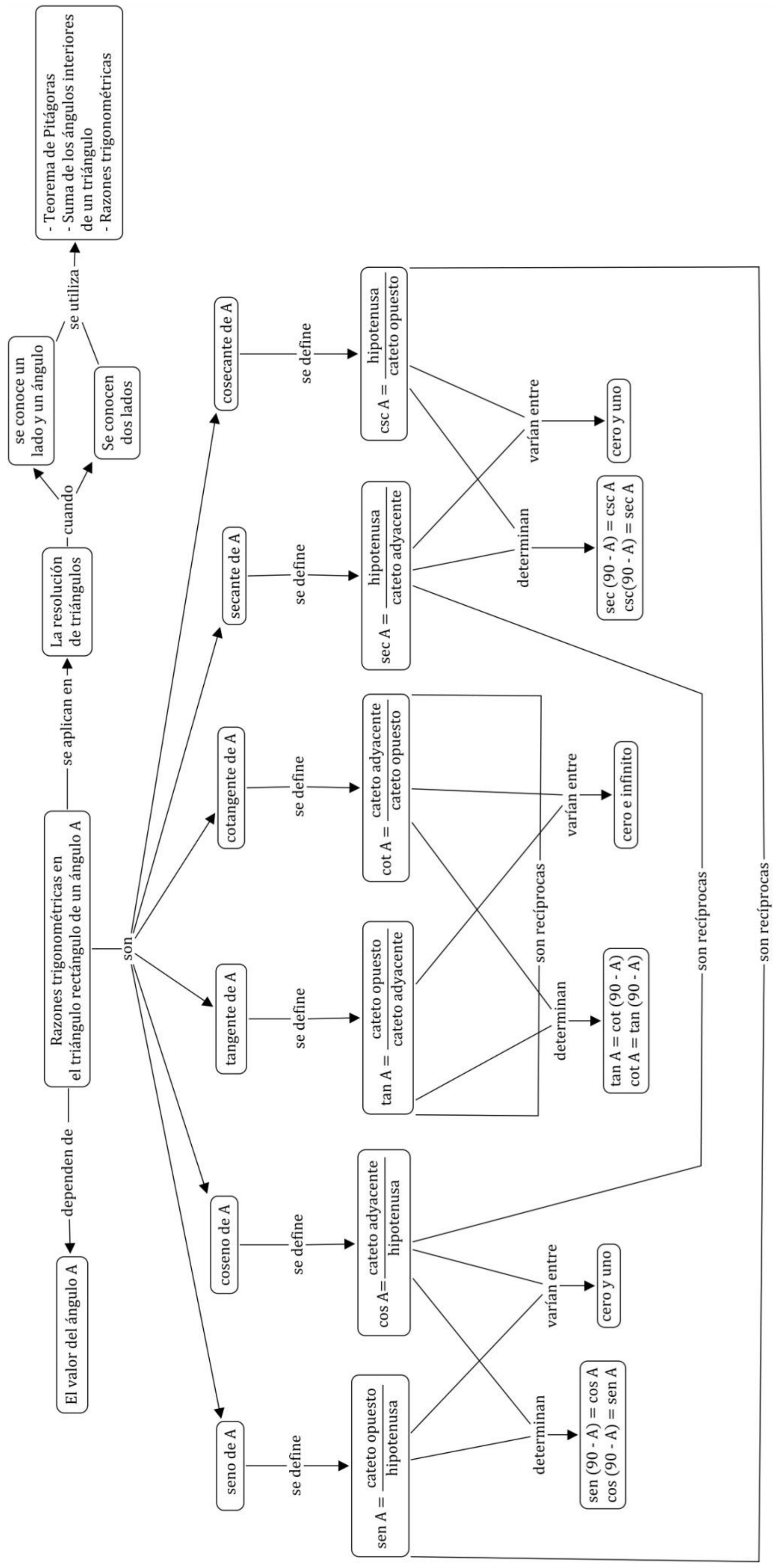
$\alpha = 360^o - \theta$

3.1.8.1 Conceptos y relaciones planteadas en la unidad

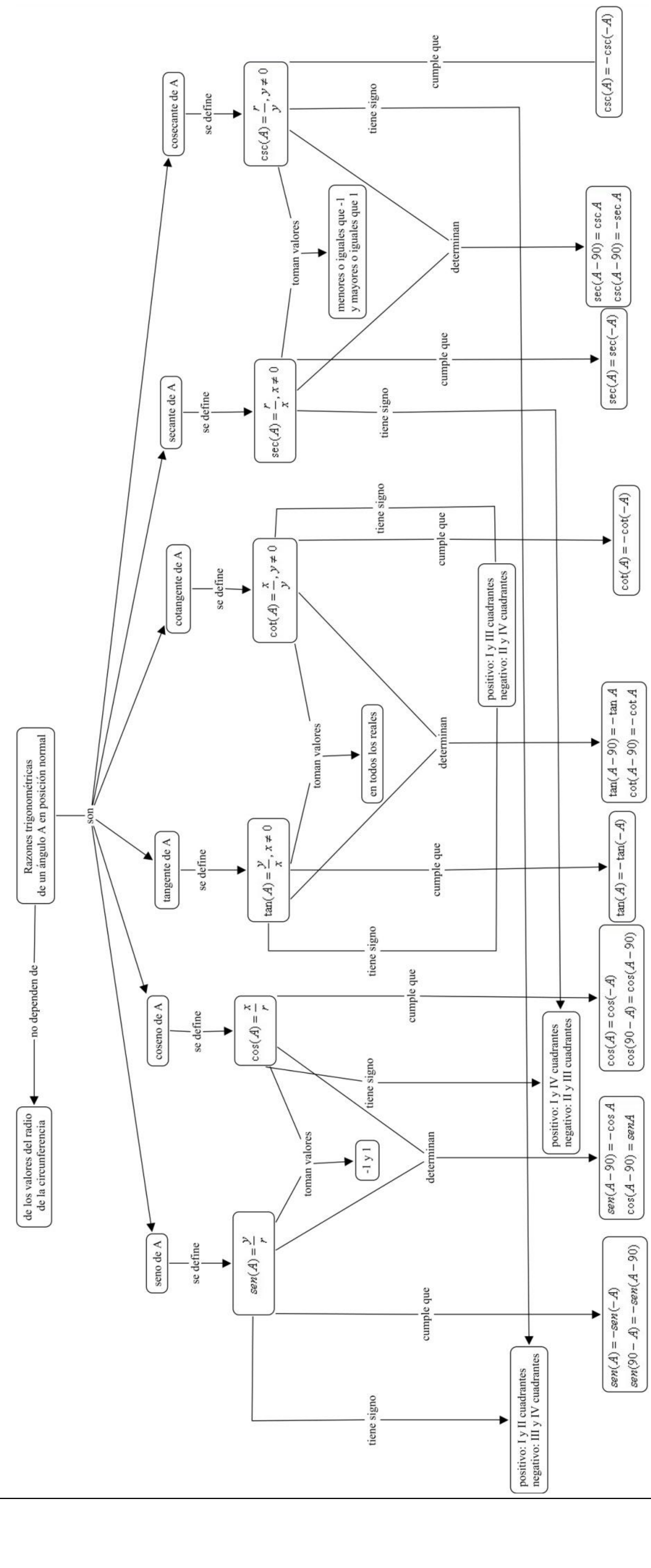
A continuación presentamos el mapa conceptual del conjunto de contenidos de las razones trigonométricas que tuvimos en cuenta al inicio de nuestro diseño y los mapas conceptuales que resumen los conceptos y relaciones que trabajamos con los estudiantes en cada una de las seis actividades.



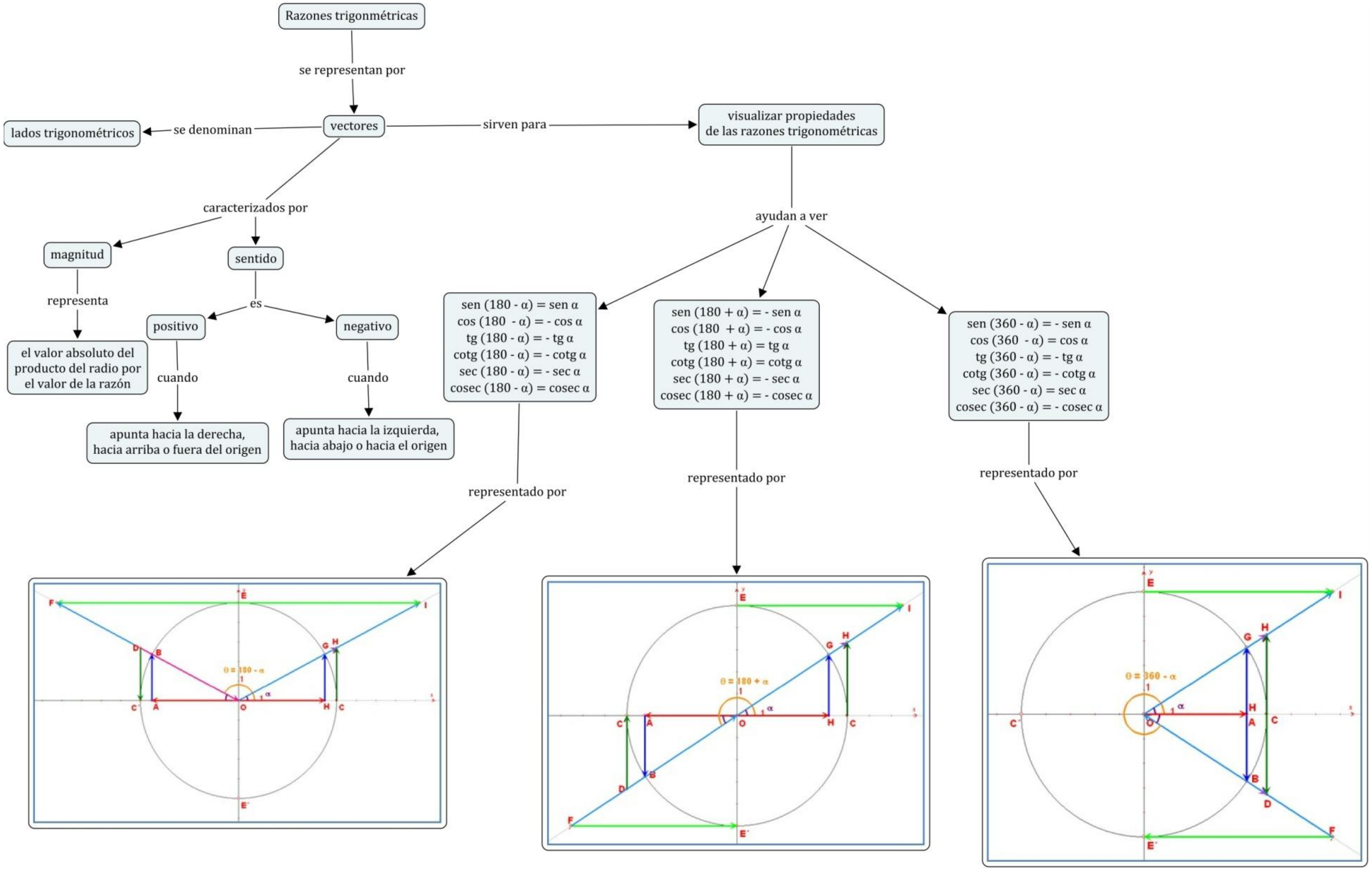
Mapa 1: Mapa conceptual de las razones trigonométricas.



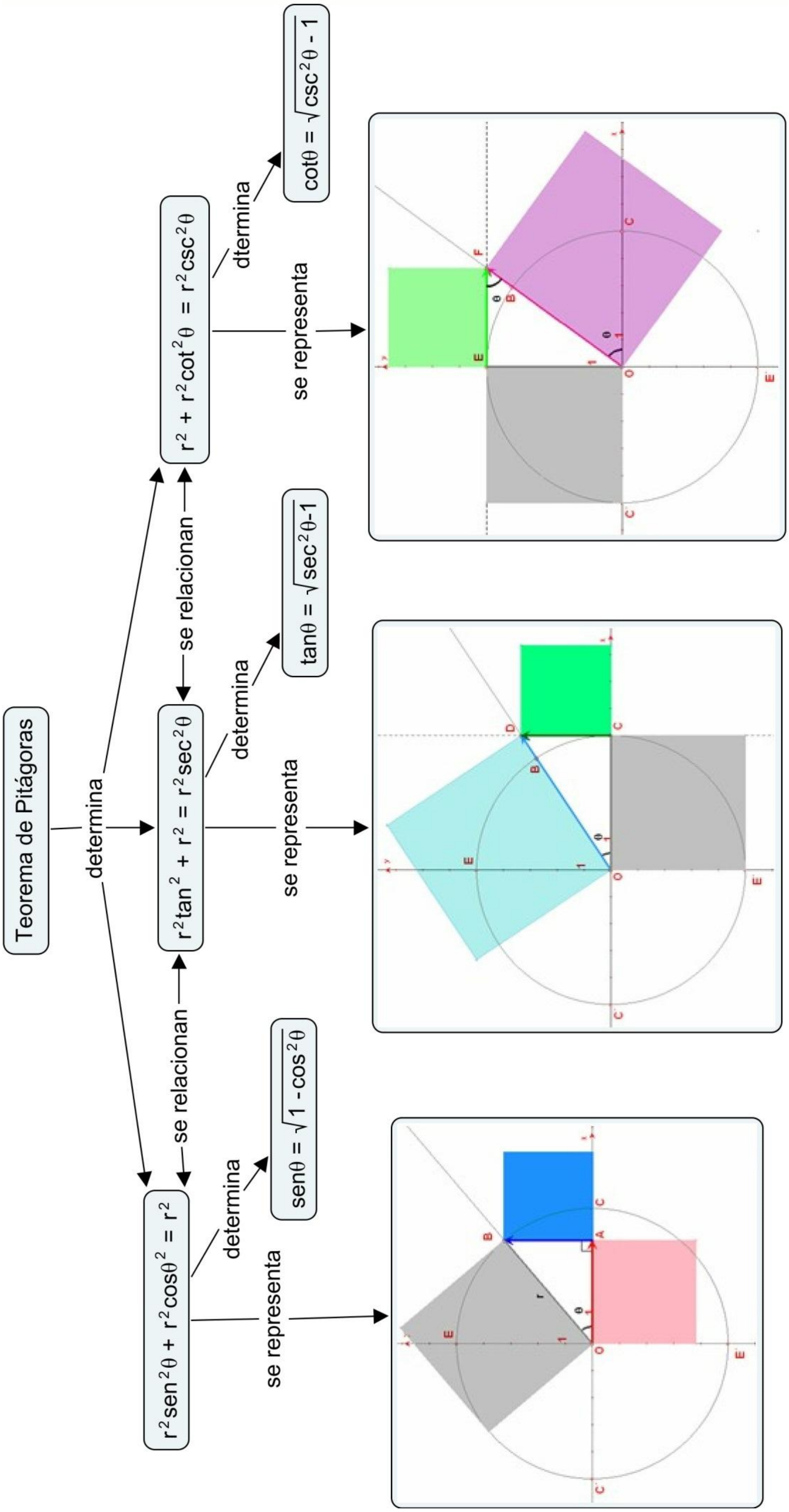
Mapa 2: Razones trigonométricas para triángulos rectángulos.



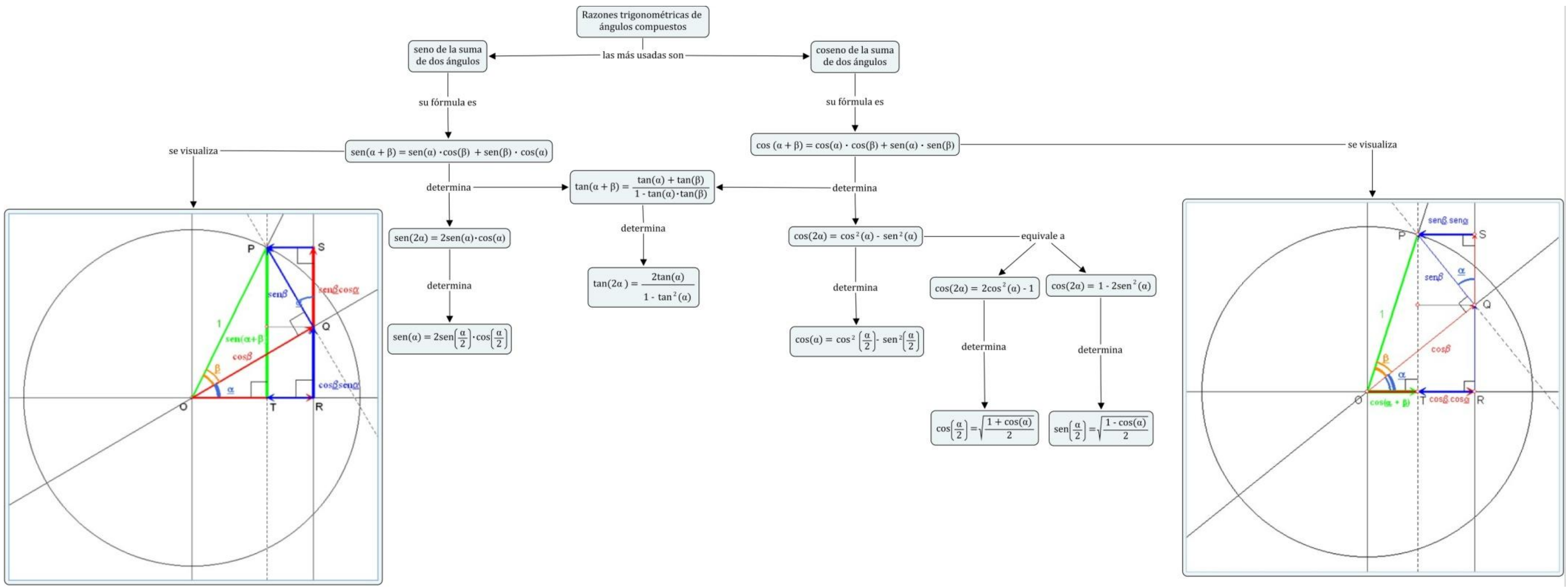
Mapa 3: Razones trigonométricas para ángulos en posición normal.



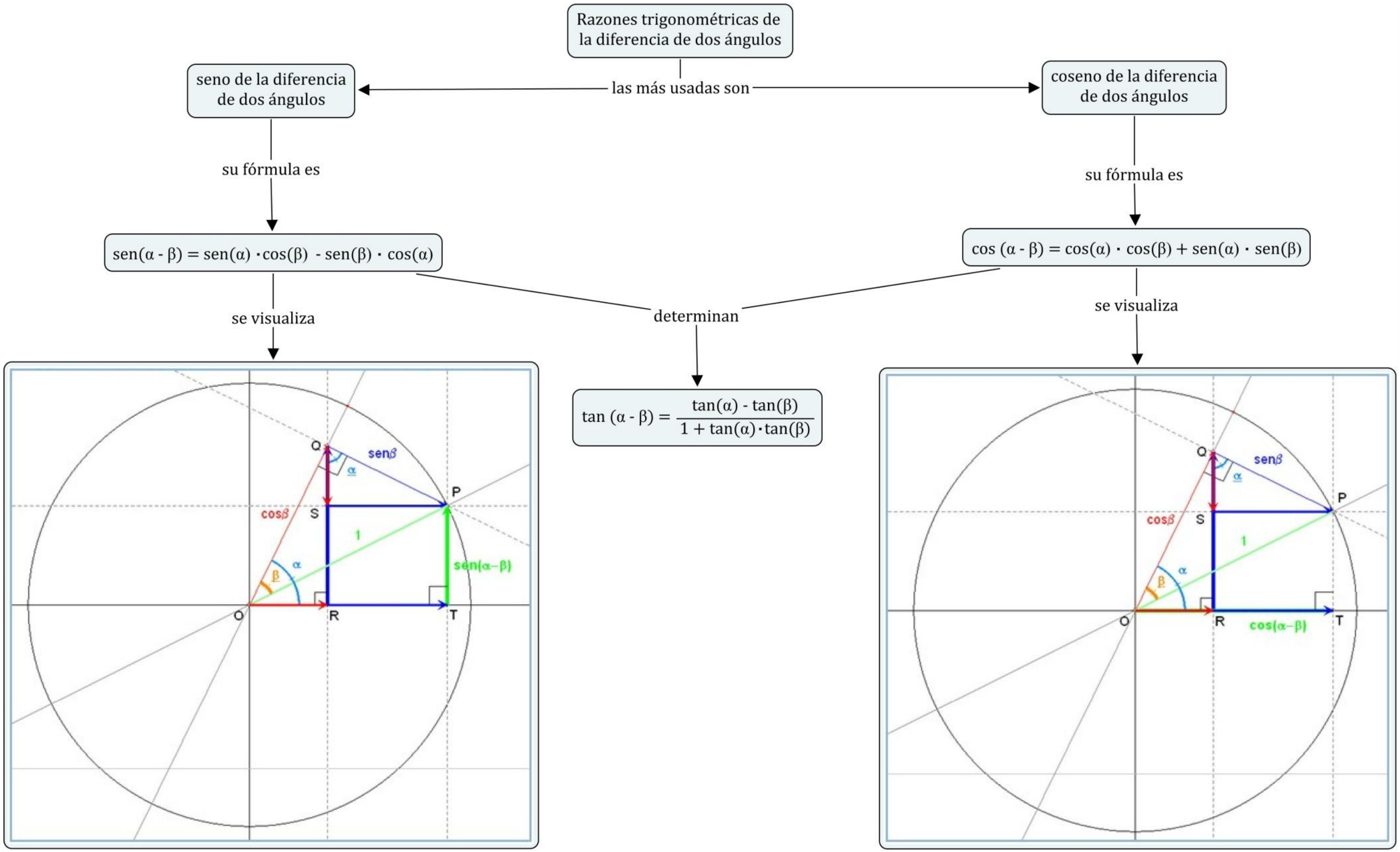
Mapa 4: Representaciones lineales y visualización de las razones trigonométricas.



Mapa 5: Identidades Pitagóricas.



Mapa 6: Seno y coseno de la suma de dos ángulos.



Mapa 7: Seno y coseno de la diferencia de dos ángulos.

3.2 Análisis de las relaciones cognitivas entre los procesos de argumentación y de demostración

El estudio de las relaciones entre argumentación y demostración se ha llevado a cabo durante algo más de cuatro décadas desde diferentes puntos de vista, que están estrechamente relacionados con el significado que cada investigador le da a cada uno de estos términos. Algunas investigaciones han mostrado la discrepancia que existe entre los procesos de argumentación y de demostración (Duval, 1989, 1992 – 1993, 2007; Balacheff, 1988), mientras que otras (Boero y otros, 1996, 2007; Douek, 1998, Pedemonte, 2002, 2005, 2007, 2008), desde una caracterización de la argumentación diferente a la de Duval, han resaltado la estrecha relación entre estos dos procesos y han propuesto la hipótesis de que la argumentación previa a una demostración puede resultar útil para la construcción de una demostración. Nuestro trabajo de investigación inicialmente comparte esta hipótesis, pero presenta algunas diferencias debido a nuestra caracterización de demostración como veremos más adelante.

Nuestra investigación adopta la caracterización de argumentación realizada por Pedemonte (2002), quien define la argumentación desde una perspectiva diferente a la de Duval. Plantea la necesidad de definir y diferenciar los términos *conjetura y teorema* (sección 3.2.1), para poder distinguir *argumentación* (sección 3.2.2) de *demostración* (sección 3.2.3). En las siguientes secciones caracterizamos estos términos. Posteriormente caracterizamos el constructo de *unidad cognitiva* (sección 3.2.4). Finalmente presentamos el *modelo de análisis de las relaciones cognitivas entre los procesos de argumentación y demostración* (sección 3.2.5).

3.2.1 Conjetura y teorema

Todos nuestros conocimientos, aparte de las matemáticas y de la lógica de la demostración, consisten en conjeturas. Aseguramos nuestro conocimiento matemático mediante el razonamiento demostrativo, pero apoyamos nuestras conjeturas por medio del razonamiento plausible. El razonamiento demostrativo es seguro, definitivo, y está más allá de toda controversia. El razonamiento plausible es azaroso, discutible y provisional (Polya, 1966, p.13).

El ***teorema matemático*** se define como el conjunto compuesto por *un enunciado*, *una demostración*[6] y *una teoría matemática* (Mariotti y otros, 1997). "El teorema existe porque hay una teoría matemática de referencia, es decir un sistema de reglas de deducción y de principios admitidos en común, necesarios para construir una demostración" (Pedemonte, 2005, p. 324).

"La ***conjetura*** se define como la terna conformada por *un enunciado*, *una argumentación* y *un sistema de concepciones*. La argumentación está ligada a la conjetura y se construye a partir de las concepciones del estudiante, la demostración por el contrario constituye un teorema. En particular, podemos distinguir los permisos de inferir de la argumentación y de la demostración: en la demostración el permiso de inferir es teórico, mientras que en la argumentación no necesariamente lo es, puede estar ligado a los conocimientos del estudiante, a sus concepciones" (Pedemonte, 2005, p. 324 - 325). La conjetura no es siempre el resultado de una argumentación, en cuyo caso puede ser considerada como un hecho.

3.2.2 Argumentación

La necesidad de hablar de argumentación en matemáticas se deriva de la necesidad de caracterizar los procesos no demostrativos desplegados durante la resolución de un problema, como los procesos de exploración, de descubrimiento y de construcción de una conjetura. Los procesos de justificación de un enunciado no proceden siempre de una demostración. La argumentación encuentra sus raíces en la exigencia de justificación; no es posible convencer sin dar a comprender; la explicación es una actividad importante que parece estrechamente vinculada al razonamiento; la argumentación, en algunas fases de organización, puede no diferenciarse de la explicación, sin embargo, ella le es irreducible (Pedemonte, 2002).

Para caracterizar la argumentación recurrimos al análisis de las características funcionales y estructurales de la argumentación en matemáticas realizado por Pedemonte (2002).

Características funcionales: Las características funcionales establecen la finalidad de la argumentación, su utilidad y su papel dentro de un discurso.

[6] En esta definición el término demostración solamente hace referencia al razonamiento demostrativo, que sigue las reglas lógicas de las matemáticas.

1) *La argumentación es una justificación racional* (Perelman y Olbrechts-Tyteca, 1958, Toulmin, 1958, Plantin, 1990, citados en Pedemonte 2002). Esta característica de justificación es visible en la forma de argumentación: el razonamiento[7].

2) *La argumentación trata de convencer*: Desde un punto de vista epistemológico, la argumentación en matemáticas se desarrolla cuando alguien quiere convencer (a uno mismo o a otros) acerca de la verdad de una afirmación (Lakatos, 1976/1979; De Villiers, 1990; Chazan 1993; Hanna, 1989, Ted & Hoyles, 2000, citados en Pedemonte, 2002). Es importante distinguir entre los términos "persuadir" y "convencer", que son muy diferentes en significado. El objetivo de convencer es modificar las opiniones y confidencias apelando a la racionalidad, mientras que el objetivo de persuadir es obtener consentimiento sin necesidad de apelar a la racionalidad. Convencer implica persuadir pero persuadir no implica convencer. En matemáticas se utiliza la argumentación con el fin de convencer.

3) *La argumentación se dirige a una audiencia universal*: Si el objetivo de la argumentación en matemáticas es convencerse a sí mismo o a la audiencia sobre la verdad de una afirmación, la audiencia debe ser capaz de responder. En la teoría lingüística, esta audiencia se llama audiencia universal (Plantin, 1990, citado en Pedemonte, 2002). Frente a la audiencia determinada, una audiencia universal es capaz de defender sus propias opiniones con respecto a argumento del interlocutor. Esta audiencia puede estar compuesta por la comunidad matemática, el aula, el profesor, el interlocutor. En el caso de una clase de matemáticas, la audiencia universal pueden ser el profesor, uno o más estudiantes o toda la clase (profesor y alumnos).

4) *La argumentación en matemáticas pertenece a un "campo"*: La argumentación puede variar de acuerdo a la situación del discurso. Las palabras no pueden garantizar la comprensión exacta (Ducrot y otros, 1979, citado en Pedemonte, 2002). Es necesario mirar la proposición, en el contexto de otra información que permite reducir los malentendidos. El campo de una argumentación en matemáticas delimita los criterios de validez. Por ejemplo, los axiomas de validación de una argumentación en geometría son diferentes de los axiomas que se utilizan en una argumentación de álgebra.

[7] El razonamiento es la inferencia explícita que concluye una proposición de una o más proposiciones dadas (Duval 1995)

Características estructurales: Las características estructurales conforman un modelo estructural para la argumentación en matemáticas.

El modelo de Toulmin: Un argumento en el modelo de Toulmin está compuesto por un esquema ternario formado por (Pedemonte, 2005, p. 321 - 322):

- Un *enunciado E* (*claim*) o conclusión que el interlocutor pretende justificar,
- Unos *datos D* (*data*) que sirven al interlocutor para justificar el enunciado E,
- Un *permiso de inferir Pi* (*warrant*) que ofrece una regla, un principio general capaz de servir de fundamento a esta inferencia, de hacer de puente entre D y E.

El primer paso en el argumento es la expresión de un punto de vista, es la conclusión, el objetivo del argumento. La argumentación debe apoyar esa afirmación. Llamamos enunciado *E* a la conclusión de cada argumento.

Esta conclusión se basa en un cierto número de datos *D* que se producen para apoyar el enunciado. Los datos son significativos porque son el punto de partida de cada argumento. Los datos pueden ser evidencias, hechos, informaciones, ejemplos. La argumentación que se hace para justificar el enunciado conclusión se apoya en esos datos.

Para pasar de los datos al enunciado conclusión es necesario un "permiso" que legitime ese paso. Se trata de una regla o un principio general que autoriza a lanzar un puente entre datos y enunciado conclusión. Ese permiso de inferir es la parte del argumento que establece la conexión lógica entre los datos y el enunciado conclusión. Es la *razón* de la aceptación o de la refutación del argumento. Es el punto que puede ser refutado por el auditor. Si el argumento no es aceptado, lo que se critica es precisamente el permiso de inferir.

Por su naturaleza, los permisos de inferir son más generales y abstractos que el enunciado conclusión que está siendo argumentado. Cuando los permisos de inferir se vuelven explícitos y el tema de discusión, su estado se altera. Los permisos de inferir se convierten en la afirmación a ser justificada, comprometiendo a los estudiantes en un nivel más alto de razonamiento matemático (Weber y otros, 2008, p. 258).

En la figura 4 presentamos un esquema ternario que representa los elementos de la argumentación y sus relaciones, de acuerdo con el modelo de Toulmin.

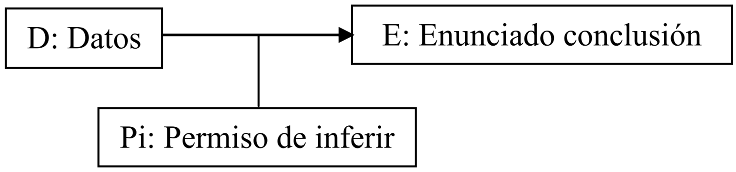


Figura 4: El modelo base de Toulmin

Este esquema elemental no es completo. La articulación general del discurso puede ser más compleja y necesitar tres etapas auxiliares:

- Un indicador de *fuerza F* (*modal qualifier*) del argumento,
- Una refutación potencial Rp (*rebuttal*) del enunciado conclusión,
- Un *soporte S* (*backing*) del permiso de inferir.

En general, las reglas y los datos no permiten inferir con un grado absoluto de certitud. Por eso se utiliza un indicador de fuerza *F* que precisa la fuerza con la que la unión de datos al permiso de inferir permite alcanzar el enunciado. El indicador de fuerza del argumento puede no ser explícito, pero el argumento siempre será calificado como “verdadero”, “probablemente verdadero”, “probable”, etc.

Es posible que ciertas circunstancias particulares impidan la aplicación del permiso de inferir al campo de los datos. El esquema argumentativo prevé un lugar para la restricción de su enunciado. Si hay excepciones al enunciado dism inuye la fuerza del permiso de inferir. Las condiciones de las excepciones o refutaciones potenciales *Rp* se toman entonces en consideración. Esas refutaciones potenciales, o restricciones, aportan un comentario sobre la relación entre el permiso de inferir y la legitimidad del paso de los datos a la conclusión; señalan las circunstancias en las que será necesario anular la autoridad del permiso de inferir.

Las refutaciones pueden ayudar a los estudiantes a hacer explícitos los permisos de inferir que están usando, a transformar la clase en un escenario de debate y a decidir bajo qué condiciones los permisos de inferir son apropiados. A menudo, cuando un estudiante presenta un argumento matemático, no tiene claridad acerca de los permisos de inferir que está usando. Ese estudiante puede utilizar permisos de inferir implícitamente sin haber considerado si esos permisos de inferir son válidos. Las refutaciones en las discusiones con los compañeros de clase o con el profesor invitan al estudiante a hacer explícitos los permisos de inferir empleados (Weber y otros, 2008).

El permiso de inferir puede ponerse en duda. Es necesario entonces respaldarlo, apoyarlo con algunos justificativos, que constituyen el soporte *S*. La existencia de un permiso de inferir entre datos y conclusión está justificada por la legitimidad de la pregunta "¿En qué condiciones hay una relación entre datos y enunciado conclusión?". Sin embargo puede plantearse otra pregunta: "¿Por qué existe una relación entre datos y enunciado conclusión?" Por eso puede ser necesario un soporte en la esquematización del argumento. Si la autoridad del permiso de inferir no es aceptada, puede solicitarse un soporte al permiso. El soporte puede ayudar al auditor a comprender el permiso de inferir; sin el soporte puede que el permiso no sea aceptado (Pedemonte, 2005, p. 322 – 323). El esquema completo se presenta en la figura 5:

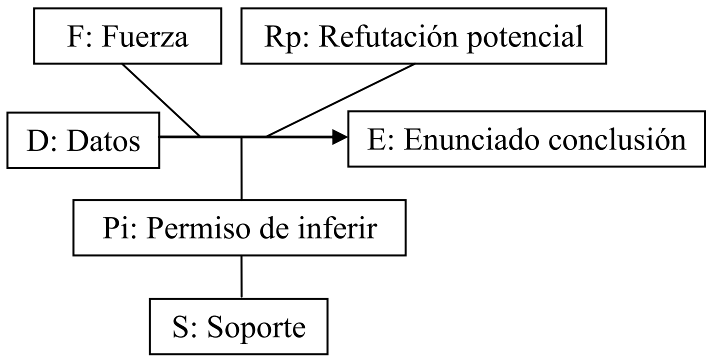


Figura 5: Modelo de Toulmin

3.2.2.1 Estructura de la argumentación

Pedemonte (2002) considera y define la argumentación deductiva, la argumentación inductiva o empírica y la argumentación abductiva (Pedemonte y Reid, 2010). En nuestra investigación, el tipo de problema planteado y la metodología de enseñanza, no permitieron que las demostraciones abductivas se dieran, por lo que a continuación solamente nos referimos a las dos primeras.

Argumentación deductiva: La argumentación deductiva tiene la misma forma que la demostración deductiva pero tienen algunos aspectos diferentes. La demostración deductiva utiliza a menudo objetos formalizados y se basa siempre en una teoría matemática; en cambio, la argumentación deductiva puede utilizar la lengua natural y puede no estar apoyada por una teoría matemática. Esta es la razón por la que una deducción en la argumentación puede ser semánticamente falsa.

En la argumentación deductiva, tenemos en cuenta las deducciones que pueden ser falsas, pero no las deducciones que carecen de sentido. No consideramos tampoco las deducciones retóricas. Éstas no forman parte de las argumentaciones lógicas, ya que su validez es difícil de evaluar. Las argumentaciones que consideramos no tienen como meta la persuasión, si no que proceden de una búsqueda sincera de la verdad, sólo tenemos en cuenta las deducciones que tienen sentido para el que las construye.

La representación de un paso deductivo en el modelo de Toulmin se presenta en la figura 6 (Pedemonte, 2002, p. 87):

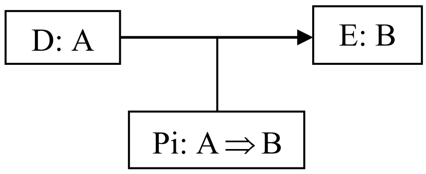


Figura 6: Esquema de un paso deductivo en el modelo de Toulmin

A⇒*B* es la regla (o el teorema);

A es una proposición de entrada o dato;

B es el enunciado conclusión

El enunciado conclusión se deduce a partir de los datos y el permiso de inferir que son determinados de antemano. La regla de inferencia "modus ponens" es coherente con el modelo.

Argumentación inductiva o empírica: La inducción es una inferencia ampliativa que conduce a la construcción de nuevos conocimientos a partir de la observación de casos particulares que se generalizan en un conjunto más extensos de casos. La inducción es la inferencia de una regla a partir de un caso (o de un conjunto de casos). El proceso inductivo parte de la observación[8] o la recolección de algunos hechos o datos para concluir una regla. Los datos recogidos o los hechos observados se comparan el uno con el otro con el fin de determinar sus relaciones mutuas y poder finalmente abstraer una regla general. La inducción, no puede inferir con certeza una conclusión que es construida por una generalización de los elementos de un conjunto de casos particulares.

Las herramientas de la inducción son la generalización, la particularización y la analogía: "La generalización es el paso de la consideración de una serie determinada de

[8] "Las propiedades de los números conocidos hoy han sido en su mayor parte descubiertas por observación, y mucho antes de que su verdad haya sido confirmada por rigurosas demostraciones" (Euler, citado en Polya, 1966, p.25)

objetos a la de una serie mayor que contiene la primera" (Polya, 1966, p. 37). "La particularización o especialización es pasar de la consideración de una serie determinada de objetos a la de una serie más pequeña contenida en la primera" (Polya, 1966, p. 38), y "la analogía es una especie de semejanza sobre un nivel definido y conceptual" (Polya, 1966, p. 38), permite recoger las relaciones similares entre los elementos de objetos similares.

Analizando cómo se producen los procesos de analogía, de generalización y de particularización, Pedemonte distingue y caracteriza los siguientes tres tipos de argumentación inductiva: *argumentación inductiva por generalización, argumentación inductiva por "paso el límite" y argumentación inductiva por recurrencia.* En nuestra investigación no se presentaron casos de los dos últimos tipos de argumentación, por lo que a continuación solamente nos referimos al primero.

Argumentación inductiva por generalización: La inducción por generalización es una inferencia práctica que procede considerando casos particulares hasta determinar una ley general. El proceso permite abstraer una propiedad del análisis de varios casos diferentes. Este proceso puede llevar a dos generalizaciones diferentes:

a) Una generalización de los enunciados extraídos a partir de casos particulares. Es el caso cuando el estudiante ve un motivo en los enunciados que se deducen a partir de cada caso. Los casos pueden disociarse unos de otros, no siguen necesariamente un orden particular.

La figura 7 representa el esquema de una argumentación inductiva por generalización sobre los enunciados (Pedemonte, 2002, p. 89):

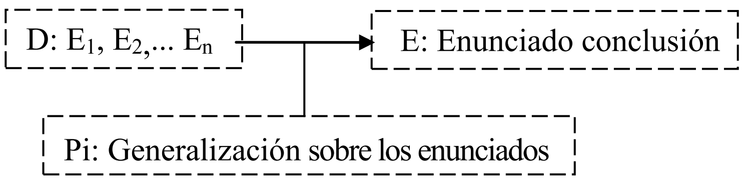


Figura 7: Esquema de un argumento inductivo de generalización sobre los enunciados

$E_1, E_2,\ldots E_n$ son las conclusiones de los pasos anteriores o son los casos observados. Se convierten en los datos del último paso, el que lleva al caso general. El permiso de inferir es una generalización sobre los enunciados.

b) Una generalización del proceso que lleva al enunciado a partir de los procesos realizados con casos o conclusiones particulares. Es la generalización que se hace cuando el estudiante ve la regularidad en una sucesión de procesos que conducen a resultados particulares intermedios y convierte esa regularidad en el proceso que conduce al resultado. Comienza a ver la cadena que conecta los enunciados. Dos o más casos específicos y ordenados se consideran y se conectan el uno con el otro. La generalización se hace sobre la inferencia que permite pasar de la propiedad sobre un caso a la propiedad sobre el siguiente.

Una argumentación inductiva por generalización sobre el proceso puede ser esquematizada como se muestra en la figura 8 (Pedemonte, 2002, p. 89):

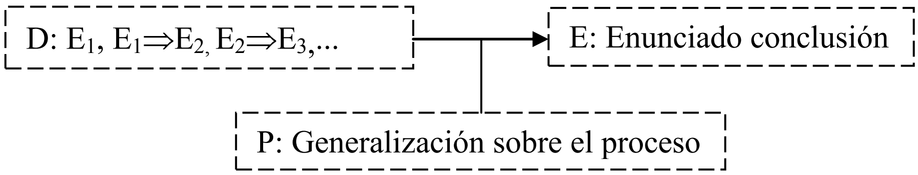


Figura 8: Esquema de un argumento inductivo de generalización sobre el proceso

Los datos E_1, $E_1 \Rightarrow E_2$, $E_2 \Rightarrow E_3$,... representan los argumentos anteriores que conectan los enunciados. Se convierten en los datos del último paso, el que trae al caso general. El permiso de inferir es una generalización sobre el proceso.

La analogía permite la comparación entre los casos en cuestión. La generalización está de acuerdo a la abstracción de una propiedad o de la inferencia entre propiedades, sobre varios casos. Posteriormente se pueden examinar otros casos particulares para pretender comprobar la propiedad encontrada o la inferencia entre propiedades, lo que es proceso de particularización.

3.2.2.2 Argumentación constructiva y estructurante

En el proceso de argumentación se pueden dar las siguientes posibilidades (Pedemonte, 2002):

i) No hay una argumentación ligada a la conjetura; se construye directamente su demostración. En ese caso la conjetura es lo que llamamos “hecho”. Para el análisis de la unidad cognitiva se descarta este caso, dado que no hay argumentos del proceso de argumentación para ser comparados con los argumentos del proceso de demostración.

ii) La argumentación persigue la formulación de la conjetura.

Para el segundo caso, la argumentación puede estar relacionada con la conjetura en dos formas: La ***argumentación constructiva*** contribuye a la construcción de una conjetura, así es que precede al enunciado, mientras la ***argumentación estructurante*** justifica una conjetura, previamente construida como un hecho, y así es que ella viene después.

Los dos tipos de argumentación, constructiva y estructurante difieren por el valor epistémico vinculado a la conjetura; es este valor el que determina el objetivo de la argumentación, si la conjetura se deriva de un hecho observado, el objetivo de la argumentación es justificar su enunciado, dado, hasta cierto punto, a priori por verdadera; si al contrario la conjetura deriva de una argumentación, el objetivo de la argumentación es la construcción de su enunciado. Los dos tipos de argumentación tienen una particularidad fundamental en común: están ligadas a la conjetura; es la referencia principal. La presencia de un tipo de argumentación no excluye la presencia del otro; es posible que una conjetura sea ligada a los dos tipos de argumentación (Pedemonte, 2002, p. 84).

3.2.3 Demostración

Las características de la demostración no son diferentes de las de la argumentación, por el contrario, ella es un caso particular de argumentación con unas características específicas. Para la definición de la demostración, recurrimos al análisis de las características funcionales y estructurales de la argumentación en matemáticas (Pedemonte, 2002) y a las consideraciones didácticas que surgen cuando el proceso de demostración es llevado al aula en un contexto determinado.

Características funcionales:

1) *La demostración tiene como objetivo validar un enunciado*: Por su naturaleza, la demostración tiene un carácter justificante, es una justificación racional. La demostración busca certificar la verdad dentro de una teoría matemática de una determinada manera. La demostración, como la argumentación, tiene como objetivo la búsqueda de las razones de la "verdad". Una demostración, por naturaleza, tiene el objetivo de validar una determinada tesis. La demostración de una proposición se obtiene a partir de un sistema axiomático que la priva de toda ambigüedad.

2) *La demostración es convincente y se dirige a un auditorio universal*: La argumentación quiere convencer; pero validar es más que convencer. La demostración quiere justificar dentro de un ámbito teórico. El carácter de convicción es específico a la demostración, es decir se construye con el objetivo de volver irrefutable lo que se afirma. La demostración va dirigida a un interlocutor universal, que está representado por la comunidad

matemática en su conjunto. Y como tal esta comunidad reconoce el valor de validación y en consecuencia de convicción en derecho de la demostración.

3) *La demostración es relativa a un campo*: Un campo teórico que determina los criterios de aceptabilidad. Según Toulmin, un paso de demostración es un argumento. Toulmin hace la distinción entre argumentos analíticos y argumentos materiales. Un argumento es analítico si la conclusión hasta cierto punto ya se incluye implícita o explícitamente en las premisas. Da como ejemplo el silogismo. Al contrario, un argumento es material si las razones no incluyen la información presentada en la proposición. La distinción fundamental entre los argumentos analíticos y los argumentos materiales se encuentra en el concepto de campo. En realidad, es en una teoría que a partir de los axiomas y principios determinados de antemano, que las otras conclusiones pueden avanzarse. En este sentido las conclusiones forman parte de las premisas. Por tanto, las demostraciones matemáticas con argumentos analíticos relativos al campo determinado por el sistema axiomático con el que se trabaja.

Características estructurales:

La demostración es una cadena deductiva de pasos constituidos por tres términos: *los datos*, *un enunciado conclusión* y *un teorema* que permite el paso de los datos a la conclusión. Por medio de una demostración, puede construirse un nuevo enunciado a partir de los axiomas y los primeros principios. Esta es la razón por la que tanto la demostración como la argumentación son analizables con el modelo de Toulmin.

Consideraciones didácticas:

Teniendo en cuenta que nuestro trabajo de investigación está dirigido a estudiantes que posiblemente nunca se han enfrentado al reto de plantear conjeturas y de construir demostraciones, que el tema de las razones trigonométricas es nuevo para ellos (por lo que deben ir construyendo nuevos conocimientos, además de tratar de desarrollar habilidades de demostración) y que el trabajo de investigación previo a esta nueva experimentación (Fiallo, 2006), mostró que los estudiantes construyen diferentes tipos de demostración (desde otra concepción más amplia de la demostración), además de lo planteado en los párrafos anteriores, es necesario tener en cuenta las siguientes consideraciones didácticas de la demostración planteadas por varios investigadores en educación matemática, para dar nuestra propia interpretación que se adapte al objetivo de poder analizar la unidad cognitiva desde los puntos de vista estructural y referencial.

En la clase lo que se puede considerar como demostración depende básicamente de las concepciones de demostración del profesor y de los estudiantes; es el profesor quien decide lo que puede considerarse como una demostración y cómo construirla, sin embargo el estudiante puede atribuir un valor de certeza a argumentos que no están necesariamente ligados a un sistema teórico. Por ejemplo, puede considerar que una prueba empírica es una demostración.

Los estudiantes buscan en una demostración una explicación, se esfuerzan en leer la demostración como herramienta para convencerse y convencer a otros; los profesores a menudo piden este esfuerzo (explícita o implícitamente), sin dar a los estudiantes las herramientas para ello. Una demostración no es un requisito previo de la convicción, al contrario es más bien la convicción la que puede ayudar a la construcción de una demostración (De Villiers, 1990).

El papel de una demostración no es solamente mostrar la validez de un teorema sino también mostrar las razones de esta validez. Una demostración debería permitir comprender el teorema, no solamente decir qué es verdadero si no también decir por qué es verdadero. A veces los estudiantes tienen que hacer pruebas, comprobaciones empíricas después de una demostración porque la demostración no los convence (Healy & Hoyles, 2000). En el contexto didáctico, el papel explicativo de la demostración y su comprensión parecen más importantes que la aceptación de la validez de un teorema; en consecuencia, una demostración debe fomentar la comprensión y tener en cuenta el contexto de la clase y lo vivido por los estudiantes (Pedemonte, 2002, p. 12). Los estudiantes prefieren las argumentaciones donde las relaciones matemáticas y los razonamientos se describen en el lenguaje común (argumentaciones narrativas) que utilizan diagramas y ejemplos, porque son más próximas a su manera de expresar una justificación (Healy y Hoyles, 2000, p. 425).

Según Balacheff (1988), el estudiante se compromete en la construcción de una demostración cuando toma una decisión con respecto a la verdad de un enunciado, lo que está incluido en el planteamiento argumentativo. La interacción social permite tomar esta decisión, y en consecuencia pasar a la validación del enunciado en juego. En sus primeros trabajos, Balacheff (1988) distingue la argumentación de la demostración reviviendo la idea común de que el objetivo de la argumentación es obtener la adhesión del interlocutor sin plantear necesariamente el problema de la verdad del enunciado. Las demostraciones pueden ser pragmáticas o intelectuales. Las demostraciones pragmáticas recurren a la acción efectiva o la ostensión, mientras que las demostraciones intelectuales se trasladan de la acción y se basan en las propiedades de entidades y sus relaciones (Balacheff, 1988, p. 45).

Balacheff (1988) distingue cuatro tipos de demostración: *empirismo ingenuo*, *experimento crucial*, *ejemplo genérico* y *experimento mental*. Hay una ruptura, entre los dos primeros tipos de demostración y los dos últimos. Para los dos primeros, la verdad está basada en una comprobación mientras que para los dos últimos está basada en la razón. Hay un cambio en la manera de prever el problema de la validez de una aserción. Para el ejemplo genérico y el experimento mental, no se trata de mostrar la verdad de la proposición en cuestión, "sino de establecer el carácter necesario de su validez logrando razones" (Balacheff, 1988, p. 55). Solos estos dos últimos tipos de demostración permiten acercarse a una problemática de la validación.

Desde un punto de vista completamente diferente al de Balacheff, Harel y Sowder (1998) utilizan el término "esquema de demostración" para indicar las demostraciones deductivas y formalizadas, y en consecuencia aceptadas en la comunidad matemática y para las simples argumentaciones. Según Harel y Sowder, cualquier proceso de justificación que observan es considerado como un proceso de demostración. Deducciones, evidencias empíricas, intuiciones, creencias personales, son consideradas admisibles para establecer la validez de una aserción.

Harel y Sowder (1998) distinguen tres tipos de esquemas de demostración: *por convicción externa*, *empíricos* y *analíticos*. La hipótesis de Harel y Sowder es que, para producir una demostración axiomática, el estudiante debe pasar poco a poco por los otros tipos de demostración; esta hipótesis tiene en cuenta la necesidad de pasos graduales que tienen como objetivos la construcción de una demostración. Basados en los resultados de nuestra experimentación previa y el análisis realizado en la nueva experimentación, apoyamos ésta hipótesis.

Teniendo en cuenta las ideas expuestas, los objetivos de nuestra investigación, los resultados de experimentaciones previas y el diseño de nuestra unidad de enseñanza, consideramos la *demostración* desde una perspectiva amplia, como *el proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a si mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática.*

Desde este punto de vista, aceptamos como demostración las “demostraciones empíricas” y las “demostraciones deductivas” y usamos la palabra “demostración” para referirnos a ellas, sin perder de vista el objetivo de comparar las argumentaciones en la fase del planteamiento de una conjetura y en la fase de construcción de la demostración para establecer la posible unidad o distancia cognitiva. En nuestra unidad de enseñanza, estas fases se encuentran separadas y distinguidas por las palabras “conjeturando” y “demostrando”.

Retomando la definición de unidad cognitiva de un teorema de Boero y otros (1996), en donde uno de sus objetivos es el análisis de las dificultades que podrían encontrar los estudiantes en el momento de la introducción del concepto de teorema, concluimos que para ellos el término demostración se refiere solamente a las demostraciones deductivas, pero en nuestro caso nos parece importante ampliar este concepto al caso de las demostraciones empíricas por varias razones:

- No es nuestro objetivo de investigación el análisis de las dificultades al introducir el concepto de teorema, más bien, uno de los objetivos de la unidad de enseñanza es el desarrollo de habilidades de demostración; en el contexto escolar las demostraciones inductivas o empíricas se dan, como lo muestran estudios de varios investigadores incluyendo el nuestro, más aún, cuando los estudiantes se enfrentan a esta tarea por primera vez, van pasando gradualmente por este tipo de demostraciones, como lo pudimos constatar en nuestra primera experimentación (Fiallo, 2006) y como lo reafirman Harel y Sowder (1998).

- Si nos ocupáramos solamente de la demostración deductiva, deberíamos desechar todas las primeras demostraciones realizadas por los estudiantes y no tendríamos información de los factores que contribuyeron a que los estudiantes vayan construyendo demostraciones cada vez más próximas a las deductivas durante todo el proceso de desarrollo de la investigación.

- Es necesario mirar todo el proceso y otros aspectos diferentes a la simple estructura y al producto final para poder extraer mayor información acerca de las dificultades y de los aciertos que presentan nuestros estudiantes al enfrentarse por primera vez al tema de la demostración. Consideramos que desde este punto de vista, este es otro aporte a la investigación en el proceso de aprendizaje de la demostración en el contexto escolar.

3.2.4 Estructura de la demostración

Teniendo en cuenta nuestra concepción de demostración expuesta en los párrafos anteriores y los resultados obtenidos en nuestra investigación experimental, consideramos la estructura analítica de los tipos de demostración planteados por Marrades y Gutiérrez (2000), ejemplificados y analizados en Fiallo (2006). Dicha estructura basada en las investigaciones de Bell, Balacheff y Harel y Sowder considera que en el ámbito escolar se construyen demostraciones empíricas y deductivas de diferentes tipos que describiremos y definiremos brevemente a continuación.

Demostraciones deductivas.

La deducción matemática corresponde al modus ponens y puede ser esquematizada de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

$A \Rightarrow B$ es un teorema aceptado,
A es la proposición de entrada o dada,
B es la conclusión.

Una demostración deductiva encadena las deducciones por “reciclaje” como lo formula Duval (1995). La deducción se ocupa de los argumentos que apoyan la necesidad de una conclusión sobre una o varias premisas: siendo verdaderas las premisas, la conclusión debe serlo también.

Para comprender la naturaleza de un paso de demostración se está obligado a interesarse por el estatus de las proposiciones. Toda proposición tiene un estatus particular: dato, conclusión, teorema, etc. La proposición, teniendo el mismo contenido, puede tener dos estatus diferentes en dos pasos diferentes (Duval, 1995). Así la conexión entre dos pasos de deducción es tal que la conclusión del primer paso se convierte en premisa del paso posterior.

La deducción es una clase de “mecanismo” que el estudiante aprende a fin de construir las demostraciones. Ella no se desarrolla espontáneamente en su actividad. Por el contrario, puede parecer artificial y complicada.

Marrades y Gutiérrez (2000) plantean como demostraciones deductivas el *experimento mental* y la *deducción formal*, dependiendo de si los estudiantes usan o no ejemplos para ayudar a organizar sus deducciones. Estas demostraciones están caracterizadas por la descontextualización de los argumentos usados, se basan en los aspectos genéricos del problema, operaciones mentales, y deducciones lógicas, que apuntan a validar la conjetura de una manera general.

Experimento mental (EM): Cuando se usa un ejemplo para ayudar a organizar la demostración. Se pueden distinguir dos tipos de experimento mental:

Experimento mental transformativo (EMT): Cuando las demostraciones se basan en operaciones mentales que transforman el problema inicial en otro equivalente. Los ejemplos ayudan a prever qué transformaciones (imágenes mentales espaciales, manipulaciones simbólicas o construcciones de objetos) son convenientes para la justificación.

Proponemos el siguiente esquema del modelo de Toulmin (Fig. 9) para un paso de una demostración tipo experimento mental transformativo:

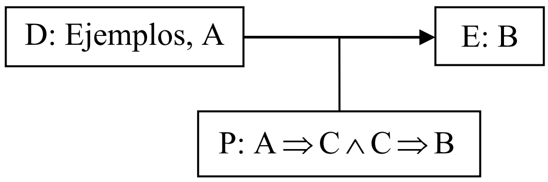


Figura 9: Esquema de un experimento mental transformativo

$A \Rightarrow B$

Ejemplos para entender las proposiciones: $A \Rightarrow C \wedge C \Rightarrow B$

B

$A \Rightarrow B$ es un teorema,

A es una proposición de entrada o dada, C es una proposición que resulta de los ejemplos y tiene que ver con la transformación realizada teniendo en cuenta la proposición A, que lleva a concluir $A \Rightarrow C$; $C \Rightarrow B$ es un teorema, axioma o definición emergente o estudiado y recordado.

B es la conclusión.

Experimento mental estructural (EME): Cuando las demostraciones están basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, de los axiomas, las definiciones o teoremas aceptados, y, si se usan ejemplos, son para ayudar a organizar o entender los pasos de las deducciones.

Usando el modelo de Toulmin, el esquema siguiente (Fig. 10) representa las demostraciones del tipo experimento mental estructural:

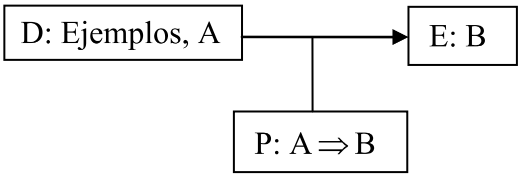


Figura 10: Esquema de un experimento mental estructural

$A \Rightarrow B$

Ejemplos para entender $A \Rightarrow B$

B

$A \Rightarrow B$ es un teorema,

A es una proposición de entrada o dada, los ejemplos teniendo en cuenta la proposición A llevan a concluir B.

B es la conclusión.

Deducción formal (DF): Cuando la demostración se basa en operaciones mentales sin la ayuda de ejemplos específicos. En una deducción formal solamente se mencionan aspectos genéricos del problema discutido. Es, por lo tanto, la clase de demostración formal matemática encontrada en el mundo de los investigadores de las matemáticas. Podemos también encontrar dos tipos de demostraciones formales:

Deductiva formal transformativa (DFT): Cuando las demostraciones se basan en operaciones mentales que transforman el problema inicial en otro equivalente.

Usando el modelo de Toulmin, el esquema siguiente (Fig. 11) representa las demostraciones formales transformativas:

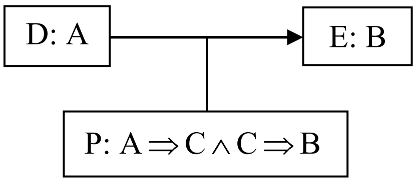


Figura 11: Esquema de una deducción formal transformativa

$A \Rightarrow B$

$A \Rightarrow C \wedge C \Rightarrow B$

B

$A \Rightarrow B$ es un teorema,

A es una proposición de entrada o dada, A $\Rightarrow$ C es una proposición emergente de la transformación del problema y C $\Rightarrow$ B es un teorema, axioma o definición emergente aceptado.

B es la conclusión.

Deductiva formal estructural (DFE): Cuando las demostraciones están basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, de los axiomas, las definiciones o teoremas aceptados.

Usando el modelo de Toulmin, el esquema siguiente (Fig. 12) representa las demostraciones formales estructurales:

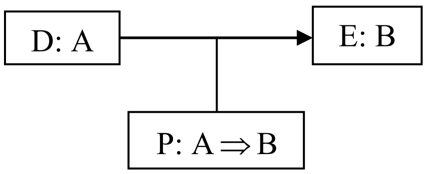


Figura 12: Esquema de una deducción formal estructural

A$\Rightarrow$B es la regla (o el teorema);
A es una proposición de entrada o dato;
B es la conclusión

Demostraciones empíricas o inductivas.

Están caracterizadas por el uso de ejemplos como el principal (puede ser el único) elemento de convicción. Los estudiantes aceptan la veracidad de las conjeturas después de que han observado regularidades en uno o más ejemplos; ellos usan los propios ejemplos, o relaciones observadas en los ejemplos para justificar la verdad de su conjetura (Marrades y Gutiérrez, 2000).

Empirismo ingenuo inductivo (EII): Cuando en la construcción de la demostración se usan solamente ejemplos escogidos sin ningún criterio y las argumentaciones se basan en elementos visuales o táctiles (perceptivo) o elementos matemáticos o relaciones detectados en el ejemplo (inductivo). Se trata de una generalización inductiva sobre los enunciados (datos).

Usando el modelo de Toulmin, el esquema siguiente (Fig. 13) representa las demostraciones del tipo empirismo ingenuo:

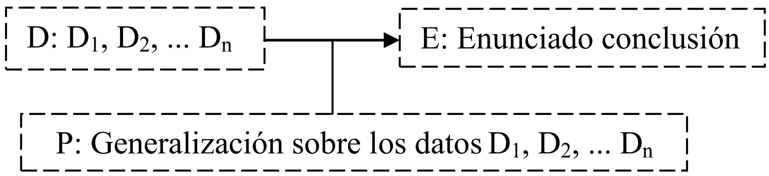


Figura 13: Esquema de un empirismo ingenuo

D_1, D_2, ... D_n son datos escogidos al azar. Por ejemplos a través de una tabla en Cabri o visualizados a través del arrastre en Cabri.

Experimento crucial (EC): Cuando la conjetura es demostrada usando un ejemplo cuidadosamente seleccionado y se escoge porque se presume que en cualquier otro caso va a dar el mismo resultado. De acuerdo a lo dicho para la argumentación empírica o inductiva, el caso límite de argumentación por generalización puede funcionar como experimento crucial (Balacheff 1988). En ese caso, es un proceso de particularización que se hace sobre el caso límite. La propiedad ya generalizada sobre los otros casos se considera a continuación en ese caso particular. Consideramos que el experimento crucial puede ser un caso de generalización de los enunciados, generalización del proceso o generalización por paso al límite.

La caracterización de Marrades y Gutiérrez (2000) plantea los siguientes tipos de experimento crucial: *Experimento crucial basado en ejemplo*, *experimento crucial constructivo*, *experimento crucial analítico* y *experimento crucial intelectual*, pero la propia caracterización de las demostraciones analíticas e intelectuales sugieren una generalización de las propiedades matemáticas observadas o recordadas al trabajar en el experimento, por lo que se estaría utilizando un tipo de razonamiento general que se define mejor en el tipo de demostración ejemplo genérico que precisamos en la siguiente categoría, es decir, descartamos el experimento crucial analítico de esta categoría.

Planteamos dos tipos de experimento crucial.

Experimento crucial basado en ejemplo (ECB): Cuando los estudiantes se basan en la existencia de un único ejemplo o en la ausencia de contraejemplos para su demostración. En este caso se trata de una *generalización inductiva sobre los enunciados* (*puede ser por paso al límite*).

Usando el modelo de Toulmin, el esquema siguiente (Fig. 14) representa las demostraciones del tipo experimento crucial basado en ejemplos:

D: $E_c \Rightarrow E_1, E_2, E_3, ..., E_n$ → E: Enunciado conclusión

P: Generalización sobre los enunciados

Figura 14: Esquema de un experimento crucial basado en ejemplo

E_C es el ejemplo que se considera "crucial" y que conlleva a la generalización de los enunciados E_1, E_2, ..., E_n y al enunciado conclusión.

Experimento crucial constructivo (ECC): Cuando los estudiantes sustentan sus demostraciones en las construcciones realizadas sobre el ejemplo o en la forma de conseguir el ejemplo. Se trata de una generalización inductiva sobre el proceso que lleva a la construcción de E_c.

Usando el modelo de Toulmin, el esquema siguiente (Fig. 15) representa las demostraciones del tipo experimento crucial constructivo:

D: $E_1 \Rightarrow E_2, E_2 \Rightarrow E_3, ..., E_n \Rightarrow E_c$ → E: Enunciado conclusión

P: Generalización sobre el proceso de construcción para llegar a E_c

Figura 15: Esquema de un experimento crucial constructivo

E_1, E_2, E_3, ..., E_c son enunciados que van surgiendo del proceso de construcción del o de los ejemplos que llevan a la generalización de E_c.

Ejemplo genérico (EG): Cuando en la demostración se usa un ejemplo específico que es representante de una clase y la demostración incluye la producción de razonamientos abstractos. Balacheff destaca la importancia del ejemplo genérico como una forma de romper la discontinuidad epistemológica entre los procesos de producción de demostraciones por parte de los estudiantes, señalando que esta ruptura se supera cuando ellos puedan pasar de un empirismo ingenuo a mirar las afirmaciones matemáticas con un enfoque más formal a través del descubrimiento del ejemplo genérico.

> El ejemplo genérico consiste en la explicitación de las razones de la validez de una afirmación por la realización de operaciones o transformaciones sobre un objeto presente no para sí mismo, sino como representante característico de una clase. La formulación logra las propiedades características y las estructuras de una clase permaneciendo adjunta al nombre propio y a la exposición de uno de sus representantes.
>
> (Balacheff, 1988, p. 57).

La principal diferencia entre un experimento crucial y un ejemplo genérico es que, en un experimento crucial, la justificación consiste solamente en la verificación experimental de la conjetura dentro del ejemplo seleccionado mientras que, en un ejemplo genérico, la justificación incluye referencias a los elementos abstractos o propiedades de la clase representada por el ejemplo (Marrades y Gutiérrez, 2000).

La caracterización de Marrades y Gutiérrez (2000) plantea los siguientes tipos de ejemplo genérico: *Ejemplo genérico basado en ejemplo*, *ejemplo genérico constructivo*, *ejemplo genérico analítico* y *ejemplo genérico intelectual*, de estos cuatro tipos descartamos los dos primeros, ya que según la definición del ejemplo genérico al construir la demostración se está produciendo razonamiento abstracto que involucra propiedades matemáticas generales y no propiedades específicas del ejemplo.

Planteamos dos tipos de ejemplo genérico:

Ejemplo genérico analítico (EGA): Cuando en la demostración se usa un ejemplo representante de una clase y las justificaciones están basadas en propiedades y relaciones generales descubiertas en el ejemplo. Se trata de una generalización de las propiedades observadas en cada uno de los enunciados que conllevan al planteamiento de A.

Usando el modelo de Toulmin, el esquema siguiente (Fig. 16) representa las demostraciones del tipo ejemplo genérico analítico:

D: $Eg \Rightarrow E_1, E_2, E_3, ..., E_n \Rightarrow A$ → E: B

P: Generalización de las propiedades descubiertas en Eg, $E_1, E_2, E_3, ..., E_n$.
$Eg \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Figura 16: Esquema de un ejemplo genérico analítico

Ejemplo genérico intelectual (EGI): Cuando para la conjetura o demostración se usa un ejemplo representante de una clase y los argumentos están basados en propiedades matemáticas aceptadas, pero no son resultado de observaciones o propiedades encontradas en el ejemplo, sino que al trabajar sobre él se recuerdan. Se trata de una generalización inductiva con argumentos matemáticos sobre el proceso para llegar a A.

Usando el modelo de Toulmin, el esquema siguiente (Fig. 17) representa las demostraciones del tipo ejemplo genérico intelectual:

D: $Eg \Rightarrow E_1, E_1 \Rightarrow E_2, \ldots, E_n \Rightarrow A$ $\longrightarrow$ E: B

P: Generalización de las propiedades matemáticas recordadas en el proceso para llegar a A
$Eg \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Figura 17: Esquema de un ejemplo genérico intelectual

3.2.5 Unidad cognitiva

Para superar la dicotomía entre argumentación y demostración[9], se han llevado a cabo estudios que plantean la noción de *unidad cognitiva de un teorema* (Boero y otros, 1996), la cual se dirige a vincular argumentos espontáneos y argumentos matemáticamente aceptables:

> - durante la producción de la conjetura, el estudiante elabora progresivamente su enunciado por medio de una intensa actividad argumentativa que está entrelazada funcionalmente con la justificación de la plausibilidad de sus elecciones;
>
> - durante la etapa posterior de demostración del enunciado, el estudiante hace conexión con este proceso de manera coherente, organizando algunas de las justificaciones ("argumentos") producidas durante la construcción del enunciado de acuerdo a una cadena lógica.
>
> (Boero y otros, 1996, p.113)

El constructo de unidad cognitiva, inicialmente utilizado para expresar una posible continuidad, fue redefinido y adoptado como una herramienta de investigación que analiza la congruencia entre la fase de argumentación y la subsiguiente producción de la demostración, asumiendo que la congruencia pueda o no ocurrir (Mariotti, 2006):

> La principal fortaleza de este constructo es que proporciona una forma de evitar la rígida dicotomía que coloca a la argumentación contra la demostración: La posible distancia entre argumentación y demostración no es negada pero tampoco es definitivamente asumida como un obstáculo; desde esta perspectiva, la distinción irreparable entre argumentación y demostración es substituida prestando atención a las analogías, sin olvidar las diferencias.
>
> (Mariotti, 2006, p. 184)

Garuti y otros (1998) definieron la *brecha* entre argumentación y demostración como la distancia entre los argumentos producidos para valorar la plausibilidad de la conjetura y los argumentos utilizados durante la construcción de la demostración.

Pedemonte (2005, 2007, 2008) plantea las siguientes observaciones al constructo de unidad cognitiva:

---

[9] Recordemos que para Boero y otros (1996) el término demostración hace referencia solamente a la demostración deductiva que sigue las reglas lógicas de un sistema axiomático. Pedemonte además de la demostración deductiva plantea la demostración abductiva. En nuestra investigación hablamos de demostraciones inductivas y deductivas.

i) La definición de unidad cognitiva fue dada entre argumentación y demostración como procesos, sin embargo, ha sido analizada con frecuencia comparando argumentación y demostración como productos. Esto es debido a que la identificación de las dos fases de producción de la conjetura y de construcción de la demostración no es tan fácil: puede suceder que estén implícitas o imbricadas. Por ejemplo, puede que la conjetura se produzca sin ninguna argumentación (cuando se construye directamente a partir de una intuición o de una percepción). Además, la separación entre las fases no siempre es visible (Pedemonte 2005).

ii) Falta un medio para comparar las dos fases de argumentación en fase de conjetura y de construcción de la demostración. A partir de la definición de unidad cognitiva es posible reconocer la unidad cognitiva si se pueden identificar algunos tipos de continuidad entre la producción de la conjetura y la construcción de la demostración. Si se quiere determinar un medio para analizar la argumentación relacionada con una conjetura y una demostración, hay que saber lo que se quiere comparar y cómo hacerlo (Pedemonte 2005).

iii) La unidad cognitiva no tiene en cuenta el análisis de la continuidad estructural entre argumentación y demostración. Hay continuidad estructural entre argumentación y demostración cuando las inferencias en la argumentación y la demostración son conectadas a través de la misma estructura (la inducción, o la deducción). La unidad cognitiva no tiene en cuenta los casos en donde una continuidad estructural conduce a demostraciones incorrectas. En este caso, hay que cubrir la distancia estructural entre la argumentación y la demostración para construir una demostración. Algunas veces los estudiantes son incapaces de construir una demostración porque la continuidad "espontánea" entre los dos procesos está también presente desde un punto de vista estructural (Pedemonte, 2007, 2008). La continuidad estructural entre los dos procesos al resolver problemas geométricos es una de las posibles dificultades al construir una demostración, ya que los estudiantes muchas veces no son capaces de transformar la estructura de la argumentación en una estructura deductiva (Pedemonte, 2007). Pero en el caso de una demostración algebraica, la continuidad estructural entre argumentación y demostración puede faltar y los estudiantes pueden ser capaces de construir demostraciones correctas. Puede que los estudiantes empleen pasos abductivos en la fase de argumentación que probablemente no usen en la demostración, porque la estructura deductiva es muy fuerte en una demostración algebraica. Así, a diferencia del caso geométrico, la continuidad estructural entre la argumentación y la demostración no hace parte de las posibles dificultades encontradas por los estudiantes paraconstruir una demostración (Pedemonte, 2008).

Para el análisis cognitivo de la continuidad que puede existir entre los procesos de argumentación que conducen a la explicación de una conjetura y su demostración desde el punto de vista estructural y del sistema de referencia, Pedemonte (2002, 2005, 2007, 2008) plantea una herramienta basada en la integración del modelo cK¢[10] (Balacheff, 1995, Balacheff y Margolinas, 2005) en el modelo de Toulmin (1958).

El modelo cK¢ permite analizar el sistema de referencia - *unidad cognitiva referencial* - que toma en cuenta los sistemas de representaciones expresivas como el lenguaje, las heurísticas sobre el dibujo, etc. y los sistemas de conocimientos como las *concepciones* (Balacheff, 1995) y los *marcos*[11] (Douady, 1986) que están en juego durante la construcción de una conjetura y el desarrollo de su demostración. Como la demostración hace referencia a una teoría matemática, el sistema de referencia representa una tentativa de organizar ciertos elementos que intervienen durante la argumentación para poder relacionarlos y compararlos con la teoría matemática que interviene durante la demostración.

El análisis estructural - *unidad cognitiva estructural* - puede ser realizado con el modelo de Toulmin. La estructura es la conexión cognitiva lógica entre afirmaciones (la inducción, o la deducción).

Según Pedemonte, se puede decir que hay *continuidad referencial* entre la argumentación y la demostración si algunas palabras, dibujos, teoremas usados en la demostración han sido usadas en la argumentación dando soporte a la conjetura. Hay una *continuidad estructural* entre la argumentación y la demostración si algunos pasos deductivos ó inductivos usados en la argumentación están presentes también en la demostración. De lo contrario, si la estructura de las argumentación es inductiva y la demostración es deductiva, entonces hay una distancia estructural entre los dos (Pedemonte, 2008).

---

[10] cK¢: conception, knowing, concept (Balacheff y Margolinas, 2005, p. 105)

[11] Un *marco* está constituido por objetos de una rama de las matemáticas, de las relaciones entre los objetos, de sus distintas formulaciones eventualmente e imágenes mentales asociadas a estos objetos y estas relaciones. Estas imágenes desempeñan un papel esencial en el funcionamiento como herramientas, de los objetos del marco. Dos marcos pueden implicar los mismos objetos y diferir por las imágenes mentales y la problemática desarrollada. (Douady, 1986 p.11)

De acuerdo al planteamiento inicial del constructo de unidad cognitiva (Boero y otros, 1996) y la hipótesis de Pedemonte (2002, 2005), de que la unidad cognitiva favorece la construcción de una demostración, se concluye que esta ayuda es positiva si la argumentación es deductiva, puesto que la demostración (según su caracterización) debe ser deductiva. De acuerdo a nuestra caracterización de demostración, esta unidad cognitiva caracterizada por la unidad estructural entre una argumentación inductiva y una demostración empírica ingenua, experimento crucial o ejemplo genérico analítico puede ser un obstáculo para favorecer la construcción de demostraciones más próximas a las deductivas. En estos casos se deben enfocar los esfuerzos hacia la ruptura de esa unidad estructural.

En el caso de que la argumentación sea inductiva y la demostración sea un ejemplo genérico intelectual, aunque el ejemplo genérico es una demostración inductiva, consideramos que hay más posibilidades de una ruptura estructural que conlleve a la construcción de una demostración deductiva, dado que los argumentos de la demostración están basados en propiedades matemáticas generales que se recuerdan al trabajar sobre el ejemplo.

3.2.6 Modelo para el análisis de la relación entre argumentación y demostración

Según Pedemonte (2002, 2005) el modelo de Toulmin nos permite transformar el proceso de resolución de un problema en una concatenación de pasos de la argumentación de la conjetura y de la demostración, pero no es suficiente para el objetivo de realizar un análisis cognitivo, por lo que se necesita de una herramienta que permita considerar el sistema de referencia de la argumentación y de la demostración y que permita considerar los aspectos relacionados con los conocimientos del estudiante que están en juego durante la resolución de un problema. Esta herramienta la ofrece el modelo cK¢. El modelo de Toulmin permite comprender de manera objetiva la naturaleza del permiso de inferir (si se trata de un teorema por ejemplo) pero no permite determinar lo que representa efectivamente para el estudiante que lo usa. Por ejemplo, algunos enunciados son considerados como teoremas por los estudiantes aún cuando no lo son. Necesitamos considerar el punto de vista del estudiante si queremos realizar un análisis cognitivo. Estos puntos de vista se pueden analizar a través del modelo cK¢.

3.2.6.1 El modelo cK¢ para el análisis del sistema de referencia

El modelo cK¢ es una herramienta metodológica propuesta por Balacheff (1995, 2002, 2005) para el análisis de los conocimientos que movilizan los estudiantes en la resolución de un problema. En el modelo se caracteriza una **concepción** por una cuádrupla compuesta de (Balacheff y Margolinas, 2005, p. 80):

P: un conjunto de problemas.

R: un conjunto de operadores.

L: un sistema de representación.

Σ: una estructura de control.

El ámbito de la validez de la concepción, o esfera de práctica, está constituido por el conjunto de los problemas que la concepción permite solucionar.

Un *operador* es lo que permite la transformación de los problemas. Los operadores son visibles en las producciones y los comportamientos del los estudiantes (Balacheff y Margolinas, 2005, p. 80). Los operadores permiten la manipulación de los elementos del sistema de representación, y por lo tanto la transformación de los problemas. Los operadores, al igual que los permisos de inferir, legitiman el paso entre datos y conclusión y se explicitan a menudo en la forma "si…entonces" (Pedemonte, 2005, p. 327).

Un *sistema de representación* (lingüístico o no) permite la expresión de los problemas y de los operadores. Las representaciones permiten la expresión de los controles, de las acciones y de los problemas, para la anticipación y la validación. Las modalidades de representación presentan una gran diversidad: representaciones lingüísticas y no lingüísticas, eventualmente constituidas en registros semióticos. Las representaciones, lingüísticas o no lingüísticas, desempeñan un papel determinante en la caracterización de un marco. En efecto, la caracterización de un marco pasa necesariamente por la de un sistema de representación, o incluso de un registro semiótico. Como es el caso para las concepciones, un sistema de representación es lo que permite formular los problemas accesibles en el marco en cuestión, los medios de sus soluciones así como los de la validación de estas soluciones. Este sistema de representación puede tener una fuerza particular, señalando el marco en que se moviliza (Balacheff y Margolinas, 2005, p. 82 - 83).

Finalmente, una *estructura de control* da y organiza las funciones de decisión, de elección, de juicio de validez y de adecuación de la acción (Pedemonte, 2005). La estructura de control asegura la no contradicción de la concepción y contiene las herramientas de decisión sobre la legitimidad del empleo de un operador o sobre el estado (solucionado o no) de un problema. Los controles reúnen juicios, decisiones, medios de elección, métodos, estructuras y organización de los operadores. Permiten las anticipaciones y la posible construcción de planes. Dos dificultades teóricas y metodológicas acompañan a toda consideración de controles: i) Los controles son generalmente implícitos; ii) la distinción entre controles y operadores no es absoluta sino relativa a una concepción (Balacheff y Margolinas, 2005, p.84).

3.2.6.2 Modelo de Pedemonte: el modelo cK¢ en el modelo de Toulmin

Las concepciones de los estudiantes que permiten construir una conjetura constituyen la base de la argumentación. Su movilización permite construir el proceso argumentativo. De hecho, es la concepción movilizada durante la construcción de un argumento la que permite responder a las preguntas: ¿Por qué el permiso de inferir es pertinente para quien argumenta? ¿Por qué es correcto? ¿Por qué es adecuado? La concepción movilizada durante la construcción de un argumento puede entonces remplazar su soporte pues justifica la existencia misma del argumento. Como el soporte de un argumento corresponde a la concepción movilizada, entonces el permiso de inferir es uno de los operadores que constituyen la concepción (Pedemonte, 2005, p. 327). La estructura del modelo de Toulmin queda de la siguiente manera al integrar el modelo cK¢ en él (Fig. 18):

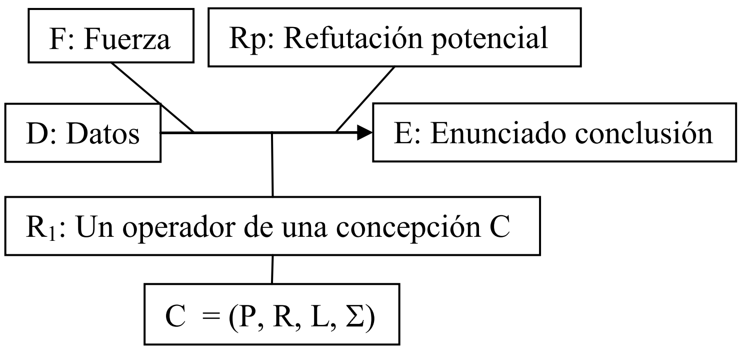


Figura 18: Integración del modelo cK¢ al modelo de Toulmin

Cuando los estudiantes movilizan una concepción, con frecuencia algunos de sus elementos constituyentes están implícitos. En ese caso el soporte está constituido por los elementos explicitados de la concepción. Por ejemplo, puede encontrarse como elemento explícito la estructura de control de la concepción que asegura la no-contradicción de la concepción; *"contiene las herramientas de decisión sobre la legitimidad del empleo de un operador sobre el estado del problema"* (Balacheff, 2002). También es posible que la esfera de práctica, es decir el conjunto de situaciones en las que la concepción ha sido operatoria hasta el momento, remplace el soporte. Aún si algunos elementos de una concepción están implícitos, puede llevarse a cabo un análisis cognitivo entre argumentación y demostración.

La comparación entre la estructura de la argumentación y la correspondiente estructura en la demostración nos permite analizar las posibles continuidades y rupturas entre ambas estructuras. Para llevar a cabo este análisis estructural entre argumentación y demostración en términos de unidad cognitiva se supone una continuidad del sistema de referencia, ya que si hay una ruptura del sistema de referencia entre argumentación y demostración el análisis estructural pierde su sentido debido a que probablemente ya se está en el caso de una ruptura cognitiva (Pedemonte, 2002). En nuestra investigación, si existe ruptura referencial, de todos modos analizamos la continuidad o ruptura estructural, dado que esta ruptura referencial puede haber ayudado a transformar una argumentación inductiva en una demostración genérica intelectual o deductiva.

4. Metodología de Investigación

En la sección 4.1 de este capítulo explicamos la forma de recolección de la información a partir de diferentes fuentes de datos y el tratamiento que se realizó con cada una de estas fuentes para la obtención de los datos.

En la sección 4.2 describimos la población objeto de estudio, explicamos los criterios tenidos en cuenta para la selección de la institución en donde se desarrolló la experimentación y señalamos algunas características particulares del profesor y del grupo de estudiantes.

En la sección 4.3 describimos el experimento de enseñanza. En esta sección, mostramos el tiempo dedicado al desarrollo de cada una de las actividades de la unidad de enseñanza. Explicamos la metodología de trabajo en clase, incluyendo tiempos y compromisos de los estudiantes, y los papeles desempeñados por el profesor y el investigador.

En la sección 4.4 presentamos e ilustramos con ejemplos las herramientas, criterios y procedimientos que usamos para el análisis de los datos y obtención de conclusiones sobre la existencia o no de unidad cognitiva, el aprendizaje de los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas, y sobre la ventaja o desventaja de las actividades planteadas en cada una de las fases de aprendizaje de la unidad de enseñanza.

4.1 Formas de recolección de datos

La complejidad de los objetivos de investigación y el tipo de experimentación en un contexto normal de un salón de clases, con un cronograma establecido institucionalmente y un buen número de estudiantes, hacía necesario tratar de obtener la mayor cantidad posible de información de los estudiantes. Por estas razones se decidió grabar en audio y video, todo el tiempo dos parejas de estudiantes y, el grupo completo durante las partes de las clases dedicadas a actividades de la fase de explicitación. También se recogió información de todo el grupo a través de las hojas de trabajo que debían entregar al finalizar cada una de las clases. A continuación presentamos y describimos cada uno de los medios usados para la recolección de los datos.

Test diagnóstico (Anexo 1) para evaluar los preconceptos de todos los estudiantes, con el objetivo de indagar sobre los conocimientos básicos que van a ser más utilizados en el desarrollo de la unidad de enseñanza, y de acuerdo a los resultados realizar una recuperación y profundización durante las primeras semanas de la experimentación.

Grabaciones de audio y video realizados a dos grupos y a la clase completa durante las fases de explicitación. Se usaron para la realización de las transcripciones de las actividades consideradas para el análisis de la unidad cognitiva y para el análisis de la fase de explicitación. Las filmaciones y grabaciones fueron las herramientas claves para la realización del estudio de la argumentación y la demostración como procesos, con miras al análisis de la unidad cognitiva. Permitieron identificar operadores perceptivos, representaciones basadas en los gestos y movimientos, en la visualización sobre el ordenador o en el lenguaje natural, el control ejercido por el arrastre o por lo visualizado en la pantalla del ordenador y otros elementos que no se identifican en el papel. Igualmente permitieron la interpretación de las formas y estructuras de argumentación y de demostración. También se usaron para el análisis de la fase de explicitación.

Hojas de trabajo de los estudiantes en donde desarrollaban las respuestas a las actividades propuestas en la unidad de enseñanza, las cuales se fotocopiaban o escaneaban después de cada una de las sesiones. Sirvieron como soporte para las transcripciones de los videos o de las grabaciones de audio, cuando los estudiantes se referían a lo escrito en sus hojas de trabajo o a lo visualizado en el ordenador. También sirvieron para identificar las conjeturas propuestas y las demostraciones construidas con el objetivo de interpretar los procesos de argumentación y de demostración. Para identificar los operadores, las representaciones y la estructura de control para el análisis del sistema de referencia.

Mapas conceptuales que completaban o realizaban los estudiantes dentro de la fase de integración. Se usaron en el transcurso de la experimentación para analizar si los conceptos y relaciones entre ellos estaban siendo comprendidos, detectar errores y dificultades respecto a los contenidos estudiados y corregirlos. En el análisis de la unidad de enseñanza se tuvieron en cuenta para el análisis de la fase de integración.

Cuaderno de notas del investigador. Terminada cada sesión, el investigador bajaba los videos al ordenador e iba tomando nota en el cuaderno de los episodios relevantes e irrelevantes. En este proceso se iba haciendo el borrador de las primeras transcripciones de los episodios que aportaban elementos valiosos para el proceso de análisis de la investigación. Este se convirtió en una herramienta importante para el análisis después de la obtención de mucha información pasado un buen periodo de tiempo.

4.2 Descripción de la población

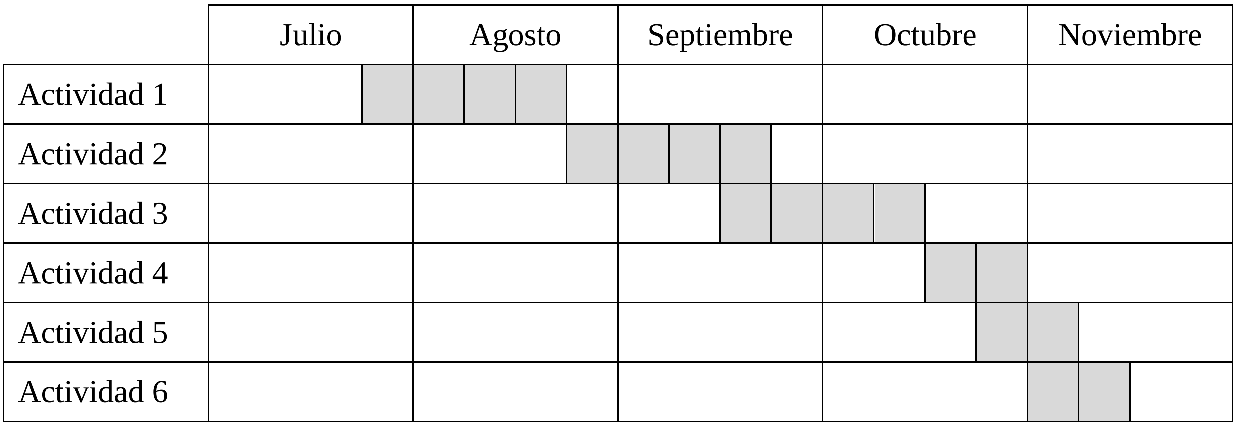
La implementación de la unidad de enseñanza se llevó a cabo con los 17 estudiantes (14 – 15 años) de un grupo de 10º grado de una institución del municipio de Floridablanca (Santander, Colombia). La experimentación se realizó durante el horario normal de clases de la institución, en el segundo semestre del curso 2007. Seleccionamos este colegio porque en el curso anterior habíamos realizado en él la parte experimental del trabajo de investigación del DEA (Fiallo, 2006), y las directivas y la profesora que participó en la experimentación habían expresado su deseo y apoyo para que se desarrollara nuevamente la experiencia en el siguiente año. De hecho, dado que en 10º grado generalmente se trabaja la trigonometría en el primer semestre y la geometría analítica en el segundo, decidieron cambiar el orden para esperar la realización de los ajustes en el rediseño de la unidad de enseñanza.

Debido al trabajo realizado en el año anterior, al inicio de esta nueva experimentación la profesora ya tenía suficiente experiencia con Cabri, conocía la metodología experimental de trabajo en el aula, la forma de intervención del investigador y algunos de los objetivos de la investigación.

El grupo de estudiantes de esta experimentación era diferente a los que participaron en el trabajo de investigación del DEA, pero estaban familiarizados con el uso de Cabri en la realización de construcciones geométricas, pero no en su uso como una herramienta de exploración, análisis y planteamiento de conjeturas a partir de archivos construidos. Este conocimiento del software lo adquirieron con la profesora durante el trabajo en una sección semanal del curso de geometría de grado 9º.

4.3 El experimento de enseñanza

La siguiente tabla muestra el tiempo dedicado a cada una de las seis actividades que conforman la unidad de enseñanza. Semanalmente se trabajaron dos sesiones de 90 minutos en la sala de cómputo y una sesión de 45 minutos en el salón normal de clases o en la sala de cómputo.



4.3.1 Metodología de trabajo en clase

La profesora era la encargada de implementar las actividades y orientar la clase según lo planeado previamente con el investigador y lo descrito para cada una de las actividades de la unidad de enseñanza.

Al inicio de la clase se entregaba la hoja o las hojas de trabajo correspondientes a las actividades en la que se iba a trabajar en primer lugar, hasta que no se concluyera dichas actividades no se entregaban las hojas de las siguientes actividades. Los estudiantes, agrupados en parejas, desarrollaban las actividades orientados por la lectura de la guía suministrada (Anexos 2 a 7), debían registrar todas las respuestas en sus hojas de trabajo (se les suministraban hojas blancas para efectos de fotocopiado e escaneado), incluyendo las preguntas que surgieran.

Todo el tiempo se enfatizó que los estudiantes debían producir sus propias conjeturas y construir sus propias demostraciones, además del uso de las opciones de medida, de construcción, de arrastre, de visualización, de exploración y de comprobación que dispone Cabri. Se insistió en que dado el caso de que no entendieran una actividad o se les dificultara resolverla, escribieran las razones por las cuales no la comprendían o escribieran lo que pensaban que debía ser la respuesta sin temor a equivocarse y menos a ser sancionados con una nota negativa; de igual manera se insistía en la participación de todo el grupo en la fase de explicitación. Se les solicitó no borrar los errores o las actividades incompletas. Cuando detectaran el error o la actividad incompleta con las explicaciones de sus compañeros o con la orientación de la profesora, debían agregar una nota complementaria. Finalizada cada una de las sesiones los estudiantes entregaban las hojas de trabajo a la profesora para ser fotocopiadas y devueltas en la siguiente sesión.

La mayoría de actividades se desarrollaron durante las sesiones de clase, salvo algunas actividades de la fase de orientación libre, o lecturas o problemas complementarios del texto guía, que se resolvieron en casa.

Finalizada cada una de las seis actividades, cada grupo debía completar o realizar el mapa conceptual correspondiente a la fase de integración, ayudados por lo escrito en las hojas de trabajo. Terminado el mapa conceptual debían entregarlo a la profesora para ser fotocopiado y revisado.

4.3.2 El papel de la profesora

Antes de iniciar la experimentación se realizó un trabajo de formación, de reflexión y de discusión de los objetivos de aprendizaje y de investigación con la profesora que iba a realizar la experimentación. El investigador y la profesora analizaron los cambios realizados a la unidad de enseñanza y se recordaron aspectos del marco teórico referentes a la demostración y a las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele. Discutieron, y llegaron a acuerdos, sobre la responsabilidad de la profesora en la enseñanza y el aprendizaje, tanto de los conceptos trigonométricos, como de la demostración. La finalidad del uso de Cabri no era la de volver a los estudiantes expertos en el uso de software, sino que Cabri era una herramienta cognitiva de construcción, visualización, exploración, experimentación y de generalización que contribuiría a la generación de ideas para el planteamiento de conjeturas y construcción de demostraciones.

Dado que uno de los objetivos de la investigación consistía en el desarrollo de habilidades de argumentación y demostración por parte de los estudiantes, el investigador acordó con la profesora algunas pautas de su actuación durante las clases: La profesora intervendría lo menos posible en los momentos que los estudiantes planteaban sus conjeturas y construían sus demostraciones. Sugeriría a los estudiantes despejar las dudas en la fase de explicitación. En sus intervenciones debía recalcar sobre las diferentes funciones de la demostración (De Villiers, 1993). Mostraría la debilidad de las demostraciones inductivas, especialmente aquellas basadas sólo en lo que se ve en el ordenador. Resaltaría la necesidad de que los estudiantes usaran las definiciones, axiomas y teoremas matemáticos como elementos de justificación (*permisos de inferir*) en las argumentaciones. Insistiría en el uso de dibujos en la hoja de trabajo para representar y conectar lo que ven en el ordenador con las representaciones algebraicas y analíticas.

4.3.3 El papel del investigador

En la clase el investigador adoptó una posición de observador activo y colaborador de la profesora en las tareas de asesoramiento y orientación a los estudiantes, interactuaba continuamente con los dos grupos escogidos para el seguimiento, haciéndoles preguntas y registrando en video y audio sus respuestas y conclusiones en el desarrollo de las tareas propuestas. Al final de cada sesión se reunían con la profesora para comentar, analizar y planear la siguiente sesión.

4.4 Criterios y procedimientos de análisis de los datos y obtención de conclusiones

Presentamos e ilustramos con ejemplos las herramientas, criterios, y procedimientos que usamos para el análisis de los datos y obtención de conclusiones de la unidad cognitiva, del aprendizaje de los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas, y de la unidad de enseñanza, a la luz del marco teórico.

4.4.1 Análisis de la existencia de unidad o ruptura cognitiva

Para el análisis de la unidad cognitiva escogimos desde el principio dos grupos de estudiantes (dos estudiantes por grupo, G1A y G2A) de nivel académico medio, que se destacaran por participar, preguntar, estuvieran dispuestos a que los filmaran y grabaran en audio durante todas las sesiones de clase, a atender y contestar todas las intervenciones y preguntas del investigador durante el desarrollo de las actividades.

El grupo G1A está conformado por Diana y Mapa (nombres ficticios). Diana es una estudiante algo distraída y con poca motivación para el estudio de las matemáticas. Mapa es una estudiante que se destaca por ser cumplida en sus deberes académicos, pero no precisamente por tener un pensamiento matemático avanzado.

El grupo G2A está conformado por Cata y Mabe. Cata es una estudiante bastante participativa, le gusta exponer y defender sus ideas, tiene rasgos de líder. Mabe es una estudiante algo tímida y le gusta comprender muy bien las cosas.

Al definir el marco teórico describimos el modelo de Pedemonte (modelo cK¢ integrado al modelo de Toulmin) como la herramienta que vamos a usar para analizar la unidad cognitiva. Parte de este análisis consiste en la identificación de la estructura de la argumentación y de la demostración. De acuerdo a nuestra caracterización de demostración, adaptamos y usamos las categorías de Marrades y Gutiérrez (2000) para identificar la estructura de la demostración en el modelo de Pedemonte.

El análisis de la unidad cognitiva lo realizamos en los siguientes pasos:

1) En cada uno de los problemas de conjetura y de demostración analizados en el capítulo 6, transcribimos el audio o video y vamos construyendo los sucesivos esquemas de argumentación de Toulmin (Fig. 1) que van surgiendo con cada nuevo enunciado conclusión (E en el modelo de Toulmin).

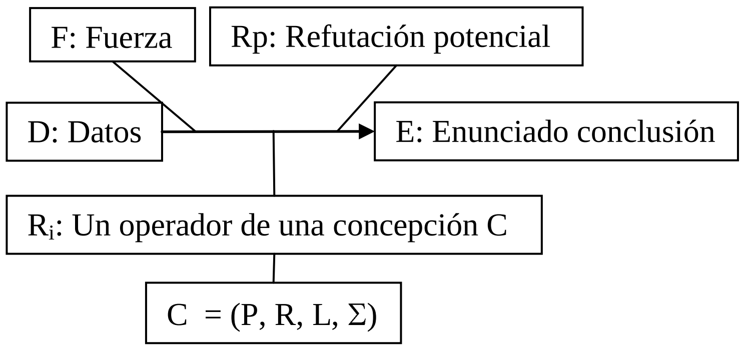


Figura 1: Esquema de argumentación para cada enunciado conclusión

En cada cuadro del esquema (Fig. 1) ponemos entre corchetes el numeral correspondiente al episodio del protocolo que representa el respectivo componente del modelo (datos, enunciado, operador, fuerza, refutación potencial, marco o concepción). La fuerza de inferencia y las refutaciones potenciales no siempre forman parte de cada nuevo enunciado. En el caso de que a un enunciado le correspondan varios datos, operadores o refutaciones, los ponemos en un solo cuadro. Para distinguir un paso de demostración inductivo de uno deductivo, los cuadros del esquema de un paso inductivo los presentamos con líneas punteadas y los cuadros del esquema de un paso deductivo con líneas continuas.

Ilustramos en la figura 2 un paso de argumentación deductivo en una de las actividades analizadas.

$D_1 \Rightarrow E_1 \Rightarrow E_2$ → **E_2**: $sen(A) = cos(90 - A) = cos(A - 90)$ [11]

R_5: $sen(A) = \frac{y}{r}$ [13]

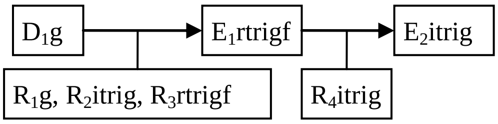
Trigonometría en el plano cartesiano

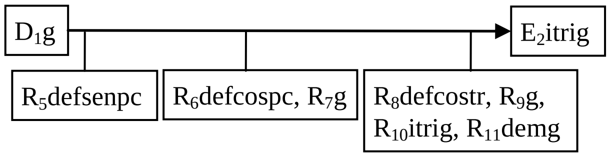
Figura 2: Ejemplo de un esquema de argumentación deductivo

2) Terminado cada proceso de planteamiento de la conjetura o de construcción de la demostración, realizamos un análisis y comentario general del proceso, analizamos los operadores, el sistema de representación, los controles, la estructura, la forma de argumentación (para la conjetura) y el tipo de demostración (para la demostración), resaltamos los logros y las dificultades detectados.

3) Para cada proceso construimos un esquema global que representa la estructura argumentativa general del proceso de argumentación y de demostración. Intentamos resumir y conectar (si hay conexión) los esquemas de cada paso correspondiente a un nuevo enunciado en cada uno de los dos procesos. En este esquema global intentamos codificar los datos, enunciados y operadores con una abreviatura y explicamos su significado. Cuando la abreviatura se repite, no la volvemos a explicar. Estos esquemas globales, que además de representar los pasos de una demostración con una serie de diagramas, hacen una síntesis final gráfica y codificada es una aportación nuestra para hacer un análisis más fino y, al mismo tiempo, global de un proceso complejo como es una argumentación y una demostración larga. Con estos esquemas globales tenemos una idea general de cada uno de los procesos que nos ayuda a comprender y comparar las formas de argumentación de los estudiantes y las conexiones entre los diferentes enunciados y representaciones, nos ayuda a identificar el marco de referencia (soporte) y sirve para decidir acerca de la unidad o ruptura cognitiva.

En la tabla 1 ilustramos un ejemplo de los esquemas generales de cada proceso de una de las actividades analizadas.

<table>
<tr><th>Esquema global de la argumentación</th><th>Esquema global de la demostración</th></tr>
<tr><td>

g: geométrico.
itrig: identidad trigonométrica.
rtrigf: relación trigonométrica falsa.</td>
<td>

defcospc: definición coseno en el plano cartesiano.
defcostr: definición coseno en el triángulo rectángulo.
defsenpc: definición de seno en el plano cartesiano.
demg: demostración geométrica.</td></tr>
</table>

Tabla 1. Ejemplo de esquemas globales de la argumentación y la demostración

4) Para el análisis del sistema de referencia diseñamos la siguiente tabla (Tabla 2) en donde sintetizamos y comparamos los componentes del modelo cK¢ (operadores, representaciones, estructura de control, concepción, marco) de cada uno de los procesos. Para cada componente del modelo señalamos la caracterización y las preguntas que nos debemos plantear para identificarlo. La comparación entre dichos componentes nos permite decidir acerca de la unidad o ruptura referencial.

ARGUMENTACIÓN Enunciado conclusión			**DEMOSTRACIÓN** Enunciado conclusión		
CONCEPCIÓN ¿Por qué existe una relación entre datos y enunciado? ¿Por qué el permiso de inferir es pertinente para quien argumenta? ¿Por qué es correcto? ¿Por qué es adecuado?			**CONCEPCIÓN** ¿Por qué existe una relación entre datos y enunciado? ¿Por qué el permiso de inferir es pertinente para quien argumenta? ¿Por qué es correcto? ¿Por qué es adecuado?		
OPERADO-RES Producciones y Comportamien-tos. ¿En qué condiciones hay una relación entre datos y enunciado?	**SISTEMA DE REPRESEN-TACIÓN** Expresión lin-güística o no de los problemas, los operadores, los controles y las acciones	**ESTRUCTU-RA DE CONTROL** Juicios, decisio-nes, medios de elección, méto-dos, estructuras y organizaciones de los operadores	**OPERADO-RES** Producciones y Comportamien-tos. ¿En qué condiciones hay una relación entre datos y enunciado?	**SISTEMA DE REPRESEN-TACIÓN** Expresión lin-güística o no de los problemas, los operadores, los controles y las acciones	**ESTRUCTU-RA DE CONTROL** Juicios, decisio-nes, medios de elección, méto-dos, estructuras y organizaciones de los operadores
Regla. Principio general. Definiciones. Axiomas. Teoremas. Propiedades. Relaciones matemáticas. Operaciones matemáticas. Implicaciones simples. Ejemplos.	Expresiones verbales (lenguaje natural). Uso de dibujos. Uso de números decimales (razón como cociente) Uso de razones numéricas (razón como relación) Uso de magnitudes (razón como cantidad) Ecuaciones.	Arrastre en Cabri. Teoremas. Técnicas algorítmicas. Visualización de las relaciones en el ordenador.	Regla. Principio general. Definiciones. Axiomas. Teoremas. Propiedades. Relaciones matemáticas. Operaciones matemáticas. Implicaciones simples. Ejemplos.	Expresiones verbales (lenguaje natural). Uso de dibujos. Uso de números decimales (razón como cociente) Uso de razones numéricas (razón como relación) Uso de magnitudes (razón como cantidad) Ecuaciones.	Arrastre en Cabri. Teoremas. Técnicas algorítmicas. Visualización de las relaciones en el ordenador.

ARGUMENTACIÓN Enunciado conclusión			**DEMOSTRACIÓN** Enunciado conclusión		
	Uso del plano cartesiano. Gráfica. Uso de expresiones algebraicas. Gestos o movimientos del cuerpo. Reconocimiento de variantes e invariantes. Imágenes mentales. Visualizaciones sobre la pantalla del ordenador o de la calculadora.			Uso del plano cartesiano. Gráfica. Uso de expresiones algebraicas. Gestos o movimientos del cuerpo. Reconocimiento de variantes e invariantes. Imágenes mentales. Visualizaciones sobre la pantalla del ordenador o de la calculadora.	
MARCO DE LA ARGUMENTACIÓN			MARCO DE LA DEMOSTRACIÓN		

Tabla 2. Tabla para el análisis del sistema de referencia

Esta tabla (tabla 2) es otro de nuestros aportes a estudio de la unidad cognitiva entre los procesos de argumentación y demostración. En ella se puede visualizar, analizar y comparar cada uno de los componentes de la concepción[1], para decidir acerca del marco[2] y de la unidad o ruptura del sistema de referencia.

En la primera fila de la tabla se transcriben los enunciados conclusión de cada uno de los procesos. Dado que puede haber varios enunciados, se toma como enunciado conclusión, el que la pareja de estudiantes enuncia como conjetura en la actividad llamada *conjeturando* en la unidad de enseñanza, y en la fase de demostración, el enunciado que demuestra en la actividad llamada *demostrando* en la unidad de enseñanza.

En la tercera fila, para cada proceso, se transcriben los operadores (identificados en la transcripción y construcción de cada uno de los esquemas de argumentación en los pasos 1, 2

[1] Cuádrupla compuesta de un conjunto de problemas (P), un conjunto de operadores (R), un sistema de representación (L) y una estructura de control (Σ). (Balacheff y Margolinas, 2005)

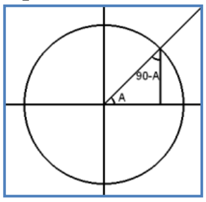
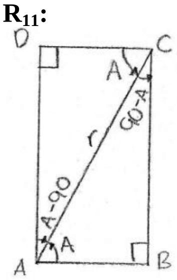
[2] Un *marco* está constituido por objetos de una rama de las matemáticas, de las relaciones entre los objetos, de sus distintas formulaciones eventualmente e imágenes mentales asociadas a estos objetos y estas relaciones. Estas imágenes desempeñan un papel esencial en el funcionamiento como herramientas, de los objetos del marco. Dos marcos pueden implicar los mismos objetos y diferir por las imágenes mentales y la problemática desarrollada. (Douady, 1986)

y 3), el sistema de representación y la estructura de control que ayudan a caracterizar la concepción y el marco. Para todos los casos, los problemas (P) son problemas de planteamiento de conjeturas y de construcción de demostraciones de propiedades e identidades de las razones trigonométricas (esfera de práctica), por lo que esta cuarta componente de la caracterización de concepción no la incluimos en la tabla.

En la cuarta fila se enuncia el marco o marcos caracterizados a través del análisis de los operadores, sistema de representación y estructura de control identifica en la segunda fila.

Finalmente, en la cuarta fila se enuncia la continuidad o ruptura del sistema de referencia, como producto de la comparación y análisis de los dos procesos.

En la tabla 3 se ilustra un ejemplo de análisis del sistema de referencia:

ARGUMENTACIÓN E_2: $sen(A) = \cos(90 - A) = \cos\,(A - 90)$			**DEMOSTRACIÓN** E_2: $sen(A) = \cos(90 - A) = \cos\,(A - 90)$		
CONCEPCIÓN			CONCEPCIÓN		
OPERADORES	**SIST. DE REPR.**	**E. DE CONTROL**	**OPERADORES**	**SIST. DE REPR**	**E. DE CONTROL**
R_1:  **R_2**: *A* y *B* = 90 – *A* complementarios ⇒*sen* (*A*) = *cos* (*90 – A*) **R_3**: *cos* (*B*) = –*cos* (–*B*)⇒ *cos* (*90 – A*) = –*cos* (*A – 90*) **R_4**: *cos* (*B*) = *cos* (–*B*)	**L_1**: Dibujo geométrico. → **L_2**: Uso de expresiones algebraicas.	Σ_1: Dibujo ↔ Σ_2: Teórico: propiedades geométricas, trigonométricas y de las operaciones.	**R_5**: sen $A = \frac{y}{r}$ **R_6**: $cos = \frac{ady.}{hip.}$ **R_7**: Triángulos iguales ⇒ hipotenusas iguales **R_8**: $\cos A = \frac{x}{r}$ **R_9**: Triángulo azul = Triángulo rojo. **R_{10}:** Triángulo rojo igual = triángulo amarillo ⇒ cateto de *A*–90 igual a cateto de 90 – *A*⇒*cos* (*A* – 90) = *cos* (90 – *A*) **R_{11}:** 	**L_2**: Uso de expresiones algebraicas → **L_3**: Lenguaje natural → **L_1**: Dibujo geométrico.	Σ_2: Teórico: propiedades geométricas, trigonométricas y de las operaciones ↔ Σ_3: Arrastre en Cabri ↔ Σ_1: Dibujo.

ARGUMENTACIÓN E$_2$: $sen(A) = \cos(90 - A) = \cos(A - 90)$	**DEMOSTRACIÓN** E$_2$: $sen(A) = \cos(90 - A) = \cos(A - 90)$
Trigonometría del triángulo rectángulo.	Trigonometría en el plano cartesiano→ Trigonometría del triángulo rectángulo
CONTINUIDAD EN EL SISTEMA DE REFERENCIA	

Tabla 3. Ejemplo de análisis del sistema de referencia

5) Para el análisis de la continuidad estructural diseñamos la siguiente tabla (Tabla 4). Analizamos primero la forma de argumentación que contribuye al planteamiento de la conjetura en la fase de argumentación (no aplica para la demostración). Posteriormente identificamos la estructura de la conjetura ayudados por los comentarios correspondientes a esa fase y el esquema general, luego identificamos el tipo de demostración y explicamos por qué corresponde a ese tipo, comparamos y decidimos acerca de la continuidad o ruptura estructural.

ARGUMENTACIÓN	**DEMOSTRACIÓN**
FORMA DE ARGUMENTACIÓN **Constructiva:** contribuye a la construcción de una conjetura, precede al enunciado **Estructurante:** justifica una conjetura, previamente construida como un hecho, viene después.	
ESTRUTURA DE LA CONJETURA • Deductiva. • Inductiva por generalización de los enunciados. • Inductiva por generalización del proceso.	**ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN** • Deductiva: EMT, EME, DFT, DFE. • Empírica ingenua: EI. • Experimento crucial: ECB, ECC. • Ejemplo genérico: EGA, EGI.

Tabla 4. Tabla para el análisis de la continuidad estructural

En la tabla 5 se ilustra un ejemplo:

ARGUMENTACIÓN	**DEMOSTRACIÓN**
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Deductiva.	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Deductiva.
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN **EMT**: Usan lo visualizado en Cabri para transformar el problema en uno ya demostrado y justificar con propiedades matemáticas.
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Tabla 5: Ejemplo de análisis estructural

5) Analizando las continuidades o rupturas de las dos últimas tablas decidimos la unidad o ruptura cognitiva. Existe unidad cognitiva si hay unidad referencial y estructural, en caso de una ruptura de alguna de las dos o ambas, existe ruptura cognitiva. Concluida la unidad o ruptura cognitiva, analizamos sus posibles causas, comentamos si la unidad o la ruptura favorece o no la construcción de una demostración deductiva. Finalizando la actividad, presentamos algunas conclusiones parciales de todo el proceso.

4.4.1.1 Actividades analizadas

Debido a que, de las actividades 5 y 6 que conforman la unidad de enseñanza, no se pudo registrar los datos de la misma manera como en las cuatro primeras (ausencia de estudiantes, culminación de año escolar), el análisis se hizo solamente de las actividades 1, 2, 3 y 4 de la unidad de enseñanza. De estas cuatro actividades, escogimos algunos problemas de planteamiento de conjeturas y construcción de demostraciones de las fases de orientación dirigida o de orientación libre. Vale la pena recordar que para poder diferenciar los momentos de cada uno de los procesos de planteamiento de la conjetura o de construcción de la demostración, en nuestra unidad de enseñanza planteamos estos dos momentos como dos sub-actividades a realizar, las cuales hemos llamado *conjeturando* y *demostrando*.

No se escogieron las mismas actividades para cada grupo de estudiantes por dos razones:

i) Que no es nuestro objetivo comparar cómo trabajaron los estudiantes en cada una de las actividades de la unidad de enseñanza y establecer semejanzas o diferencias, sino analizar la unidad cognitiva, mirando cada uno de los procesos desde principio a fin, con el fin de reconocer los aciertos y las dificultades que se presentan en cada uno de los procesos.

ii) Que para el análisis de la unidad cognitiva es necesario examinar, a través de audio o video, todo el proceso en cada una de las fases (planteamiento de la conjetura y construcción de la demostración), para poder diferenciar las variables y constructos a analizar y poder decidir acerca de la unidad o ruptura cognitiva; en algunos casos, para el mismo problema no se pudo obtener toda la información, o en otros, para el mismo problema, alguno de los grupos planteó la conjetura como un hecho, sin ningún proceso argumentativo, y por lo tanto no tiene sentido hablar de análisis de la unidad o ruptura cognitiva.

La tabla 6 muestra las actividades analizadas para cada uno de los dos grupos.

ACTIVIDAD		GRUPO
1.2.2	***Conjeturando***	G2A
	¿Qué sucede con los valores de las razones cuando varía el ángulo *A* entre 0º y 90º? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.	
1.2.3	***Demostrando***	
	Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 1.2.2.	
1.4.2	***Conjeturando***	G1A
	¿Qué relación existe entre la medida de los ángulos *A* y *B*? Expresa *B* en términos de *A*.	
1.4.3	***Demostrando***	
	Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 1.4.2.	
2.5.1	***Conjeturando***	G1A
	¿Qué relación existe entre *sen(A)* y *sen(-A)*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.	G2A
2.5.2	***Demostrando***	
	Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.5.1.	
2.5.3	***Conjeturando***	G1A
	¿Qué relación existe entre *cos(A)* y *cos(-A)*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.	G2A
2.5.4	***Demostrando***	
	Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.5.3.	
2.5.5	***Conjeturando***	G1A
	¿Qué relación existe entre *tan(A)* y *tan(-A)*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.	G2A
2.5.6	***Demostrando***	
	Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.5.5.	
2.6.1	***Explorando, conjeturando y demostrando***	G1A(3)
	Busca relaciones entre los valores de las razones trigonométricas para los ángulos *A*, *A–90*, *90–A*. Demuéstralas utilizando propiedades matemáticas.	G2A(1)
3.6.7	***Conjeturando***	G2A
	¿Qué relación existe entre $cos\ (180 + \alpha)$ y $cos\ \alpha$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.	
3.6.8	***Demostrando***	
	Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 3.6.7.	

ACTIVIDAD		GRUPO
4.2.1	***Explorando, analizando y conjeturando.***	G1A
	¿Qué relación existe entre el radio de la circunferencia y las razones trigonométricas *seno* y *coseno*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.	G2A
4.2.2	***Demostrando***	
	Demuestra tu conjetura planteada en 4.2.1.	

Tabla 6: Actividades analizadas

Después de analizados estos 15 episodios de manera independiente, construimos una tabla que nos permitió identificar diferencias y similitudes. A través de esta tabla, en donde se identificaban la unidad o ruptura cognitiva y sus causas, se plantearon cinco situaciones de unidad o ruptura, lo que nos permitió caracterizar y plantear las cinco categorías de unidad o ruptura cognitiva que presentamos y explicamos en detalle en el capítulo 6 con sus respectivos análisis. Al realizar esta caracterización, procedimos a descartar 4 de los15 episodios analizados porque son similares a alguno de los 11 que presentamos. Los 4 descartados se anexan como información adicional y ejemplos diferentes de análisis de la unidad cognitiva (Anexo 8). La siguiente tabla muestra las actividades analizadas en el capítulo 6.

Categorías	**Actividades**	**Grupos**
Unidad cognitiva inductiva	1.2.2, 3.6.7	G2A
Ruptura referencial– continuidad estructural inductiva	2.5.1, 2.6.1B	G1A
Ruptura referencial –argumentación inductiva– demostración genérica intelectual	2.5.3, 2.5.5	G2A
Unidad referencial –argumentación inductiva – demostración deductiva falsa	2.5.3	G1A
Unidad cognitiva deductiva	2.6.1, 2.6.1A, 2.6.1C, 4.2	G2A G1A

Tabla 7: Categorías de unidad o ruptura cognitiva y actividades presentadas

El hecho de que una categoría tenga más de un ejemplo obedece a que son tipos de demostración diferentes o casos que aportan elementos adicionales para la categorización y respectivas conclusiones.

4.4.2 Evaluación de la unidad de enseñanza

Para llevar a cabo este estudio realizamos un análisis de las fases de aprendizaje planteadas en cada una de las seis actividades, teniendo en cuenta las hojas de trabajo de las 17 estudiantes del grupo, las filmaciones de algunos episodios (en donde además de los dos grupos filmados la mayor parte del tiempo, intervino otro estudiante con un aporte sobresaliente que reflejaba algún logro o dificultad), las filmaciones de la fase de explicitación de cada actividad, el cuaderno de apuntes del investigador (que de manera resumida y esquemática contiene lo desarrollado en todo el proceso) y los mapas conceptuales de todo el grupo.

Analizando cada fase vamos realizando los comentarios de los logros y avances del proceso de aprendizaje de los conceptos y propiedades y de las ventajas o desventajas de haber incluido ciertas actividades en la unidad de enseñanza.

5. Unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un SGD

En este capítulo se hace una descripción minuciosa de la unidad de enseñanza desde el punto de vista del marco teórico, sus características metodologías, los objetivos de investigación y los objetivos de aprendizaje. En la sección 4.1 señalamos los aspectos generales de la unidad de enseñanza y en 4.2 describimos una a una las actividades.

5.1 Aspectos generales

La unidad de enseñanza está conformada por seis actividades que comprenden el inicio del estudio de las partes más importantes de las razones trigonométricas, de acuerdo a las propuestas curriculares y a los libros de texto colombianos. La unidad tiene dos objetivos centrales:

- La comprensión y aprendizaje de los contenidos matemáticos.
- La iniciación de los estudiantes a la demostración matemática.

La principal característica metodológica de nuestra unidad de enseñanza es que propone una enseñanza por descubrimiento guiado basada en el uso de SGD. Las manipulaciones hechas con el SGD deben ayudar a los estudiantes a experimentar y a ver regularidades y diferencias entre múltiples ejemplos para, a continuación, formular conjeturas y demostrar su validez por los medios empíricos o deductivos adecuados. Además, aunque no se mencione explícitamente en el texto de las actividades, al final de cada bloque de actividades relacionadas, el profesor propone una puesta en común del grupo en la que algunos estudiantes presentan sus soluciones (a veces correctas, otras incorrectas) para su discusión por los compañeros. Las conjeturas y demostraciones planteadas, fueron gradualmente ascendiendo desde la búsqueda de relaciones y propiedades sencillas hacia la búsqueda de relaciones más complejas.

Dado que para cada actividad se suministraba un archivo con una construcción dinámica en Cabri, su uso fue enfocado más como una herramienta de visualización, exploración y análisis de relaciones y propiedades trigonométricas, que como una herramienta de construcción de figuras geométricas para la solución de problemas. En pocos casos los estudiantes tuvieron que hacer construcciones para el planteamiento de conjeturas o producción de demostraciones.

Los profesores deben animar a sus estudiantes en el uso del arrastre y el uso de todas las herramientas de medir, calcular o hallar coordenadas en Cabri para la exploración y el análisis de relaciones[1]. Deben empezar a pedir a sus estudiantes que expliquen y justifiquen la veracidad de las afirmaciones que hagan, como inicio al planteamiento de conjeturas y la demostración de las mismas. En las primeras actividades, se deben considerar aceptables las demostraciones empíricas que no sean puros empirismos ingenuos. A lo largo del curso los profesores deben aprovechar las ocasiones en las que puedan mostrar a los estudiantes que uno o varios ejemplos no son suficientes para demostrar una conjetura. Al mismo tiempo, los profesores irán haciendo más énfasis en el uso de propiedades matemáticas para demostrar las conjeturas, en un proceso que debe llevar a los estudiantes a un estilo de demostración deductiva. Al respecto, para todas las actividades hemos propuesto los siguientes dos objetivos generales de aprendizaje:

- Plantear y demostrar conjeturas acerca de algunas propiedades, relaciones y características de las razones trigonométricas a partir de la observación, exploración y análisis de los variantes e invariantes de las relaciones entre los elementos geométricos y métricos de los archivos propuestos.
- Iniciar a los estudiantes en el uso del razonamiento matemático y ayudarles a comprender las funciones de la demostración en matemáticas.

[1] El análisis de la relación de los estudiantes con el SGD desde el punto de vista de la génesis instrumental (procesos de instrumentación e instrumentalización) no es un objetivo de nuestra investigación.

Para la organización de las actividades utilizamos el modelo de las fases de aprendizaje de Van Hiele, sin hacerlas explícitas con su nombre en la hojas de trabajo del estudiante. Las actividades fueron diseñadas en el orden de la fase 1 a la fase 5.

La fase de explicitación se propuso en varios momentos, generalmente al final de cada bloque de actividades, en forma de discusiones entre los grupos y el profesor, con los objetivos de:

- Promover la participación y la discusión como formas de comprensión de los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas y de los procesos de conceptualización, demostración y visualización.
- Discutir resultados, aprender nuevos conceptos, nuevo vocabulario, observar y aprender otras formas de demostración, realizar conexiones entre los conceptos y procesos aprendidos y los sistemas de representación de un mismo concepto.

Como los objetivos propios de esta fase son comunes para todas las actividades de la unidad de enseñanza, en algunas ocasiones no se mencionan en la descripción de las actividades que hacemos en las páginas siguientes, salvo que sea necesario hacer énfasis o aclaración en determinada actividad. Estas omisiones se notarán por los saltos que hay en la numeración de las actividades.

Como fase de integración, al final de cada una de las tres primeras actividades se les propuso a los estudiantes completar un mapa conceptual y al final de las tres últimas se les solicitó realizar su propio mapa conceptual, con el objetivo general de:

- Organizar los conceptos y sus redes de relaciones, sintetizar, corregir y profundizar en dichos conceptos y relaciones.
- Visualizar y recordar esquemáticamente los conceptos, propiedades y relaciones más importantes de la actividad.

Los objetivos propios de la fase de integración son comunes para todas las actividades, por lo que, igual que en la fase de explicitación, en la descripción de algunas actividades no los mencionamos explícitamente. Las actividades de la fase de integración son la última de cada bloque, por lo que en las páginas siguientes no se notará el salto.

5.2 Descripción de las actividades

A continuación se describen una a una las seis actividades, cuyos textos completos están incluidos en los anexos 2 a 7. Para cada una de ellas presentamos los objetivos de aprendizaje y una descripción de cada sub-actividad. Cuando es necesario, explicamos en qué consiste el archivo de Cabri utilizado en la actividad y comentamos algunas sugerencias de su utilización con los estudiantes. También presentamos algunas actuaciones que se esperan de los estudiantes con miras a lograr los objetivos de enseñanza y de aprendizaje propuestos.

Actividad 1. Razones trigonométricas para triángulos rectángulos

Objetivos de aprendizaje:

- Reconocer las razones trigonométricas del triángulo rectángulo.
- Reconocer que el valor de las razones trigonométricas de un triángulo depende de la amplitud de los ángulos del triángulo pero no depende de las longitudes de sus lados.
- Promover la participación y la discusión como formas de comprensión de los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas y de los procesos de conceptualización, demostración y visualización.
- Discutir resultados, aprender nuevos conceptos, nuevo vocabulario, observar y aprender otras formas de demostración, realizar conexiones entre los conceptos y procesos aprendidos y los sistemas de representación de un mismo concepto.

Actividad 1.1: Cálculo de elementos de un triángulo rectángulo (Información)

Se plantea esta actividad para que los estudiantes reconozcan la necesidad de aprender nuevos conceptos para la resolución de problemas de triángulos rectángulos y de cálculo de áreas. Las partes 1.1.1 a 1.1.4 se resuelven sin Cabri.

La actividad 1.1 presenta a los estudiantes problemas que no tienen solución si no conocen las razones trigonométricas, salvo que ésta se busque de manera aproximada usando instrumentos de medida (reales o del SGD).

El profesor deberá orientar a los estudiantes para que entiendan que los cálculos realizados con regla y estimaciones no son exactos para la solución total de los problemas. En la actividad 1.1.5 el profesor deberá lograr que los estudiantes entiendan que al hacer uso de medidas en Cabri, a pesar de la precisión del software, estas soluciones requieren de justificaciones generales basadas en propiedades matemáticas.

Otra conclusión importante de la actividad 1.1 es que, cuando entre los datos hay una longitud específica de un lado, la solución (es decir, el triángulo rectángulo que cumple las condiciones) es única, pero, cuando los datos incluyen relaciones entre lados, hay infinidad de soluciones diferentes. Análogamente, cuando los datos sólo incluyen medidas de ángulos, hay infinidad de soluciones diferentes. Esta conclusión puede que pase desapercibida a los estudiantes al resolver los ejercicios en papel, pero la notarán muy fácilmente cuando los resuelvan con el SGD.

La actividad 1.1.6 debe aprovecharse para realizar las correcciones necesarias y resaltar las potencialidades de Cabri, así como la necesidad de conceptos y propiedades matemáticas nuevas. Esta actividad le servirá al profesor para tener una visión de los pre-conceptos de sus estudiantes y corregir errores.

Actividad 1.2: Razones entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, identidades trigonométricas básicas (Orientación dirigida)

Se inicia la actividad con el uso del archivo ACT.1.2.1 (Fig. 1).

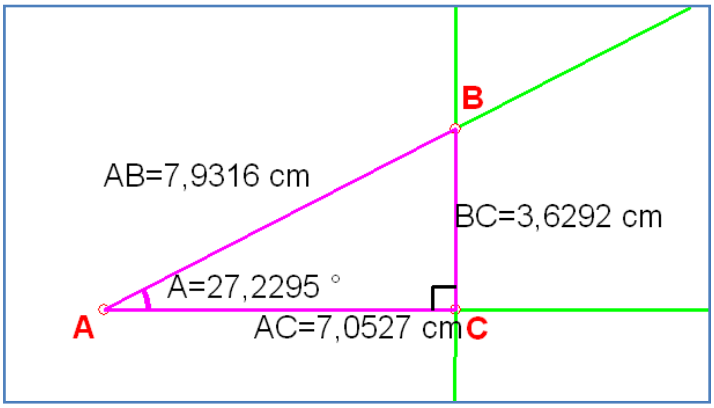


Figura 1. Triángulo rectángulo entre dos semirrectas

En este archivo se pueden "visualizar" las variaciones de los ángulos *A* y *B*, de los lados del triángulo y de las razones trigonométricas cuando se arrastra una de las semirrectas; o las variaciones de los lados cuando se arrastra el vértice *C*, dejando invariantes las razones trigonométricas y los ángulos, permitiendo visualizar los triángulos semejantes al triángulo *ABC*.

La idea fundamental en esta actividad es la de introducir al estudiante al estudio de las razones trigonométricas a través de la exploración de las medidas de los lados y de los ángulos del triángulo rectángulo. Además de identificar las propiedades de las razones y sus valores de variación, se espera llegar a concluir que seno y cosecante, coseno y secante, y tangente y cotangente son recíprocas.

Actividad 1.3: Definición de las razones trigonométricas (Explicitación)

Es importante que el profesor defina las razones trigonométricas por su nombre y hable de su importancia por sus aplicaciones en la resolución de problemas de triángulos rectángulos, de la vida cotidiana, de otras ciencias y de modelación.

Actividad 1.4: Identidades trigonométricas de un ángulo y su complemento (Orientación dirigida)

Se retoma la construcción del archivo ACT. 1.2.1 para calcular y relacionar las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo a través de la exploración y análisis del diagrama dinámico. Se pide hallar las seis razones trigonométricas para cada ángulo agudo del triángulo rectángulo, esperando que encuentren y demuestren las primeras relaciones y propiedades entre las razones trigonométricas de dos ángulos complementarios. Esta actividad es importante porque, en la práctica, se encuentran situaciones en las que es conveniente o necesario combinar razones trigonométricas de ambos ángulos del triángulo para obtener la solución. En esta actividad cabe esperar que las justificaciones iníciales de los estudiantes sean empíricas basadas en los datos que se ven en la pantalla del ordenador, p. ej. que $sen(A) = cos\,(90 - A)$ porque siempre coinciden sus valores. Esta evidencia es tan fuerte que, para los estudiantes, es suficiente para darles la certeza absoluta de que las relaciones son siempre ciertas. Por este motivo, pedirles que, además, hagan demostraciones abstractas les bloqueará con toda seguridad, porque no entenderán la necesidad de hacer esas demostraciones.

En la experimentación llevada a cabo se le sugirió a la profesora que discutiera con sus estudiantes, que la evidencia de la pantalla basta para estar seguros de que las igualdades son ciertas, pero que ellos deberían dar justificaciones deductivas. Esto se hizo planteándoles la cuestión de averiguar *por qué* son ciertas las igualdades. Esta pregunta no cuestiona la veracidad de las igualdades, sino que la acepta, por lo que no producirá bloqueo y, de esta manera, se logra que los estudiantes utilicen las definiciones de las razones trigonométricas para darse cuenta de por qué son ciertas las igualdades, p. ej. que $sen(A) = \cos\,(B)$ porque el cateto opuesto a A es el cateto contiguo a B.

Actividad 1.5: Discusión y comunicación (Explicitación)

Se plantea esta actividad para la discusión, corrección e institucionalización de las conjeturas y demostraciones de las identidades de un ángulo y su complemento planteadas en la actividad 1.4.

Actividad 1.6: Propiedades y aplicaciones de las razones trigonométricas, identidades trigonométricas básicas (Orientación libre)

Se plantean algunos problemas de aplicación de los conocimientos y lenguaje nuevos y se retoman los problemas planteados en la fase de información con algunas modificaciones para que los estudiantes comprendan la importancia del nuevo conocimiento adquirido en la solución de problemas de triángulos rectángulos, de áreas, de la vida cotidiana y de otras ciencias. Es importante que los estudiantes se den cuenta de que tangente es igual al cociente entre el seno y el coseno y que la cotangente es el cociente entre el coseno y el seno.

Actividad 1.7 (Integración)

Por ser la primera vez que se plantea esta actividad, hay que tener en cuenta que no todos los estudiantes o tal vez ninguno sepa lo que es un mapa conceptual. Por lo tanto, habrá necesidad de explicar algunos aspectos metodológicos del uso de esta herramienta.

<u>Actividad 2. Razones trigonométricas para ángulos en posición normal</u>

Objetivos de aprendizaje:

- Introducir la circunferencia trigonométrica y la representación de las razones trigonométricas en ella.
- Reconocer que las razones trigonométricas de un ángulo no dependen del radio de la circunferencia.
- Reconocer y calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo positivo o negativo.

Actividad 2.1: Identidades trigonométricas de los ángulos *A* y *A* – 90 (Información)

Para motivar a la necesidad de extender las definiciones de las razones trigonométricas del triángulo rectángulo al plano cartesiano, planteamos dos problemas de conjetura y demostración, en donde se hace necesario pensar en ángulos negativos para el caso de que *A* sea un ángulo entre 0º y 90º o ángulos mayores de 90º. La conjetura del primer problema es afirmativa, pero dado que los estudiantes no conocen las definiciones de las razones trigonométricas en el plano cartesiano, se espera que apenas den algunos ejemplos de casos verdaderos. El segundo problema es falso y en este caso un contraejemplo es suficiente para demostrar la falsedad de la conjetura, sin embargo esperamos que para los estudiantes sea una sorpresa que esta conjetura sea falsa y quieran intentar con otros ejemplos o tratar de preguntarse por lo que ocurre.

El profesor debe hacer caer en la cuenta que en este caso, estamos considerando ángulos entre 0º y 360º, debe motivar a los estudiantes para que usen más de un ejemplo para sus afirmaciones y también a que no queden satisfechos con una prueba, ya sea que la conjetura sea falsa o verdadera. Inicialmente el profesor podría sugerir la utilización de la calculadora científica o la de Cabri para que los estudiantes calculen los valores de los ángulos negativos o mayores de 90º, aunque deben tratar de justificar el por qué de los valores dados por la calculadora.

Actividad 2.2: Introducción a las razones trigonométricas en el plano cartesiano (Orientación dirigida)

En esta primera sesión se definen las razones trigonométricas y se da información de los conceptos que se van a trabajar.

Se pide a los estudiantes la exploración y búsqueda de elementos y relaciones en el archivo ACT.2.2.1 (Fig. 2).

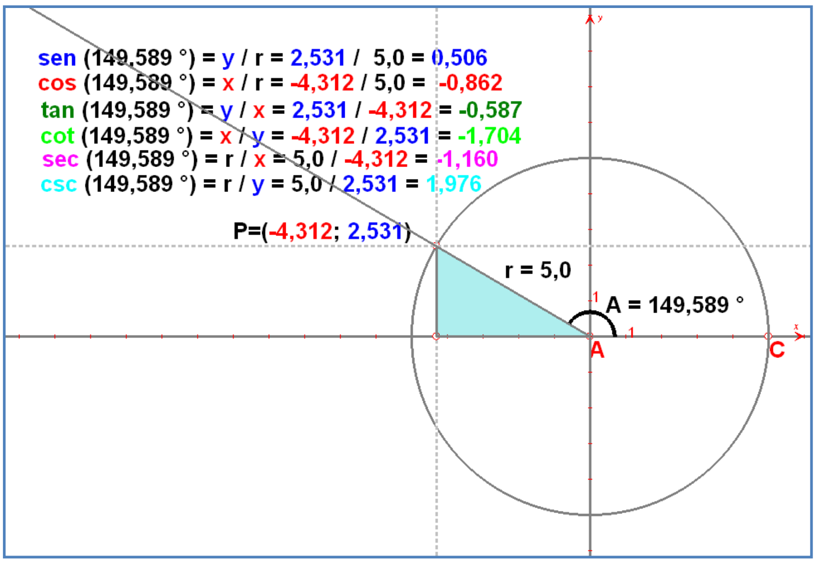


Figura 2: Razones trigonométricas en el plano cartesiano

Al mover el punto *P* del archivo sobre la circunferencia, se puede visualizar la variación de las coordenadas del punto y de las razones trigonométricas, diferenciadas por colores que ayudan a identificarlas y distinguirlas entre ellas. También se visualiza el triángulo formado por el eje de las *x*, el lado final del ángulo y la perpendicular al eje *x* que pasa por *P*. En la construcción se destacan las relaciones geométricas, numéricas, algebraicas y analíticas con colores asociados a las razones trigonométricas. Se espera que estas ayudas visuales les permitan a los estudiantes identificar y conectar las diferentes representaciones de los conceptos involucrados y sus relaciones.

El comportamiento de los diferentes programas de geometría dinámica al representar las medidas de ángulos es variado, pero suelen presentar problemas para medir ángulos negativos o ángulos de más de ±180º. En la experimentación realizada con Cabri, esta dificultad se resolvió planteando que, si el ángulo gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, el signo del ángulo es positivo y si gira en sentido de las manecillas del reloj, el ángulo es negativo. Para ángulos mayores de más de ±180º se arrastra el lado final del ángulo hacia el exterior de la pantalla, tratando de seguir el borde de una circunferencia.

Actividad 2.3: Propiedades y valores de las razones trigonométricas en el plano cartesiano (Orientación dirigida)

Con esta actividad se extienden las razones trigonométricas a los ángulos en posición normal sobre la circunferencia y se refuerza la idea de que estas no dependen de las medidas de las longitudes de los lados del triángulo. Se enfatiza en ella que las razones trigonométricas para un ángulo en posición normal se definen en términos de cualquier punto sobre el lado final del ángulo y que no importa en donde esté ubicado ese punto sobre el origen (esto se evidencia en la actividad 2.3.4). Se analizan los signos de las razones trigonométricas en cada uno de los cuadrantes del plano cartesiano y las restricciones respectivas para las razones tangente, cotangente, secante y cosecante.

Respecto a los valores de las razones se debe tener en cuenta que no es fácil que el estudiante, sólo analizando algunos casos, se de cuenta y conjeture inmediatamente acerca de los valores que toma cada una de las razones trigonométricas, por lo que es necesario que el profesor esté asesorando y ayudando con preguntas, y que insista en que, por más cálculos y extensiones de las cifras decimales que se hagan, es imposible “ver” en Cabri todos estos valores. Por las limitaciones del software, los valores observados son finitos y tienden a 0, 1 ó

-1, según las cifras decimales, por lo que se le debe solicitar a los estudiantes realizar más aproximaciones con más cifras decimales a los ángulos cuadrantales (0º, 90º, 180º, 270º, 360º) para que se den cuenta que entre más aproximaciones se hacen a estos ángulos, los valores siguen aumentando (cuando tienden a infinito) o se acercan a 0, 1 ó -1, cuando nos acercamos con varias cifras decimales a los ángulos cuadrantales.

Actividad 2.5: Identidades trigonométricas entre ángulos opuestos (Orientación dirigida)

En esta actividad se sugiere a los estudiantes utilizar Cabri para que representen en el mismo plano los ángulos *A* y –*A*. Una forma fácil de representar el ángulo –*A* consiste en reflejar sobre el eje de las *x* la semirrecta *AP* (Fig. 2) que representa el lado final del ángulo *A*. Se debe tratar de que los estudiantes analicen la relación entre las coordenadas de un ángulo y su opuesto y usen las nuevas definiciones de las razones trigonométricas en términos de las variables *x*, *y* e *r*.

Actividad 2.6: Identidades trigonométricas de los ángulos *A*, 90 – *A* y *A* – 90 (Orientación libre)

Se parte del diagrama dinámico ACT.2.6.1 (Figura 3) en donde se visualizan los ángulos *A*, *A* – 90 y 90 – *A* y los respectivos triángulos rectángulos que se forman con el eje de las *x* para que los estudiantes analicen las relaciones existentes entre las razones trigonométricas de los tres ángulos recurriendo a los procesos y habilidades de visualización.

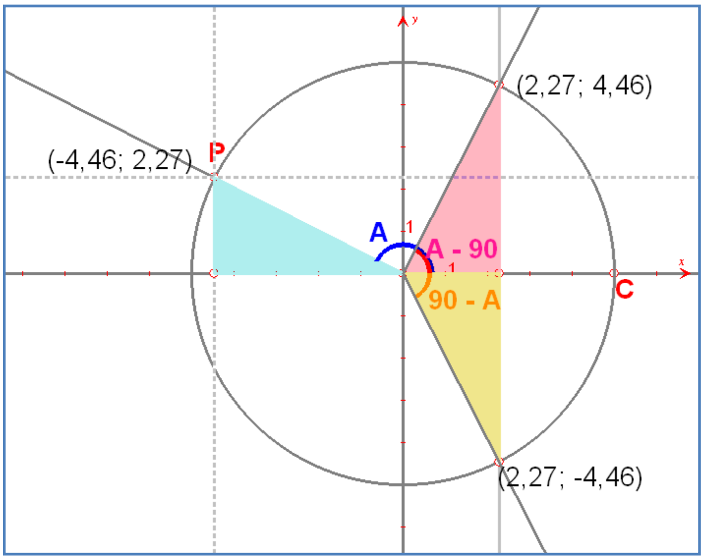


Figura 3: Identidades trigonométricas de los ángulos *A*, *A* – 90 y 90 - *A*

Se espera que los estudiantes, al menos planteen y demuestren que $sen(A) = cos(A - 90)$, $cos(A) = -sen(A - 90)$ y $tan(A) = -cot(A - 90)$. Las identidades correspondientes a las razones secante y cosecante, se dejarán como una exploración en la fase de orientación libre como actividad fuera de la clase. No pretendemos ser exhaustivos enunciando todas las posibles relaciones, ni creemos que sea necesario plantear a los estudiantes todas las posibles relaciones. En la práctica, la solución de todos estos problemas pasa por identificar triángulos congruentes en la circunferencia y verificar los signos de las razones según los cuadrantes. Algunos estudiantes se darán cuenta en poco tiempo de esta estrategia general, mientras que otros estudiantes tardarán en relacionar unos casos con otros y resolverán cada nuevo problema como si fuera el primero.

Actividad 2.8: Propiedades de las razones trigonométricas, identidades trigonométricas de los ángulos A, 90 – A y A – 90 (Orientación libre)

Se retoma el estudio de las propiedades y relaciones planteadas en la actividad 1 (razones trigonométricas en el triangulo rectángulo) para que el estudiante las vuelva a analizar, encuentre posibles errores cometidos, utilice otras herramientas de Cabri y nuevos conceptos para deducir y demostrar otras propiedades que relacionan los valores de las razones trigonométricas con las relaciones entre los ángulos. Se propone la búsqueda de otras relaciones de las razones trigonométricas entre los ángulos A, 90 – A y A – 90.

Actividad 3. Representaciones lineales y visualización de las razones trigonométricas

Objetivos de aprendizaje:

- Introducir las representaciones gráficas de las razones trigonométricas como vectores sobre la circunferencia. A estos vectores los denominaremos “lados trigonométricos”.
- Utilizar las representaciones como vectores de las razones trigonométricas para visualizar y descubrir propiedades o relaciones. Utilizarlas también como guía para el planteamiento y demostración de las conjeturas por medios geométricos y analíticos.

Actividad 3.1: Identidades trigonométricas entre los ángulos relacionados (Información)

Se plantea esta actividad para motivar a los estudiantes hacia el estudio de las identidades trigonométricas de los ángulos relacionados. Este tipo relaciones que involucran los ángulos relacionados es nueva para los estudiantes y posiblemente ellos recurran a probar con algunos ejemplos y tratar de encontrar alguna relación, o tal ves no encuentren ninguna relación por ahora.

Actividad 3.2: Representaciones lineales y visualización de las razones trigonométricas (Orientación dirigida)

Usando el archivo ACT.3.2 (Fig. 4) se introduce la representación gráfica usual de las seis razones trigonométricas como segmentos sobre la circunferencia. Aunque en los textos se representan los segmentos tangente, cotangente, secante y cosecante sólo en los cuadrantes primero y cuarto, didácticamente es mejor representar estos segmentos en cualquiera de los cuatro cuadrantes, pues los estudiantes siempre ven la misma estructura y, por tanto, les resulta más fácil entender las relaciones entre un ángulo y sus segmentos trigonométricos.

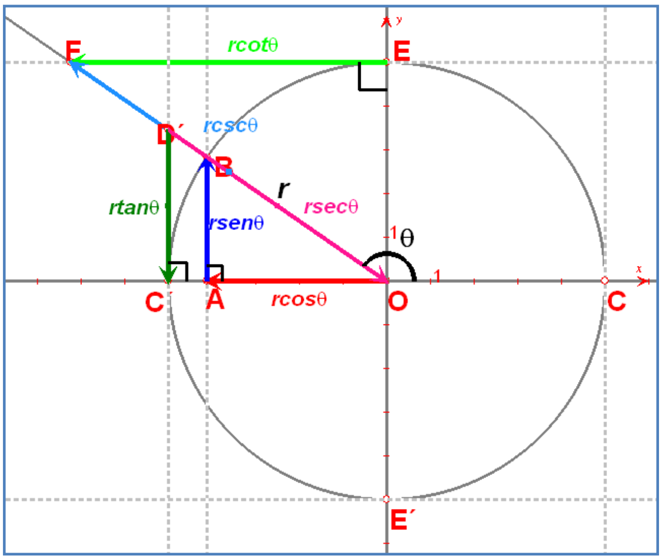


Figura 4: Representación lineal de las razones trigonométricas

La utilización de vectores en vez de meros segmentos para representar las razones es un recurso didáctico que facilita a los estudiantes la identificación de los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante y les ayuda a encontrar las relaciones correctas entre razones: Los vectores con origen en (0,0) representan razones trigonométricas cuyo valor es positivo, y los vectores con final en (0,0) representan razones cuyo valor es negativo. Los vectores con un extremo en un eje de coordenadas y que tienen sentido hacia arriba o la derecha representan razones cuyo valor es positivo y los que tienen sentido hacia abajo o la izquierda representan razones cuyo valor es negativo.

Actividad 3.3: Demostración de las relaciones entre las razones trigonométricas y los segmentos (Orientación dirigida)

Se presenta a los estudiantes la demostración de que la longitud del lado tangente de α es igual a $r.tan(\alpha)$, como ejemplo de la forma de realizar las demostraciones de estas igualdades para las seis razones trigonométricas. La manipulación de la figura en el ordenador les ayudará a entender la demostración dada y a encontrar las demostraciones correspondientes para las otras razones.

Actividad 3.4: Relaciones entre los ángulos de referencia (Orientación dirigida)

El profesor debe ayudar a los estudiantes para que hagan las diferentes conexiones entre las representaciones numéricas, algebraicas, geométricas y analíticas, también debe insistir en que los estudiantes justifiquen la congruencia de los ángulos con propiedades de las relaciones entre ángulos, los teoremas de triángulos congruentes y de triángulos semejantes. Que representen con dibujos geométricos y las letras correspondientes en sus hojas de trabajo lo visualizado en Cabri.

Actividad 3.6: Identidades trigonométricas entre los ángulos relacionados (Orientación libre)

Utilizando el archivo ACT.3.4.1 (Fig. 5), los estudiantes pueden "ver" todas las relaciones entre las razones de los ángulos relacionados para plantear sus conjeturas, pero el profesor debe invitarlos a que también "vean" las relaciones entre los objetos geométricos identificados para que usen esta información en la construcción de su demostración.

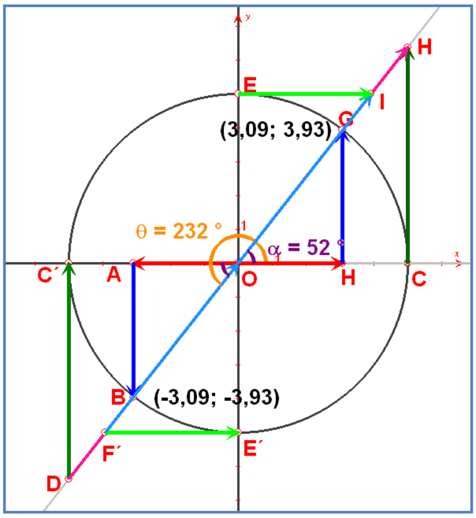


Figura 5: Visualización de las identidades trigonométricas entre los ángulos *A* y 180 + *A*

El profesor debe inducir a los estudiantes, mediante preguntas o comentarios adecuados, a que analicen no solamente los vectores sino también las coordenadas y los triángulos que se forman para que vayan relacionando las representaciones numéricas, métricas, geométricas y analíticas. Debe recordar que lo visualizado en la pantalla es verdadero, pero hay que explicar con argumentos matemáticos por qué lo es.

Se espera que los estudiantes demuestren sus conjeturas utilizando la visualización de los vectores y de los triángulos congruentes para asociarlos con sus coordenadas y las definiciones de las razones. Se debe insistir en que representen en la hoja de trabajo lo visualizado en el archivo, asignando nombres y relacionando las variables. Los estudiantes deben demostrar la congruencia de los triángulos a través de los teoremas correspondientes para garantizar que los valores absolutos de las coordenadas de los ángulos relacionados son iguales.

Para avanzar en el tiempo y que la actividad no se vuelva monótona para el estudiante, se propone que cada grupo conformado por dos o tres estudiantes plantee y demuestre una o dos conjeturas de las dadas y que todo el salón de clase conozca la forma de demostrarla en la siguiente actividad de la fase de explicitación (actividad 3.7).

Actividad 3.8: Identidades trigonométricas entre los ángulos relacionados (Orientación libre)

Se plantean otros problemas de planteamiento de conjeturas y construcción de demostraciones para que los estudiantes refuercen y mejoren las habilidades de demostración y hagan uso de los nuevos conceptos y habilidades de demostración aprendidos en la actividades anteriores. Esta actividad es libre y fuera de la clase, aunque es conveniente que se discutan los últimos cuatro problemas. Se plantean los cuatro últimos problemas para que los estudiantes realicen un análisis y estudio comprensivo de los conceptos y las propiedades encontradas en la actividad y a su vez las relacionen con los conceptos y propiedades encontrados en las actividades de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y en el plano cartesiano.

Actividad 4. Identidades Pitagóricas

Objetivos de aprendizaje:

- Analizar, comprender y demostrar la Identidad Pitagórica Fundamental a través de la exploración y visualización de la demostración en un diagrama dinámico.
- Demostrar las otras Identidades Pitagóricas a partir de la visualización y análisis de la Identidad Pitagórica Fundamental.
- Comprender las relaciones geométricas y analíticas de las Identidades Pitagóricas para que sirvan como ayuda en la visualización y demostración de otras identidades trigonométricas.
- Comprender las relaciones entre las demostraciones analíticas, geométricas y algebraicas de las propiedades estudiadas.

Actividad 4.1: Seno en función de coseno, coseno en función de seno (Información)

La idea fundamental de esta fase es plantear la necesidad de poder expresar la razón coseno en función de la razón seno para tener otras posibilidades de resolver problemas en donde se conoce una de las razones y se necesita encontrar otra u otras razones.

Actividad 4.2: La Identidad Pitagórica Fundamental (Orientación dirigida)

Se presenta la demostración dinámica de la Identidad Pitagórica Fundamental (Fig. 6) para que los estudiantes a través de la visualización y de la exploración encuentren las relaciones de las razones seno y coseno y tengan elementos claves para su demostración.

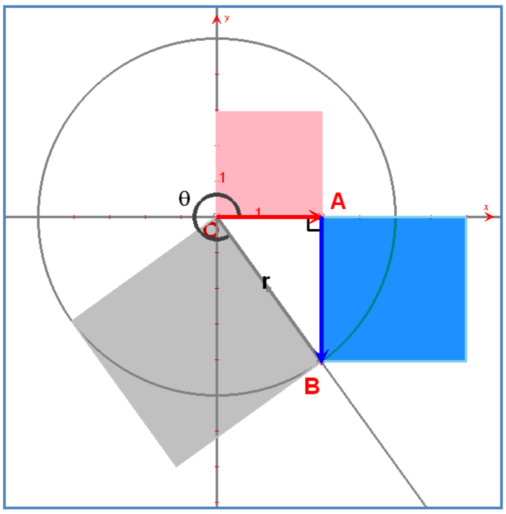


Figura 6: Identidad Pitagórica Fundamental

La "ventaja" que ofrece esta demostración dinámica, es que se puede "ver" que la identidad se cumple para cualquier ángulo θ y no solamente para los ángulos agudos, como generalmente aparece en las demostraciones de los textos escolares y en publicaciones de páginas web estáticas. Los colores sobre los objetos geométricos ayudan a visualizar y a comprender mejor la demostración, pero también se requiere que los estudiantes razonen y apliquen sus habilidades de visualización para comprender las relaciones y propiedades geométricas que intervienen y la puedan demostrar de manera algebraica utilizando las definiciones de las razones trigonométricas dadas hasta el momento.

Actividad 4.4: Otras identidades Pitagóricas (Orientación libre)

Como una aplicación directa de la propiedad estudiada se plantea la demostración de las otras Identidades Pitagóricas, tratando que lo hagan de forma visual, geométrica y analítica. Se espera que los estudiantes construyan demostraciones más próximas a las deductivas.

Actividad 4.5: Razones trigonométricas en función de las otras (Orientación libre)

La idea de esta actividad es que los estudiantes encuentren otras formas de demostrar y resolver problemas a través de la aplicación de los conceptos y propiedades estudiadas en esta actividad y las tres anteriores. Esta actividad se propone como ejercicio para la casa.

Actividad 4.6: Mapa conceptual de las identidades trigonométricas (Integración)

A diferencia de las actividades 1, 2 y 3, aquí no se da el mapa incompleto para que los estudiantes lo terminen, si no que se espera que ellos produzcan sus propios mapas como un medio de organización de las ideas y propiedades estudiadas. La experiencia que han adquirido los estudiantes con los mapas conceptuales de las actividades 1 a 3 debería ayudarles a realizar esta actividad. Esta actividad se propone de la misma forma en las tres últimas actividades.

Actividad 4.7 (Explicitación)

Se plantea de nuevo la actividad de explicitación para que se discutan los resultados de las actividades 4.4 a 4.6.

El profesor debe animar a los estudiantes a que muestren varias formas de resolver los problemas planteados en 4.5 y debe ayudar a que los mapas queden bien configurados. Al final puede mostrar el mapa realizado por el experto y contrastarlo con los realizados por los estudiantes. Esta fase de explicitación siempre se propondrá al final de las tres últimas actividades.

Actividad 5. Seno y coseno de la suma de dos ángulos

Objetivos de aprendizaje:

- Comprender y explicar las fórmulas de descomposición del seno y coseno de la suma de dos ángulos mediante una "demostración dinámica".
- Deducir y demostrar, a partir de la "demostración dinámica" de las descomposiciones del seno y coseno de la suma de dos ángulos, otras propiedades de sus razones trigonométricas.

Actividad 5.1: ¿Seno de la suma igual a la suma de los senos? (Información)

La idea de esta actividad es que los mismos estudiantes se den cuenta del error de considerar el seno de la suma de dos ángulos como la suma de los senos de cada ángulo e intenten explicar el por qué. El profesor debe aprovechar las diferentes respuestas que se generen y dar contraejemplos que los hagan caer en la cuenta del error. Cuando el estudiante se da cuenta que la relación no es verdadera se genera un conflicto que puede animarlo a tratar de encontrar explicaciones matemáticas.

Actividad 5.2: Seno de la suma de dos ángulos (Orientación dirigida)

En los libros de texto se presentan demostraciones puramente algebraicas de esta descomposición, no siempre acompañadas de figuras que puedan ayudar a los estudiantes a entender las demostraciones. En las actividades 5.2 y 5.3 proponemos a los estudiantes explorar, de manera guiada, el archivo ACT.5.2 (Fig. 7) en el que se representan dos ángulos y su suma, para inducirles a obtener conclusiones acerca de las relaciones entre las funciones trigonométricas de los tres ángulos. Se espera que el estudiante aproveche el dinamismo, el poder de interacción y de visualización de Cabri para tratar de entender la demostración.

Inicialmente la fórmula del seno de la suma se "ve" (Fig. 7) representada por el vector verde claro, que equivale a la suma del vector azul, que representa el "lado seno" del ángulo α del triángulo rectángulo ORQ, cuya hipotenusa es el lado coseno del ángulo β del triángulo rectángulo OQP de hipotenusa 1 (vector RQ = $\cos\beta\operatorname{sen}\alpha$ y el triángulo rojo que representa el "lado coseno" del ángulo αdel triángulo rectángulo QSP, cuya hipotenusa es el lado seno del ángulo β del triángulo rectángulo *OQP* de hipotenusa 1, (vector $QS = sen\beta cos\alpha$), por lo que $sen(\alpha+\beta) = sen\alpha.cos\beta + cos\alpha.sen\beta$.

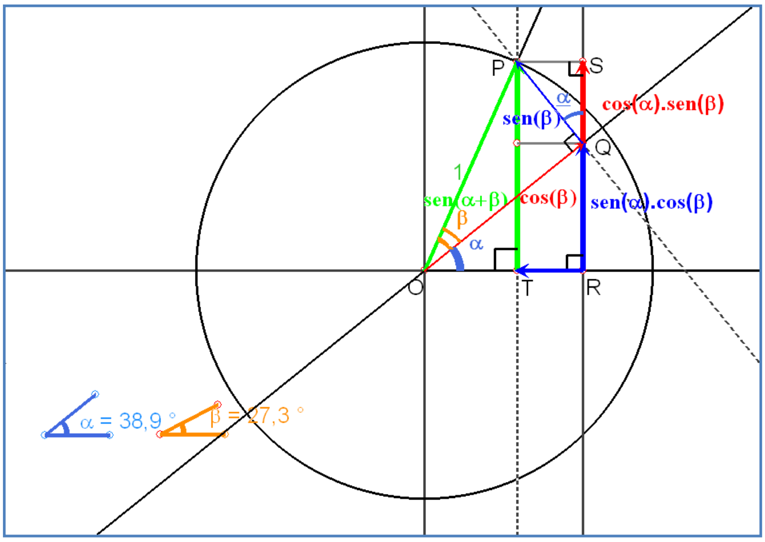


Figura 7: Representación geométrica del seno de la suma

Una de las "innovaciones" que se han querido plasmar en casi todas las actividades es la de tratar de ir más allá de las demostraciones que se hacen en la mayoría de los textos escolares, que sólo se realizan sobre ángulos agudos (en el primer cuadrante del plano cartesiano) y se generalizan sin ni siquiera un comentario de que esto es verdadero para cualquier ángulo. En la demostración dinámica que se presenta, el estudiante "observará" que el seno de la suma se cumple para todos los ángulos, pero debe estar muy atento a lo que va ocurriendo a medida que van variando los ángulos α y β, especialmente cuando uno de ellos pasa a ser mayor que 90º, pues entran en juego algunas de las propiedades estudiadas en actividades anteriores y cambian los signos de algunas razones trigonométricas. Es importante que el estudiante explique la relación de congruencia entre los ángulo α y $\underline{\alpha}$, β y $\underline{\beta}$ basándose en las propiedades de relaciones entre ángulos o en los criterios de semejanza de triángulos.

Actividad 5.3: Seno de la suma de dos ángulos (Orientación dirigida)

En esta actividad se orienta inicialmente a los estudiantes para que analicen y descubran algunas relaciones entre los elementos de la construcción para que las puedan aplicar en la demostración de la fórmula de descomposición del seno de la suma de dos ángulos. No se pide inmediatamente la demostración, debido a que las relaciones involucradas no son fáciles de ver y de comprender. Se les pide a los estudiantes, en primer lugar, que analicen la demostración dinámica cuando los ángulos α y β varían en los cuatro cuadrantes, para que "vean" las diferentes variaciones visuales (posiciones, tamaños, etc.) y matemáticas (signos, etc.) que se dan en los ángulos, los elementos de la construcción, los conceptos involucrados y las propiedades de las razones trigonométricas estudiadas en las tres primeras actividades, además de ver la conexión entre las representaciones geométrica, numérica, algebraica y analítica de los ángulos y de sus razones trigonométricas.

Actividad 5.5: Seno del ángulo doble y del ángulo mitad, coseno de la suma de dos ángulos y del ángulo doble. (Orientación libre)

Los estudiantes, usando el archivo ACT.5.2 podrán utilizar la fórmula para deducir y demostrar que $sen(2\alpha) = 2sen(\alpha).\cos(\alpha)$ y podrán visualizar que, cuando los dos ángulos son iguales, el vector azul $sen(\alpha).\cos(\beta)$ es igual en magnitud y sentido al vector rojo $\cos(\alpha).sen(\beta)$ y por lo tanto la suma es dos veces el mismo vector en donde $\alpha = \beta$.

El profesor debe orientar para que los estudiantes, usando la fórmula del problema anterior, deduzcan una fórmula para el ángulo mitad que podría ser: $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{sen(\alpha)}{2cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ al reemplazar α por $\frac{\alpha}{2}$. En este caso el diagrama dinámico no sirve para la visualización de la relación. El interés didáctico de esta situación es el de provocar que los estudiantes utilicen procedimientos deductivos abstractos sin apoyo visual del SGD.

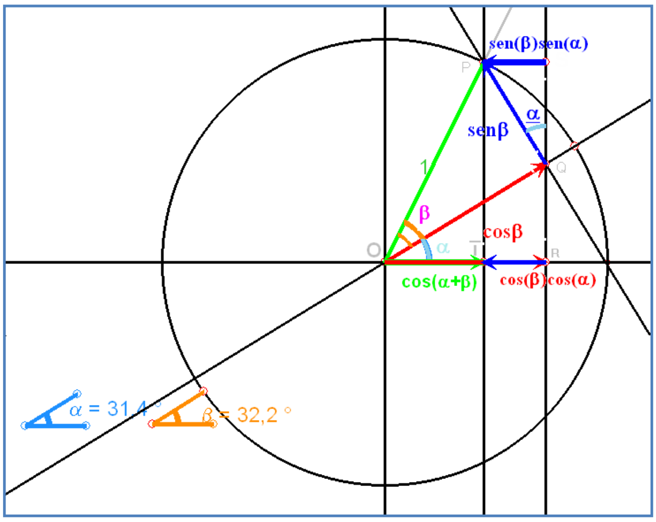


Figura 8: Representación geométrica del coseno de la suma

Usando el mismo archivo ACT.5.2 (Fig. 8) los estudiantes pueden visualizar la fórmula del coseno de la suma de dos ángulos y utilizar argumentos similares a los empleados para la fórmula del coseno de la suma. Es conveniente orientar a los estudiantes para que inicien el análisis desde el primer cuadrante, en donde se ve que $OT = OR - RT$ y se den cuenta que esta relación se sigue cumpliendo en los otros cuadrantes, a pesar que en ocasiones lo que se visualiza es una suma de vectores.

Actividad 6. Seno y coseno de la diferencia de dos ángulos

Objetivos de aprendizaje:

- Comprender y explicar las fórmulas de descomposición del seno y coseno de la diferencia de dos ángulos mediante una “demostración dinámica”.

Actividad 6.1: ¿Seno (o coseno) de la diferencia igual a la diferencia de los senos (o de los cosenos)? (Información)

Debido a la experiencia con la suma, se espera que ahora los estudiantes no planteen la conjetura de que la razones del ángulo diferencia son iguales a la diferencia de las razones. Algunos estudiantes usarán los resultados de la actividad anterior para proponer una relación. El profesor debe animar a los estudiantes para que usen las dos formas (geométrica y algebraica) de deducir las fórmulas y explicar las relaciones existentes entre estas dos formas de representación.

Actividad 6.3: Seno y coseno de la diferencia de dos ángulos. (Orientación dirigida)

Usando el archivo ACT.6.2 (Fig. 9) los estudiantes pueden visualizar y demostrar las fórmulas para el seno y coseno de la diferencia de ángulos. También pueden optar por aplicar la fórmula de la suma y construir una demostración algebraica.

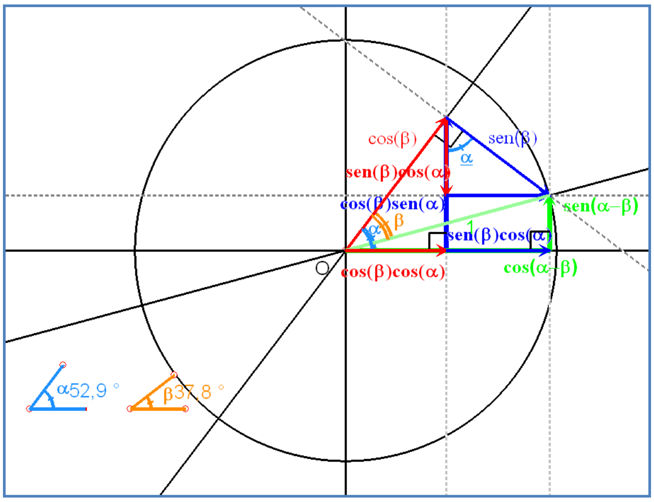


Figura 9: Representación geométrica del seno y coseno de la diferencia de dos ángulos

6. Síntesis de la experimentación, análisis de datos y conclusiones locales

Con el objetivo de analizar la unidad o ruptura cognitiva como una herramienta que permita, entre otras cosas, identificar las dificultades y los avances que se presentan en los procesos de argumentación y de demostración en el contexto de aprendizaje de las razones trigonométricas en un SGD, presentamos el análisis de la existencia de unidad o ruptura cognitiva presente en la resolución de varios problemas. Analizamos, detallamos y explicamos cada uno de los elementos del sistema de referencia y de la estructura. En cada caso analizado, vamos presentando algunos resultados, comentarios, conclusiones y sugerencias que van surgiendo de la dinámica del análisis. Vamos señalando los logros y dificultades alcanzados tanto en los procesos de demostración, representación y conexiones, como en la adquisición de conceptos. También planteamos algunas hipótesis que surgen como nuevos aportes a la investigación del estudio de la unidad cognitiva y al proceso de demostración.

Iniciamos el capítulo contextualizando la unidad de enseñanza en relación con los contenidos que han estudiado previamente los estudiantes. Presentamos en la sección 6.1 los resultados del test diagnóstico que se aplicó a los 17 estudiantes que participaron de la experiencia.

Para una mejor comprensión del análisis realizado, presentamos en la sección 6.2 un resumen sintético de los componentes del modelo de análisis de la unidad cognitiva.

Posteriormente vamos presentando las cinco situaciones de unidad o ruptura, que nos permitió caracterizar y plantear las cinco categorías de unidad o ruptura cognitiva, que caracterizamos a continuación:

La sección 6.3 corresponde a la categoría que hemos denominado *unidad cognitiva inductiva*, caracterizada por la unidad cognitiva del sistema de referencia y de la estructura, que conduce al planteamiento de una conjetura a través de un proceso de argumentación inductivo y la posterior construcción de una demostración inductiva.

La sección 6.4 corresponde a la categoría *ruptura referencial – continuidad estructural inductiva*, caracterizada por la ruptura del sistema de referencia y una continuidad estructural inductiva, que conlleva a la construcción de una demostración tipo experimento crucial o ejemplo genérico analítico.

La sección 6.5 corresponde a la categoría *ruptura referencial – argumentación inductiva – demostración genérica intelectual*, caracterizada por la ruptura del sistema de referencia, el planteamiento de una conjetura soportada en argumentos inductivos y la construcción de una demostración tipo ejemplo genérico intelectual.

La sección 6.6 corresponde a la categoría *unidad referencial – argumentación inductiva – demostración deductiva falsa,* caracterizada por la unidad del sistema de referencia, el planteamiento de una conjetura soportada en argumentos inductivos y la construcción de cualquier tipo de demostración deductiva, soportada en argumentos falsos.

La sección 6.7 corresponde a la categoría *unidad cognitiva deductiva*, caracterizada por la unidad cognitiva del sistema de referencia y de la estructura a través del planteamiento de una conjetura soportada en argumentos deductivos y la construcción de cualquier demostración tipo deductivo.

Finalmente en la sección 6.8 presentamos una síntesis final en la que se informa sobre la evolución de los estudiantes a lo largo del curso. Incluimos dos tablas donde se ven los problemas de demostración analizados y las características (continuidad o ruptura, datos, operadores, sistema de representación, control, marco, forma de argumentación, estructura y tipo de demostración) de las respuestas de cada grupo de estudiantes analizado. Estas tablas van acompañadas de un comentario escrito acerca de la evolución de los estudiantes en el proceso de demostración y en el aprendizaje de las razones trigonométricas.

6.1 Aplicación del test de conocimientos previos y análisis de los resultados

El test de conocimientos previos (Anexo 1) se aplicó a todos los estudiantes del grupo en la primera sesión de clases (junio 5 de 2007), después de haberles comentado y solicitado su colaboración para la participación en la experimentación. Teniendo en cuenta las actividades y sub-actividades propuestas en la unidad de enseñanza, el enfoque de enseñanza y de aprendizaje planteado, los procesos a investigar y las dificultades analizadas en la experimentación del trabajo de investigación de DEA, se evaluaron los siguientes temas: Rectas paralelas y perpendiculares, ángulos, triángulos (desigualdad triangular, suma de los ángulos interiores), triángulo rectángulo, Teorema de Pitágoras, triángulos semejantes, Teorema de Tales, triángulos congruentes y plano cartesiano.

El test comprendía de 12 problemas en los que el estudiante, para la solución de cada uno de ellos, tenía que recordar y aplicar uno o varios de los conceptos, relaciones o propiedades geométricas mencionados anteriormente. Cada solución debía ir acompañada de una explicación o justificación. Se evitó preguntar directamente acerca de propiedades o definiciones para impedir que algunos de ellos sean simplemente recordados de memoria.

Para el análisis cuantitativo y cualitativo que, presentamos a continuación, se identificaron unas actuaciones iniciales que incluían las respuestas de uno o varios estudiantes y se determinaron las siguientes categorías:

En la primera categoría (CORRECTO) se clasificaron los estudiantes que contestaron y justificaron correctamente el problema, aplicando los conceptos o propiedades adecuados (es decir no tenían dificultades en recordar y aplicar dichos conceptos).

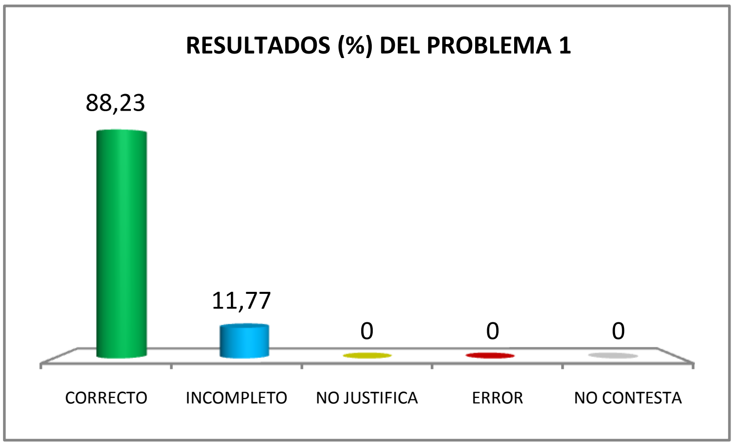
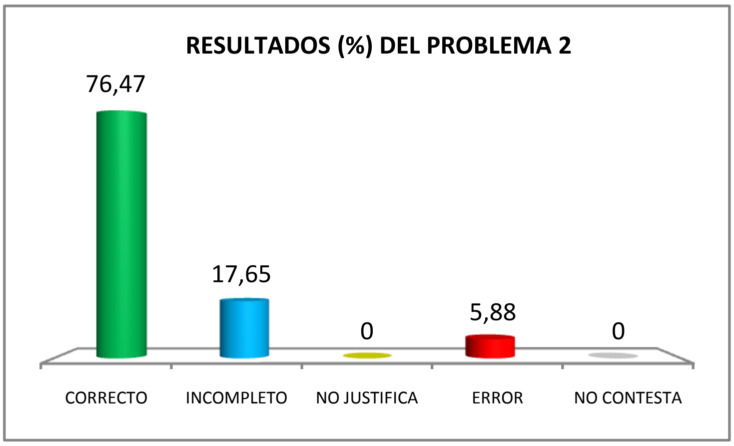
La segunda categoría (INCOMPLETO) correspondía a los estudiantes que aplicaron algunos de los conceptos o propiedades, pero no dieron la respuesta correcta o quedó incompleta por la falta de aplicación de algún concepto, por cálculos erróneos o porque no justificaron de acuerdo a los conceptos o propiedades que se estaban evaluando en el problema (se podría decir que son estudiantes que tienen fallas en algunos conceptos o propiedades, cometen errores de cálculo o no justifican adecuadamente).

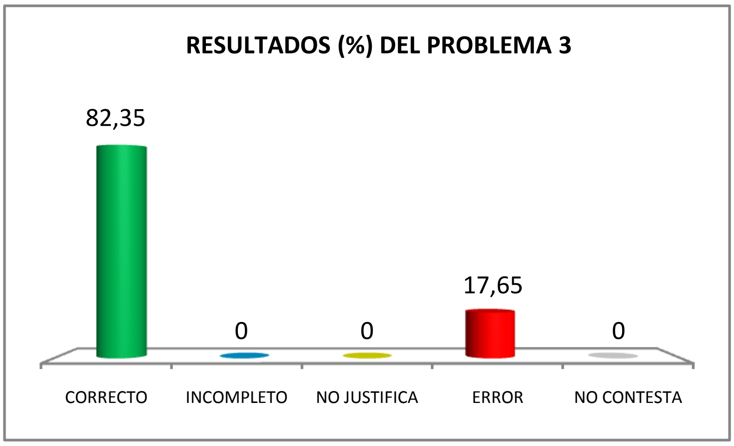
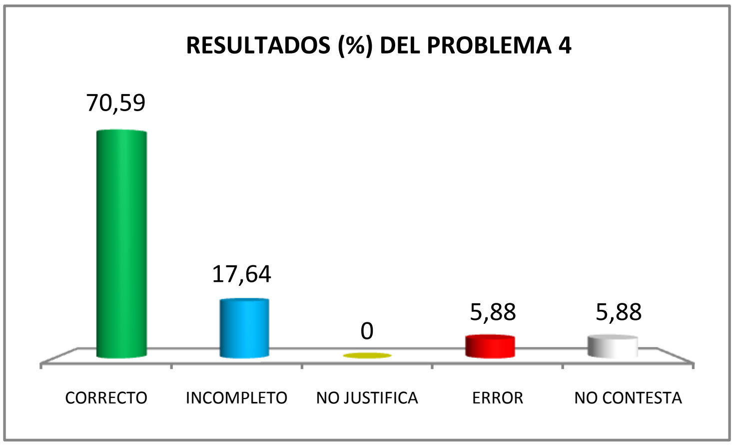
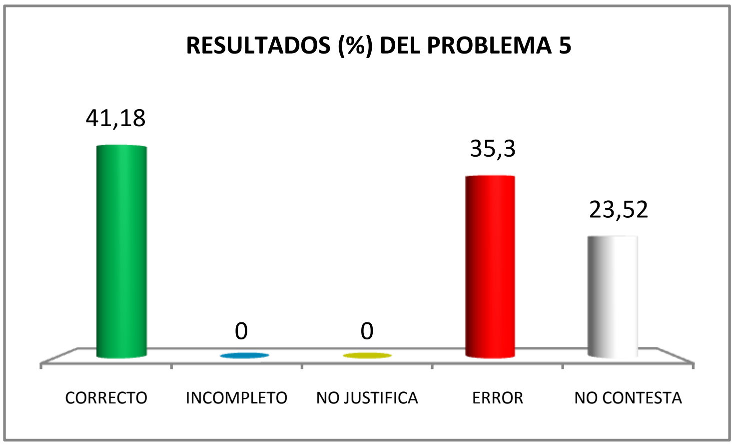
En la tercera categoría (SIN JUSTIFICAR) se clasificaron los estudiantes que contestaron correctamente el problema, aplicando los conceptos o propiedades adecuados, pero no justificaron.

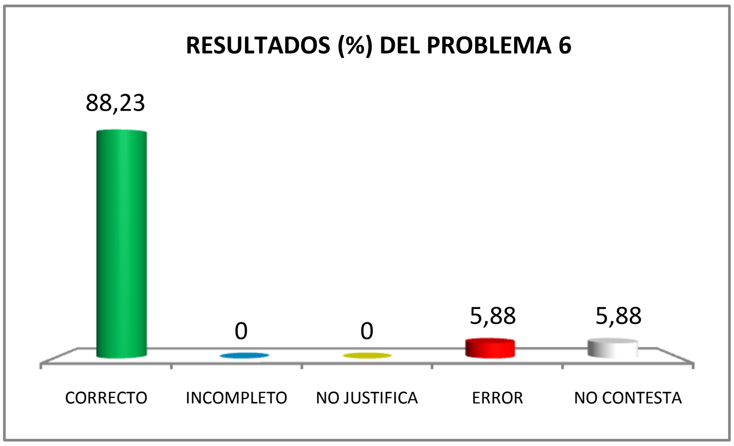
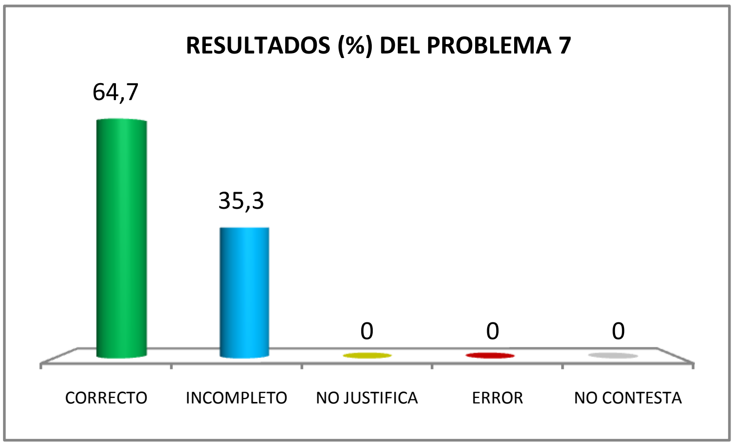
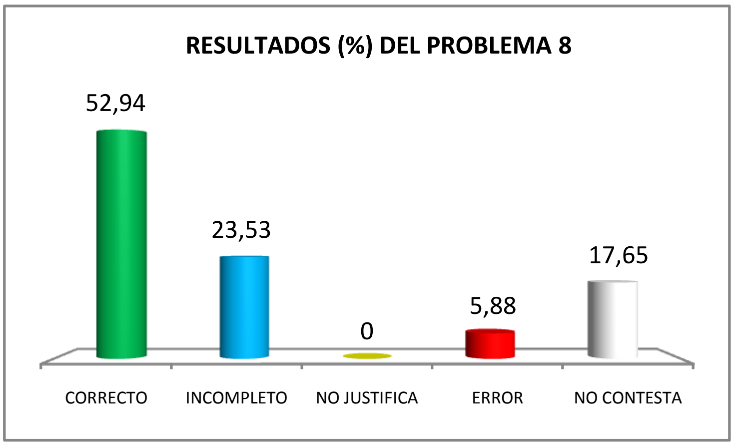
La cuarta categoría (ERROR) correspondía a los estudiantes que dan respuesta erróneas basadas en observaciones, predicciones o aplicación incorrecta de conceptos o propiedades, es decir los estudiantes que tienen dificultad para aplicar los conceptos o propiedades requeridas para la solución del problema.

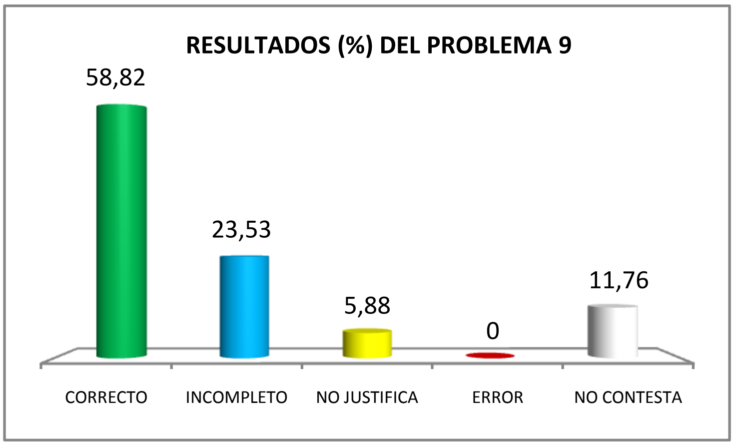
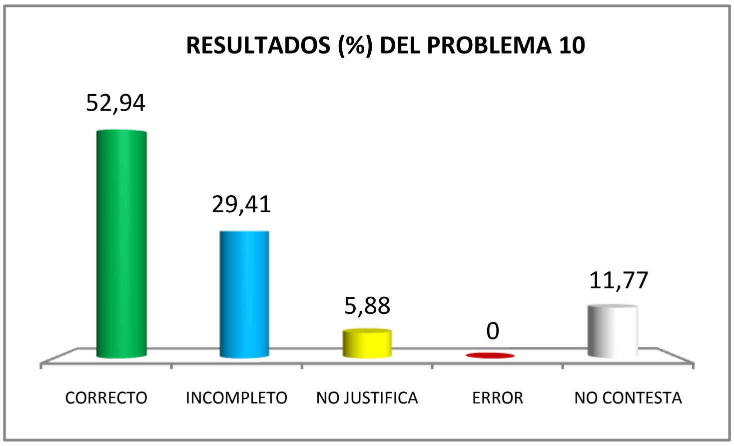
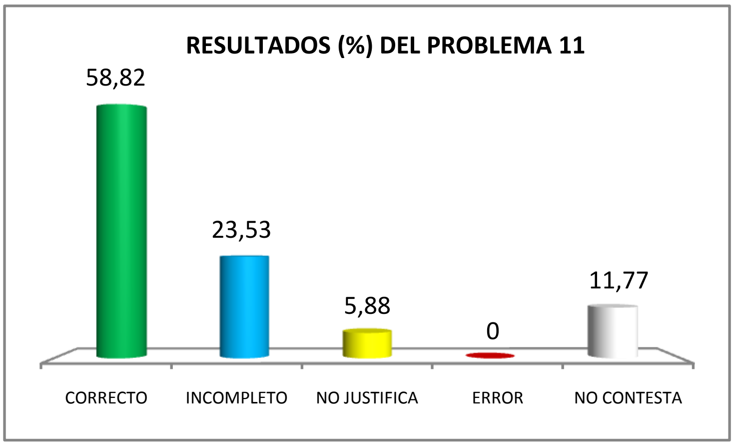
La quinta categoría (NO CONTESTA) correspondía a los estudiantes que no respondieron al problema, que escribieron que no sabían qué hacer, que escribieron algún dato o respuesta incoherente o sin ninguna explicación.

En la siguiente tabla (tabla 1) se muestra los conceptos evaluados en cada problema y los resultados cuantitativos obtenidos, indicando el porcentaje de cada una de las categorías mencionadas.

CONTENIDOS EVALUADOS	RESULTADOS
PROBLEMA 1 • Relaciones de ángulos entre paralelas y secantes. • Ángulos suplementarios. • Ángulos alternos interiores, ángulos exteriores, ángulos correspondientes.	
PROBLEMA 2 • Reconocimiento de ángulos por su nombre y en la figura. • Ángulos complementarios. • Ángulos opuestos por el vér-tice.	

CONTENIDOS EVALUADOS	RESULTADOS
PROBLEMA 3 • Reconocimiento de ángulos por su nombre y en la figura. • Ángulos complementarios. • Ángulos complementarios. • Ángulos opuestos por el vértice	
PROBLEMA 4 • Desigualdad triangular. • Construcción de triángulos.	
PROBLEMA 5 • Propiedades de los triángulos rectángulos y de los triángulos isósceles. • Bisectriz de un ángulo. • Suma de los ángulos interiores de un triángulo, suma y resta de ángulos.	

<table>
<tr><th>CONTENIDOS EVALUADOS</th><th>RESULTADOS</th></tr>
<tr><td><u>PROBLEMA 6</u>
Teorema de Tales.
Propiedades de la proporcionalidad geométrica.
Semejanza de triángulos.</td><td>
</td></tr>
<tr><td><u>PROBLEMA 7</u>
Teorema de Pitágoras.
Propiedades de los triángulos semejantes.
Proporcionalidad geométrica.</td><td>
</td></tr>
<tr><td><u>PROBLEMA 8</u>
Teorema de Pitágoras.
Propiedades de los triángulos semejantes.
Proporcionalidad geométrica.</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>CONTENIDOS EVALUADOS</th><th>RESULTADOS</th></tr>
<tr><td><u>PROBLEMA 9</u>
Congruencia de triángulos.
Teoremas de triángulos congruentes.</td><td>
</td></tr>
<tr><td><u>PROBLEMA 10</u>
Semejanza de triángulos.
Teoremas de triángulos semejantes.</td><td>
</td></tr>
<tr><td><u>PROBLEMA 11</u>
Congruencia de triángulos.
Semejanza de triángulos.
Teoremas de triángulos congruentes y de triángulos semejantes.
Plano cartesiano, coordenadas, propiedades de la circunferencia.</td><td>
</td></tr>
</table>

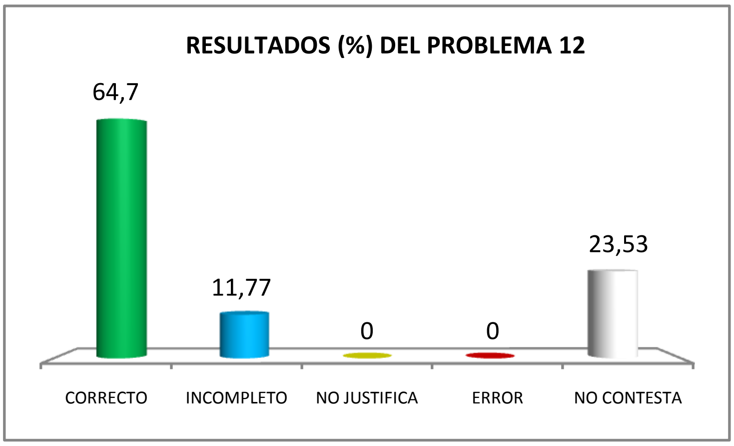
CONTENIDOS EVALUADOS	RESULTADOS
PROBLEMA 12 • Congruencia de triángulos. • Semejanza de triángulos. • Teoremas de triángulos congruentes y de triángulos semejantes. • Plano cartesiano, coordenadas, propiedades de la circunferencia.	

Tabla 1. Resultados test de conocimientos previos

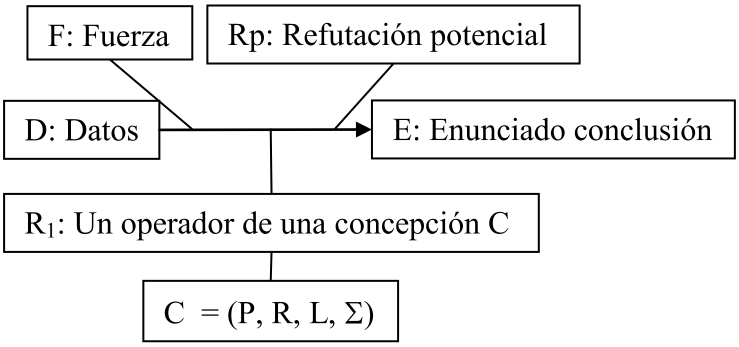
Los resultados obtenidos nos permiten concluir que la mayoría de estudiantes de esta experimentación manejan los conceptos previos necesarios para el inicio del trabajo con la trigonometría, esto se puede explicar por el hecho de que la experimentación se realizó en una de las instituciones y con una profesora que ya había participado en el trabajo de investigación de DEA, que en dicha institución se dedica una sesión de una hora semanal a la enseñanza de la geometría, y que la experimentación se inició en el segundo semestre del año, cuando ya los estudiantes habían visto la parte correspondiente a geometría analítica. La mayoría de justificaciones dada por los estudiantes se refería a teoremas geométricos de los contenidos evaluados, lo que da cuenta del trabajo que se viene realizando en geometría.

Respecto al problema número 5, que fue el que presentó resultados correctos por debajo del 50%, se puede explicar por el hecho de que algunos estudiantes asumieron de entrada que el triangulo era rectángulo, lo cual era una de las intenciones del problema, esto nos sirvió para recalcar que las justificaciones o explicaciones en geometría, deben estar basadas en propiedades o conceptos teóricos y no en lo perceptivo. Otro error que cometieron algunos estudiantes, consistió en asumir que el triangulo ABC estaba inscrito en una semicircunferencia, por ello el triangulo es rectángulo; esta justificación, aunque es errónea nos permite concluir que los estudiantes ya manejan ciertos teoremas básicos de la geometría.

6.2 Resumen del modelo de análisis de la unidad cognitiva

Para facilitar la lectura del capítulo y la comprensión del análisis realizado, empezamos recordando el modelo de análisis de Pedemonte (modelo cK¢ integrado al modelo de Toulmin

(Esquema 1)). El modelo cK¢ nos sirve para el análisis referencial y el modelo de Toulmin nos sirve para el análisis estructural.



Esquema 1: Modelo de Pedemonte para el análisis de la unidad cognitiva

La concepción movilizada durante la construcción de un argumento actúa como soporte del argumento. La **concepción (C)** se caracteriza por la cuádrupla compuesta de:

P: Conjunto de problemas: corresponden a problemas de planteamiento de conjeturas y construcción de demostraciones de propiedades de las razones trigonométricas e identidades trigonométricas.

R: Conjunto de operadores: actúan como los permisos de inferir (una regla, un principio general que sirve de fundamento a la inferencia). Legitiman el paso entre datos y conclusión.

L: Sistema de representación: permite la expresión de los problemas y de los operadores.

Σ: Estructura de control: da y organiza las funciones de decisión, de elección, de juicio de validez y de adecuación de la acción

Para el análisis del sistema de referencia, propusimos la tabla 2 presentada en el capítulo 5 (pág. 105). En la siguiente tabla (tabla 2) presentamos, de manera resumida y codificada, los tipos detectados en cada uno de los componentes del sistema de referencia. Para cada componente (datos, operadores, sistema de representación controles y marcos) se han detectado los tipos señalados y codificados en la columna de la derecha. Estos tipos se irán caracterizando y comprendiendo en el avance del análisis realizado, especialmente en los esquemas globales propuestos para representar la estructura argumentativa general del proceso de argumentación y de demostración y en las diferentes tablas de síntesis y comparación de los componentes del modelo cK¢ de cada uno de los procesos.

Tipos de datos	**an:** analítico. **dc:** dibujo de Cabri. **defpc:** definición en el plano cartesiano. **g:** geométrico. **gproc:** generalización del proceso. **itrig:** identidad trigonométrica.	**leysig:** ley de los signos. **n:** numérico. **p:** perceptivo. **pig:** propiedad de la igualdad. **pm:** propiedad matemática. **proc:** proceso.	**rang:** relación entre ángulos**.** **relana:** relación analítica. **relgeo:** relación geométrica. **Rp:** refutación potencial. **tp:** Teorema de Pitágoras.
Tipos de operadores	**dc:** dibujo de Cabri. **defpc:** definición en el plano cartesiano. **deftr:** definición triángulo rectángulo. **demal:** demostración algebraica. **demg:** demostración geométrica. **ejn**: ejemplo numérico. **genen:** generalización del enunciado. **gproc:** generalización del proceso. **itrig:** identidad trigonométrica.	**leysig:** ley de los signos. **pan:** propiedad analítica. **pg:** propiedad geométrica. **pia:** propiedad de inversos aditivos. **pig:** propiedad de la igualdad. **pr:** propiedad de las razones. **pn:** propiedad numérica. **ptrans:** propiedad transitiva. **ptrig**: propiedad trigonométrica. **rang:** relación entre ángulos.	**relmf:** relación matemática falsa. **relpc:** relación en el plano cartesiano. **relt:** relación entre los lados del triángulo. **reltrig:** relación trigonométrica. **repgcos:** representación geométrica de coseno. **rsigpc**: relación de signos en el plano cartesiano. **rtrigf:** propiedad trigonométrica falsa. **teo:** teorema. **tp:** Teorema de Pitágoras.
Sistemas de representación	**al:** algebraico. **an:** analítico. **dc:** dibujo de Cabri.	**dg:** dibujo geométrico. **fdc:** figura dinámica de Cabri.	**gestos.** **ln:** lenguaje natural.
Tipos de control	**arr:** arrastre en Cabri. **dg:** dibujo geométrico. **ej:** ejemplo.	**n:** numérico. **p:** perceptivo.	**p-n:** perceptivo numérico. **t:** teórico.
Tipos de marcos	**al:** algebraico. **an:** analítico. **g:** geométrico.	**n:** numérico. **p:** perceptivo. **trig:** trigonométrico.	**trigpc:** trigonometría en el plano cartesiano. **tritr:** trigonometría del triángulo rectángulo.

Tabla 2: Tipos detectados en cada uno de los componentes del sistema de referencia

De manera similar en la tabla 3 se resumen los diferentes tipos detectados en cada uno de los componentes del análisis estructural. Para cada componente (formas de argumentación, estructura de argumentación y tipos de demostración) se han detectado los tipos señalados y codificados en la columna de la derecha.

Formas de argumentación	**c(a):** constructiva por analogía.	**c:** constructiva.	**e:** estructurante.
Estructuras de argumentación	**ded.:** deductiva.	**ind.:** inductiva.	
Tipos de demostración	**EII:** Empirismo Ingenuo Inductivo.	**EGI:** Ejemplo Genérico Intelectual.	**EMT:** Experimento Mental Transformativo.
	EGA: Ejemplo Genérico Analítico.	**EME:** Experimento Mental Estructurado.	**DFE:** Deductiva Formal Estructurada.

Tabla 3: Tipos detectados en cada uno de los componentes del análisis estructural

La **argumentación constructiva** contribuye a la construcción de una conjetura, así es que precede al enunciado.

La **argumentación estructurante** justifica una conjetura, previamente construida como un hecho, y así es que ella viene después.

Empirismo ingenuo inductivo (EII): Cuando en la construcción de la demostración se usan solamente ejemplos escogidos sin ningún criterio y las argumentaciones se basan en elementos visuales o táctiles (perceptivo) o elementos matemáticos o relaciones detectados en el ejemplo (inductivo).

Ejemplo genérico analítico (EGA): Cuando en la demostración se usa un ejemplo representante de una clase y las justificaciones están basadas en propiedades y relaciones generales descubiertas en el ejemplo.

Ejemplo genérico intelectual (EGI): Cuando para la conjetura o demostración se usa un ejemplo representante de una clase y los argumentos están basados en propiedades matemáticas aceptadas, pero no son resultado de observaciones o propiedades encontradas en el ejemplo, sino que al trabajar sobre él se recuerdan.

Experimento mental estructural (EME): Cuando las demostraciones están basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, de los axiomas, las definiciones o teoremas aceptados, y, si se usan ejemplos, son para ayudar a organizar o entender los pasos de las deducciones.

Experimento mental transformativo (EMT): Cuando las demostraciones se basan en operaciones mentales que transforman el problema inicial en otro equivalente. Los ejemplos ayudan a prever qué transformaciones (imágenes mentales espaciales, manipulaciones simbólicas o construcciones de objetos) son convenientes para la justificación.

Deductiva formal estructural (DFE): Cuando las demostraciones están basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, de los axiomas, las definiciones o teoremas aceptados.

En la tabla 4 se resumen las diferentes posibilidades de unidad/ruptura cognitiva. Recordemos que para que exista unidad cognitiva, debe haber unidad referencial y unidad estructural entre el proceso de argumentación (A) y de demostración (D). Si existe ruptura referencial y/o estructural, hay ruptura cognitiva. En caso de que haya ruptura referencial, de todos modos realizamos el análisis estructural para determinar el tipo de demostración construido y poder detectar las dificultades y posibilidades de construcción de demostraciones más cercanas a las deductivas.

UNIDAD/RUPTURA	**UC:** Unidad Cognitiva. **RC:** Ruptura Cognitiva.	**UR:** Unidad Referencial. **RR:** Ruptura Referencial.	**UE:** Unidad Estructural. **RE:** Ruptura Estructural.

Tabla 4: Tipo de unidad/ruptura detectados en el análisis del constructo unidad cognitiva

Estos tipos y códigos se irán presentando en el transcurso del análisis (secciones 6.3 a 6.7). En la sección 6.8 nos servirán para realizar una mirada global a la evolución de cada uno de los grupos analizados y poder informar sobre los resultados de aprendizaje de un experimento de enseñanza como éste.

A continuación presentamos el análisis realizado, enmarcado dentro de las cinco categorías de unidad/ruptura propuestas como un aporte a la comprensión del estudio del proceso de demostración.

6.3 Unidad cognitiva inductiva

De acuerdo a la caracterización de demostración dada por nosotros y a los tipos de demostración planteados, la unidad cognitiva no siempre favorece la construcción de demostraciones deductivas, como son los casos de la demostración empírica ingenua (actividades 1.2.2, 1.2.3) y la demostración genérica analítica (actividades 3.6.7, 3.6.8) realizadas por el grupo G2A.

6.3.1 Caso 1: Actividades 1.2.2, 1.2.3 – Grupo G2A

1.2.2 ***Conjeturando***

¿Qué sucede con los valores de las razones cuando varía el ángulo *A* entre 0º y 90º? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

1.2.3 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 1.2.2.

PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

[1] Prof.: *¿Qué pasa cuando varía el ángulo A?*

[2] Cata: *Todos cambian, no…, ese no cambia* [se refiere al lado *AC* (Fig. 1)].

[3] Mabe: *¿Cuál era la que estaba moviendo? ¿Ésta? ¿la m?*

[4] Inv: *La m*.

[5] Cata: *Entonces dígame una cosa, ¿Cómo varían las razones?, a medida que va agrandándose el ángulo, las razones…, por ejemplo, las razones de…, de CA y BC* [señala *CA*/*BC* que tienen etiquetada en el archivo ACT.1.2.1 (Fig. 1)] *van disminuyendo, ¿Cuál otra va disminuyendo? ¿La otra también va disminuyendo?, sigue subiendo, sigue subiendo*.

[6] Cata*: Con calma, primero AB y BC, AB y BC*.

[7] Mabe: *¿En dónde están AB y BC?*

[8] Cata: *Vaya subiendo.*

[9] Mabe: *Cuando sube, disminuye.*

[10] Cata: *O sea, cuando aumenta el ángulo se disminuye* [lo escribe en la hoja de trabajo].

[11] G2A: *Listo, ahora BC, CA* [señalan la razón *BC*/*CA*], *súbela*.

[12] Mabe: *Esa si aumenta*.

[13] Cata: *Esa aumenta, listo* [lo escribe en la hoja], *listo, BC y AB* [se refiere a la razón *BC*/*AB*], *la primera que está completa, súbela, arriba, súbela*.

[14] Mabe: *Aumenta*.

[15] Cata: *Aumenta también* [lo afirman con una pequeña exploración y lo escriben en la hoja], *ahora BC y CA* [se refieren a la razón *BC*/*CA*].

[16] Mabe: *Ya, esa ya*

[17] Cata: *No*.

[18] Mabe: *Esa también aumenta*.

[19] Cata: *¿Aumenta y aumenta?*

[20] Mabe: *Si, y ¿AB…?*

[21] Cata: *Ajá…, disminuyen los dos, son tres que aumentan y tres que disminuyen.*

[22] Mabe: *La última también disminuye* [se refiere a *CA*/*AB*].

[23] Cata: *Ajá…, entonces ahora toca sacar…, toca decir por qué, entonces sería…, supongamos.*

[24] Mabe: *Poner, por ejemplo, los ángulos…*

[25] Cata: *Poner BC… ¿Cuál es la hipotenusa?, poner AB y…, AB…, no se por qué. ¿Ponemos solamente que unas aumentan y otras disminuyen?*

[26] G2A: *O sea que a medida que el ángulo aumenta, las razones… bueno ahí las nombramos, AB, BC* [se refieren a *AB*/*BC*]…, *CA*, *AB* [*CA*/*AB*] y *CA*, *BC* [*CA*/*BC*] *disminuyen*.

D₁: Si A varía $\Rightarrow$ AB, BC varían y AC constante [1], [2]

E₁: Si A aumenta $\Rightarrow \frac{CA}{BC}, \frac{AB}{BC}, \frac{CA}{AB}$ disminuyen; $\frac{BC}{CA}, \frac{AB}{CA}, \frac{BC}{AB}$ aumentan [5] a [26]

R₁: Se ve en el archivo

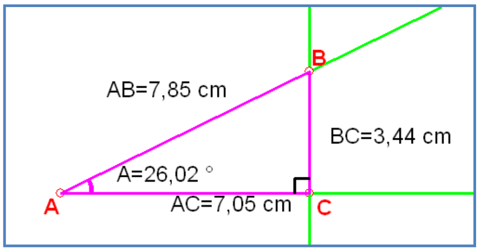


Figura 1: Archivo ACT.1.2.1

Marco perceptivo – numérico (archivo 1.2.1)

[27] Cata: *O sea varían todos los lados, varían dos lados, o sea, la hipotenusa y un cateto varían y el otra mantiene su longitud, o sea, movemos…*

[28] Mabe: *Exacto, al mover la hipotenusa AB y BC varían, el ángulo A varía.*

[29] Cata: *O sea, al variar el ángulo A, la hipotenusa AB y el cateto BC varían en su longitud, pero CA se mantiene, entonces…*

[30] *G2A: Listo, ahora digamos, a medida que varía el ángulo A, la hipotenusa (AB) y el cateto (BC) varían de tamaño, pero el cateto AC mantiene su longitud.*

[31] *Cata: ¿Toca poner que a pesar de que un lado se mantiene, como la razones están compuestas de dos lados siempre van a cambiar? ¿si? O sea pongamos de que a pesar…*

[32] *G2A: A pesar de que el lado AC no varía, las razones al estar compuestas de dos lados siempre van a variar. Las razones que aumentan son:* $\frac{BC}{CA}, \frac{AB}{CA}, \frac{BC}{AB}$. *Las razones que disminuyen al aumentar el ángulo A son:* $\frac{CA}{BC}, \frac{AB}{BC}, \frac{CA}{AB}$.

D₁: Si A varía $\Rightarrow$ AB, BC varían y AC constante [27], [30]

E₁: Si A aumenta $\Rightarrow \frac{CA}{BC}, \frac{AB}{BC}, \frac{CA}{AB}$ disminuyen; $\frac{BC}{CA}, \frac{AB}{CA}, \frac{BC}{AB}$ aumentan [32]

R₂: Si uno de los dos lados de la razón varía, entonces la razón varía [31], [32]

Marco perceptivo – numérico

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

A través de la exploración en el archivo 1.2.1 de Cabri, el grupo "ve" los variantes e invariantes de la construcción y ve las razones que aumentan o disminuyen cuando el ángulo *A* aumenta. El enunciado E_1, lo van planteando parcialmente, a medida que ven las razones que van aumentando o disminuyendo y finalmente sintetizan el enunciado [32].

Desde el numeral [24], el grupo intenta argumentar sobre la conjetura planteada; a través de la exploración y del arrastre, empiezan a darse cuenta de las propiedades del cociente entre dos números reales y usan esto como operador (R_2) para justificar las relaciones encontradas.

El sistema de representación cambia del descubrimiento de variantes, invariantes y relaciones en el diagrama dinámico (L_1) al uso del lenguaje natural (L_2).

La estructura de control es el arrastre en Cabri (Σ_1).

La forma de argumentación inicialmente es constructiva. Los variantes, invariantes y relaciones visualizadas en el archivo ayudan previamente al planteamiento de la conjetura, pero después hay una forma de razonamiento estruturante que intenta justificar la conjetura.

La estructura de la conjetura es inductiva por generalización de los enunciados. Los casos numéricos visualizados en Cabri, conllevan al planteamiento de relaciones, que finalmente completan el enunciado E_1. El operador R_2 es una propiedad matemática general, pero está soportado por lo visualizado en el archivo 1.2.1, por ello no lo consideramos como un paso deductivo.

PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

[33] Cata: *Ruby* [profesora], *ven un segundo, bueno, ahora demostrando. Creo que ya explicamos el por qué, mira, a medida que varía el ángulo A, la hipotenusa AB…* [lee lo escrito en la hoja].

[34] Prof.*: ¿Ese es el por qué? La pregunta es ¿Qué sucede con los valores de las razones cuando varía el ángulo A entre 0º y 90º? ¿Qué respondieron a eso?*

[35] G2A*: ¿Que varían?*

[36] Prof.: *Varían, respuesta aquí, escribe en tu hoja de trabajo una conjetura* [señala la hoja]*, entonces, ¿Cómo quedaría la conjetura?, cuando el ángulo A…*

[37] Cata*: Cuando el ángulo A varía, las razones que aumentan, al aumentar el ángulo…, es que eso es lo que te digo.*

[38] Prof.*: Esa es la explicación, antes de la explicación la conjetura.*

[39] Cata*: Una conjetura es que las razones varían dependiendo, unas aumentan y otras disminuyen.*

[40] Prof.*: Escríbela formalmente, cuando…* [mueve la semirrecta AB] *¿Qué ven?*

[41] Cata*: Cuando el ángulo A…*

[42] Prof.*: ¿Qué pasa?*

[43] G2A*: Aumenta o disminuye, las razones aumentan o disminuyen, "cuando el ángulo A aumenta o disminuye, la medida de los lados aumentan o disminuyen, la AC se mantiene, por lo tanto las razones aumentan o disminuyen"* [escriben en la hoja].

[44] Cata*: Pero no se cómo es que se demuestra eso, o sea, ¿Cómo demostramos que cambian?, porque cambian y ya, ¿Si me entiendes?, o sea, eso es lo no entiendo, ¿Cómo?*

[45] Prof.*: Es normal que todavía no diferenciemos lo que es la conjetura y la demostración, eso lo iremos aprendiendo en el camino, o sea ¿Para ti con esto ya está demostrado?*

[46] Cata*: O sea, es que igual no se demostrarla, o sea lo que pasa es que…, listo, varía, entonces al variar…, ya dijimos que al variar hay un lado que se mantiene y dos lados que cambian, entonces, al cambiar los otros dos lados, siempre en todas las razones va a haber un lado, mínimo un lado que varía, hay veces que están los dos variando, entonces por eso siempre van a variar las medidas de los lados dependiendo del…, del lado.*

[47] Prof.*: Por lo tanto varían las razones.*

[48] Cata*: Exacto.*

[49] Prof. *Ya, listo.*

[50] Cata*: ¿Ese es el por qué?*

[51] Mabe*: Terminamos la conjetura* [la escribe en su hoja].

[52] G2A*: Leen en voz alta la conjetura.*

[53] Mabe*: Ahora, 1.2.3, entonces sería.*

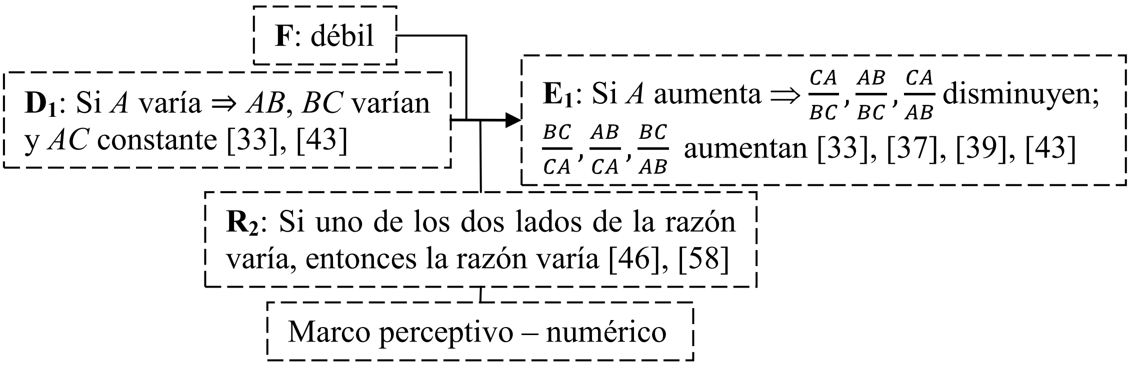
[54] Inv.*: ¿En dónde van?*

[55] Mabe*: Bien, pero no se la diferencia entre conjetura y explicación.*

[56] Inv.*: Poco a poco van aprendiendo.*

[57] Cata*: Creo que voy a poner lo mismo en…, lo que dije a Ruby, es lo mismo que habíamos puesto aquí.*

[58] G2A*:* [Escriben en la hoja] *Al variar el ángulo A, varían dos de los lados del triángulo, la hipotenusa y el lado opuesto, al estar las razones compuestas por las longitudes de los lados, mínimo uno de los valores está variando, por lo tanto las razones siempre van a variar aumentando o disminuyendo.*



ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

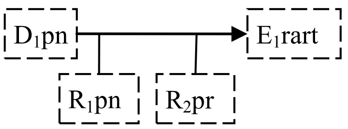
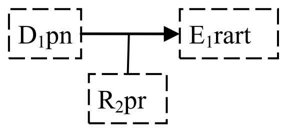
El grupo retoma lo realizado en la fase de conjetura para preguntarle a la profesora si lo que han planteado es la conjetura o la demostración. Piensan que ya demostraron lo que plantearon, pero no están convencidas matemáticamente de por qué al variar el ángulo cambian los valores de los lados y por lo tanto las razones [43], [44]. Consideran que tienen que explicar por qué varían los lados, pero no tienen argumentos matemáticos para ello.

En el intercambio con la profesora y el investigador, se resignan a pensar que ya plantearon y demostraron la conjetura, pero no están muy convencidas, por lo que se deduce que el indicador de fuerza de la demostración es débil.

Los operadores, el sistema de representación y la estructura de control son los mismos de la fase de conjetura, puesto que el grupo se limitó a discutir y repetir lo hecho en esa fase, dejando de lado el diagrama dinámico.

La estructura de la demostración sigue siendo inductiva y el tipo de demostración es empírico ingenuo inductivo (EII): Generalizan las relaciones y propiedades planteadas, a partir de los datos numéricos visualizados en Cabri.

ANÁLISIS DE LA UNIDAD COGNITIVA

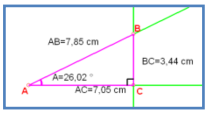
Esquema global de la argumentación	**Esquema global de la demostración**
	

pr: propiedad de las razones.

pn: perceptivo – numérico.

rart: relación entre el ángulo y las razones trigonométricas.

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

ARGUMENTACIÓN			DEMOSTRACIÓN		
E_1: Si A aumenta $\Rightarrow \frac{CA}{BC}, \frac{AB}{BC}, \frac{CA}{AB}$ disminuyen; $\frac{BC}{CA}, \frac{AB}{CA}, \frac{BC}{AB}$ aumentan			**E_1**: Si A aumenta $\Rightarrow \frac{CA}{BC}, \frac{AB}{BC}, \frac{CA}{AB}$ disminuyen; $\frac{BC}{CA}, \frac{AB}{CA}, \frac{BC}{AB}$ aumentan		
CONCEPCIÓN			CONCEPCIÓN		
OPERADORES **R_1**: (Figura 1)  **R_2**: Si uno de los dos lados de la razón varía, entonces la razón varía	**SIST. DE REPR.** **L_1**: Diagrama dinámico de Cabri $\rightarrow$ **L_2**: Lenguaje natural.	**E. DE CONTROL** Σ_1: Arrastre en Cabri.	**OPERADORES** **R_2**: Si uno de los dos lados de la razón varía, entonces la razón varía	**SIST. DE REPR** **L_2**: Lenguaje natural.	**E. DE CONTROL** Σ_1: Arrastre en Cabri.
Marco perceptivo – numérico			Marco perceptivo – numérico		

CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA

Análisis de la continuidad estructural

ARGUMENTACIÓN	**DEMOSTRACIÓN**
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva – Estructurante.	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización de los datos	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Inductiva.
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN **EII**: Generalización a partir de los datos numéricos visualizados en Cabri
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

La unidad cognitiva se da por el hecho de que el grupo, prácticamente en la fase de conjetura construyó la demostración. Este ejemplo nos refuerza la idea planteada en cuanto al constructo de unidad cognitiva, en el sentido de que, en el proceso de construcción de la demostración, los estudiantes retoman los argumentos que usaron en el planteamiento de la conjetura. En este caso, los ejemplos juegan un doble papel, como generadores de la conjetura y, después, como demostración de la veracidad de la conjetura (es cierta porque se ve en esos ejemplos).

Los estudiantes están mirando la razón como un cociente (operador numérico); ante la necesidad de justificar por qué algunas razones aumentan y otras disminuyen, usan propiedades del cociente entre dos números reales, pero apoyados en los datos numéricos observados en el diagrama dinámico, es decir, no se logra un control teórico, que permita el cambio de una concepción perceptiva - numérica del proceso de argumentación a un marco algebraico o analítico en el proceso de demostración. Dada esta continuidad del sistema de referencia, no es posible la ruptura estructural. En este caso, con algunas refutaciones potenciales del profesor, tal vez hubiera sido posible que los estudiantes pasaran de usar argumentos basados en la visualización numérica a usar propiedades matemáticas, analizando de manera general que las razones cumplen las propiedades del cociente entre números reales. Pensamos que en este ejemplo hay más posibilidades de una ruptura estructural por el hecho de que, la forma de argumentación cambia de una argumentación constructiva a una argumentación estructurante y que las generalizaciones realizadas sobre los datos y relaciones numéricas pueden ser expresadas en el marco algebraico o analítico.

6.3.2 Caso 2: Actividades 3.6.7, 3.6.8 - Grupo G2A

3.6.7 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre $cos(180 + \alpha)$ y $\cos(\alpha)$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

3.6.8 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 3.6.7.

PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

[1] Mabe: *Yo creo que uno puede hablar de eso en el tercero y en el primero, o sea, cuando el ángulo θ está en el tercer cuadrante, porque ya cuando está en otro cuadrante θ no es $180 + \alpha$.*

[2] Inv.: *Necesariamente θ debe estar en el tercer cuadrante*.

[3] Inv.: *¿Qué relación encontraron?*

[4] Mabe: *Que* $cos(180 + \alpha) = -cos\ (\alpha)$

[5] Inv.: *¿Por qué?*

[6] Mabe: *Porque el ángulo α es el ángulo de referencia de θ.*

[7] Mabe: *Entonces como el coseno es positivo solo en el primero y en el último, entonces tienen signo contrario.*

[8] Inv.: *¿Los ángulo α son congruentes?*

[9] Mabe: *Sí, porque son opuestos por el vértice.*

D$_1$:

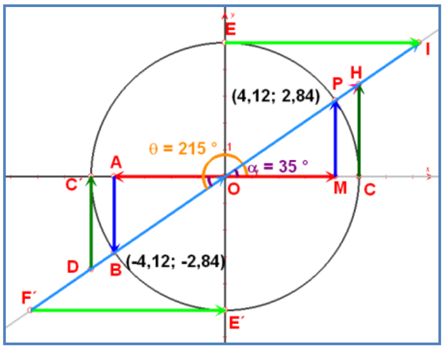


Figura 2: Archivo 3.4.1

D$_2$: Es necesario que θ esté el cuadrante III [1]

→ **E**$_1$: $\cos(180+\alpha) = -\cos(\alpha)$[4]

R$_1$: α es el ángulo de referencia de θ [6]
R$_2$: $\cos(\alpha)$ y $\cos(180-\alpha)$ tienen signos contrarios [7]
R$_3$: $\angle MOP = \angle AOB$ por opuestos por el vértice [9]

Marco perceptivo

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

Podemos considerar que el grupo “ve” la relación a través de los vectores *OM* y *OA* (Fig. 2), e intenta buscar argumentos en el diagrama dinámico para justificar el enunciado.

Los operadores R_1 a R_3, se refieren a relaciones válidas entre los ángulos y las razones trigonométricas percibidas en el diagrama dinámico, que no justifican matemáticamente la relación planteada.

El sistema de representación va del uso del diagrama dinámico (L_1) para visualizar las relaciones, al uso del lenguaje natural (L_2) para expresar verbalmente lo que observan en el diagrama.

El control perceptivo (Σ_1) es ejercido por las continuas visualizaciones de las relaciones en el diagrama dinámico.

La forma de argumentación es estructurante y la estructura de la conjetura es inductiva.

PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

[10] Inv.: *¿Para que la relación quede matemáticamente demostrada, qué hay que hacer?*

[11] Mabe: *¿Si uno tiene que los ángulos son opuestos por el vértice, tiene que demostrar que los triángulos son congruentes?*

[12] Inv.: *Sí, ¿Qué es coseno?*

[13] Mabe: *Esto* [señala el *vector* rojo en el primer cuadrante (Fig. 3)]

[14] Inv.: *Ahí la estamos visualizando, pero, ¿cuál es la definición?*

[15] Cata: *Adyacente sobre hipotenusa.*

[16] Inv.: *Adyacente sobre hipotenusa o x sobre r, ¿cierto?, entonces, sí es necesario demostrar que los x son iguales.*

[17] Mabe: *Es que los ángulos son iguales, por opuestos, y los radios son iguales, ¿qué más puedo decir sin utilizar medidas? Porque si no cogería las coordenadas y ya.*

[18] Inv.: *¿Cómo es el otro ángulo?*

[19] Cata: *Recto.*

[20] Mabe: *Uno recto y el otro ya es igual, entonces, ya con eso son iguales.*

[21] Inv.: *Con eso, los dos triángulos son congruentes. Entonces, ¿si los dos triángulos son congruentes, qué pasa con la distancia en x, o con el adyacente?*

[22] G2A: *Es la misma.*

[23] Mabe: *¿Entonces, en la conjetura solo que son opuestos, y lo otro para la demostración?*

[24] G2A: [Escriben en la hoja de trabajo: "θ está ubicado en tercer cuadrante, α es un ángulo agudo en el primer cuadrante. Como el coseno es positivo en el I y IV cuadrante, el $\cos(180+\alpha)$ tiene el mismo valor absoluto que su ángulo de referencia α, pero con signo contrario (–)"]

D₁:

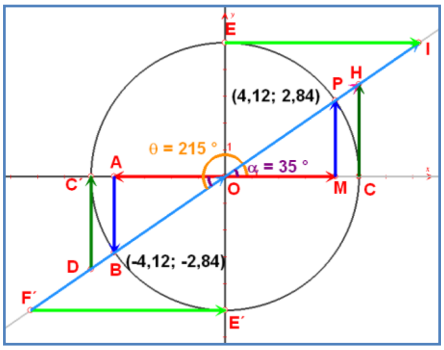


Figura 3: Archivo 3.4.1

D₂: Es necesario que θ esté el cuadrante III [1]

D₃: coseno es el vector rojo ($\overrightarrow{OM}$) [13]

D₄: $\cos(\alpha) = \frac{adyacente}{hipotenusa}$ [15]

D₅: E₁₁ $\cos(\alpha) = \frac{x}{r}$ [16]

E₁: $\cos(180+\alpha) = -\cos(\alpha)$[4]

R₄: $\angle MOP = \angle AOB$ por opuestos por el vértice [17]

R₅: $OP = OB$ por ser radios [17]

R₆: $\angle OMP = \angle OAB$ por ser rectos [20]

R₇: $R_3 \wedge R_6 \wedge R_7 \Rightarrow \Delta MOP = \Delta AOB \Rightarrow \overline{OM} = \overline{OA}$ [20] – [22]

R₈: $\cos(\alpha)$ y $\cos(180+\alpha)$ tienen igual valor absoluto, pero signos contrarios [24]

Marco perceptivo

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

El grupo sigue en el terreno perceptivo, intentando encontrar propiedades en el diagrama dinámico para justificar la relación, pero no recurre a la definición de coseno en el plano, a pesar del dato (D_5) suministrado por el investigador. La atención la centran en justificar la congruencia de los triángulos. Al final justifican en el lenguaje natural la relación E_1.

Los operadores siguen siendo relaciones visualizadas en el diagrama dinámico, apuntado a demostrar la congruencia de los triángulos *AOB* y *MOP*.

El sistema de representación sigue siendo el diagrama de Cabri y el lenguaje natural para expresar lo que ven.

El control sigue siendo el diagrama dinámico.

El tipo de demostración es un ejemplo genérico analítico, basado en la generalización de las propiedades que ven en el ejemplo cuando α en el primer cuadrante y θ en el tercer cuadrante.

En este episodio se evidencia la dificultad que se presenta para poder establecer conexiones entre los marcos geométrico, algebraico y analítico, necesarios para la construcción de una demostración deductiva. El grupo se queda en el terreno de lo perceptivo geométrico y no es capaz de relacionar las propiedades observadas con las definiciones y propiedades de las razones trigonométricas en el plano cartesiano.

ANÁLISIS DE LA UNIDAD COGNITIVA

Esquema global de la argumentación	**Esquema global de la demostración**
D_1g, D_2rang, D_3repgcos, D_4deftr, D_5defpc → E_1itrig R_1rang, R_2rsigpc, R_3rang	D_1g, D_2rang, D_3repgcos, D_4deftr, D_5defpc → E_1itrig R_4rang, R_5relt, R_6rang, R_7rlt, R_8rsigpc

deftr: definición en el triangulo rectángulo.

itrig: identidad trigonométrica.

rang: relación entre ángulos.

repgcos: representación geométrica de coseno.

relt: relación lados del triangulo.

rsigpc: relación de signos en el plano cartesiano.

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

ARGUMENTACIÓN **E$_1$**: $\cos(180+\alpha) = -\cos(\alpha)$			**DEMOSTRACIÓN** **E$_1$**: $\cos(180+\alpha) = -\cos(\alpha)$		
CONCEPCIÓN			CONCEPCIÓN		
OPERADORES **R$_1$**: α es el ángulo de referencia de θ. **R$_2$**: $\cos(\alpha)$ y $\cos(180+\alpha)$ tienen signos contrarios. **R$_3$**: $\angle MOP$ = $\angle AOB$ por opuestos por el vértice.	**SIST. DE REPR.** **L$_1$**: Diagrama dinámico. **L$_2$**: Lenguaje natural (uso de expresiones verbales).	**E. DE CONTROL** **Σ_1**: Perceptivo (visualización de los vectores y relaciones entre ángulos y triángulos).	**OPERADORES** **R$_4$**: coseno es el vector rojo. **R$_5$** $\cos(\alpha) = \frac{ady}{hip}$ **R$_3$**: $\angle MOP$ = $\angle AOB$ por opuestos por el vértice. **R$_6$**: $OP = OB$ por ser radios. **R$_7$**: $\angle OMP$ = $\angle OAB$ por ser rectos. **R$_8$**: $R_3 \wedge R_6 \wedge R_7 \Rightarrow \Delta MOP = \Delta AOB \Rightarrow \overline{OM} = \overline{OA}$. **R$_9$**: $\cos(\alpha)$ y $\cos(180+\alpha)$ tienen igual valor absoluto, pero signos contrarios	**SIST. DE REPR** **L$_1$**: Diagrama dinámico. **L$_2$**: Lenguaje natural (uso de expresiones verbales).	**E. DE CONTROL** **Σ_1**: Perceptivo (visualización de los vectores y relaciones entre ángulos y triángulos).
Marco perceptivo – geométrico			Marco perceptivo – geométrico		

CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA

Análisis de la continuidad estructural

ARGUMENTACIÓN	**DEMOSTRACIÓN**
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva perceptiva	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Inductiva
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN **EGA**: Los argumentos están basados en propiedades matemáticas visualizadas en el ejemplo cuando θ está en el tercer cuadrante.
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Aunque usan algunos datos y operadores nuevos en el proceso de demostración, estos están relacionados con los usados en el proceso de argumentación.

El sistema de representación sigue siendo el diagrama dinámico de Cabri (L_1) y el lenguaje natural (aunque en el esquema se escriben algebraicamente).

El control sigue siendo perceptivo, caracterizado por la identificación de los elementos geométricos y las relaciones entre ángulos y triángulos en la construcción de Cabri.

La continuidad estructural se da porque las argumentaciones de los estudiantes siguen basadas en lo observado en el ejemplo genérico y no en teoremas.

Consideramos que en este ejemplo la continuidad del sistema de referencia es favorable, puesto que los datos y operadores usados en la conjetura no están apoyados en datos numéricos, sino en relaciones matemáticas descubiertas en el diagrama dado que pueden llegar a ser generalizadas, de tal manera que el control sea teórico. La ruptura estructural puede lograrse a través de algunas refutaciones potenciales y datos (definiciones y teoremas) que ayuden a completar de manera general el proceso de demostración.

6.4 Ruptura referencial – continuidad estructural inductiva

Los casos de ruptura cognitiva causada por la ruptura del sistema de referencia, sin la ruptura estructural, tampoco garantizan la construcción de demostraciones deductivas, como es el caso de las demostraciones tipo Ejemplo Genérico Analítico (EGA), en donde se da la ruptura del sistema de referencia, pero no se da la ruptura estructural, debido a que las propiedades, representaciones y controles del proceso de demostración están soportados en lo descubierto en el ejemplo genérico, varios de ellos sugeridos por las intervenciones del profesor. En estos casos, si las generalizaciones hechas sobre lo observado no se convierten en axiomas, definiciones o teoremas y no se comprende su importancia en el proceso axiomático de demostración, no es posible la ruptura estructural como se puede deducir de los siguientes casos.

6.4.1 Caso 3: Actividades 2.5.1, 2.5.2 – Grupo G1A

2.5.1 ***Conjeturando***   **¿Qué relación existe entre $sen(A)$ y $sen(-A)$?** Escribe una conjetura de lo encontrado en tu hoja de trabajo. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.5.2 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.5.1

PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

[1] G1A: [El grupo calcula en la calculadora científica] $sen(30) = 0{,}50\ y\ sen(-30) = -0{,}50$. *Positivo y negativo, por el cuadrante en que se encuentran. ¿Qué ponemos?*

[2] Diana: *Que es el mismo valor numérico, pero con signos inversos, ¿si?*

[3] *Mapa*: *Pues, llamémoslo el valor absoluto.*

[4] Diana: *El valor absoluto de seno de A y seno de menos A es el mismo, es el mismo valor, pero no, es que no se cómo.* [E_1]

[5] Mapa: *¿Qué va a copiar?*

[6] Diana: *Que es el mismo valor numérico.*

[7] Mapa: *¡El mismo valor absoluto!...el valor absoluto de cero cincuenta y de menos cero cincuenta es el mismo.*

[8] Inv.: *¿Qué relación encontraron entre el seno del ángulo A y del ángulo –A?*

[9] G1A: *Que tienen el mismo valor absoluto.*

[10] Inv.: *¿Valor absoluto de qué?*

[11] G1A: *De seno de A y seno de menos A.* [Escriben en la hoja de trabajo: Que tienen el mismo valor absoluto. Es decir $|\text{senA}| = |\text{sen}(-\text{A})|$] [$E_1$]

[12] Inv.: *¿Cómo se dieron cuenta de eso?*

[13] G1A: *Pues, con un ejemplo.*

D₁: Ejemplo: $sen(30°) = 0{,}50$ $sen(-30°) = -0{,}50$ [1], [7]

E₁: $|senA| = |sen(-A)|$ [4], [11]

R₁: Generalización del resultado de la calculadora

Marco Aritmético

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

El grupo no utiliza Cabri para el planteamiento de la conjetura. Basados en el ejemplo realizado en la calculadora científica [1], [7] plantean que los valores absolutos de la razón seno de un ángulo *A* y su inverso son iguales [4], [11]. Al interactuar con el investigador saben que no es suficiente dar un ejemplo para justificar su conjetura y dudan de su enunciado, es decir que el indicador de fuerza es débil.

La conjetura E_1 la plantean y la escriben en el lenguaje natural [4] y posteriormente la escriben en el lenguaje algebraico [11]; es decir el sistema de representación va del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

El control Σ_1 es numérico ejercido por los datos obtenidos de la calculadora.

El tipo de razonamiento es inductivo (generalización de un caso).

La forma de argumentación es constructiva (contribuye a la construcción de la conjetura, precede la afirmación).

La argumentación es una generalización sobre los enunciados (datos).

Se detecta la dificultad que tienen los estudiantes para poder plantear conjeturas de relaciones entre las razones, debido a la dificultad de poder conectar un resultado numérico con una concepción geométrica o analítica de la razón. El resultado arrojado por la calculadora no permite ver la razón como una relación entre lados de un triángulo o como la relación entre la ordenada y el radio; se pierde el estatuto de la razón (Freudenthal, 2001), por eso, lo que el grupo plantea es una propiedad numérica que relaciona los datos obtenidos y no una propiedad de la razón seno de un ángulo y su inverso.

PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

[14] Inv.: *¿Es la parte de la conjetura o de la demostración?*

[15] Diana: *Pues esa es la conjetura, pero toca ahora la demostración, ¿Se puede con un ejemplo?* [Ante el silencio del investigador, el grupo discute y se escuchan expresiones como: *eso no es como obvio, si es el mismo ángulo como no va a dar lo mismo, aplicando conceptos, refutando todo lo que dije, bueno, a ver, explica por qué…*]

[16] Mapa: *¿Eso no es como obvio, que el seno de dos ángulos iguales, va a ser el mismo? Entonces se agrega un menos.*

[17] Inv.: *Esa sería la afirmación, ¿cómo quedaría la afirmación?*

[18] Mapa: *El valor absoluto de seno de A es igual al valor absoluto de seno de menos A, ¿pero, para demostrarlo?*

[19] Inv.: *Ustedes se dieron cuenta que el valor absoluto de seno de A es igual al valor absoluto del seno de menos A, pero, ¿cómo se dieron cuenta?*

[20] G1A: *Es que es obvio, ¿no?*

[21] Inv.: *¿Por qué es obvio?*

[22] G1A: *¡Es el mismo ángulo! ¿por qué va a cambiar?*

[23] Inv.: *Recuerda que están en el plano cartesiano.*

[24] G1A: *Pues si, pero, el hecho de que sea positivo o negativo el ángulo no…el valor del ángulo* [se refieren a la amplitud] no cambia.

D₁: Ejemplo [1], [7] → **E₁**: $|senA| = |sen(-A)|$ [18]

R₂: $\measuredangle A = \measuredangle(-A)$ [22], [24]

[25] Inv.: *El valor del ángulo no es el mismo, el valor absoluto sí, digamos que la abertura es la misma, pero, como el sentido cuenta, y el sentido, por ejemplo, determinaría en que cuadrante está, por ejemplo, si tu tienes un ángulo A.*

[26] Mapa: *Pero, estamos hablando de ángulo positivo, o sea, de ángulo positivo como esto* [dibuja un ángulo *A* (Fig. 4)] *y de ángulo negativo como esto* [dibuja el ángulo –*A* (Fig. 4)], *por eso, y tienen la misma abertura.*

D₂: [26]

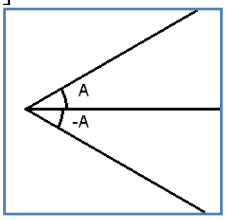


Figura 4: Dibujo del ángulo A y -A

→ **E₂**: $\angle A = \angle(-A)$ [26]

R₃: Si *A* y – *A* tienen la misma abertura $\Rightarrow \angle A = \angle(-A)$ [26]

Marco geométrico

[27] Inv.: *Pero, acuérdate cómo están definidas las razones* [E_{1I}] [1].

[28] Mapa: *Por eso, en los dos casos el opuesto va a ser el mismo.* [se refiere al lado opuesto de un triángulo rectángulo]

D₃: $E1_I$: Definición de seno [27] → **E₃**: El lado opuesto del ángulo *A* es igual al lado opuesto del ángulo – *A* [28]

R₃: Si *A* y – *A* tienen la misma abertura $\Rightarrow \angle A = \angle(-A)$ [26]

Geometría del triángulo rectángulo

[29] Inv.: *No, acuérdate cómo está definido el seno ahora.*

[1] E_{1I}: Enunciado uno del investigador.

[30] Mapa: *Ah, por el cuadrante.*

[31] Inv.: *¿Cómo está definido?*

[32] G1A: *y sobre r.*

[33] Inv.: *Correcto, por ejemplo, si tu tomas que seno es igual a y sobre r para el ángulo A, ¿cómo quedará el seno para el ángulo –A?*

[34] Mapa: *Si tu tomas este* [señala el ángulo *A* (Fig. 4)] *como el ángulo positivo, es y sobre r* [traza un segmento y escribe *y*/*r* (Fig. 5)], *y si es así* [señala el ángulo –*A* (Fig. 5)], *igual a y sobre r* [traza un segmento y escribe *y*/*r* (Fig. 5)] ¿no?

[35] Inv.: *¿El y en el primer cuadrante y en el cuarto cuadrante, tienen el mismo signo?* [R_{p1}] [2]

$Rp1_I$: ¿Signo de *y* igual en el primer y en el cuarto cuadrante? [35]

E_4: $sen(A) = \frac{y}{r} = sen(-A)$ [34]

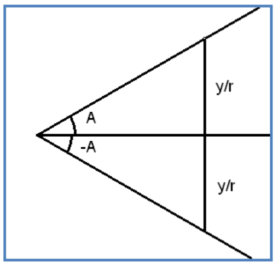


Figura 5: Representación de *sen* (*A*) y *sen* (-*A*)

D_4: $E2_I$: $sen(A) = \frac{y}{r}$ [33]

R_3 [34]

Geometría del triángulo rectángulo

[36] Diana: *No, no tienen el mismo signo, sería menos y sobre r.*

D_5: $Rp1_I$ [35]

E_5: En el IV cuadrante $sen(A) = \frac{-y}{r}$ [36]

R_4: La ordenada en el IV cuadrante es negativa [36]

Plano cartesiano

[37] Inv.: *Quedaría menos y sobre r, pero eso solamente en el primer cuadrante. Ahora, suponga que está en el segundo cuadrante ¿En donde estaría el ángulo menos A?*

[38] Mapa: [dibuja en un lado de la hoja de trabajo el ángulo A en el segundo cuadrante (Fig. 6)], *A es esto* [señala el ángulo dibujado, no utiliza para nada Cabri]

[39] Inv.: *¿– A?*

[40] Mapa: *¿Este?* [Señala el ángulo 360 – A (Fig. 6)].

[2] R_{p1I}: Refutación potencial uno del investigador.

[41] Inv.: *No* [Rp2I]

[42] Diana: *Éste* [señala el lado inicial y gira en las manos en sentido contrario de A].

[43] Inv.: *¿Hasta dónde?*

[44] Diana: *Hasta acá* [señala 360 – A]

[45] Inv.: *No. Lo pueden hacer ahí en Cabri, abran el archivo 2.2.1*

[46] Mapa: *¿El ángulo menos A está en el mismo inicial y en el mismo terminal del otro, pero hacia el otro lado?*

[47] Inv.: *No, ese es el que completaría los 360º, no el inverso.*

[48] Mapa: *Entonces, ¿cómo es el negativo?*

$Rp2_I$: No [41]

D_6: $E3_I$: *A* en el segundo cuadrante [37] → **E_6**: – *A* = 360 – *A* [37], [39]

R_5: Si *A* es un ángulo, –*A* es el contrario de *A* [38],[40],[42],[44],[46]

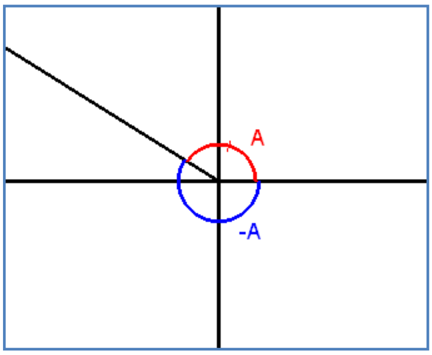


Figura 6: Ángulo A en el segundo cuadrante

Marco geométrico

[49] Inv.: *Si tú tienes, por ejemplo, que A es 143,471* [el valor del ángulo que se ve en el archivo], *¿cuál sería menos A?*

[50] Mapa: – *143,471*

D_7: $E4_I$: *A* = 143,471 [49] → **E_7:** – *A* = – 143,471 [50]

R_6: El opuesto aditivo de *a* es –*a*

Aritmética

[51] Inv.: – *143,471, entonces, piensa en un ángulo de más o menos, de – 143,471.*

[52] Mapa: *¿Ahí?* [mueve el ángulo A en sentido positivo hasta el tercer cuadrante (Fig. 7)]

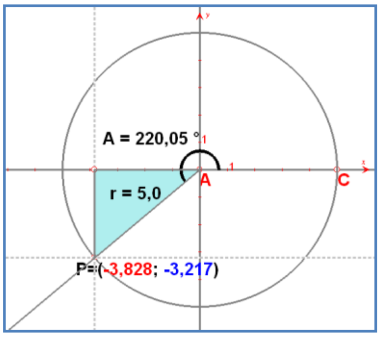


Figura 7: A en el III cuadrante

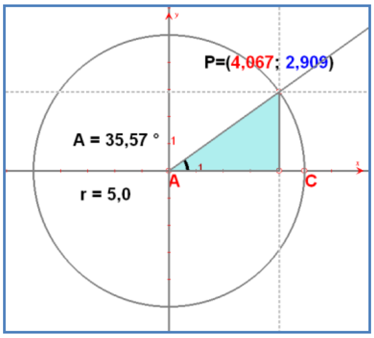


Figura 8: A en el I cuadrante

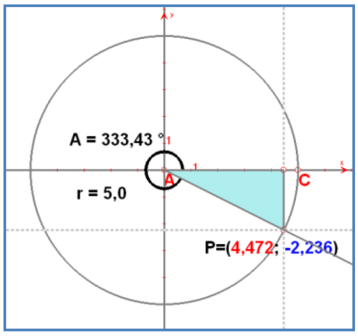


Figura 9: A en el IV cuadrante

[53] Inv.: *La idea es que ustedes pudieran observar las dos cosas, o sea los dos ángulos, por ejemplo, ese es A* [se refiere a un ángulo en el primer cuadrante que el grupo observa (Fig. 8)] *¿Qué opción tenemos de ver en una misma construcción A y menos A? ¿si tú tienes A y quieres hallar menos A, qué haces?*

[54] Mapa: *Lo que cambia para que de negativo es el eje y, o sea el eje y para que la razón de negativa, el r siempre es positivo* [mientras habla mueve el lado final del ángulo A al cuarto cuadrante (Fig. 9) y va señalando con el lápiz sobre en computador], *el r siempre va a ser positivo.*

[55] Inv.: *El r siempre va a ser positivo, por ejemplo, ahí en el primer cuadrante y es positivo y r sería positivo, entonces la razón da positivo, ¿en el cuarto cuadrante y es?*

[56] Diana: *Negativo*

D_8: $E5_I$: Si – *A* está en el cuarto cuadrante [55] → **E_8:** $y < 0$ [56]

R_4: La ordenada en el IV cuadrante es negativa

Plano cartesiano

[57] Inv.: *Negativo, entonces, ¿cómo quedaría la razón?*

[58] Mapa: *Negativa.*

[59] Inv.: *Negativa, pero no solamente para el primer cuadrante, por ejemplo, ¿si el ángulo A es un ángulo en el segundo cuadrante?*

[60] G1A: [mueven el lado final de A al segundo cuadrante (Fig. 10)].

[61] Inv.: *¿Cómo es y ahí?*

[62] G1A: *Positiva.*

[63] Inv.: *Entonces, ¿el y del inverso cómo sería?*

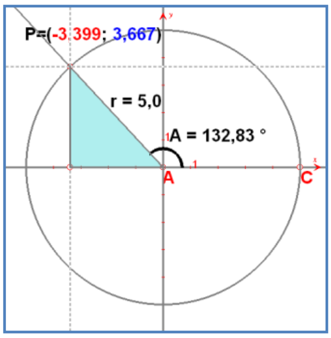


Figura 10: *A* en el II cuadrante

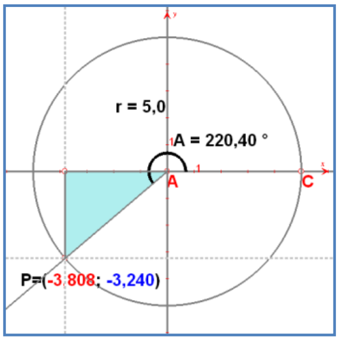


Figura 11: *A* en el III cuadrante

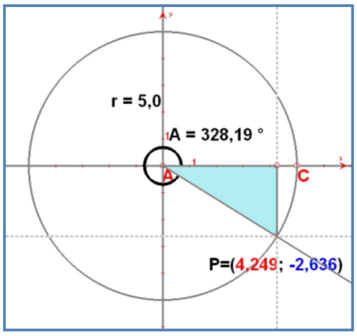


Figura 12: *A* en el IV cuadrante

[64] G1A: [mueven el lado final del ángulo A el tercer cuadrante (Fig. 11) y observan el signo del valor de *y*] *Negativo.*

[65] Inv.: *Ahora, si el ángulo está en el tercer cuadrante, digamos, ese es A* (Fig. 11)*, entonces, menos A ¿en donde estaría?*

[66] G1A: [Mueven hacia el cuarto cuadrante el lado final (Fig. 12) y luego hacia el segundo cuadrante al darse cuenta del error] *¿Siempre es éste con éste* [señalan la ordenada] *por lo que es seno?*

D_9: $E6_I$: Si *A* está en el segundo cuadrante [59] → **E_9:** $y > 0$ para A [66] $y < 0$ para $-A$ [64]

R_7: Se ve el signo en el archivo

Marco Perceptivo [60], [64]

[67] Inv.: *Por lo que es seno solamente estamos mirando y, pues r siempre es positivo.*

[68] Diana: *Si fuera coseno, sería con x.*

[69] Inv.: *Eso, por ejemplo, mira ahí, primero ponga A en el tercer cuadrante, ese es A ¿si? ¿el y ahí cómo es?*

[70] G1A: *Negativo.*

[71] Inv.: *¿Y menos A en donde quedaría?*

[72] Diana: *Ahí,* [mueven el lado final del ángulo A al segundo cuadrante] *¿con respecto a y?*

[73] Inv.: *¿Qué signo tendría?*

[74] G1A: *Positivo.*

D_{10}: $E7_I$: Si *A* está en el tercer cuadrante [65], [69] → **E_{10}:** $y < 0$ para A [70], $y > 0$ para $-A$ [74]

R_7: Se ve el signo en el archivo

Marco Perceptivo [66], [69], [72]

[75] Inv.: *Positivo, entonces, ¿qué está pasando con el y de un ángulo y su inverso, cómo son?*

[76] G1A: *Silencio.*

[77] Inv.: *O sea, en un caso era positivo y para el otro negativo, pero fíjese que aquí* [para el caso de un ángulo en el tercer cuadrante] *el y de A era negativo y el y de – A quedó positivo, entonces ¿qué es lo que estamos viendo, cuál es la relación entre esos y?*

[78] G1A: *Que son…inversos.*

D$_{11}$: E8$_I$: ¿Qué relación existe entre la ordenada de un ángulo A y la de su inverso – A? [77]

E$_{11}$: Las ordenadas de un ángulo A y su inverso $-A$ son inversas [78]

R$_8$: Propiedad de inversos aditivos

Aritmética

[79] Inv.: *Son inversos, ¿cierto?, no podemos decir que y siempre es positivo y que –y es negativo, sino que la relación es de inversos aditivos, o sea, que si yo conozco uno, ¿cómo hallo el otro?*

[80] Diana: *Con el signo contrario.*

[81] Inv.: *Con el signo contrario, entonces, ¿cómo expresarían eso?*

[82] G1A: [Escriben en la hoja de apuntes]:

Si $sen(A) = \frac{y}{r} \Rightarrow sen(-A) = \frac{-y}{r}$

$$\frac{y}{r} = -\frac{-y}{r} \Rightarrow \frac{y}{r} = \frac{y}{r}$$

"y" para el ángulo A y el ángulo –A es inverso.

$senA\ = -\ (sen - A)$

D$_{12}$: D$_1 \Rightarrow$ E$_1$, D$_2 \Rightarrow$ E$_2$,…, D$_{11} \Rightarrow$ E$_{11}$

E$_{12}$: $sen(A) = -sen(-A)$[82]

R$_9$: $senA = sen(-A)$
$\frac{y}{r} = -\frac{-y}{r} \Rightarrow \frac{y}{r} = \frac{y}{r}$ [82]

Algebra

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

Los operadores tienen un carácter perceptivo, y dependen de la definición de seno en el triángulo rectángulo, por eso consideran únicamente ángulos en el primer cuadrante. El investigador introduce los enunciados E1$_I$, E2$_I$,…, E8$_I$ y las refutaciones potenciales Rp$_1$ yRp$_2$, con la intención de que los estudiantes examinen las relaciones que han enunciado en los otros cuadrantes, y tomen conciencia de sus errores. Estos enunciados se basan en la definición de seno como la razón entre la ordenada y el radio.

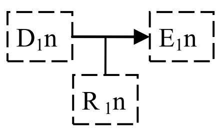
El sistema de representación está caracterizado por el uso de dibujos de figuras geométricas en la hoja de la actividad, el uso de expresiones algebraicas para escribir en la hoja de trabajo las relaciones encontradas y los diagramas dinámicos de Cabri. Aunque tienen a disposición las figuras de Cabri como sistema de representación, los estudiantes no los usaron espontáneamente, si no por sugerencia del investigador.

Inicialmente hay un control perceptivo geométrico, basado en los dibujos de los ángulos A y $-A$ en la hoja de trabajo. Posteriormente ante la sugerencia del investigador, de usar el archivo de Cabri hay un control ejercido por el arrastre para analizar los signos de las ordenadas en cada uno de los cuadrantes del plano cartesiano. Al final se identifica un control teórico basado en el uso de la definición de seno en el plano cartesiano y el uso de las propiedades algebraicas para la demostración del enunciado E_{12}. En este caso las refutaciones y las sugerencias del investigador fueron llevando al grupo a la exploración en Cabri y al análisis de todas las variables y relaciones necesarias para resolver el problema.

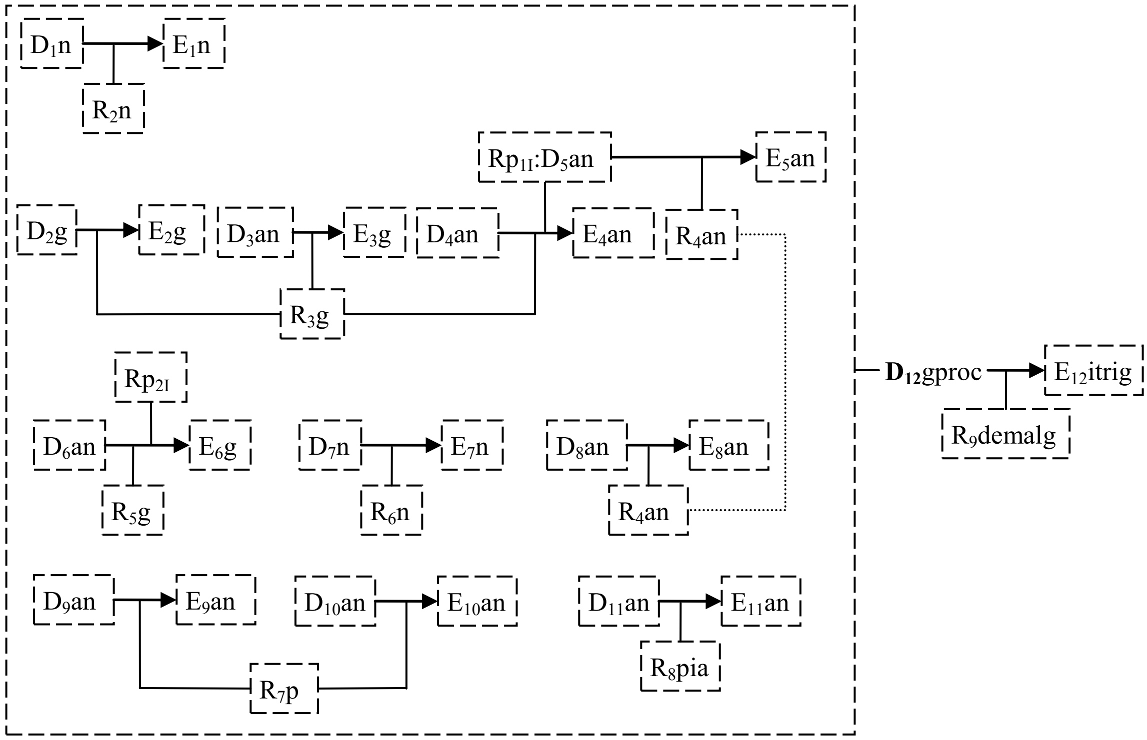
Al finalizar plantean el enunciado correcto de la relación entre el seno de un ángulo y el de su inverso y realizan una demostración que tiene forma de una demostración deductiva, pero que es producto de un razonamiento inductivo orientado por el investigador, por eso consideramos la demostración como un ejemplo genérico analítico (EGA), al tratarse de una generalización de las propiedades observadas en cada uno de los enunciados, que conlleva al planteamiento y demostración de la relación: $sen(A) = -sen(-A)$.

ANÁLISIS DE LA UNIDAD COGNITIVA

Esquema global de la argumentación



Esquema global de la demostración



an: analítico.

demalg: demostración algebraica.

g: geométrico.

gproc: generalización del proceso.

itrig: identidad trigonométrica.

n: numérico.

p: perceptivo.

pia: propiedad de inversos aditivos.

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

ARGUMENTACIÓN E_1: $\lvert sen(A)\rvert = \lvert sen(-A)\rvert$			**DEMOSTRACIÓN** E_{12}: $sen(A) = -sen(-A)$		
CONCEPCIÓN			CONCEPCIÓN		
OPERADORES **R_1**: Generalización sobre un caso.	**SIST. DE REPR.** **L_1**: Lenguaje natural **L_2**: Uso de expresiones algebraicas	**E. DE CONTROL** **Σ_1**: Control numérico ejercido por los datos obtenidos de la calculadora.	**OPERADORES** **R_2**: $\measuredangle A = \measuredangle(-A)$ **R_3**: Si A y $-A$ tienen la misma abertura $\Rightarrow \angle A = \angle(-A)$. **$R_4$**: La ordenada en el IV cuadrante	**SIST. DE REPR** **L_1**: Lenguaje natural **L_2**: Uso de expresiones algebraicas **L_3**: Uso de dibujos	**E. DE CONTROL** **Σ_1:** Ejemplos numéricos de la calculadora científica. **Σ_2:** Arrastre en Cabri (Ejemplos visualizados en

ARGUMENTACIÓN E1: $\lvert sen(A)\rvert = \lvert sen(-A)\rvert$			**DEMOSTRACIÓN** E12: $sen(A) = -sen(-A)$		
			es negativa. **R5:** Si *A* es un ángulo, - *A* es el contrario de *A*. **R6**: El opuesto aditivo de *a* es –*a*. **R7**: La ordenada de *A* es positiva y la ordenada de – *A* es negativa. **R8**: Propiedad de inversos aditivos. **R9**: $sen(A) = sen(-A)$ $\frac{y}{r} = -\frac{-y}{r}$ $\frac{y}{r} = \frac{y}{r}$	geométricos en la hoja de trabajo. **L4**: Figura dinámica de Cabri.	Cabri) Σ3: Dibujos en la hoja de trabajo. Σ4: Control perceptivo (–A = 360 – A). Σ5: Control teórico caracterizado por el uso de la definición de seno en el plano y el método de demostración algebraico.
Marco Aritmético			Marco Aritmético → Marco Geométrico → Marco Analítico		

RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA

Análisis de la continuidad estructural

ARGUMENTACIÓN	**DEMOSTRACIÓN**
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva: Uso del ejemplo *sen*(30º) = – *sen*(–30) antes de enunciar la conjetura.	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Argumentación Inductiva (Generalización de un caso)	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Demostración Inductiva (Generalización sobre los enunciados)
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN EGA (Generalización sobre los enunciados)

CONTINUIDAD ESTRUCTURAL

Se observa en la tabla la ruptura referencial entre el proceso de argumentación para el planteamiento de la conjetura E1:$\lvert sen(A)\rvert = \lvert sen(-A)\rvert$ y la demostración del enunciado E12: $sen(A) = -sen(-A)$, por el cambio que se da en el marco de la demostración. De hecho, existe un cambio de enunciado, introducido más por las continuas intervenciones del investigador que por iniciativa de los estudiantes y tal vez estos no lo han percibido. Los operadores de la demostración, no son una continuación del único usado en la conjetura. El sistema de representación de la demostración incluye el uso de figuras geométricas y el uso de

Cabri, que no se tuvieron en cuenta en la conjetura. La estructura de control de la demostración pasa del control numérico en la conjetura, al control teórico, logrado por el tránsito entre el control geométrico sobre el dibujo al control analítico sobre la el diagrama dinámico en Cabri (archivo 2.2.1).

A pesar de la ruptura del sistema de referencia (suficiente para la distancia cognitiva), existe una continuidad estructural, caracterizada por el paso de una argumentación inductiva por generalización de un caso, al uso de propiedades matemáticas observadas en los ejemplos. Aunque cada esquema se refiere a un nuevo enunciado, la estructura de cada enunciado sigue siendo inductiva, hasta llegar al enunciado E_{12}, que refleja una estructura de demostración deductiva. Esta demostración deductiva (en su forma), implicaría una ruptura estructural, que es lo deseable, pero en este ejemplo, esta ruptura fue más producto de la interacción del investigador, que del proceso de razonamiento de los estudiantes. Al parecer, al darse cuenta de la relación entre las ordenadas de un ángulo y su inverso [E_{11}], los estudiantes plantean el enunciado E_{12}. El esquema global de la demostración también nos permite visualizar el proceso realizado por el grupo, en donde se observa que las continuas intervenciones del investigador, llevan al grupo al planteamiento de diferentes enunciados, varios de ellos, desconectados entre si (E_1, E_6, E_7 y E_{11}), otros relacionados por el mismo operador de la concepción (E_2, E_3, E_4, relacionados con el operador geométrico R_3; E_9 y E_{10} relacionados con el operador perceptivo R_7, y E_5, E_8 relacionados con el operador analítico E_4) y otros por el tipo de control (E_5, E_8, E_9, E_{10} y E_{11} relacionados por el control sobre el diagrama dinámico de Cabri (ACT.2.2.1)). Al parecer la relación con el control sobre el diagrama, es la que lleva al planteamiento de la propiedad trigonométrica E_{12}, cuya demostración se basa en la relación de la ordenada de los ángulos A y $-A$, la definición de seno en el plano cartesiano y la manipulación de propiedades algebraicas, apoyadas en las propiedades del cociente entre dos reales.

El análisis de la unidad cognitiva nos muestra la dificultad para la demostración que tienen los estudiantes para poder conectar las diferentes representaciones de los conceptos involucrados en la construcción de la demostración. Por ejemplo, en el intento de usar una concepción geométrica de la razón para justificar una relación numérica (E_2, E_3 y E_4), cometen el error de no considerar ángulos mayores de 90º, ni negativos y caen nuevamente en una concepción numérica del ángulo, que no les permite comprender la diferencia entre los ángulos *A* y –*A* porque siguen pensando solamente en la propiedad numérica que los relaciona (la amplitud [28]), sin tener en cuenta el sentido.

Los estudiantes deben ubicarse en el marco de la trigonometría del plano cartesiano, y para ello es importante que utilicen el diagrama dinámico de Cabri, en donde pueden observar las diferentes conexiones entre las distintas representaciones. Por esto el grupo tiene dificultades. Si los estudiantes no usan los diagramas dinámicos para explorar las relaciones o realizar construcciones dinámicas que les permitan visualizar e integrar propiedades geométricas, métricas, numéricas y algebraicas y ejercer un control teórico sobre ellas, se les dificulta el planteamiento de la conjetura y la construcción de la demostración.

Decimos que este cambio de enunciado no fue totalmente percibido por el grupo porque en su resolución de la actividad 2.5.3 vuelven a plantear una conjetura similar, como lo veremos más adelante.

6.4.2 Caso 4: Actividad 2.6.1B – Grupo G1A

> 2.6.1 *Explorando, conjeturando y demostrando*
>
> Busca relaciones entre los valores de las razones trigonométricas para los ángulos *A*, *A-90*, *90-A*. Demuéstralas utilizando propiedades matemáticas.

PROCESO DE CONJETURA

[1] Mapa: *Espere, espere, dice, ¿Qué relación existe entre* $cos(A)$ *y* $sen(A - 90)$*?* [Se refiere al siguiente enunciado de la hoja de trabajo]

[2] Diana: *Ya tenemos el seno, ahora el coseno de A, Mapa, ¿Cuál es la relación? ¿Cuál es la primera? ¿Seno, coseno, coseno, o, coseno, coseno, coseno?*

[3] Mapa: *Seno, coseno, coseno. Eso, digamos es una igualdad.*

[4] Diana: *Eso ya está. entonces toca demostrarla.*

[5] Mapa: *Ahora miremos si se cumple al contrario, o sea, coseno de A igual a seno de 90 – A, igual a seno de A – 90.*

[6] Diana: *También se cumple, entonces escribamos eso: cos(A) = sen(90 – A) = sen(A – 90).*

D₁: $sen(A) = cos(90 - A) = cos(A - 90)$ → **E₁**: $\cos(A) = sen(90 - A) = sen(A - 90)$ [5], [6]

R₁: Generalización del enunciado planteado en la demostración anterior:
Si $sen(A) = cos(90 - A) = cos(A - 90) \Rightarrow \cos(A) = sen(90 - A) = sen(A - 90)$

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE CONJETURA

Producto de la generalización del enunciado demostrado en la actividad anterior, por analogía (Polya, 1966, p. 38), el grupo plantea el enunciado E_1, que tiene un error en el tercer miembro de la igualdad. La forma de argumentación es constructiva, puesto que lo realizado en la actividad anterior contribuye al planteamiento de la nueva conjetura.

El sistema de representación se caracteriza por el uso de expresiones algebraicas [L_1], para escribir la relación en la hoja de trabajo [6].

La estructura de control es teórica, basada en la relación demostrada en la actividad anterior [$sen(A) = cos(90 - A) = cos(A - 90) \Rightarrow cos(A) = sen(90 - A) = sen(A - 90)$]

El marco de la concepción es la trigonometría en el plano cartesiano.

PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

[7] G1A: *Ruby, no podemos con la demostración* [a pesar de haber realizado una demostración deductiva correcta en la actividad anterior, el grupo no se siente seguro de lo realizado y del nuevo planteamiento (indicador de fuerza débil). Al parecer los estudiantes ven o escuchan a otro grupo plantear una demostración diferente a la realizada por ellos]

[8] Prof.: [Explica que deben utilizar las definiciones de las razones en el plano cartesiano] *¿Cómo está definido el seno de A?*

[9] Mapa: *No, sí, mira que nos da, lo que pasa es que si nos da el coseno, nos da igual, pero este no nos da igual.*

[10] Prof.: *¿Quién igual a quién? Este a este o este a este* [se refiere a sen A, cos (90 – A) y cos (A – 90)]

[11] Mapa: *Los tres.*

[12] Prof.: *¿Todos son iguales? Okey, vamos a demostrar, pero usando la definición de la razón, vamos a este punto P de coordenadas x, y, ¿cierto? Los x van a variar de acuerdo al valor del ángulo. Por ejemplo ahí, ¿seno de A, a qué es igual?*

[13] Diana: *A y sobre r.*

[14] Prof.: *y sobre r, ¿coseno de 90 – A*?

[15] G1A: *A y sobre r también, y sobre r.*

[16] Prof.: *¿Y ahora, y sobre r también?* [gira el ángulo]

[17] G1A: *y sobre r.*

D_2: **E_{1p}**: Las coordenadas de A son $P\ (x, y)$ [12]

→ **E_2**: $sen(A) = \frac{y}{r}$ [12], [13]

→ **E_3**: $\cos(90 - A) = \frac{y}{r}$ [14] - [17]

R_2: Definición de las razones en el plano cartesiano

Trigonometría en el plano cartesiano

[18] Prof.: *¿y sobre r también? Coseno, adyacente.*

[19] G1A: *x sobre r.*

[20] G1A: *Este triángulo* [azul (Fig. 13)] *es el mismo que este* [amarillo], *y de él* [azul] *también esto es 90 – A* [señala el ángulo opuesto a A (Fig. 13)].

[21] Prof.: *Esto es A y lo que es opuesto para A, es esto* [señala la ordenada], *y los dos adyacentes, opuesto para 90 – A es lo que era opuesto para este.*

[22] Mapa: *Pero, para 90 – A, el adyacente, el coseno, o sea el adyacente es este* [señala la ordenada en el triángulo azul], *es y.*

D_3: **E_{2p}**: coseno ↔ adyacente [18]

→ **E_4**: $\cos(90 - A) = \frac{x}{r}$ [19]

→ **E_5**: El lado adyacente de 90 – *A* es *y* [22]

R_5: [20]

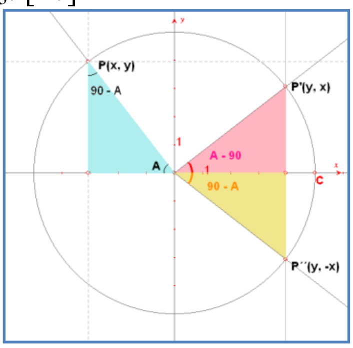


Figura 13: Archivo 2.6.1

Trigonometría en el triángulo rectángulo ↔ Trigonometría en el plano cartesiano

[23] Prof.: *Por eso, lo que es opuesto, vamos a mirar este triángulo, lo que es opuesto para A, este valor* [señala la abscisa], *es adyacente para 90 – A. Eso es lo que tenemos, esto tiene 90 – A, el punto era x, y. Este es x, y* [mueve el ángulo A] *¿para dónde se fue ahora?*

[24] Mapa: *Para el x.*

[25] Prof.: *Eso, entonces ahora, este era x, y* [se refiere a las coordenadas del ángulo A], *¿ahora este punto, el lado terminal es?* [se refiere al ángulo 90 – A]

[26] Mapa: *y, x.*

[27] Prof.: *y, x ¿A qué es igual el coseno de 90 – A? a lo que haya aquí, al adyacente, ¿que en este caso es? Ahora busquen A – 90, ¿seno o coseno?*

[28] Diana: *Coseno es igual a x sobre r.*

[29] Mapa: *Coseno*.

[30] Prof.: *Coseno de A – 90, busquen A – 90.*

[31] Mapa: *Okey, el punto sería y, –x.*

[32] Prof.: *y, –x. Encuentren más.*

[33] Mapa: El *coseno de A sería x sobre y, ¿si? x positivo, o sea el punto.*

[34] Diana: *Sobre r.*

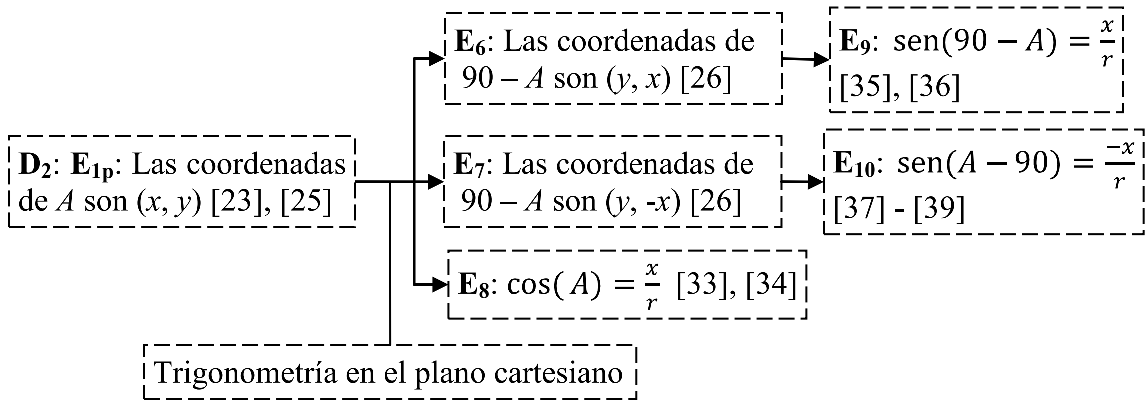
[35] Mapa: *El seno de 90 – A, sería el coseno, x sobre r.*

[36] Diana: *También, x sobre r.*

[37] Mapa: *Y seno de A – 90, sería*

[38] Diana: *x sobre r.*

[39] Mapa: *Menos.*



[40] Diana. *¿Por qué menos?*

[41] Mapa: *Espere, seno de 90 – A es x sobre r, y el seno de A – 90…*

[42] Mapa: *Hay que poner la coordenada. Mire las coordenadas ¿si? entonces, para este punto, aquí x y y, son positivas ¿si? aquí la y es el x.*

[43] Mapa: *Entonces, coseno de 90 – A sería este, o sea y sobre r ¿si? y para este sería.*

[44] Diana: *También y sobre r.*

[45] Mapa: *Esto está mal, es seno de 90 – A, y seno de 90 – A si es opuesto, que sería x, que es este ¿si? sobre r.*

[46] Mapa: *Está bien, ahora este, seno de A – 90 sería, este que es –x, ¿si me entiende? Sobre r.*

D_2: E_{1p}: Las coordenadas de A son (x, y) [23], [25] → **E_{10}**: $\text{sen}(A - 90) = \frac{-x}{r}$ [37] - [39]

R_3: $D_2 \Rightarrow E_9$ [41]
R_4: $D_2 \Rightarrow E_6 \Rightarrow E_3$ [42], [43]
R_5: $D_2 \Rightarrow E_7 \Rightarrow \cos(A - 90) = \frac{y}{r}$ [43], [44]
R_6: $D_2 \Rightarrow E_6 \Rightarrow E_9$ [45]
R_7: $D_2 \Rightarrow E_7 \Rightarrow E_{10}$ [46]

[47] G1A: [Durante el proceso fueron escribiendo lo siguiente (Fig. 14)]:

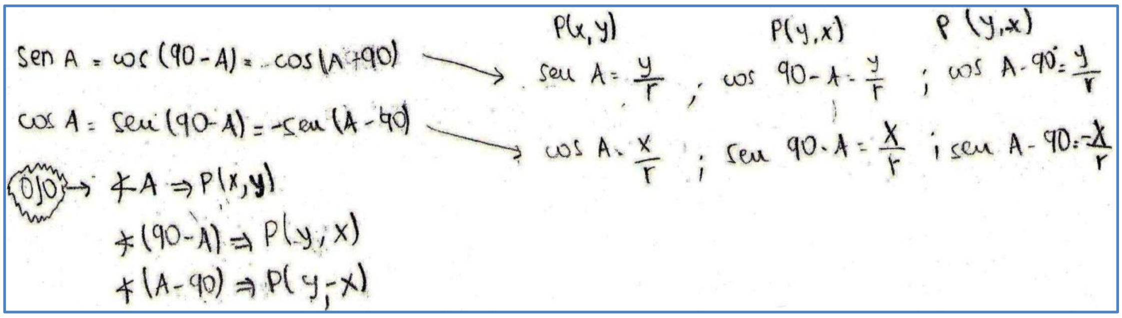


Figura 14: Texto de la hoja de trabajo del grupo G1A

[48] G1A: [En el texto de la hoja (Fig. 14), se evidencia que el grupo cambia el enunciado E_1 (agrega el signo menos en el tercer miembro de la igualdad) por el enunciado E_{11} que presentamos a continuación]:

D_4: **E_8**: $\cos(A) = \frac{x}{r}$,
E_9: $\text{sen}(90 - A) = \frac{x}{r}$,
E_{10}: $\text{sen}(A - 90) = \frac{-x}{r}$
→ (Algebra) → **E_{11}**: $cos(A) = sen(90 - A) = -sen(A - 90)$ [47]

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

En el intento de demostrar el enunciado E_1, el grupo, usando las sugerencias e intervenciones de la profesora, demuestra nuevamente de manera analítica y dentro de un marco de la trigonometría del plano cartesiano que $sen(A) = cos(90 - A) = cos(A - 90)$. Esta nueva demostración surge más por las continuas intervenciones e interés de la profesora en que usen las definiciones de las razones en el plano cartesiano, determinadas por las coordenadas de los lados terminales de cada uno de los ángulos. Algunas intervenciones causan confusión en el grupo porque la profesora vuelve a las definiciones en el triángulo rectángulo (E_3, E_4). El grupo se siente seguro en el marco de la trigonometría del triángulo y usa este hecho para justificar satisfactoriamente sus argumentos, generando nuevamente algo de confusión con la profesora. Durante el proceso de demostración el grupo va produciendo los enunciados E_2 a E_{10}, que involucran las definiciones y relaciones entre las razones seno y coseno de los tres ángulos. Al final del proceso se dan cuenta del error en el tercer miembro de la igualdad [39], plantean la relación correcta (E_{10}), la justifican ([40] a [46]) y la corrigen, dando lugar a la relación verdadera (E_{11}).

Finalmente se puede concluir que usan lo aprendido para construir una demostración inductiva, caracterizada por usar como referencia únicamente un ángulo A en el segundo cuadrante, y por consiguiente $A - 90$ en el primer cuadrante y $90 - A$ en el cuarto cuadrante.

Un “error” cometido por los estudiantes, tal vez inducido por la misma construcción del archivo, consiste en considerar los ángulos A, $90 - A$ y $A - 90$, como ángulos de cada uno de los triángulos (todos agudos) y no como ángulos en posición normal (entre –360º y 360º). Este error, de alguna manera se subsana, por el hecho de que efectivamente a cada uno de estos ángulos le corresponde un ángulo agudo de referencia en el plano cartesiano (tema que aún no se ha explicado) y al considerar los signos de las abscisas y ordenadas, respecto a un punto P (x, y), tomado como referencia para el ángulo A en cualquier cuadrante. De hecho este “error” sirve para que los estudiantes conecten el marco geométrico con el marco analítico.

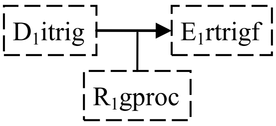
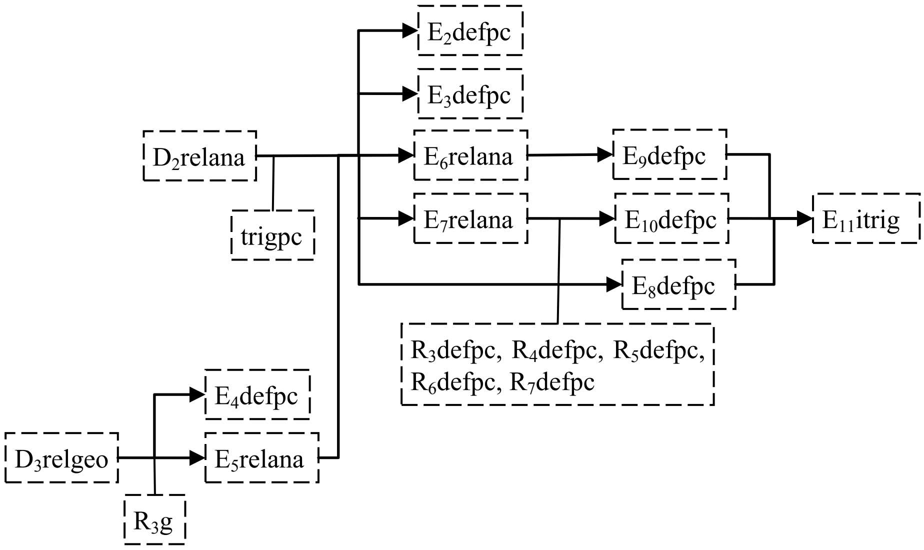
El sistema de representación se caracteriza por la estrecha relación entre el uso del diagrama dinámico (L_2) y el uso de expresiones algebraicas para escribir las definiciones y relaciones planteadas (L_1).

La estructura de control va del control del arrastre en Cabri para la visualización de las relaciones (Σ_2), hacia el control teórico (Σ_3) para explicar, a través de relaciones matemáticas y las definiciones los enunciados y argumentos dados.

El marco utilizado como soporte de la demostración está caracterizado por la conexión entre la trigonometría del plano cartesiano (marco analítico) y el triángulo (marco geométrico).

El tipo de demostración es un ejemplo genérico analítico (EGA), puesto que se toma de manera general un ángulo A en el segundo cuadrante y se generalizan todas las propiedades descubiertas en el ejemplo genérico y en todos los enunciados.

ANÁLISIS DE LA UNIDAD COGNITIVA

Esquema global de la fase de conjetura	Esquema global de la fase de demostración
	

defpc: definición en el plano cartesiano.

gproc: generalización del proceso.

itrig: identidad trigonométrica.

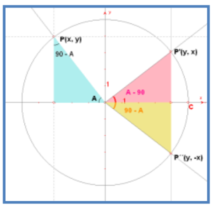
relana: relación analítica.

relgeo: relación geométrica.

rtrif: relación trigonométrica falsa.

trigpc: trigonometría en el plano cartesiano.

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

<table>
<tr><td colspan="3">FASE DE CONJETURA
E_1: $cos(A) = sen(90-A) = sen(A-90)$</td><td colspan="3">FASE DE DEMOSTRACIÓN
E_{11}: $\cos(A) = sen(90-A) = -\operatorname{sen}(A-90)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">CONCEPCIÓN COMO SOPORTE DE LA ARGUMENTACIÓN</td><td colspan="3">MARCO UTILIZADO COMO SOPORTE DE LA DEMOSTRACIÓN</td></tr>
<tr><td>OPERADORES
R_1: Generalización del proceso realizado en la demostración anterior.</td><td>SIST. DE REPR.
L_1: Uso de expresiones algebraicas.</td><td>E. DE CONTROL
Σ_1: Teórico: si sen(A) = cos(90 – A) = cos(A – 90)</td><td>PROP. MATEM.
R_2: Definición de las razones en el plano cartesiano.
R_3: Archivo 2.6.1
</td><td>SIST. DE REPR
L_3: Dibujo. ↔
L_1: Uso de expresiones algebraicas.</td><td>E. DE CONTROL
Σ_2: Arrastre en Cabri ↔
Σ_3: Visualización de las relaciones en el ordenador Dibujo ↔
Σ_4: Teórico.</td></tr>
</table>

			R$_3$: $D_2 \Rightarrow E_9$ **R**$_4$: $D_2 \Rightarrow E_6 \Rightarrow E_3$ **R**$_5$: $E_2 \Rightarrow E_7 \Rightarrow \cos(A-90) = \frac{y}{r}$ **R**$_6$: $D_2 \Rightarrow E_6 \Rightarrow E_9$ **R**$_7$: $D_2 \Rightarrow E_7 \Rightarrow E_{10}$		
Marco perceptivo - algebraico			Trigonometría en el plano cartesiano ↔ Trigonometría en el triángulo rectángulo.		
RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA					

Análisis de la continuidad estructural

FASE DE CONJETURA	FASE DE DEMOSTRACIÓN
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Por analogía.	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización sobre el enunciado anterior.	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Inductiva.

FASE DE CONJETURA	FASE DE DEMOSTRACIÓN
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN **EGA**: La demostración de los enunciados E_8, E_9 y E_{10} que representan la relación, está basada en la generalización de las propiedades descubiertas en el ejemplo genérico (E_{1p}) y los enunciados E_1 a E_{10}.
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Hay ruptura cognitiva, caracterizada por la ruptura referencial, a pesar de la continuidad estructural. La ruptura referencial se da por las continuas intervenciones de la profesora o del investigador, buscando que los estudiantes salgan de un empirismo puro a una demostración deductiva usando las propiedades matemáticas, definiciones, axiomas y teoremas aprendidos en anteriores actividades o en el transcurso del desarrollo de la misma. La ruptura del sistema de referencia se observa directamente en la tabla comparando los operadores, también se refleja en los tipos de controles detectados en la demostración que no fueron explícitos en la conjetura. La unidad estructural se observa por el hecho de que, la conjetura corresponde a la generalización de un enunciado, producto de un proceso de demostración realizado en la actividad anterior y la demostración corresponde a la generalización de los enunciados que surgen del enunciado E_{1p} (ejemplo genérico) planteado por la profesora.

El esquema global de la demostración, nos muestra las conexiones entre los diferentes pasos de argumentación, que conllevan al planteamiento y demostración de la identidad trigonométrica (E_{11}); también muestra las conexiones que logran establecerse entre el marco geométrico y analítico.

Consideramos que la ruptura referencial entre los dos procesos es necesaria, para que los estudiantes puedan plantear y demostrar relaciones que usen de manera más conectada e interrelacionada los marcos de la trigonometría en el triángulo y la trigonometría en el plano cartesiano.

Una conclusión particular de este proceso tiene que ver con el hecho de que, en ocasiones las intervenciones del profesor pueden causar confusión en los estudiantes, pero a su vez se resalta el hecho de que si el estudiante está convencido y sabe argumentar adecuadamente (como el caso de Mapa) se puede lograr que los estudiantes y el profesor se comprendan y se pongan de acuerdo en sus concepciones y marcos utilizados.

6.5 Ruptura referencial – argumentación inductiva – demostración genérica intelectual

Si la ruptura cognitiva es causada por la ruptura del sistema de referencia y se construye una demostración tipo ejemplo genérico intelectual (EGI), consideramos que aunque hay continuidad estructural, hay más posibilidades de una ruptura estructural que conlleve a la construcción de una demostración deductiva, puesto que las generalizaciones que hacen los estudiantes corresponden a una generalización del proceso, en donde se logra transformar los operadores y controles perceptivos en propiedades matemáticas y controles teóricos; los argumentos son propiedades matemáticas generales que se recuerdan al trabajar en el ejemplo y no son propiedades matemáticas particulares del ejemplo. En estos casos de demostraciones tipo EGI se empieza a tener un control teórico sobre el proceso de demostración, y esto favorece el uso de un razonamiento deductivo y la construcción de demostraciones deductivas, como se puede deducir de los casos que presentamos a continuación. Los casos son similares, pero el caso 6 tiene como hecho adicional la complejidad para comprender la demostración algebraica de una razón cuando los dos valores varían.

6.5.1 Caso 5: Actividades 2.5.3, 2.5.4 – Grupo G2A

2.5.3 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre $\boldsymbol{cos(A)}$ y $\boldsymbol{cos(-A)}$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.5.4 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.5.3.

PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

[1] G2A: *Ahora sigue coseno.*

[2] Mabe: *No se, coseno no cambia ni en el primero ni en el cuarto.*

[3] Cata: *Es lo mismo.*

[4] Mabe: *No se, igual, si tu tienes, o sea.*

[5] Cata: *Ahí va a pasar lo mismo.*

[6] Mabe: *Mira, dale coseno de treinta y luego coseno de menos treinta, y verá que le va a dar, por que mira, si tienes treinta acá y tienes treinta acá* [señala los ángulos de 30º y –30º], *el coseno es positivo aquí y aquí, por lo que es x sobre r y aquí es x, digamos ciento cincuenta y menos ciento cincuenta …*

[7] Cata: *¿Qué vas a hacer?*

[8] Mabe: *¿Cuál es la conjetura?*

[9] Cata: *Que seno de A es igual a menos seno de …*

[10] Mabe: *Coseno.*

[11] Cata: *Perdón, coseno de A es igual a coseno de menos A, veamos otro ejemplo, o sea esto es lo mismo, pero con coseno y sin el menos. Coseno de A es igual a coseno de menos A.*

D₁: coseno igual en cuadrante I y IV [2]
D₂: $\cos(30) = \cos(-30)$[6]
D₃: $\cos(A) = \frac{x}{r}$ [6]

→ **E₁:** $\cos(A) = \cos(-A)$ [11]

R₁: Generalización sobre los enunciados

Marco perceptivo-numérico

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

El grupo recuerda algunas propiedades visualizadas en la actividad 2.5.1, prueba un caso particular y recuerda la definición de coseno para plantear la identidad trigonométrica que relaciona un ángulo A y su opuesto $-A$.

El operador de la concepción R_1 es la generalización de los datos obtenidos.

El sistema de representación L_1 es el lenguaje algebraico, expresado de manera verbal con el uso de variables y escrito en la hoja de trabajo.

El control Σ_1 es numérico, basado en el ejemplo realizado en la calculadora. Se puede intuir un control Σ_2 teórico, basado en la relación anterior $sen(A) = -sen(-A)$, en el dato D_1 y la definición de coseno en el plano cartesiano (D_3). Por analogía con el problema resuelto en la anterior actividad los estudiantes usan este control en la nueva conjetura [1] a [11].

La forma de argumentación es constructiva, ayudada de la analogía con la actividad anterior.

La estructura de la conjetura es de una argumentación inductiva por generalización de los enunciados.

PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

[12] Mabe: *¿Cómo la demostramos?* […] *Cata eso es así porque…*

[13] Cata: *O sea, no se, no se porque, o sea, ¿cómo es la cosa de...? ¿de esto que? de…, es x sobre r ¿verdad?* [Escribe en la hoja de trabajo: $\begin{array}{c}\cos(\mathrm{A}) = \cos(-\mathrm{A}) \\ \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{r}} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{r}}\end{array}$]

F: débil

D_1, D_2, D_3 → **E_1:** $\cos(A) = \cos(-A)$ [11]

R_2: $\begin{array}{c}\cos(A) = \cos(-A) \\ \frac{x}{r} = \frac{x}{r}\end{array}$ [13]

Marco algebraico

[14] Mabe: *Esa no puede ser la demostración, la demostración, yo creo que es… porque… eh…*

[15] Cata: *Esa se puede demostrar igual que la de arriba, Jorge ven un segundo.*

[16] Inv.: *Cuénteme.*

[17] Cata: *¿Cómo se demuestra la de coseno? O sea, ¿simplemente porque si?*

[18] Inv.: *¿Cómo así? ¿Cuál es la relación entre el coseno?*

[19] Cata: *Es igual.*

[20] Inv.: *¿Cuál es la conjetura?*

[21] Cata: *Que el signo es el mismo.*

[22] Inv.: *No, ¿Cuál es la conjetura?*

[23] Mabe: *Que coseno de A es igual al coseno de menos A.*

[24] Inv.: *Exacto, la conjetura es que coseno de A es igual a coseno de menos A, ¿cómo se dieron cuenta de eso?*

[25] Mabe: *Es que como los ángulos salen del eje x positivo en el sentido de las manecillas del reloj o en contra, entonces, el coseno es positivo en el primero y en el cuarto cuadrante, entonces digamos, si tienes un ángulo agudo que mida setenta, entonces va a ser positivo, y si tiene uno que mida menos setenta en este cuadrante también va a ser positivo el coseno.*

[26] Inv.: *Bueno, y qué pasa si…*

[27] Mabe: *Porque es que está en el mismo lado la x.*

[28] Inv.: *¿Si el ángulo es mayor de noventa?*

[29] Mabe: *Es igual, van a ser negativos ambos porque aquí está en estos dos cosenos negativos.*

D_1, D_2, D_3 → **E_1:** $\cos(A) = \cos(-A)$ [11]

R_3: **D_1**: coseno igual en cuadrante I y IV [25]
R_4: $\cos(70) > 0, \cos(-70) > 0$ porque *x* está en el mismo lado [25], [27]
R_5: Si $A > 90° \Rightarrow \cos(A) < 0$ [28], [29]

Marco perceptivo numérico

[30] Inv.: *Eso es correcto, entonces, eso les sirvió para darse cuenta que coseno de A es igual a coseno de menos A, bueno, esa es la conjetura, ¿ahora cómo demuestran la conjetura?*

[31] Cata: *¿Es así?* [señala lo escrito en la hoja de trabajo en [13]], *es que Ruby me dijo que así no podía comprobar, la otra es que es muy obvio.*

[32] Inv.: *¿Qué es lo obvio?*

[33] Mabe: *Cata no sabe por qué es que en cada cuadrante, o sea, en el primero y en el cuarto, coseno es positivo, y en los otros dos es negativo, por lo…*

[34] Cata: *Es por la coordenada x, es que en estos dos cuadrantes la coordenada x es positiva* [señala los cuadrantes I y IV], *y en estos dos la coordenada x es negativa* [señala los cuadrantes II y III].

F: débil

D_1, D_2, D_3 → **E_1:** $\cos(A) = \cos(-A)$ [11]

R_2: [31]
R_6: $\cos(A) > 0$ en cuadrante I y IV porque $x > 0$ [34]
R_7: $\cos(A) < 0$ en cuadrante II y III porque $x < 0$ [34]

Plano cartesiano

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

La fuerza de argumentación es débil porque no creen en su demostración, les parece obvio lo que hicieron, además que la profesora las confunde diciéndoles que así no pueden demostrarlo [tal vez porque no han demostrado que los valores de las abscisas son iguales]. Se observa cómo se pasa de una demostración con estructura deductiva, cuya fuerza de inferencia es débil, al uso de pasos inductivos y deductivos para justificar la demostración algebraica realizada. Esto indica que la demostración, aunque usa elementos y procedimientos teóricos, no se puede catalogar de demostración deductiva. Además, también se evidencia que las estudiantes solamente están considerando el ángulo A entre 0° y 180° y el ángulo $-A$ entre 180° y 360°.

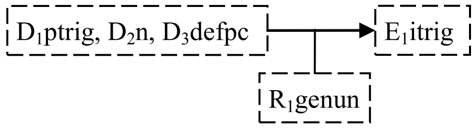
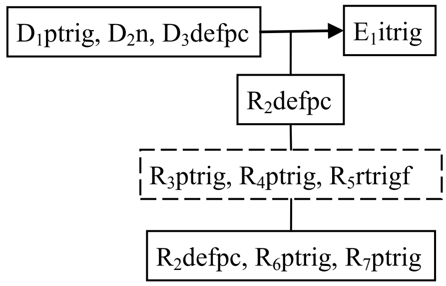
El operador R_2 es teórico, basado en la definición de coseno en el plano cartesiano y el uso de las propiedades de las operaciones de números reales, pero los operadores R_3 a R_7 son operadores perceptivos, basados en los datos observados en el archivo, de hecho el operador R_5 es erróneo al generalizar la relación para cualquier valor de $A > 90º$.

El sistema de representación va del algebra (L_1) al lenguaje natural (L_2) para expresar verbalmente las relaciones y propiedades (operadores R_2 a R_7) que usan para tratar de convencerse a si mismos y al investigador de la demostración construida.

El control, inicialmente es teórico (Σ_2), caracterizado por la analogía con el anterior problema y por el uso de la definición de coseno en el plano y del algebra para verificar la igualdad, luego un control perceptivo numérico (Σ_3) basado en el uso de ejemplos y la visualización de relaciones en el diagrama dinámico.

La estructura de la demostración va de lo deductivo a lo inductivo. Analizando el proceso en general proponemos que la estructura es inductiva y el tipo de demostración es EGI al tratarse de una generalización inductiva con argumentos matemáticos sobre el proceso.

ANÁLISIS DE LA UNIDAD COGNITIVA

Esquema global de la argumentación	**Esquema global de la demostración**
	

genun: generalización de los enunciados.

rtrigf: relación trigonométrica falsa.

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

ARGUMENTACIÓN **E_1**: $cos(A) = cos(-A)$			**DEMOSTRACIÓN** **E_1**: $cos(A) = cos(-A)$		
CONCEPCIÓN			CONCEPCIÓN		
OPERADORES	**SIST. DE REPR.**	**E. DE CONTROL**	**OPERADORES**	**SIST. DE REPR**	**E. DE CONTROL**
R_1: Generalización sobre los enunciados	**L_1**: Lenguaje algebraico.	Σ_1: numérico en la calculadora. Σ_2: Teórico (uso de la analogía con la actividad anterior). y de la definición de coseno en el plano.	**R_2**: $\cos(A) = \cos(-A)$ $\frac{x}{r} = \frac{x}{r}$ **R_3**: **D_1**: coseno igual en cuadrante I y IV **R_4**: $\cos(70) > 0, \cos -70 > 0$ porque x está en el mismo lado **R_5**: Si $A > 90° \Rightarrow \cos(A) < 0$ **R_6**: $\cos(A) > 0$ en cuadrante I y IV porque $x > 0$ **R_7**: $\cos(A) < 0$ en cuadrante II y III porque $x < 0$	**L_1**: Lenguaje algebraico. **L_2**: Lenguaje natural.	Σ_2: Teórico (uso de la analogía con la actividad anterior) y de la definición de coseno en el plano. Σ_3: perceptivo.
Marco perceptivo – numérico			Marco algebraico – perceptivo		

RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA

Análisis de la continuidad estructural

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización de los enunciados	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Inductiva (Ded – Ind – Ded).
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN **EGI**: Generalización inductiva con argumentos matemáticos sobre el proceso
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Hay ruptura cognitiva por la ruptura del sistema de referencia. En el proceso de demostración el grupo realiza algunos procedimientos que corresponden a pasos de estructura deductiva, pero luego usa argumentos inductivos y deductivos para dar soporte a estos argumentos deductivos. Esto se evidencia más en el esquema global propuesto para el proceso de demostración, en donde consideramos que las acciones y discusiones realizadas por el grupo, después de realizada la demostración algebraica, se deben a que los mismos estudiantes no están convencidos de su demostración; por ello recurren inicialmente a la convalidación del proceso por parte de la profesora (demostración por convicción externa (Harel y Sowder, 1998)). Al no obtener esta validación, intentan dar nuevos argumentos basados en ejemplos y propiedades trigonométricas perceptivas (R_3 a R_7) para validar el operador R_2.

El grupo ha aprendido algunos procedimientos necesarios para una demostración deductiva, pero hace falta comprensión y credibilidad en ellos. También concluimos que la intervención del profesor no fue la adecuada para el logro de la confianza y comprensión.

6.5.2 Caso 6: Actividades 2.5.5, 2.5.6 – Grupo G2A

2.5.5 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre $tan(A)$ y $tan(-A)$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.5.6 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.5.5.

PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

[1] Cata: *¿Tangente es qué? x sobre y. entonces, aquí es positivo, aquí es negativo, aquí es negativo y aquí es positivo* [se refiere a los cuadrantes]. *Entonces es lo mismo.*

[2] Mabe: *No, que el seno de A.*

[3] Cata: *O sea, por ejemplo, si este queda por acá, el otro va a quedar acá y el otro va a ser negativo. En estos cuadrantes los dos son negativos.*

[4] Mabe: *No.*

[5] Cata: *Claro, porque aquí hay una negativa y aquí también, ah mentiras, estas dos son negativas.*

[6] Mabe: *Tangente es positivo en este y en este, entonces si tienes un ángulo obtuso, digamos de 150, el ángulo negativo va a ser acá, entonces, este va a ser positivo y este va a ser negativo, es como la de…, como la de seno.*

[7] Inv.: *¿Cómo quedaría la relación?*

[8] Cata: *Como la de seno.*

[9] Inv.: *¿Cómo?*

[10] G2A: *Que tangente de A es igual a menos tangente de menos A* [escriben en la hoja de trabajo: $\tan(\mathrm{A}) = -\tan(-\mathrm{A})$].

[11] Inv.: *¿Cómo se dieron cuenta de eso?*

[12] Cata: *Pues viendo en que cuadrantes era positiva la tangente, y en cuales era negativa.*

D₁: $\tan(A) = \frac{x}{y}$ [1]
D₂: tangente positiva en el cuadrante I y III, tangente negativa en el cuadrante II y IV [1], [3], [5]
D₃: $\tan(150) < 0,\ \tan(-150) > 0$ [6]

→ **E₁**: $tan(A) = -tan(-A)$ [10]

R₁: Generalización de los datos y analogía con los enunciados de las actividades anteriores [1], [2], [6], [8]

Marco perceptivo [12]

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

El grupo recuerda erróneamente la definición de tangente (D_1) y analiza el signo en los cuadrantes, dándose cuenta por analogía que la relación es de inversos aditivos como el caso de la razón seno, proponen un ejemplo y plantean la identidad trigonométrica (E_1).

El operador R_1 es una generalización de los datos observados y uso de la analogía con lo realizado en los problemas 2.5.1 a 2.5.4.

El sistema de representación está caracterizado por el uso del diagrama dinámico (L_1) para ver los signos de la tangente y el uso del lenguaje algebraico (L_2) para referirse a las variables y escribir en la hoja de trabajo la identidad planteada.

El control es perceptivo (Σ_1), basado en lo que ven en el diagrama dinámico. Se puede inferir un control teórico (Σ_2), basado en la definición de tangente, que aunque está planteada de manera errónea, al depender de las variables *x* e *y*, permite observar correctamente los signos en el plano cartesiano y permite plantear la identidad correcta. También se supone que al usar la analogía con el proceso anterior hay un control teórico implícito (Σ_3).

La forma de argumentación es constructiva y la estructura de la conjetura es inductiva.

PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

[13] I: *¿Cómo demuestran eso?*

[14] Mabe: *Esto es…, tangente es…*

[15] Cata: *y sobre x, es igual a menos…, menos y…* [escriben en la hoja de trabajo: $\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = -\frac{(-\mathrm{y})}{}$], *yo tengo, ah, espera, dígame una cosa, aquí como se hace, tendría, o sea, aquí hay que hacer dos relaciones diferentes ¿verdad? Una para x y otra para y.*

[16] Mabe: *¿Por qué?*

[17] Cata: *Porque es que las dos son cambiantes, no es como en el seno, que el radio es constante, y siempre va a ser positivo, aquí también puede ser que x sea negativa, por ejemplo, entonces la razón da negativa, pero y puede ser positiva. Toca hacer dos diferentes.*

D₄: $x < 0$, $tan(A) < 0$ [17] → **E₂**: $y > 0$ [17]

R₂: Ley de los signos [17]

[18] Mabe: *¿Entonces cómo se escribe?*

[19] Cata: *Por ejemplo, menos, menos y sobre x* [completa la igualdad que dejó pendiente en [15]: $\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = -\frac{(-\mathrm{y})}{\mathrm{x}}$]

F: débil

D_1, D_2, D_3 → **E₁**: $tan(A) = -tan(-A)$ [10]

R₃: $\tan(A) = -\tan(-A)$, $\frac{y}{x} = -\frac{-y}{x}$ [19]

Marco algebraico

[20] Inv.: *Espera, si tu escribes y sobre x…*

[21] Cata: *La otra es al revés.*

[22] Inv.: *No, espérate, con eso es suficiente, ¿sabes por qué?*

[23] Cata: *¿Por qué?*

[24] Mabe: *Porque si y es menos cinco, y igual va a ser menos cinco, porque menos y, sería más cinco, porque este menos de afuera, más cinco, digamos, ah, no, pero.*

D_1, D_2, D_3 → **E_1**: $tan(A) = -tan(-A)$ [10]

R_4: $\tan(A) = -\tan(-A)$, $\frac{-5}{x} = -\frac{5}{x}$ [24]

Marco numérico

[25] Cata: *No.*

[26] Inv.: *¿Qué es lo que dices?*

[27] Mabe: *No se.*

[28] Cata: *¿Cómo hago para tener en cuenta que puede ser x la que cambie?*

[29] Inv.: *Porque cuando tu escribes y sobre x, ¿qué relación? Muevan el ángulo, ¿qué relación hay entre las x y las y en cualquier cuadrante?*

[30] Cata: *No se.*

[31] Inv.: *¿Si tu comparas la x del ángulo A con la x del ángulo –A?*

[32] Cata: *Igual.*

D_5: **E_{11}**: ¿Qué relación hay entre las abscisas de *A* y –*A*? [31] → **E_3**: La abscisa de *A* igual a la abscisa de –*A* [32]

R_5: Relación en el plano cartesiano

[33] Mabe: *Pero solo cuando están en…*

[34] Cata: *Cuando están en el cuadrante de abajo, cuando están, o sea.*

[35] Mabe: *Sólo cuando x y y son positivas, o x y y son negativas es que la tangente es positiva.*

D_6: $(x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$ [35] → **E_4**: $tan(A) > 0$ [35]

R_6: **R_2**: Ley de los signos [35]

[36] Inv.: *¿Por qué se limitan ahí?* [el grupo mueve el ángulo A solamente en el cuadrante III y IV] *¿por qué no la pasan al primer cuadrante? Pasa el azul al primer cuadrante, pasa ahora al segundo cuadrante, ¿qué relación hay entre las x y las y?*

[37] Cata: *El mismo valor, es lo único que hay, porque igual aquí, o sea aquí, es lo que le estaba diciendo, en el eje positivo de las x, las dos x son positivas, y en el eje negativo de las x, las dos x son negativas.*

[38] Inv.: *¿Entonces, las x del ángulo A y del ángulo –A, cómo son?*

[39] Cata: *Ah, ya entendí, iguales, siempre.*

[40] Mabe: *¿Por qué?*

[41] Cata: *Porque x se está moviendo sobre el eje x y no sobre el eje y, si ve, mira aquí, mira, aquí es menos y menos, y acá es más y más.*

[42] Mabe: *Ah.*

[43] Cata: *En cambio las y no se puede hacer porque las y se hace con este y con este, y como no se toma el eje y, sino el eje x.*

[44] Mabe: *Ah si por lo que la posición normal es con el eje x.*

[45] Cata: *Exacto.*

D_5: **E_{11}**
D_7: En el eje *x* positivo, *x* es positivo, y en el eje *x* negativo, *x* es negativo para *A* y *–A* [38]

→ **E_3**: La abscisa de *A* igual a la abscisa de *–A* [39]

R_7: *x* varía sobre el eje *x*, *y* no varía sobre el eje *x* [41] - [44]

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

El grupo no ha comprendido la relación entre las coordenadas de un ángulo *A* y su inverso *–A*, por lo que construye demostraciones de apariencia deductiva, pero sin ninguna fuerza de inferencia, ni grado de convicción, por lo que tienen que recurrir a la convicción con ejemplos y nuevas relaciones que expliquen el proceso algebraico realizado.

A pesar de tener un diagrama dinámico en Cabri, en donde se pueden explorar las razones trigonométricas y sus propiedades en los cuatro cuadrantes, los estudiantes solamente exploran en el cuadrante III o IV a lo máximo. Esto de alguna manera indica que las demostraciones son de tipo ejemplo genérico, ya que la exploración se está haciendo solamente para ángulos entre 0° y 180°, sin tener en cuenta lo que sucede con los ángulos negativos, ni los comprendidos entre 180° y 270°.

En esta fase el grupo empieza utilizando el operador teórico R_2, basado en la definición de tangente y el análisis de la ley de los signos, pero debido a la debilidad de la fuerza de inferencia y al poco grado de credibilidad en su demostración, recurren al uso de operadores perceptivos (R_3 a R_6), basados en la exploración de otras propiedades de las variables *x* e *y*, para el análisis de la razón tangente, con miras a convencerse de la demostración realizada.

El sistema de representación va del uso del diagrama dinámico de Cabri (L_1), al lenguaje natural (L_3) para expresar verbalmente las propiedades visualizadas y plasmar en la hoja de trabajo la demostración en un lenguaje algebraico (L_2),

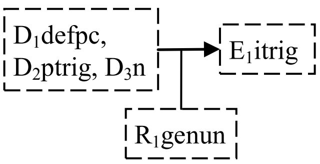
El control inicial es teórico (Σ_2), pero se pasa a un control numérico (Σ_4) y de arrastre en Cabri (Σ_1) para visualizar las propiedades que ayuden a justificar lo realizado.

La estructura de la demostración, a pesar de tener algunos pasos deductivos es inductiva.

El tipo de demostración es un ejemplo genérico intelectual, al justificar la demostración en las propiedades recordadas cuando *A* está en el cuadrante III y IV.

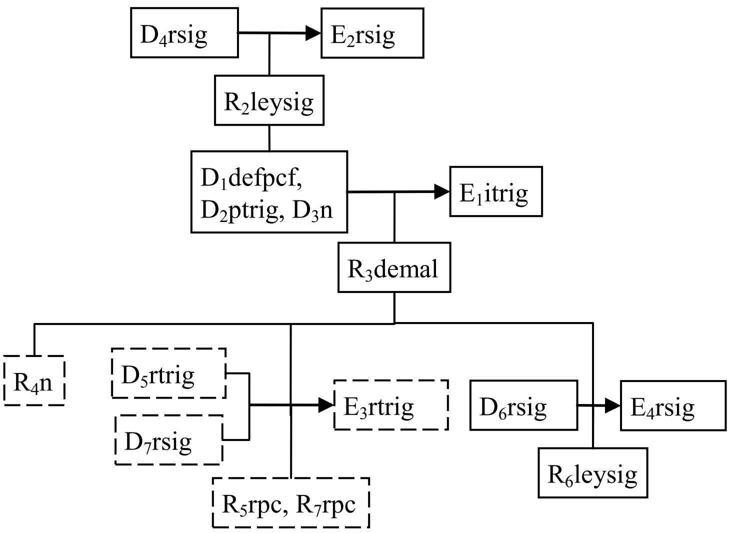
ANÁLISIS DE LA UNIDAD COGNITIVA

Esquema global de la argumentación



genun: generalización de los enunciados.

Esquema global de la demostración



defpcf: definición plano cartesiano falsa.

demal: demostración algebraica.

leysig: ley de los signos.

ptrig: propiedad trigonométrica.

rpc: relación en el plano cartesiano.

rsig: relación de signos.

rtrig: relación trigonométrica.

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

<table>
<tr><td colspan="3">ARGUMENTACIÓN
E$_1$: $tan(A) = -tan(-A)$</td><td colspan="3">DEMOSTRACIÓN
E$_1$: $tan(A) = -tan(-A)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">CONCEPCIÓN</td><td colspan="3">CONCEPCIÓN</td></tr>
<tr><td>OPERADORES
R$_1$: Generalización de los datos y uso de la analogía.</td><td>SIST. DE REPR.
L$_1$: Diagrama dinámico.
L$_2$: Lenguaje algebraico.</td><td>E. DE CONTROL
Σ_1: Arrastre en Cabri para visualizar relaciones y propiedades
Σ_2: Teórico (definición de tangente).
Σ_3: Teórico (uso de la analogía con la actividad anterior).</td><td>OPERADORES
R$_2$: Ley de los signos
R$_3$: $\tan(A) = -\tan(-A)$ $\frac{y}{x} = -\frac{-y}{x}$
R$_4$: $\tan(A) = -\tan(-A)$ $\frac{-5}{x} = -\frac{5}{x}$
R$_5$: Relación en el plano cartesiano.
R$_6$: R$_2$.
R$_7$: x varía sobre el eje x, y no varía sobre el eje x.</td><td>SIST. DE REPR
L$_1$: Diagrama dinámico.
L$_2$: Lenguaje algebraico.
L$_3$: Lenguaje natural.</td><td>E. DE CONTROL
Σ_2: teórico: (definición de tangente en el plano y del algebra)
Σ_4: perceptivo numérico.
Σ_1: Arrastre en Cabri para visualizar relaciones y propiedades.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Marco perceptivo – numérico – analítico</td><td colspan="3">Marco algebraico – numérico – perceptivo</td></tr>
<tr><td colspan="6">RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA</td></tr>
</table>

Análisis de la continuidad estructural

ARGUMENTACIÓN	**DEMOSTRACIÓN**
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización de los enunciados	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Inductiva.
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN **EGI**: Generalización inductiva de las propiedades visualizadas en las coordenadas de los ángulos A y $-A$ cuando A está en el cuadrante III y IV.
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Aunque el sistema de representación y el control en ambas fases es muy similar, se da una ruptura del sistema de referencia debido a que los operadores usados en la demostración no están relacionados con el único operador de la conjetura. Consideramos que esta ruptura es necesaria para poder construir una demostración deductiva, pero al analizar todo el proceso, observamos que existe una continuidad estructural que no posibilita dicha construcción. En el esquema global de la demostración se puede ver el proceso realizado para la construcción de la demostración, en donde se aprecia el uso de pasos inductivos para dar soporte al operador deductivo R_3 correspondiente a la demostración algebraica de la identidad. Esto ocurre debido a la fuerza de inferencia débil y a la falta de convicción en su demostración de parte de los mismos estudiantes.

Tampoco se logró establecer una conexión entre los elementos geométricos del diagrama dinámico de Cabri, las relaciones entre las coordenadas del plano cartesiano y las definiciones de las razones trigonométricas en el plano cartesiano y en el triángulo rectángulo.

Se destaca como algo positivo el hecho de que los mismos estudiantes son quienes no logran convencerse a si mismos y por ello recurren a la búsqueda de otras relaciones y propiedades que soporten sus argumentos.

6.6 Unidad referencial – argumentación inductiva – demostración deductiva falsa

Si la conjetura se plantea por analogía (Polya, 1966, p. 38) con relaciones, procesos y procedimientos realizados en actividades anteriores, sin ningún proceso de exploración, puede que exista unidad del sistema de referencia y se logre la ruptura cognitiva, caracterizada por el cambio de una forma de razonamiento inductivo a una forma de razonamiento deductivo, pero esta ruptura no garantiza la construcción de una demostración correcta (usan operadores falsos) o pertinente al problema planteado como se puede evidenciar con el problema 2.5.3 realizado por el grupo G1A, que presentamos a continuación.

6.6.1 Caso 7: Actividades 2.5.3, 2.5.4 – Grupo G1A

2.5.3 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre $cos(A)$ y $cos(-A)$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.5.4 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.5.3.

PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

[1] Mapa: *¿Qué relación existe entre coseno de A y coseno de menos A? ¿No es lo mismo?*

[2] Diana: *Es lo mismo, pero con x, lo mismo ponemos en valor absoluto.*

[3] G1A: [Escriben en la hoja de trabajo la siguiente conjetura y van repitiendo verbalmente lo que escriben] *Tienen el mismo valor absoluto. Es decir* $|cos\ A| = |cos\ (-A)|$

D₁: Proceso realizado en las actividades 2.5.1 y 2.5.2.
D₂: $|sen(A)| = |sen(-A)|$

E₁: $|\cos(A)| = |cos(-A)|$ [3]

R₁: Generalización de los procesos de las actividades 2.5.1 y 2.5.2:
Si $|sen(A)| = |sen(-A)| \Rightarrow |\cos(A)| = |cos(-A)|$ [1], [2]

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

Los estudiantes leen el enunciado 2.5.3 que invita al planteamiento de una conjetura que relacione el $\cos(A)$ y $cos(-A)$ e inmediatamente plantean que es la misma relación que plantearon en 2.5.1, pero con coseno, es decir, no identificamos un proceso de exploración, ni de justificación, por ello, consideramos que los datos corresponden a los conceptos y relaciones trabajadas en la actividad anterior y que la conjetura es un hecho verdadero, producto de lo realizado y aprendido en la actividad anterior. Suponemos que el razonamiento es inductivo por analogía (Polya, 1966, p. 38).

Consideramos el operador R_1 como una generalización del proceso anterior, lo que nos lleva al planteamiento de una estructura de argumentación inductiva por generalización del proceso.

La estructura de control, parece ser teórica (si $|sen(A)| = |sen(-A)| \Rightarrow |\cos(A)| = |cos(-A)|$).

El sistema de representación es el lenguaje algebraico (L_1).

PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

El grupo va verbalizando y escribiendo en la hoja de trabajo lo siguiente:

[4] G1A: *El coseno de A ¿x sobre r?... x sobre r, entonces, el coseno de – A es – x sobre r.*

[5] G1A: *Y si coseno de A igual a – x sobre r, entonces coseno de – A igual a x sobre r. ¿La misma explicación? x para el ángulo A y el ángulo – A son inversas.*

[6] G1A: [Escribe en la hoja de trabajo lo siguiente]: *Si* $cos(A) = \frac{x}{r} \Rightarrow cos(-A) = \frac{-x}{r}$

$$Si\ cos(A) = \frac{-x}{r} \Rightarrow cos(-A) = \frac{x}{r}$$

x para el ángulo A y el ángulo – A son inversas.

D₁: Actividades 2.5.1 y 2.5.2
D_2: $|sen(A)| = |sen(-A)|$

→ **E_1**: $|\cos(A)| = |cos(-A)|$ [2]

R_2: Si $\cos(A) = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos(-A) = \frac{-x}{r}$ [4], [6]
R_3: Si $\cos(A) = \frac{-x}{r} \Rightarrow \cos(-A) = \frac{x}{r}$ [5], [6]
R_4: x para el ángulo A y el ángulo $-A$ son inversas [5]

Algebra

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

Los estudiantes, apoyados en la actividad anterior, especialmente en lo realizado en la parte final, empiezan a justificar matemáticamente la relación planteada, que es válida, pero no se refiere a los valores de la razón coseno para un ángulo y su inverso.

Los operadores (R_2 a R_4) y la estructura de control utilizados en la construcción de la demostración son teóricos, pero falsos, debido a que están generalizando las propiedades exploradas y "vistas" para la razón seno en el problema anterior, pero que no funcionan para la razón coseno, puesto que la relación entre las abscisas de un ángulo *A* y su inverso *–A*, es de igualdad y no de inversos aditivos.

El sistema de representación es una combinación entre el uso de expresiones algebraicas (R_2, R_3) y el lenguaje natural (R_4).

El tipo de demostración es un Experimento Mental Transformativo (EMT). La relación encontrada en el proceso anterior les sirve como ejemplo para transformar el problema en otro equivalente y realizar las manipulaciones simbólicas para la justificación.

ANÁLISIS DE LA UNIDAD COGNITIVA

Esquema global de la argumentación	Esquema global de la demostración
D_1proc, D_2itrig → E_1itrig R_1gproc	D_1proc, D_2itrig → E_1itrig R_1rmf, R_2rmf, R_3rmf

gproc: generalización del proceso.

proc: proceso.

rmf: relación matemática falsa.

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

<table>
<tr><td colspan="3">ARGUMENTACIÓN
EE_1: $|\cos(A)| = |cos(-A)|$</td><td colspan="3">DEMOSTRACIÓN
E_1: $|\cos(A)| = |cos(-A)|$</td></tr>
<tr><td colspan="3">CONCEPCIÓN</td><td colspan="3">CONCEPCIÓN</td></tr>
<tr><td>OPERADORES
R_1: Hecho (generalización del proceso de la actividad anterior):
Si $|\mathrm{sen}(A)| = |\mathrm{sen}(-A)| \Rightarrow |\cos(A)| = |\cos(-A)|$</td><td>SIST. DE REPR.
L_1: Lenguajes algebraico.</td><td>E. DE CONTROL
Σ_1: Teórico: si $|sen(A)| = |sen(-A)| \Rightarrow |\cos(A)| = |cos(-A)|$</td><td>OPERADORES
R_2: Si $\cos(A) = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos(-A) = \frac{-x}{r}$
R_3: Si $\cos(A) = -xr \Rightarrow \cos(-A) = \frac{x}{r}$
R_4: x para el ángulo A y el ángulo $-A$ son inversas.</td><td>SIST. DE REPR
L_1: Lenguajes algebraico.
L_2: Lenguaje natural.</td><td>E. DE CONTROL
Σ_2: Control teórico caracterizado por el uso de la definición de coseno en el plano y el método de demostración algebraico.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Marco Perceptivo – Algebraico</td><td colspan="3">Marco Algebraico</td></tr>
</table>

CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA

Análisis de la continuidad estructural

<table>
<tr><td>ARGUMENTACIÓN</td><td>DEMOSTRACIÓN</td></tr>
<tr><td>FORMA DE ARGUMENTACIÓN
Es un hecho (Analogía).</td><td></td></tr>
<tr><td>ESTRUCTURA DE LA CONJETURA
Argumentación Inductiva (generalización del proceso realizado en la actividad anterior).</td><td>ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN
Deductiva.</td></tr>
<tr><td></td><td>TIPO DE DEMOSTRACIÓN
Experimento Mental Transformativo (EMT)</td></tr>
</table>

RUPTURA ESTRUCTURAL

Hay distancia cognitiva caracterizada por la ruptura estructural. Se destaca el hecho de que los estudiantes no recurren al uso de ejemplos particulares en ninguno de los dos procesos y que utilizan los conceptos y propiedades aprendidas en anteriores actividades para plantear conjeturas y construir demostraciones, sin embargo, si estos conceptos y propiedades se generalizan, sin ningún proceso de exploración y de reflexión, se puede llegar a conclusiones y demostraciones falsas. A pesar de que la demostración no es correcta, se identifica claramente un proceso de razonamiento abstracto que les permite construir una demostración deductiva. Se destaca el uso de la definición de razón en el plano cartesiano, necesaria para la construcción de demostraciones de relaciones entre las razones de ángulos diferentes a los ángulos agudos.

En este caso la ruptura estructural, realizada por los mismos estudiantes, sin intervención del profesor, es necesaria y favorece la construcción de una demostración deductiva. Seguramente con algunas refutaciones potenciales del profesor se llegue a la demostración deductiva correcta.

6.7 Unidad cognitiva deductiva

Si existe unidad cognitiva, caracterizada porque, además de la continuidad del sistema de referencia se logra la unidad de la estructura deductiva, podemos corroborar lo planteado por Pedemonte (2002, 2005, 2008), quien afirma que la unidad cognitiva favorece la construcción de demostraciones. En nuestro caso, no solamente la construcción de demostraciones deductivas formales, sino también las demostraciones deductivas tipo experimento mental. Los casos 2.6.1 realizado por el grupo G2A y 2.61A, 2.6.1C y 4.2 realizados por el grupo G1A muestran dicha continuidad, en donde se destaca: el uso de propiedades matemática (algunas de ellas exploradas o recordadas al trabajar sobre el experimento) como operadores. Si hay generalización de algún proceso anterior, esta generalización se realiza sobre propiedades y procedimientos verdaderos, se destaca el uso del arrastre en Cabri para la exploración y la verificación; como consecuencia de lo anterior, el control se vuelve teórico, prima los sistemas de representación algebraico y se usan los dibujos geométricos para representar las variables usadas y las relaciones planteadas (hay conexión entre los diferentes sistemas de representación); hay continuidad de marcos, hay conexión entre marcos algebraicos, geométricos y trigonométricos (especialmente la trigonometría del plano cartesiano). Cada caso que presentamos a continuación corresponde a un tipo diferente de demostración deductiva.

6.7.1 Caso 8: Actividades 2.6.1, 2.6.2 – Grupo G2A

2.6.1 ***Explorando, conjeturando y demostrando***
Busca relaciones entre los valores de las razones trigonométricas para los ángulos A, $A - 90$, $90 - A$. Demuéstralas utilizando propiedades matemáticas.

PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

[1] Inv.: *¿Qué relaciones encontraron?*

[2] Cata: $\text{sen}(A) = -\cos(A - 90)$

[3] Inv.: *¿Están seguras?*

[4] Cata: *Sería por ejemplo seno de 60, digamos, y sería coseno de 30, y se le pone un menos, o sea coseno de 30, seno de 60 igual a coseno de 30* [multiplica el signo menos de la razón con el signo menos del ángulo].

[5] Inv.: *¿Qué pasó con el signo menos?*

[6] Cata: *Es que ya se utilizó, es que esto, supongamos que A es igual a 60, entonces sería* [sin hacer ningún cálculo en la calculadora científica o en la de Cabri, escribe en la hoja de trabajo: $\text{sen}(60) = -\cos(60 - 90)$, $\text{sen}(60) = -\cos(-30)$, $\text{sen}(60) = \cos(30)$].

[7] Inv.: *No, ¿está segura? ¿por qué?*

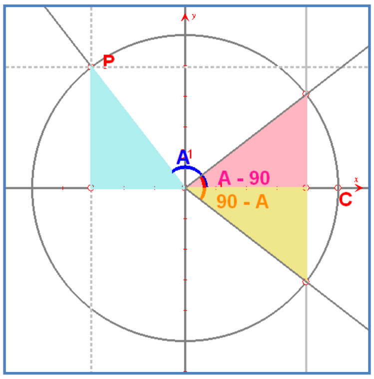
[8] Cata: *¿Pero este signo no lo cambia el de adentro y se vuelve más?* [se refiere a los signos menos de la razón y del ángulo]

[9] Inv.: *Ese signo no afecta al ángulo.*

[10] Mabe: *No afecta porque, queda aquí en este cuadrante* [señala el IV cuadrante] *y en ese cuadrante el signo es negativo.*

[11] Inv.: *Entonces, ¿cuál es la relación?*

[12] Cata: *¿Cuánto es coseno de –30?*



D₁:
D₂: $\text{sen}(60) = \cos(30)$[4]

Rp₁: R₁ es falso [7]

E₁: $sen(A) = -\cos(A - 90)$ [2]

R₁: $sen(60) = -\cos(60 - 90) \Rightarrow sen(60) = -\cos(-30)$ $\Rightarrow sen(60) = \cos(30)$ [4] - [6]

Marco numérico

[13] Inv.: *¿Cuánto es coseno de –30?*

[14] Mabe: *Lo mismo que coseno de 30.*

[15] Inv.: *¿Por qué Mabe?*

[16] Mabe: *Porque coseno se relaciona con x. entonces en el primero y el cuarto son iguales.*

[17] Cata: *¿Entonces, cuánto da coseno de –30?*

[18] Inv.: *Eso da* $\frac{\sqrt{3}}{2}$*, y seno de 60 es* $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

[19] Cata: *¿Si?*

[20] Cata: *Que la razón de seno de A es igual a la razón de coseno de 90 – A y de A – 90.* [Escriben en la hoja de trabajo: $\mathrm{sen}(\mathrm{A}) = \cos(\mathrm{A} - 90)$]

[21] Cata: *Yo había dicho que seno de 60 y coseno de –30 eran iguales y tu dijiste que no, y si son iguales.*

[22] Inv.: *Sí, son iguales, lo que te hice caer en cuenta fue lo del signo, son iguales, pero tu colocaste un menos aquí* [se refiere al signo menos de la razón]. *Entonces, ¿cuál es la relación?*

[23] Cata: *La relación es que* $sen(A) = cos\ (A - 90)$.

[24] Cata: *Es que mira, yo había dicho que* $cos(90 - A) = cos(A - 90)$.

[25] Cata: *Entonces yo estaba diciendo que son iguales las dos, que la relación del seno de A es igual a la del coseno de 90 – A y de A – 90.*

[26] Inv.: *¿Igual a qué?, ahí estás usando una propiedad.*

[27] Cata: *Mejor dicho que esta es seno de A es igual a coseno de A – 90, está bien.*

D$_3$: Rp$_1$
D$_4$: $\cos(30) = \cos(-30)$ porque dependen de x [12] – [16]
D$_5$: $\cos(-30) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{sen}(60)$[17], [18]

E$_2$: $sen(A) = \cos(A - 90) = \cos\ (A - 90)$ [20], [24], [26]

R$_2$: $sen(60) = \cos(-30)$ [21]
R$_3$: $sen(A) = \cos\ (A - 90)$ [23]
R$_4$: $\cos(A - 90) = \cos(90 - A)$ [24]
R$_5$: R$_3$ y R$_4$ $\Rightarrow sen(A) = \cos(A - 90) = \cos\ (A - 90)$ [25] – [27]

Marco numérico – trigonométrico

ANALISIS DEL PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

Apoyados en la intuición (piensan que el signo de la razón se elimina con el signo del argumento), plantean el enunciado E$_1$ que corresponden a una relación falsa. Con la intervención del investigador y la refutación planteada, analizan con datos numéricos la relación planteada, la corrigen y plantean la identidad trigonométrica [E$_2$] que demuestran con argumentos teóricos.

En la justificación del enunciado usan el operador intuitivo R$_1$ que los lleva al error. La argumentación del enunciado E$_2$ la inician con un argumento numérico R$_2$ que le sirve para el planteamiento de una parte del enunciado y para plantear los operadores teóricos R$_3$ y R$_4$.

Usan lo aprendido en las actividades anteriores para plantear de manera implícita el operador teórico R_5, que prácticamente es la demostración del enunciado E_2.

El sistema de representación se mueve del uso del diagrama dinámico (L_1), al uso de expresiones algebraicas en al hoja de trabajo (L_2) en el planteamiento de la conjetura.

El control inicialmente es perceptivo numérico (Σ_1) y termina siendo teórico (Σ_2).

Se puede observar en los esquemas planteados, que la forma de argumentación es estructurante, dado que los argumentos intentan justificar los enunciados planteados con anterioridad.

La estructura de la argumentación empieza siendo inductiva y termina siendo deductiva.

PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

[28] Cata: *¿Cómo demostramos esto?*

[29] Inv.: *¿Cómo la demuestran?*

[30] Cata: *¿Ésta la podemos dejar así? Ésta ya está demostrada* [se refiera a la identidad $[\mathrm{sen}(\mathrm{A}) = \cos(90 - \mathrm{A})]$

[31] Inv.: *¿Cómo? ¿por qué ya está demostrada?*

[32] Cata: *¡Esa es la de siempre!, la del complemento.*

[33] Inv.: *Ah, Sí.*

[34] Cata: *¿Entonces podemos decir simplemente que es por que en el caso del coseno, el ángulo con signo positivo o negativo da el mismo valor de la razón coseno?* [se refiere a $\cos(90 - \mathrm{A}) = \cos(\mathrm{A} - 90)$].

[35] Inv.: *Sí, eso es cierto, cómo escribes eso.*

[36] Mabe: *Hay no estás demostrando eso, hay estás diciendo que* $cos(90 - A) = cos(A - 90)$.

[37] Inv.: *Escriban eso.*

[38] Cata: *¿Eso es transitiva?*

[39] Inv.: *Exactamente.*

[40] Cata: *Si a es igual a b, b es igual a c, a es igual a c.*

[41] Inv.: *Eso es, escríbanlo.*

[42] G2A: [Escriben en la hoja de trabajo]: $cos(90 - A) = cos(A - 90) \Rightarrow sen(A) = cos(A - 90)$ *(Propiedad transitiva)*

[43] Inv.: *Esa sería la demostración, esa sería una forma de demostrar, como ya aceptamos que hay relaciones verdaderas, entonces por la propiedad transitiva, si a es igual a b…*

[44] Cata: *Como ésta* [señala sen(A)] *es igual a ésta* [señala cos(90 – A)] *y ésta* [señala cos(90 – A)] *es igual a ésta* [señala cos(A – 90)]. *Entonces, ésta* [señala sen(A)] *es igual a ésta* [señala cos(A – 90)].

$D_1 - D_5$ → **E_2**: $sen(A) = \cos(A-90) = \cos(A-90)$ [20], [24], [26]

R_6: $sen(A) = \cos(90 - A)$ [29]
R_4: $cos(90 - A) = \cos(A - 90)$ [34]
R_7: Propiedad transitiva de la igualdad [38] – [40], [44]
R_5: $\text{sen (A)} = \cos(90 - A) = \cos(A - 90) \Rightarrow sen(A) = \cos(A - 90)$ [42]

Marco trigonométrico

ANÁLISIS DEL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

El grupo retoma los argumentos planteados para el enunciado E_2, complementa con la propiedad transitiva y realiza una demostración deductiva formal estructurada.

Los operadores son teóricos. El operador R_5 es de una implicación que involucra la propiedad transitiva de la igualdad.

El sistema de representación se caracteriza por el uso del lenguaje algebraico para escribir en la hoja de trabajo las conclusiones (L_2).

El control es teórico (Σ_2) basada en el uso de las identidades trigonométricas y la propiedad transitiva de la igualdad.

ANÁLISIS DE LA UNIDAD COGNITIVA

Esquema global de la argumentación	Esquema global de la demostración
D_1g, D_2n → E_1rtrif; R_1n D_3Rp, D_4n, D_5n → E_2itrig; R_2n, R_3itrig, R_4itrig, R_5itrig	$D_1 - D_5$ → E_2itrig; R_4itrig, R_5ptrans R_6itrig, R_7ptrans

ptrans: propiedad transitiva.

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

ARGUMENTACIÓN **E$_2$**: $sen(A) = \cos(A - 90) = \cos\,(A - 90)$			**DEMOSTRACIÓN** **E$_2$**: $sen(A) = \cos(A - 90) = \cos\,(A - 90)$		
CONCEPCIÓN			CONCEPCIÓN		
OPERADORES	**SIST. DE REPR.**	**E. DE CONTROL**	**OPERADORES**	**SIST. DE REPR**	**E. DE CONTROL**
R$_1$: $sen(60) = -cos(60 - 90) \Rightarrow sen(60) = cos(-30) \Rightarrow sen(60) = cos(30)$ **R$_2$**: $sen(60) = \cos(-30)$ **R$_3$**: $sen(A) = \cos\,(A - 90)$ [23] **R$_4$**: $\cos(A - 90 = \cos 90 - A$ [24] **R$_5$**: R$_3$ y R$_4$ $\Rightarrow sen(A) = \cos(A - 90) = \cos\,(A - 90)$	**L$_1$**: Diagrama dinámico. **L$_2$**: Lenguaje algebraico.	Σ_1: Perceptivo numérico. Σ_2: Teórico (Identidades trigonométricas demostradas).	**R$_4$**: $\cos(A - 90 = \cos 90 - A$ [24] **R$_5$**: R$_3$ y R$_4$ $\Rightarrow sen(A) = \cos(A - 90) = \cos\,(A - 90)$ **R$_6$**: $sen(A) = \cos(90 - A)$ **R$_7$**: Propiedad transitiva de la igualdad.	**L$_2$**: Lenguaje algebraico.	Σ_2: Teórico (Identidades trigonométricas, propiedad transitiva de la igualdad)
Marco perceptivo –numérico – trigonométrico			Marco trigonométrico		
CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA					

Análisis de la continuidad estructural

ARGUMENTACIÓN	**DEMOSTRACIÓN**
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva – deductiva	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Deductiva
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN **DFE**: cadena deductiva basada en argumentos teóricos
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Aunque el proceso de argumentación empezó siendo inductivo, terminó siendo deductivo. En las tablas y en los esquemas globales se identifica la unida cognitiva caracterizada por el la continuidad referencial y estructural.

6.7.2 Caso 9: Actividades 2.6.1A, 2.6.2A – Grupo G1A

2.6.1 ***Explorando, conjeturando y demostrando***

Busca relaciones entre los valores de las razones trigonométricas para los ángulos A, A-90, 90-A. Demuéstralas utilizando propiedades matemáticas.

PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

[1] Mapa: *Mira,* $sen(A) = cos(90 - A) = -cos\ (A - 90)$.

[2] Inv.: *Si, es correcto, ¿cómo se dieron cuenta de eso?*

[3] Mapa: *Por el dibujito* [señala la pantalla del ordenador], *porque, digamos que el triángulo estaba así* [dibuja en la hoja de trabajo lo que estaba viendo en el archivo: un plano cartesiano con un triángulo rectángulo en el primer cuadrante (Fig. 15)]

[4] Mapa: *Entonces el triángulo de A, digamos este* [señala el ángulo formado por el eje positivo x y el lado final del ángulo A], *digamos que este es A, entonces 90 – A vendría siendo este* [se refiere al ángulo complementario de A en el triángulo rectángulo (Fig. 15)]

[5] Diana: *Igual a B.*

[6] Mapa: *Entonces, 90 – A sería igual a B, entonces, por eso,* $sen(A) = cos\ (B)$.

[7] Mapa: *Entonces,* $sen(A) = cos\ (90 - A)$ [va señalando los ángulos A y 90 – A].

[8] Inv.: *Correcto.*

[9] Mapa: *Y si coseno de 90 – A, pongamos que este fuera coseno de B* [se refiere a 90 – A]. *Entonces coseno de A, o coseno de B es igual a menos coseno de menos B, sería igual a menos coseno de menos 90 – A* [va escribiendo en la hoja de trabajo $\mathrm{sen(A) = cos(90 - A) = - cos(-(90 - A))}$], *ya, esa fue la relación.*

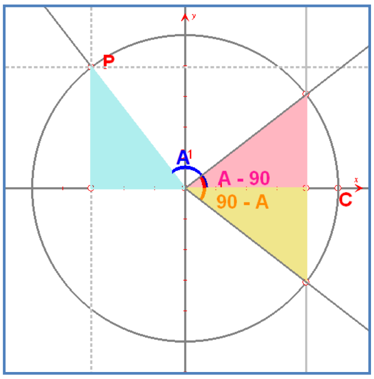
[10] Mapa: *espera,* $sen(A) = cos(90 - A) = cos(-(90 - A))$ *¿Cómo es la pregunta? ¿Coseno de A – 90 es?*

[11] Diana: *Espere,* $sen(A) = cos(90 - A)$ *¿Igual a menos coseno o coseno?*

[12] Mapa: *No se.*

[13] Diana: *Igual a* $cos(90 - A)$ *que es igual a* $cos\ (A - 90)$ [escriben en la hoja de trabajo: $\mathrm{sen(A) = cos(90 - A) = cos(-(90 - A)) = cos(A - 90)}$, hay un cambio de enunciado]

D$_1$**:**

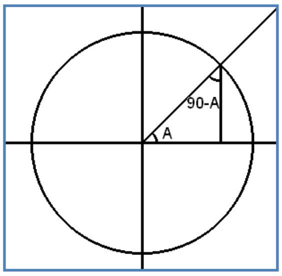


E$_1$: $sen(A) = cos(90 - A) = -cos(-(90 - A))$[1]

E$_2$: $sen(A) = cos(90 - A) = cos(A - 90)$ [13]

R$_4$: $cos(90 - A) = cos(A - 90)$ [13]

R$_1$:



[3]

Figura 15: Dibujo de A y 90 - A

R$_2$: A y $B = 90 - A$ complementarios $\Rightarrow sen\ (A) = cos\ (90 - A)$ [5]

R$_3$: $cos(B) = -cos(-B) \Rightarrow cos(90 - A) = -cos(A - 90)$ [7]

Marco geométrico

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

Inicialmente el grupo plantea el enunciado E$_1$ que tiene un error en el tercer miembro de la igualdad, que no es percibido inicialmente por el grupo ni por el investigador. Plantean una conjetura en forma de argumentación estructurante fundamentada en el uso de propiedades geométricas y de las razones trigonométricas estudiadas en las actividades. En la clase siguiente el grupo se da cuenta del error y plantea el enunciado correcto E$_2$, cuyo operador es la relación de igualdad entre coseno de un ángulo y su inverso (R$_4$).

El sistema de representación se caracteriza por el uso del dibujo geométrico [L$_1$] y el lenguaje algebraico plasmado en la hoja de trabajo [L$_2$].

La estructura de control se caracteriza por el movimiento entre el control geométrico [Σ_1] ejercido por el uso de propiedades geométricas del dibujo, el control teórico [Σ_2] ejercido por el uso de las propiedades de las razones trigonométricas estudiadas en el triángulo rectángulo y el uso de propiedades las operaciones entre números reales.

El tipo de razonamiento es deductivo.

PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

[14] Mapa: *¿Por qué?*

[15] Diana: *Porque* $\mathrm{sen(A)} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{r}}$ [lo enuncia y lo escribe en la hoja de trabajo]

D$_1$ ⇒ E$_1$ ⇒ E$_2$ → **E$_2$**: $sen(A) = cos(90 - A) = cos(A - 90)$ [13]

R$_5$: $sen(A) = \frac{y}{r}$ [15]

Trigonometría en el plano cartesiano

[16] Mapa: *Coseno de A – 90 es…, esto… ¿cuál es A – 90? ¿Este?* [se refiere a los nombres de los ángulos en Cabri]. *Entonces coseno es adyacente, x, sobre…*

[17] Diana: *Hipotenusa.*

[18] Mapa: *¿Por qué da así? ¿ahí toca demostrar que sí?*

[19] Diana: *Ya lo hicimos.*

[20] Mapa: *Pero falta demostrar por qué esto es igual a esto.*

[21] Diana: *Entonces, adyacente sobre hipotenusa, como son isósceles* [se refiere a que los tres triángulos son congruentes], *tienen la misma hipotenusa…*

D$_1$ ⇒ E$_1$ ⇒ E$_2$ → **E$_2$**: $sen(A) = cos(90 - A) = cos(A - 90)$ [13]

R$_6$: $\cos(A - 90) = \frac{adyacente}{hipotenusa}$ [16], [17]
R$_7$: Los triángulos son iguales, entonces sus hipotenusas son iguales [21]

Trigonometría en el triángulo rectángulo

[22] Mapa: *Espere, A es el azul, ¿cierto? Seno de A es y sobre r, coseno de 90 – A es…*

[23] Diana: *es AC sobre A.*

[24] Mapa: *Por eso, es x sobre r, pero…, aunque este es el mismo que este ¿no?*

[25] Mapa: *Y cos A –90, tengo A, le resto 90, queda este triángulo, acá, A – 90, pero A – 90, quedan como triángulos iguales, o sea, A – 90 y A son iguales,* [se refiere a que los triángulos rojo y azul son iguales (Fig. 16)]

[26] Mapa: *Entonces, como son iguales, lo coloco acá, cambian los signos...*

[27] Diana: *Espere, mueva el de 90 hacia el otro lado…, coseno…, es que…, es muy difícil de poner…, digamos, estos comparten el mismo lado.*

[28] Diana: *Entonces son iguales* [se refiere a los triángulos rojo y amarillo respectivamente (Fig. 16)].

[29] Diana: *Entonces el coseno de A – 90, igual a este, pues, el cateto adyacente de A – 90 igual al de 90 – A* (Fig. 16).

[30] […] *Mapa: ¿Sabe cómo es más fácil? Imaginarse este triángulo, aquí, y este triángulo, el mismo, pero éste, ¿sí?* [realiza en la hoja de trabajo el dibujo de la Figura 17]

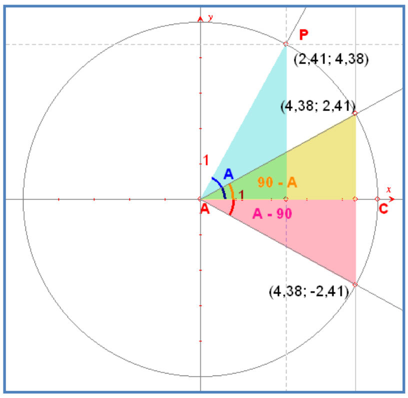


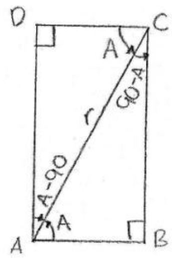
Figura 16: Archivo 2.6.1

E₂: $sen(A) = cos(90 - A) = cos(A - 90)$ [13]

R₈: $\cos(A) = \frac{x}{r}$ [24]

R₉: Triángulo azul igual triángulo rojo [25]

R₁₀: Triángulo rojo igual triángulo amarillo $\Rightarrow$ cateto adyacente de $A - 90$ igual a cateto adyacente de $90 - A$ $\Rightarrow$ $cos(A - 90) = cos(90 - A)$ [23]



R₁₁ [30]

Figura 17: Demostración ΔABC ≅ ΔCDA

Trigonometría en el triángulo rectángulo

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

Se evidencia una interrelación entre la trigonometría del triángulo rectángulo (marco geométrico) y la trigonometría en el plano cartesiano (marco trigonométrico). Finalmente se quedan en el marco geométrico. El grupo reconoce y demuestra gráficamente (Fig. 15) que los triángulos rectángulos son congruentes y usa esta propiedad para referirse a las razones de los ángulos A, $90 - A$ y $A - 90$.

Usan operadores y controles teóricos basados en las definiciones de las razones trigonométricas en el plano y en el triángulo rectángulo y las propiedades geométricas visualizadas en el archivo de Cabri y en los dibujos realizados en la hoja de trabajo.

El sistema de representación se caracteriza por el uso de expresiones algebraicas [L_2], el lenguaje natural [L_3] y el uso del dibujo geométrico [L_1].

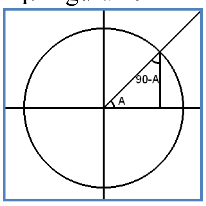
El tipo de razonamiento es deductivo y el tipo de demostración es un experimento mental transformativo (EME), al usar los ejemplos visualizados en Cabri y las propiedades trabajadas en las actividades anteriores para justificar la relación con argumentos matemáticos transformando el problema en un problema ya demostrado ($sen(A) = cos(90 - A)$ y $cos(B) = cos(-B)$).

ANÁLISIS DE LA UNIDAD COGNITIVA

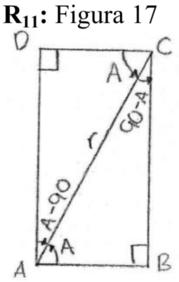
Esquema global de la argumentación	**Esquema global de la demostración**
D_1g → $E_1rtrigf$ → E_2itrig R_1g, R_2itrig, $R_3rtrigf$; R_4itrig	D_1g → E_2itrig $R_5defsenpc$; $R_6defcospc$, R_7g ; $R_8defcostr$, R_9g, $R_{10}itrig$, $R_{11}demg$

defcospc: definición coseno en el plano cartesiano.
defcostr: definición coseno en el triángulo rectángulo.
defsenpc: definición seno en el plano cartesiano.
demg: demostración geométrica.
rtrigf: relación trigonométrica falsa.

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

ARGUMENTACIÓN E_2: $sen(A) = \cos(90 - A) = \cos(A - 90)$			**DEMOSTRACIÓN** E_2: $sen(A) = \cos(90 - A) = \cos(A - 90)$		
CONCEPCIÓN			CONCEPCIÓN		
OPERADORES	**SIST. DE REPR.**	**E. DE CONTROL**	**OPERADORES**	**SIST. DE REPR**	**E. DE CONTROL**
R_1: Figura 15  **R_2**: A y $B = 90 - A$ complementarios $\Rightarrow$ $sen(A) = cos(90 - A)$ **R_3**: $cos(B) = -cos(-B) \Rightarrow cos(90 - A) = -cos(A - 90)$ **R_4**: $cos(B) = cos(-B)$	**L_1**: Dibujo geométrico. → **L_2**: Uso de expresiones algebraicas.	**Σ_1**: Dibujo ↔ **Σ_2**: Teórico: propiedades geométricas, trigonométricas y de las operaciones.	**R_5**: $\text{sen}\, A = \frac{y}{r}$ **R_6**: $cos = \frac{ady.}{hip.}$ **R_7**: Triángulos iguales $\Rightarrow$ hipotenusas iguales **R_8**: $\cos A = \frac{x}{r}$ **R_9**: Triángulo azul = Triángulo rojo. **R_{10}:** Triángulo rojo igual = triángulo amarillo $\Rightarrow$ cateto de $A - 90$ igual a cateto de $90 - A \Rightarrow cos$	**L_2**: Uso de expresiones algebraicas → **L_3**: Lenguaje natural → **L_1**: Dibujo geométrico.	**Σ_2**: Teórico: propiedades geométricas, trigonométricas y de las operaciones ↔ **Σ_3**: Arrastre en Cabri ↔ **Σ_1**: Dibujo.

<table>
<tr><th colspan="3">ARGUMENTACIÓN
EE_2: $sen(A) = \cos(90 - A) = \cos(A - 90)$</th><th colspan="3">DEMOSTRACIÓN
E_2: $sen(A) = \cos(90 - A) = \cos(A - 90)$</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>$(A - 90) = cos\ (90 - A)$

$\mathbf{R_{11}}$: Figura 17

</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Trigonometría del triángulo rectángulo.</td><td colspan="3">Trigonometría en el plano cartesiano → Trigonometría del triángulo rectángulo</td></tr>
<tr><td colspan="6">CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA</td></tr>
</table>

Análisis de la continuidad estructural

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Deductiva.	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Deductiva.
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN **EMT**: Usan lo visualizado en Cabri para transformar el problema en uno ya demostrado y justificar con propiedades matemáticas.
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Se observa la unidad cognitiva, caracterizada por la continuidad referencial y estructural, que conlleva a la construcción de una demostración deductiva. A pesar que los operadores son diferentes en ambas fases, se evidencia la continuidad del tipo de razonamiento y el tipo de concepción que se caracteriza por la relación estrecha entre la trigonometría del triángulo rectángulo y la trigonometría del plano cartesiano. Esta relación se refleja por el hecho de que el grupo utiliza argumentos geométricos y analíticos para realizar una demostración, usando de manera implícita implicaciones lógicas basadas en propiedades estudiadas en las actividades anteriores.

6.7.3 Caso 10: Actividades 2.6.1C, 2.6.2C – Grupo G1A

2.6.1 ***Explorando, conjeturando y demostrando***

Busca relaciones entre los valores de las razones trigonométricas para los ángulos *A*, *A-90*, *90-A*. Demuéstralas utilizando propiedades matemáticas.

PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

Terminada la demostración anterior, el grupo G1A plantea otro enunciado.

[1] Mapa: *Tangente de A sería, el opuesto, o sea y, y sobre x ¿si? Espere…, tangente de A es y sobre x ¿si?*

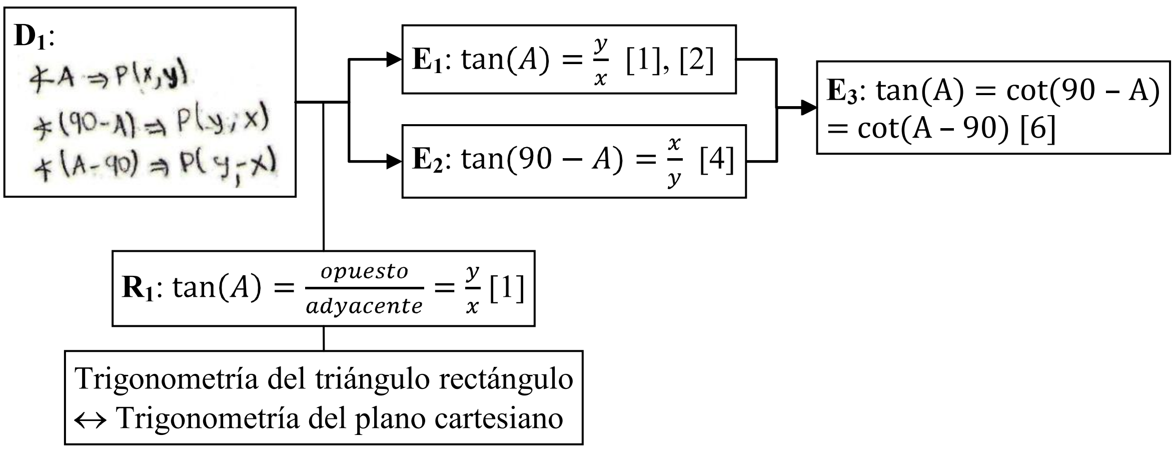
[2] Diana: *y sobre x.*

[3] Mapa: *Ahora, otra que se de, entonces sería x sobre y.*

[4] Diana: *Esa es la tangente, sería y, de 90 – A, el opuesto, sería x sobre y.*

[5] Mapa: *Cotangente.*

[6] Diana: *Entonces, tangente de A es igual a cotangente de 90 – A, igual a cotangente de A – 90.*



ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

El grupo utiliza como dato inicial la información obtenida en el problema anterior, acerca de las coordenadas de los ángulos *A*, 90 – *A* y *A* – 90, para reemplazar en la razón tangente y cotangente y concluye con el enunciado E_3, el cual tiene un error en el tercer miembro de la igualdad.

El operador teórico R_1 muestra la conexión entre las definiciones de las razones en el triángulo rectángulo y el plano cartesiano.

El sistema de representación es el lenguaje algebraico y la estructura de control es teórica en el marco geométrico.

La forma de argumentación es constructiva, porque los datos y resultados obtenidos conllevan a la construcción de la conjetura.

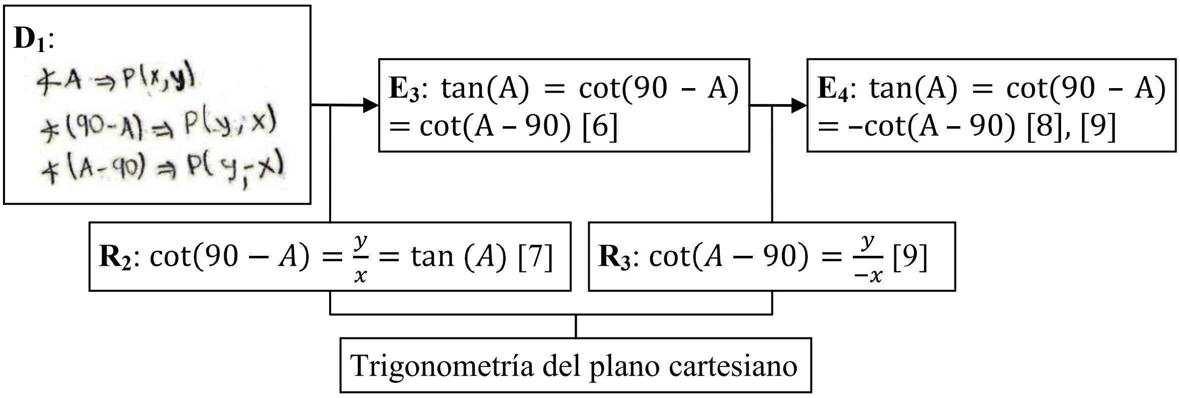
La estructura de la conjetura es deductiva, al usar los enunciados y datos obtenidos para plantear la relación, sin necesidad de usar ejemplos.

PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

[7] Diana: *Esto sobre esto, cotangente* [se refiere a la cotangente de 90 – A, según lo escrito en la hoja de trabajo], *este sobre este, y este es y, y sobre x. Entonces, este es igual a este, mire…, Es lo mismo, tangente de A es igual a y sobre x ¿si?..., tangente de A es igual a y sobre x ¿si? La cotangente es…*

[8] Mapa: *Eso está mal, en la cotangente se toma este.*

[9] Diana: *Entonces sería y sobre menos x.*

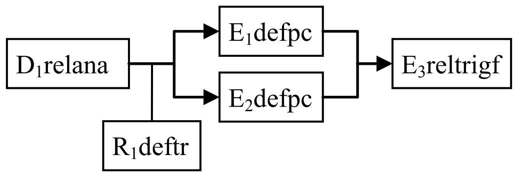
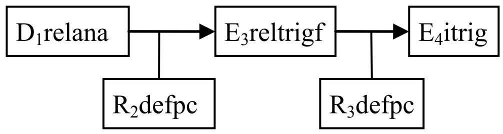


ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

Aunque no se justifica por qué los *x* e *y* son iguales en cada caso (habría que demostrar que los tres triángulo son congruentes, necesidad que más adelante planteó la profesora), el grupo construye una demostración deductiva, basada en las definiciones de las razones trigonométricas en el plano cartesiano (operadores y controles teóricos). Dentro del proceso de construcción, se dan cuenta del error en E_3 y lo corrigen, logrando realizar la demostración de la relación correcta. El sistema de representación es el lenguaje algebraico.

El tipo de demostración es deductiva formal estructural, basada en una secuencia lógica derivada de los datos del problema, que se convierten en teoremas, a través del uso de las definiciones de las razones trigonométricas.

ANÁLISIS DE LA UNIDAD COGNITIVA

Esquema global de la argumentación	Esquema global de la demostración
	

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

ARGUMENTACIÓN **E_4**: $\tan(\mathrm{A}) = \cot(90 - \mathrm{A}) = \cot(\mathrm{A} - 90)$			**DEMOSTRACIÓN** **E_5**: $\tan(\mathrm{A}) = \cot(90 - \mathrm{A}) = -\cot(\mathrm{A} - 90)$		
CONCEPCIÓN			CONCEPCIÓN		
OPERADORES **R_1**: $\tan(A) = \frac{opuesto}{adyacente}$	**SIST. DE REPR.** **L_1**: Uso de expresiones algebraicas.	**E. DE CONTROL** Σ_1: Teórico.	**OPERADORES** **R_2**: $\cot(90 - A=yx= \tan(A)$ **R_3**: $\cot(A - 90=y-x$	**SIST. DE REPR** **L_1**: Uso de expresiones algebraicas.	**E. DE CONTROL** Σ_1: Teórico.
Trigonometría del triángulo rectángulo ↔ Trigonometría del plano cartesiano			Trigonometría del plano cartesiano		

CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA

Análisis de la continuidad estructural

ARGUMENTACIÓN	**DEMOSTRACIÓN**
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Deductiva	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Deductiva
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN **DFE**: Se trata de una demostración, basada en una secuencia lógica derivada de los datos del problema, que se convierten en teoremas, a través del uso de las definiciones de las razones trigonométricas.
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Se evidencia la unidad cognitiva, caracterizada por la continuidad referencial y estructural, que conlleva a la construcción de una demostración deductiva. En los esquemas se evidencia la continuidad en la argumentación, que conlleva a la conexión del marco geométrico con el analítico y a la corrección y demostración de una identidad trigonométrica. Si en la fase de conjetura, el tipo de control es teórico, la forma de argumentación es constructiva y la estructura de la conjetura es deductiva, la probabilidad de construcción de una demostración deductiva es más factible.

6.7.4 Caso 11: Actividad 4.2.1 – Grupo G1A

4.2.1 ***Explorando, analizando y conjeturando.***

¿Qué relación existe entre el radio de la circunferencia y las razones trigonométricas *seno* y *coseno*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

4.2.2 ***Demostrando***

Demuestra tu conjetura planteada en 4.2.1.

PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

Los estudiantes abren el archivo (Fig. 18) y leen la pregunta de la actividad, basados en lo que ven en el ordenador plantean lo siguiente:

[1] Mapa: *Ya se, vea, seno de θ es igual a BA sobre r, entonces, seno de θ r es BA, entonces, r es igual a BA sobre seno de θ* [Escriben en la hoja de trabajo: $sen\theta = \frac{\overline{BA}}{r}$ $sen\theta . r = \overline{BA}$ $r = \frac{\overline{BA}}{sen\theta}$]

[2] Diana: *¿Con el coseno?*

[3] Mapa: *O sea con OA. Acá es coseno* [Escriben en la hoja de trabajo: $\cos\theta = \frac{\overline{OA}}{r}$ $\cos\theta . r = \overline{OA}$ $r = \frac{\overline{OA}}{\cos\theta}$]

[4] Mapa: *Jorge ven, ¿esto sirve? Seno y coseno pueden ser así* [señalan lo escrito en [1] y [2]. El investigador lee y les dice que lo planteado está bien, pero la relación que deben buscar, debe relacionar a la vez el radio, seno y coseno]

[5] Mapa: *¿Entonces no podemos escribir que esto es igual a esto* [señala nuevamente lo escrito en [1] y [2]] y ya?

[6] Inv.: *Eso es correcto, pero no está relacionando las tres cosas a la vez.*

[7] Mapa: *¿Puede ser, r es igual a esto* [señala $r = \frac{\overline{BA}}{sen\theta}$], *igual a esto* [señala $r = \frac{\overline{OA}}{\cos\theta}$]

D$_1$:

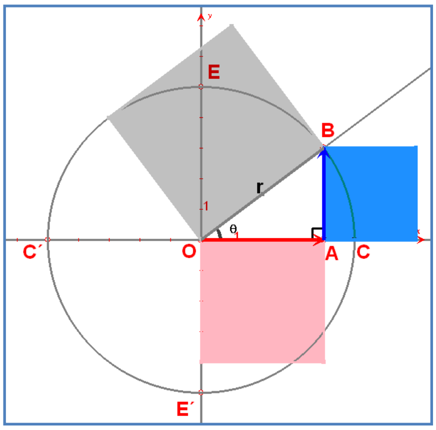


Figura 18: Archivo 4.2 en la posición inicial

E$_1$: $r = \frac{\overline{BA}}{sen\theta} = \frac{\overline{OA}}{cos\theta}$ [7]

R$_1$: $sen\theta = \frac{\overline{BA}}{r} \Rightarrow sen\theta.r = \overline{BA} \Rightarrow r = \frac{\overline{BA}}{sen\,\theta}$ [1]

R$_2$: $cos\theta = \frac{\overline{OA}}{r} \Rightarrow cos\theta.r = \overline{OA} \Rightarrow r = \frac{\overline{OA}}{cos\theta}$ [2]

Marco geométrico – algebraico

[8] Inv.: *Podría ser, pero ¿el gráfico no te sugiere nada? ¿lo que tienes ahí en el archivo no te sugiere nada?*

[9] G2A: [Se quedan durante casi dos minutos observando el archivo sin arrastrar nada]

[10] Inv.: *¿No ven nada? Diana, ¿no ven nada en la gráfica?*

[11] Diana: *¿Lo de Pitágoras? Que esto es…* [señala los catetos e hipotenusa del triangulo rectángulo OAB en el primer cuadrante]

[12] Inv.: *¿Qué esto qué?*

[13] Diana: *Que el cateto debe caber…*

[14] Inv.: *¿Qué es el cateto ahí?*

[15] Diana: *Pues, esto rojo son los catetos* [señala los vectores OA y AB]

[16] Inv.: *¿Ese vector OA, qué es?*

[17] Mapa: *r por… seno.*

[18] Inv.: *El rojo.*

[19] Mapa: *Ah, r por coseno.*

[20] Inv.: *¿Y el vector AB qué es?*

[21] Diana: *r por seno.*

[22] Mapa: *Ah, r por seno, más, no, r por seno a la dos, ¿puedo poner eso?*

[23] Inv.: *Sí, escríbelo.*

[24] G2A: [Escriben en la hoja de trabajo: $(\mathrm{r.sen\theta})^2 + (\mathrm{r.cos\theta})^2 = \mathrm{r}^2$. Posteriormente lo leen]

[25] Inv.: *¿Cómo te diste cuenta de eso?*

[26] Mapa: *Por las áreas, por Pitágoras.*

D_1: Archivo 4.2 (Fig. 16) → **E_2**: $(r.sen\theta)^2 + (r.cos\theta)^2 = r^2$ [24]

R_3: Teorema de Pitágoras [11], [26]

Marco perceptivo geométrico

ANÁLISIS DEL PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

El grupo plantea inicialmente el enunciado E_1, que es correcto, pero que no relaciona las tres variables pedidas en el problema. Ante la intervención del investigador, observan el archivo (sin arrastrar el punto B) y plantean la identidad pitagórica E_2.

Los operadores teóricos R_1 y R_2 se caracterizan por el uso de la definición de seno y coseno en el triángulo rectángulo, a pesar de que la construcción está realizada en el plano cartesiano y se representan las razones seno y coseno con sus respectivo vectores. También se destaca en estos dos operadores, el uso correcto de las propiedades de la igualdad para la manipulación algebraica que lleva al despeje del radio. El operador R_3 hace referencia al teorema de Pitágoras y justifica visualmente y geométricamente la relación planteada, pero no analíticamente (usando las definiciones de las razones en el plano cartesiano).

El sistema de representación se caracteriza por el uso del diagrama de Cabri como “dibujo” (L_1) del archivo en el primer cuadrante, para nombrar los lados y el radio en la definición de seno y coseno y el uso de expresiones algebraicas (L_2).

La estructura de control se caracteriza por el uso estático del archivo (control perceptivo (Σ_1)), para identificar los nombres de las variables y usarlas en los operadores, en donde se identifica un control teórico (Σ_2) basado en el uso de las propiedades de la igualdad y la manipulación algebraica para despejar *r*.

La forma de argumentación es constructiva, dado que, en ambos enunciados, la conclusión va después de las argumentaciones.

La estructura de la conjetura es deductiva. No usaron ejemplos para el planteamiento de los enunciados, aunque de manera implícita están generalizando las propiedades planteadas a cualquier ángulo, pero basándose solamente en lo observado en el primer cuadrante.

PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

[27] Inv.: *¿Por qué?*

[28] Diana: *Porque los cuadros están en…*[sin arrastrar, señala los cuadrados del archivo]

[29] Inv.: *¿Cómo Diana?*

[30] G2A: *Es obvio* [se ríen]

[31] Inv.: *Es obvio, ¿qué es lo que ven? ¿eso será cierto?*

[32] Mapa: [Abre la calculadora de Cabri, señala el valor numérico del radio (5) que está en la parte superior derecha del archivo de Cabri, escribe el signo * y cae en la cuenta que necesita el valor del ángulo θ]. *No tenemos el valor de θ* [mide el ángulo señalando la marca, vuelve a la opción calculadora y calcula $(5.\text{sen}\theta)^2 + (5.\cos\theta)^2 = 5^2$]

[33] Mapa: *Da 25,0*

[34] Diana: *¿25,0?*

[35] Mapa: *Huy, sí da, sí da. ¿Toca hacer el dibujo?*

[36] Diana: *Creo que sí, hagámoslo* [realizan el dibujo del archivo (Fig. 19), y escriben:

[37] $(\text{r}.\text{sen}\theta)^2 + (\text{r}.\cos\theta)^2 = \text{r}^2$ Por ser triangulo rectángulo (Pitágoras)]

[38] Mapa: *Ya, y aquí* [señala el ordenador*] miramos con valores y si nos daba 25 y 25.*

[39] Inv.: *¿Siempre? ¿para cualquier ángulo?*

[40] Mapa: *No se* [A pesar que el radio r y el ángulo θ son variables, no arrastran nada en Cabri]

[41] Inv.: *Recuerde que un ejemplo no es suficiente, ¿cómo verificaron?*

[42] Mapa: *Con r cinco*

[43] Inv.: *¿Qué hicieron?*

[44] Mapa: *En la calculadora* [abre en el archivo la opción calculadora]

[45] Inv.: *¿Qué hicieron en la calculadora?*

[46] Mapa: [Empieza a realizar el calculo en la calculadora de Cabri, comete un error y explica] *Eso me dio 25* [se refiere a $(5.\text{sen}\theta)^2 + (5.\cos\theta)^2$], *y 5 a la dos es 25.*

[47] Inv.: *Es que ahí estarían comprobando solamente un caso* [no arrastran el punto B de la construcción], *y si un caso se cumple, no podemos decir que todos se cumplen.*

[48] Diana: *¿En cuál no se cumple? ¿en los negativos? ¿en cuál no se cumple?*

[49] Inv.: *La relación es correcta, pero, mostrar un ejemplo no es una demostración.*

[50] Mapa: *O sea, toca demostrar lo típico, r a la dos, por seno de θ a la dos, más r a la dos, por coseno de θ a la dos, igual a r a la dos.*

[51] Inv.: *Exactamente.*

[52] Mapa: *De una yo lo saco.*

[53] Diana: *Hagámoslo así, r a la dos igual a r al cuadrado, más dos veces radio por el seno de θ...*

Rp$_{11}$: ¿Se cumple para todo *r* y θ? [46] – [48]

D$_1$: Archivo 4.2 (Fig. 16)

E$_2$: $(r.sen\theta)^2 + (r.cos\theta)^2 = r^2$ [24], [36]

R$_4$: $(5.sen\theta)^2 + (5.cos\theta)^2 = 25$ [32] – [45]

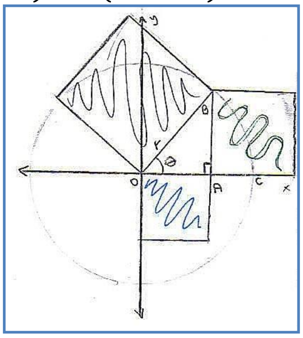
R$_5$:  [36]

Figura 19: Dibujo de la Identidad Pitagórica

R$_3$: Teorema de Pitágoras [36]

Marco numérico – geométrico

[54] Mapa: *Se puede usar lo típico, r a la cuatro, r a la cuatro.*

[55] Diana: *¿Por qué r a la cuatro?*

[56] Mapa: *Por que r a la dos por r a la dos, r a la cuatro, ¿no es dos r a la dos? ¿si?...No eso no debe ser así* [borra lo escrito].

[57] Diana: *¿Por qué?*

[58] Mapa: *Jorge, yo no se cómo demostrar esto.*

[59] Inv.: *¿Seno de θ a qué es igual? ¿cómo está definido seno de θ en el plano cartesiano?*

[60] Mapa: *Okey, ya se, ya, r a la dos, por, seno es opuesto, o sea BA sobre r, a la dos, más r a la dos, OA sobre r, a la dos* [escribe en la hoja de trabajo: $\mathrm{r}^2 = \mathrm{r}^2.\left(\frac{\overline{\mathrm{BA}}}{\mathrm{r}}\right)^2 + \mathrm{r}^2.\left(\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\mathrm{r}}\right)^2$]

[61] Diana: *¿Y qué pasa ahí?*

[62] Mapa: *Ya, entonces, vea, aquí se quita esto, o sea r con esto* [se refiere a cancelar los r^2 en la ecuación. Escribe:

$$\begin{gathered}\mathrm{r}^2 = \mathrm{r}^2.\frac{\overline{\mathrm{BA}}^2}{\mathrm{r}^2} + \mathrm{r}^2.\frac{\overline{\mathrm{OA}}^2}{\mathrm{r}^2}\\ \mathrm{r}^2 = \overline{\mathrm{BA}}^2 + \overline{\mathrm{OA}}^2\\ \mathrm{r}^2 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2\end{gathered}$$

], *¿ya?*

[63] Diana: *Sí, Pitágoras y ya.*

D_1: Archivo 4.2 (Fig. 17)
D_2: E_{3I}: Definición de seno en el plano [58]
D_3: R_1, R_2 [59]

E_2: $(r.sen\theta)^2 + (r.cos\theta)^2 = r^2$ [24], [36]

R_6: $r^2 = r^2.\left(\frac{\overline{BA}}{r}\right)^2 + r^2.\left(\frac{\overline{OA}}{r}\right)^2 \Rightarrow r^2 = \cancel{r^2}.\frac{\overline{BA}^2}{\cancel{r^2}} + \cancel{r^2}.\frac{\overline{OA}^2}{\cancel{r^2}} \Rightarrow$
$r^2 = \overline{BA}^2 + \overline{OA}^2 \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2$ [59] – [61]
R_3: Teorema de Pitágoras [62]

Marco algebraico

ANÁLISIS DEL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

Nuevamente el grupo no hace uso del arrastre para explorar propiedades o generalizar lo visto a todos los cuadrantes, se limitan a ver la construcción en el primer cuadrante. Curiosamente, sí hacen uso de la calculadora de Cabri para verificar la identidad, usando valores variables de r y θ (cuando hacen el cálculo, señalan los valores y no escriben los que ven en ese momento), pero al no arrastrar, o no modificar el valor de r, no ven que la propiedad es validad para todo r y θ. El primer esquema representa una argumentación inductiva o empírica, basada en el uso de valores numéricos y el uso del dibujo que representa la identidad pitagórica en el primer cuadrante. Ante la refutación Rp_{1I} del investigador, usan la definición de seno y coseno planteada en la fase de conjetura y realizan una demostración algebraica de la identidad. Finalizando, cambian los símbolos geométricos $\overline{AB}$ y $\overline{OA}$ por las variables x e y usadas en la definición de las razones en el plano. Esto podría indicar una conexión entre lo geométrico y lo analítico.

Los operadores R_4 y R_5 son ejemplos que ayudan a justificar de manera empírica la identidad. El operador teórico R_6 está basado en la definición de las razones seno y coseno en el triángulo y la realización de operaciones algebraicas que garantizan la validez de la identidad. El Teorema de Pitágoras (R_3, también usado en la fase de conjetura) soporta la igualdad $r^2 = x^2 + y^2$ planteada al final.

El sistema de representación se caracteriza por el uso del dibujo realizado en la hoja de trabajo (L_3) y el uso de expresiones algebraicas (L_2).

La estructura de control va del control empírico basado en los cálculos numéricos en la calculadora de Cabri y el uso del dibujo para determinar los nombres, al control teórico, caracterizado por el uso de métodos algebraicos para la construcción de una demostración algebraica y el uso del Teorema de Pitágoras.

La estructura de la demostración cambia de lo empírico a lo deductivo.

El tipo de demostración es un experimento mental estructurado al usar ejemplos para verificar la verdad y posteriormente dejarlo de lado.

ANÁLISIS DE LA UNIDAD COGNITIVA

Esquema global de la argumentación	Esquema global de la demostración
$D_1g \rightarrow E_1relmat$ (R_1pig, R_2pig) $D_1g \rightarrow E_2idpit$ (R_3tp)	$D_1g \rightarrow E_2idpit$ (R_3tp, R_4prn, R_5prg) D_1g, D_2defpc, $D_3R_1R_2 \rightarrow E_1idpit$ (R_3tp, $R_6demalg$)

demalg: demostración algebraica.

idpit: Identidad Pitagórica.

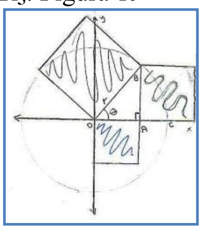
pig: propiedades de la igualdad.

prg: prueba geométrica.

prn: prueba numérica.

tp: Teorema de Pitágoras.

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

ARGUMENTACIÓN **E₂**: $(r.sen\theta)^2 + (r.cos\theta)^2 = r^2$			**DEMOSTRACIÓN** **E₂**: $(r.sen\theta)^2 + (r.cos\theta)^2 = r^2$		
CONCEPCIÓN			CONCEPCIÓN		
OPERADORES	**SIST. DE REPR.**	**E. DE CONTROL**	**OPERADORES**	**SIST. DE REPR**	**E. DE CONTROL**
R_1: $sen\theta = \frac{\overline{BA}}{r} \Rightarrow sen\theta.r = \overline{BA} \Rightarrow r = \frac{\overline{BA}}{sen\ \theta}$ **R_2**: $cos\theta = \frac{\overline{OA}}{r} \Rightarrow cos\theta.r = \overline{OA} \Rightarrow r = \frac{\overline{OA}}{cos\theta}$ **R_3**: Teorema de Pitágoras.	**L_1**: Diagrama dinámico de Cabri como dibujo → **L_2**: Uso de expresiones algebraicas.	**Σ_1**: Teórico (definición de seno y coseno, propiedades de la igualdad, teorema de Pitágoras).	**R_3**: Teorema de Pitágoras. **R_4**: $(5.sen\theta)^2 + (5.cos\theta)^2 = 25$ **R_5**: Figura 19  **R_6**: $r^2 = r^2.\left(\frac{\overline{BA}}{r}\right)^2 + r^2.\left(\frac{\overline{OA}}{r}\right)^2 \Rightarrow r^2 = \cancel{r^2}.\frac{\overline{BA}^2}{\cancel{r^2}} + \cancel{r^2}.\frac{\overline{OA}^2}{\cancel{r^2}} \Rightarrow$	**L_2**: Uso de expresiones algebraicas. **L_3**: Dibujo geométrico.	**Σ_2**: Ejemplo numérico y geométrico. **Σ_1**: Teórico (demostración algebraica basada en la definición de seno y coseno, propiedades de la igualdad, teorema de Pitágoras).

ARGUMENTACIÓN **E**$_2$: $(r.sen\theta)^2 + (r.cos\theta)^2 = r^2$			**DEMOSTRACIÓN** **E**$_2$: $(r.sen\theta)^2 + (r.cos\theta)^2 = r^2$		
			$r^2 =$ $\overline{BA}^2 + \overline{OA}^2 \Rightarrow$ $r^2 = x^2 + y^2$		
Marco geométrico – algebraico			Marco geométrico – algebraico		

CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA

Análisis de la continuidad estructural

ARGUMENTACIÓN	**DEMOSTRACIÓN**
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Deductiva.	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Deductiva.
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN **EME**: Secuencia lógica derivada de los datos del problema, las definiciones y teoremas aceptados. Las comprobaciones se usaron para corroborar la verdad de la Identidad Pitagórica.
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Tanto en los esquemas generales como en las tablas, se evidencia la unidad cognitiva que conlleva a la construcción de una demostración tipo experimento mental estructurado. En la fase de demostración, hay pasos empíricos que ayudan a comprobar la verdad de la identidad planteada, pero la demostración final se basa en propiedades generales. En este caso la unidad cognitiva ayuda a la construcción de la demostración, debido a que, desde la fase de conjetura el control estuvo basado en propiedades matemáticas.

A pesar que los estudiantes no hicieron uso del arrastre para explorar o verificar las relaciones planteadas en los diferentes cuadrantes del plano cartesiano, construyen una demostración deductiva; esto se puede explicar por la construcción del archivo, en donde, sin mucho esfuerzo o necesidad de exploración se "ve" la Identidad Pitagórica. Por otro lado, el hecho de no explorar la relación en otros cuadrantes no invalida la identidad y por lo tanto es suficiente verla en el primer cuadrante, aunque lo deseable es que los estudiantes "vean" que la relación se cumple para cualquier ángulo θ entre –360º y 360º.

6.8 Síntesis final

Las siguientes tablas muestran, de manera esquemática y resumida, la evolución de cada uno de los grupos G1A y G2A en el desarrollo de cada uno de los problemas de demostración.

	A.1.4.2		A.2.5.1		A.2.5.3		A.2.5.5		A.2.6.1A		A.2.6.1B		A.2.6.1C		A.4.2	
	UC		RR - UE		UR - RE		UC		UC		RR – UE		UC		UC	
G1A	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D
DATOS	n	n	n	n g an gproc	proc pm	proc pm	proc n pm	proc n pm	g	g	itri	relana relgeo	relana	relana	g	g defpc pig tp
OPERADORES	p	p n	n	n g an p pia	gproc	rmf	gproc an teo	teo	g itrig itrigf	g defpc deftr itrig demg	gproc	g defpc	deftr	defpc	pig tp	tp prn prg demal
SIST. DE REPRES.	fdc ln n	fdc ln n	ln al	ln al dg dc	ln al	ln al	ln dg al	dg al	dg al	dg al ln	al	dg al	al	al	dc al	al dg
CONTROL	arr	arr n	n	n arr dg p t	t	t	arr dg t	dg t	dg t	dg t arr	t	arr t	t	t	t	t ej
MARCO	p-n	p-n	n	n → g →an	p-al	al	tpc	tpc	ttr	tpc → ttr	p-al	ttr ↔ tpc	ttr ↔ tpc	tpc	g - al	g - al
FORMA ARGUM.	c	-----	c	------	c(a)	------	c	-----	e	-----	c(a)	-----	c	-----	c	-----
ESTRUCTURA	ind.	ind.	ind.	ind.	ind.	ded.	ded.	ded.	ded.	ded.	ind.	ind.	ded.	ded.	ded.	ded.
DEMOST.	-----	EII	-----	EGA	------	EMT	-----	DFE	-----	EMT	-----	EGA	-----	DFE	-----	EME

Tabla 5: Tabla resumen de los problemas analizados para el grupo G1A

	A.1.2.2		A.2.5.1		A.2.5.3		A.2.5.5		A.2.6.1		A.3.6.7		A.4.2	
	UC		RR – UE		RR – UE		RR – UE		RR – UE		RR – UE		UC	
G2A	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D
DATOS	n	n	relgeo ptrig dc	relageo ptrig dc	ptrig n defpc	ptrig n defpc	defpc ptrig n	defpc ptrig n relsig reltrig leysig	g n Rp	g n Rp	g rang	g rang defpc	g	g defpc
OPERADORES	p pr	pr	dc ptrig pn reltrig	defpc ejn	genen	defpc ptrig rtrigf	genen	leysig defpc n relpc	n itrig	itrig ptrans	rang rsigpc	repgcos deftr rang rlt	tp	pig demal
SIST. DE REPRES.	dc ln al	ln al	dc gestos ln dg al	al	al	al ln	dc al	dc al ln	dc al	al	dc ln	dc ln	dc ln al	al
CONTROL	arr t	arr t	arr t	arr t	n	n p-n t	arr t	arr p-n t	p t	t	arr	arr	t	t
MARCO	p-n	p-n	p – n – g	al	p – n	al – p	n – an	n – p	p – n – trig	trig	p- g	p – g	g - al	al
FORMA ARGUM.	c	-----	c	------	c	------	c	-----	e	-----	e	-----	c	-----
ESTRUCTURA	ind.	ind.	ind.	ind.	ind.	ind.	ind.	ind.	ded.	ded.	ind.	ind.	ded.	ded.
DEMOST.	-----	EII	-----	EGA	------	EGI	-----	EGA	-----	DFE	-----	EGA	-----	DFE

Tabla 6: Tabla resumen de los problemas analizados para el grupo G2A

Analizando la tabla 5 podemos observar que el grupo G1A presenta un avance tanto en el desarrollo de habilidades de demostración, como en el aprendizaje de los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas.

El grupo inicia construyendo demostraciones inductivas y termina construyendo demostraciones deductivas, salvo en el problema 2.6.1B, en donde consideramos que los dos procesos fueron inductivos debido a que la conjetura la plantearon con una forma de argumentación por analogía con el problema 2.6.1A. En este caso las estudiantes plantearon un proceso de demostración de apariencia deductiva, pero debido a que no habían realizado ningún proceso de razonamiento, ni de argumentación no concluyen con una demostración deductiva. Sin embargo, como se evidenció en el análisis realizado en párrafos anteriores, las estudiantes no están convencidas de su demostración y buscan argumentos que les ayuden a convencerse a ellas mimas. Por otro lado, la ruptura estructural en el problema 2.5.3 se dio para pasar del planteamiento de una conjetura con argumentos inductivos a la construcción de una demostración deductiva, basada en el uso del ejemplo para recordar propiedades matemáticas generales.

A partir del segundo problema analizado, vemos que las estudiantes pasan de usar operadores perceptivos y numéricos a usar operadores basados en las definiciones, propiedades y teoremas aprendidos. Usan el sistema de representación algebraico, lo que significa que usan y comprenden las propiedades, definiciones y teoremas de manera general. Como consecuencia de lo anterior el control se vuelve teórico y el marco empieza a moverse entre la trigonometría del triángulo y del plano cartesiano. Esto nos indica que las estudiantes han avanzado en el aprendizaje de los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas.

Respecto al grupo G2A, la tabla 6 nos permite detectar un proceso razonamiento inductivo, muy próximo del razonamiento deductivo, dado que, en casi todos los problemas se logró una ruptura del sistema de referencia que condujo a la construcción de una demostración genérica analítica o genérica intelectual. Al respecto Balacheff destaca la importancia del ejemplo genérico como una forma de romper la discontinuidad epistemológica entre los procesos de producción de demostraciones por parte de los estudiantes, señalando que esta ruptura se supera cuando ellos puedan pasar de un empirismo ingenuo a mirar las afirmaciones matemáticas con un enfoque más formal a través del descubrimiento del ejemplo genérico.

Como se puede observar en la tabla 6, la ruptura del sistema de referencia se caracteriza por el cambio de operadores perceptivos o basados en generalizaciones de procesos empleados en la resolución de problemas anteriores, al uso de operadores basados en las definiciones y propiedades recordadas con la exploración y análisis de los archivos suministrados y con las intervenciones del investigador o de la profesora, el cambio de una estructura de control perceptiva o basada en el arrastre en Cabri a un control teórico y el uso del algebra como sistema de representación.

Sin embargo, los marcos perceptivos y numéricos reflejados en la solución de casi todos los problemas sugieren que el grupo no ha adquirido un dominio total de los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas. Una de las razones que pueden justificar esta situación, es el hecho de que el grupo se sigue apoyando continuamente en la exploración y análisis de propiedades observadas en los múltiples ejemplos que suministra Cabri, para recordar o descubrir propiedades geométricas, métricas o analíticas, pero no pueden realizar la total conexión con las definiciones y propiedades trigonométricas estudiadas, de ahí que no se de el salto necesario para la construcción de demostraciones deductivas de propiedades de las razones trigonométricas.

7. Evaluación de la unidad de enseñanza

Para llevar a cabo la evaluación de la unidad de enseñanza, realizamos un análisis de las actividades planteadas en cada una de las fases de aprendizaje de cada una de las seis actividades que conforman la unidad de enseñanza. Analizamos las ventajas o desventajas de haber incluido ciertas actividades en cada fase y realizamos comentarios sobre los logros y dificultades detectados, tanto en el proceso de aprendizaje de los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas, como del desarrollo de habilidades de demostración. En este análisis tenemos en cuenta lo realizado por los 17 estudiantes que conforman el grupo.

En la sección 7.1 presentamos el análisis de las actividades de la fase de información, en la sección 7.2 el análisis de las actividades de la fase de orientación dirigida, en la sección 7.3 las actividades de la fase de explicitación, en la sección 7.4 las actividades de las fase de orientación libre y en la sección 7.5 las actividades de la fase de integración. En cada una de las secciones presentamos ejemplos transcritos o escaneados de actuaciones de los estudiantes que corroboran el análisis realizado y sirven para determinar los logros o las dificultades más notorios en el desarrollo de la experimentación. En 7.6 realizamos una síntesis final de la evaluación de la unidad de enseñanza a través de las fases.

7.1 Fase de información

El planteamiento de problemas que requerían el uso de nuevos conceptos y propiedades en la fase de información fue de gran ayuda para los estudiantes, dado que allí podían experimentar y explorar a través de un razonamiento inductivo, usando valores numéricos o la visualización de relaciones en el diagrama dinámico de Cabri (cuando se permitía) para comprobar los problemas o las conjeturas planteadas. Esta experimentación les permitía comprender hacia dónde se orientaba la actividad, atreverse a plantear nuevas conjeturas, comprender que lo aprendido en una actividad anterior podría extenderse a casos más generales con nuevas definiciones y a conectar los conceptos y propiedades aprendidos.

Esta fase también nos ofreció información de los estudiantes acerca de los preconceptos, de la comprensión de conceptos, procedimientos y propiedades trabajados en actividades anteriores y del avance en sus habilidades de demostración. Los siguientes ejemplos ilustran algunos de estos aspectos.

En la actividad 1 suponíamos que los estudiantes no sabían nada acerca de las razones trigonométricas, por ello esperábamos que en la actividad 1.1.1 no encontraran los valores de la amplitud de los ángulos del triangulo rectángulo, puesto que solo se conocían los valores de los catetos. En el mejor de los casos, esperábamos que recurrieran al uso de medidas para dibujar el triangulo y calcular las amplitudes con el transportador, pero los estudiantes ya habían trabajado las razones trigonométricas en Física y emplearon las definiciones de las razones y el teorema de los senos, sin embargo, se evidenció que usaban las definiciones o teoremas como formulas mecánicas y no tenían una verdadera comprensión de dichos conceptos, como se evidencia en la siguiente transcripción del grupo G1A.

[1] Inv.: *¿Qué están haciendo?*

[2] Mapa: *Estamos tratando de despejar la de seno de θ, es igual a opuesto sobre hipotenusa. ¿Qué va a hacer?* [le pregunta a Diana]

[3] Diana: *Seno*.

[4] Mapa. *¿Pero de qué?*

[5] Diana: *De eso* [señala el lado opuesto del triángulo rectángulo]

[6] Mapa: *Seno de esto* [señala el lado opuesto del triángulo rectángulo], *seno de 12,81, y después 8 dividido en eso, eso da θ ¿no?* [escriben el la calculadora de Cabri: 8/sen(12.81)]

[7] Inv.: *¿Estás hallando el seno de qué?*

[8] Diana: *Eso sería el ángulo*.

[9] Inv.: *¿Sería el seno de qué?*

[10] Mapa: *El seno de la hipotenusa.*

[11] Inv.: *¿Tú le puedes hallar el seno a la hipotenusa?*

[12] Diana: *No le estamos hallando el seno a la hipotenusa, el seno al ángulo*.

[13] Mapa: *Es que estamos despejando* [señala lo escrito en la hoja de trabajo: $sen\theta = \frac{c.\ opuesto}{hipotenusa}$]

$$sen\theta = \frac{8}{12{,}81}$$

[14] Diana: *Es que estamos despejando* [halla el cociente $\frac{8}{12{,}81} = 0{,}62$ y halla $sen(0{,}62)$]

[15] Inv.: *¿Qué significa $sen(0{,}62)$? ¿le estarías hallando el seno a qué?*

[16] Mapa: *No espera, pensemos, si el seno de θ es opuesto sobre hipotenusa, entonces…*

[17] Inv.: *Tienen los valores del cateto opuesto y la hipotenusa, entonces, ¿cómo hallan el seno del ángulo?*

[18] Diana: *Este pasa a dividir* [señala $\frac{8}{12{,}81}$ [13] y el texto *sen*, borra el texto del lado izquierdo de la igualdad y escribe $\theta = \frac{8}{sen 12{,}81}$], *Ah, eso fue lo que no hicimos, está multiplicando*.

[19] Mapa: *¿Qué va a multiplicar seno? ¿seno de qué? ¿si entiende?*

[20] Inv.: *¿Si tú tienes el valor del seno de un ángulo y quieres hallar el valor del ángulo qué haces?*

[21] Diana: *Se despeja.*

[22] Inv.: *¿Cómo despejas?*

[23] Diana: *El seno pasa a dividir…*

[24] Mapa: *¿Eso no es lo de shift seno?*

[25] Inv.: *¿Eso para qué sirve?*

[26] Mapa: *Eso no es lo que se voltea, espera…, 1 sobre 0,62.*

[27] Inv.: *¿Por qué están pensando que se puede hallar el ángulo con el seno?*

[28] Mapa: *Porque tenemos el opuesto, el adyacente y la hipotenusa.*

[29] Inv.: *¿Qué es el seno?*

[30] G1: *No sé.*

[31] Inv.: *¿Qué significa el seno de un ángulo? ¿qué es eso?*

[32] Mapa: *El resultado de multiplicar el lado opuesto sobre la hipotenusa*.

[33] Inv.: *¿Eso es seno?*

[34] Mapa: *El seno del ángulo…, no sé.*

Vemos en la transcripción que los estudiantes no comprenden lo que significa la razón seno. Están tomando la definición del seno en el triangulo rectángulo como una fórmula que sirve para despejar θ dividiendo por la expresión *sen*. Esto implica que están viendo la expresión *sen* como una constante o como un valor numérico. Ante la respuesta dada en [32] del significado de la razón seno, se constata que la razón es un valor numérico, resultado del cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa, pero que no tiene nada que ver con θ.

A otro grupo que usó coseno se le preguntó ¿Qué significa que coseno del ángulo sea 1/2? Las respuestas dadas fueron: “la medida del ángulo”, “la medida de los catetos”, “coseno es la variación”.

En el siguiente ejemplo, Juanita explica cómo resolvieron el mismo problema aplicando la ley de los senos, pero no tiene idea de lo que significa. Ante la pregunta del investigador, la respuesta consiste en repetir la fórmula.

[1] Juanita: *Por la ley del seno.*

[2] Inv.: *¿Esa ley del seno la habían visto en qué materia?*

[3] Juanita: *En Física la vimos el año pasado.*

[4] Inv.: *¿Por qué se utiliza ahí?*

[5] Juanita: *Porque tenemos un lado y un ángulo. La usamos para encontrar el otro lado o el otro ángulo.*

[6] Inv.: *¿Qué es la ley del seno?*

[7] Juanita: $\frac{sen(A)}{a} = \frac{sen(B)}{b} = \frac{sen(C)}{c}$ [repite la fórmula]

En general, los estudiantes fueron capaces de encontrar los valores de los ángulos con la información suministrada, pero de manera mecánica, utilizando conceptos y teoremas que no comprendían. Ninguno usó medidas. Solamente un estudiante manifestó que la información no era suficiente.

Respecto a los otros problemas de la actividad 1.1, se evidenció que los estudiantes recuerdan y aplican muy bien el teorema de Pitágoras y saben plantear y resolver ecuaciones lineales y cuadráticas, usan argumentos matemáticos expresados en el lenguaje natural. Por ejemplo, ante la pregunta **¿Existen otros triángulos rectángulos con medidas de sus catetos 8 cm. y 10 cm. y medida de ángulos diferentes?** La respuesta general fue negativa, con argumentos válidos como los siguientes: “*La hipotenusa no cambia, siempre va a ser la misma”; “si la hipotenusa no cambia, la ley del seno no varía*”; “*si los catetos no cambian, la hipotenusa no cambia, entonces los ángulos no varían*”. Otros argumentos usados fueron incorrectos “*Todos los triángulos rectángulos tendrán la suma de sus ángulos internos igual a 180º*”, “*si tenemos las mismas medidas, la abertura será la misma*”.

Ante la pregunta **¿Existen otros triángulos rectángulos con medida del ángulo igual a 32º y medidas de sus catetos e hipotenusa diferentes?** La respuesta en general fue que sí, apoyándose bastante en las propiedades de los triángulos semejantes, solamente un grupo dijo que no porque "las medidas de los ángulos depende de las medidas de los lados".

En las actividades 2.1.1 y 2.1.2, los estudiantes debían demostrar la verdad de las siguientes conjeturas $sen(A) = \cos(A - 90)$ y $\cos(A) = sen(A - 90)$, o dar un contraejemplo en caso de falsedad, plantear la relación correcta y demostrarla. La mayoría de los estudiantes recurrieron al uso de varios ejemplos numéricos para justificar la verdad del primer enunciado y la falsedad del segundo. Con lo observado en los ejemplos, plantearon que la segunda relación es de inversos aditivos y se basaron en los ejemplos para justificarla. Ningún estudiante realizó una demostración deductiva para la primera relación, lo más general fue el planteamiento de un grupo, quienes apoyados en lo visualizado en Cabri, plantean un dibujo y dan varios ejemplos sobre él, plantean que las razones en el plano cartesiano tenían diferentes signos en cada cuadrante y que seno toma valores entre –1 y 1. Algunos errores comunes fueron los siguientes: "*El ángulo no puede ser negativo*", "*el ángulo es negativo y coseno no puede ser negativo*". El primer error evidencia la permanencia de la concepción de los ángulos y de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. El segundo, se basa en la consideración de que los valores de las razones de ángulos negativos deben ser negativos. Otros plantearon que era lo mismo que 90 – A (generalización de lo realizado en la actividad uno, sin ningún proceso de exploración).

En la actividad 3 se destacan el uso de Cabri para representar ángulos y calcular las razones de ellos a través del uso de las respectivas coordenadas. Se empiezan a ver avances en el desarrollo de habilidades de demostración en algunos estudiantes, lo cual demuestra un dominio de los conceptos y propiedades aprendidos en las dos primeras actividades y el uso de un razonamiento deductivo en los dos procesos de argumentación y demostración.

Al inicio de la actividad 4, se sigue viendo el progreso en el uso de los conceptos, propiedades y procedimientos usados en las actividades anteriores para resolver problemas de la fase de información. Por ejemplo, ante el problema planteado de expresar la razón coseno en función de la razón seno, un estudiante plantea que "*seno seria igual a coseno si el triangulo fuera isósceles*". Otro grupo usó el teorema de Pitágoras para hallar coseno, dados los valores y e r de la razón seno (problema 4.1.1), luego usó de forma general las definiciones de seno y coseno en el plano cartesiano y plantearon la siguiente conjetura que relaciona seno y coseno a través de la variable y y el radio r:

$$sen(\theta) = \frac{y}{r}, \cos(\theta) = \frac{x}{r}, r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x = \sqrt{r^2 - y^2} \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\sqrt{r^2-y^2}}{r}$$

La mayoría de estudiantes no fue capaz de resolver el problema de expresar seno de un ángulo θ en función de coseno del ángulo θ. Algunos plantearon identidades vistas, pero que relacionan el seno de θ con el coseno del complemento de θ ($sen(\theta) = \cos(90 - \theta)$), varios propusieron que no era posible resolver el problema.

En la fase de información de la actividad 5 se confirman los errores esperados en la mayoría de estudiantes. En 5.1.1 hallan $sen(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$ sumando los valores dados para $sen(\alpha)$, $sen(\beta)$, $\cos(\alpha)$ y $cos(\beta)$. En 5.1.3 usan la "propiedad distributiva" para justificar que $sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha) + sen(\beta)$ y que $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha) + cos(\beta)$, al comprobar en la calculadora la falsedad de la igualdad se sorprenden y plantean que "*debería cumplirse porque se debe cumplir la propiedad distributiva*". Veamos la transcripción del grupo conformado por Mela y Diana.

[1] Mela: *Es que ahora sabemos que no se puede decir que* $sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha) + sen(\beta)$ [después de haber verificado con $\alpha = 30$ y $\beta = 80$], *pero igual si uno lo hace es por propiedad distributiva, se puede hacer.*

[2] Inv.: *Tú crees que sí ¿Cuál es la duda?*

[3] Mela: *Pues que al hacerlo, si uno suma, digamos 30 más 80 y luego le halla el seno a eso queda diferente de hallar seno de 30 más seno de 80.*

[4] Inv.: *¿Entonces, qué crees?*

[5] Diana: *Que por la propiedad, eso debería ser cierto, pero nos da diferente*.

[6] Inv.: *¿Por cuál propiedad?*

[7] Diana: *Distributiva.*

[8] Inv.: *¿Será que ahí se cumple la propiedad distributiva?*

[9] Mela: *Ahora creo que no.*

[10] Inv.: *¿Por qué no?*

[11] Diana: *Porque ¿está sumando?*

[12] Inv.: *¿Siempre se tiene que cumplir la propiedad distributiva?*

[13] Mela: *Pues hasta ahora yo pensaba que sí.*

[14] Inv.: *Por ejemplo, ¿* $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$?

[15] Mela: *No sé.*

[16] Inv.: *¿La duda la tienes porque haciendo un ejemplo no te da?*

[17] Mela: *Sí, como un ejemplo no me da, entonces, ya no me da.*

[18] Inv.: *¿Qué pasa cuando un ejemplo no se cumple?*

[19] Grupo: *Es un contraejemplo y entonces la proposición es falsa.*

[20] Mela: *¿Pero por qué es falsa? Es lo que no entiendo.*

De lo anterior se concluye que algunos estudiantes están considerando las razones trigonométricas como factores y no como operadores o funciones que actúan sobre los ángulos (otro de los problemas del aprendizaje de la trigonometría), por eso el investigador les plantea otra operación más conocida para ellos en donde no se cumple la "propiedad distributiva", pero tampoco les aclara la duda. Es importante lo expresado por el grupo, en el sentido de querer saber por qué es falsa la proposición, no solamente por la verificación de un contraejemplo, esto muestra la necesidad que empiezan a sentir los estudiantes de usar argumentos teóricos para la construcción de una demostración. Los estudiantes han entrado en la dinámica de que deben explicar sus respuestas, y por esto, ellos mismos se pueden dar cuenta con un contraejemplo de la falsedad de ciertas conjeturas, o al menos verificar que se cumple para algunos casos las verdaderas, y que en general, se debe recurrir al uso de argumentos matemáticos para demostrar.

La dinámica expresada en el párrafo anterior, se evidencia aún más en la fase de información de la actividad 6.

Los estudiantes debían resolver los siguientes problemas:

¿A qué es igual $\boldsymbol{sen(\alpha - \beta)}$? ¿A qué es igual $\boldsymbol{cos(\alpha - \beta)}$?

Ningún estudiante planteó que la razón de la diferencia era igual a la diferencia de las razones, todos usaron el archivo dado para la actividad 6.2. A través de la exploración plantearon la identidad correcta y la gran mayoría realizó una demostración deductiva formal estructurada.

Como vimos en el transcurso de los párrafos anteriores, la mayoría de actividades planteadas en la fase de información cumplieron con la finalidad de obtención de información recíproca profesor estudiante. Sirvió para generar inquietud sobre la necesidad de nuevos conceptos y detectar avances o dificultades en el aprendizaje de las razones trigonométricas y el proceso de demostración. En la actividad 1 (razones trigonométricas en el triángulo rectángulo) se plantearon demasiadas actividades, lo que sugiere que para una próxima experimentación se deben suprimir algunas de ellas.

7.2 Fase de orientación dirigida

Esta fase se caracterizó por el uso de diagramas dinámicos para explorar, conjeturar y demostrar propiedades de las razones trigonométricas. Los conceptos, relaciones, propiedades y procedimientos para el aprendizaje de la trigonometría y el desarrollo de habilidades de demostración, se fueron presentando de manera progresiva, teniendo en cuenta su relevancia en el avance de la unidad de enseñanza. Consideramos que el uso de Cabri fue una herramienta valiosa para lograr que los estudiantes fueran adquiriendo los conocimientos y las habilidades necesarias a través de la interacción y retroalimentación ofrecida por el programa, sin la intervención continua del profesor. El uso de Cabri permitió que los estudiantes pudieran ver los conceptos, relaciones y propiedades para el planteamiento y comprobación de sus conjeturas, ayudó a la conexión de los diferentes sistemas de representación y a la exploración de conceptos más avanzados como infinito.

El planteamiento de la fase de orientación dirigida a través de problemas abiertos de conjetura y demostración, distinguiendo cada proceso con las palabras *conjeturando* y *demostrando*, ayudó a superar una de las dificultades que se presenta en al análisis de la unidad cognitiva, la cual consiste en distinguir cada uno de estos procesos (Pedemonte, 2005).

Por otro lado, el haber diseñado una guía para el profesor fue un acierto, que contribuyó al logro de estos objetivos y ofreció un gran aporte para el aprendizaje de la trigonometría y el desarrollo del proceso de demostración. La guía del profesor fue un acierto porque allí se explicó con claridad el objetivo de plantear determinada actividad, lo que se esperaba del estudiante, tanto a nivel de aprendizaje de conceptos, como a nivel de desarrollo de habilidades de demostración, las posibles respuestas de los estudiantes y la manera de orientarlos hacia los objetivos propuestos. Igualmente se señaló cuales podían ser las posibles dificultades que se podían presentar, tanto en el aprendizaje de conceptos y desarrollo de habilidades, como en el manejo de Cabri y se sugirió algunas alternativas de solución. También se recalcó sobre la importancia de que la intervención del profesor debería ser mínima para que los estudiantes pudieran plantear sus propias conjeturas y construir sus propias demostraciones. El papel del profesor debía ser de orientador y animador para la exploración de diferentes alternativas de solución al problema planteado, especialmente que los estudiantes hicieran uso de la exploración y el análisis de las propiedades matemáticas presentes en los archivos suministrados.

Una dificultad que se presentó en el desarrollo de esta fase tiene que ver con la extensión de las actividades propuestas y el manejo del tiempo. Pensamos que planteamos muchas actividades que involucraron muchos conceptos, con diferentes sistemas de representación que el estudiante tenía que comprender y conectar en un periodo de tiempo limitado. En una próxima experimentación habrá que recortar algunas actividades.

7.3 Fase de explicitación

Al plantear esta fase en varios momentos, casi siempre después de terminadas las actividades de las fases 1, 2 y 4, ayudó a aclarar y conectar conceptos, a observar diferentes estrategias y procedimientos de solución de los problemas, y especialmente a observar diferentes tipos de demostración por parte de los estudiantes, los cuales sirvieron de referente y fueron incorporados por la mayoría de los estudiantes en su dinámica de trabajo.

Esta fase fue fundamental para hacer énfasis en la necesidad de usar argumentos teóricos y de representar y conectar lo observado en Cabri con lo escrito en la hoja de trabajo. También sirvió para recalcar que la demostración, además de convicción, explicación y verificación, también es descubrimiento, comunicación y axiomatización (De Villiers, 1993).

Se destaca el efecto positivo que tuvo en los estudiantes la observación y discusión de sus propias ideas y las de sus compañeros, incluyendo el profesor como otro colega que participaba y contribuía a la discusión. En esta fase, cada uno de los estudiantes que pasó voluntariamente a explicar sus soluciones a los problemas se sentía con el compromiso de convencer a sus compañeros y al profesor.

El siguiente episodio da cuenta de ello, además de mostrar el avance que han tenido los estudiantes en el aprendizaje de conceptos y desarrollo de habilidades de demostración.

En la actividad 3.4.1.c, los estudiantes tenían que resolver el siguiente problema: **¿Qué relación existe entre un ángulo θ que esté en el segundo cuadrante y el ángulo α? Explica tu respuesta.** En la actividad 3.5 de explicitación, Ale realiza la siguiente intervención.

[1] Ale: *Sabemos que $\theta + \alpha = 180$, pero entonces no podemos escribir que $180 + \alpha = \theta$ ¿Por qué? porque si ponemos esto y digamos θ valga 20º, entonces α valdría 160º y ya dijimos que α debe ser menor de 90º.*

[2] Ale: *Entonces quedaría que $180 + \alpha = \theta$.* [Dibuja en el tablero un plano cartesiano, una circunferencia con centro en el origen del plano, dos semirrectas que representan los lados finales de los ángulos α y θ, los vectores *rsen*α y *rsen*θ. Nombra el origen del plano *O*, los ángulos α y θ y los vértices de los triángulos *OAB* y *ODE* (Fig. 1)]

[3] Ale: *Entonces, para hacer la comprobación, la…, la explicación, los triángulos en la gráfica, aquí hay un ángulo ¿cierto?* [marca el ángulo *AOB*, Fig. 1], *$\theta + \alpha$, θ es*

suplemento de α. ¿Entonces que tenemos que hacer?, comprobar que este ángulo de acá [señala *DOE*] *es…*

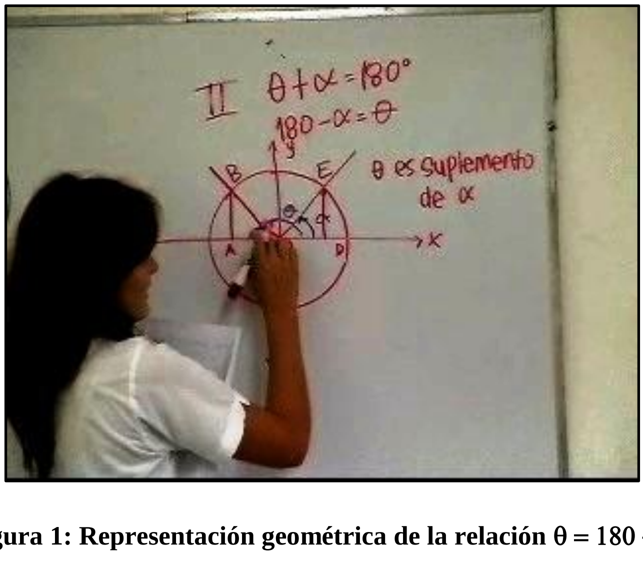


Figura 1: Representación geométrica de la relación θ = 180 – α

[4] Est 1.: *¿Eso tenemos que hacerlo para los cuatro cuadrantes?*

[5] Ale: *No, porque mira, θ tiene este valor* [señala θ en el dibujo del tablero], *$\theta + \alpha$ te da 180º.*

[6] Ale: *¿Qué tenemos qué hacer? Tenemos que demostrar que este ángulo es igual a este ángulo* [marca los ángulos α y *AOB* respectivamente, (Fig. 1)] *¿si? ¿entonces, cómo lo demuestro?*

[7] Ale: *Entonces, yo puse que el triángulo ABO es congruente al triángulo ODE* [Fig. 2], *porque fíjate que el ángulo A de éste triángulo* [señala *OAB*] *y el ángulo D del otro triángulo* [ángulo *ODE*] *son rectos*.

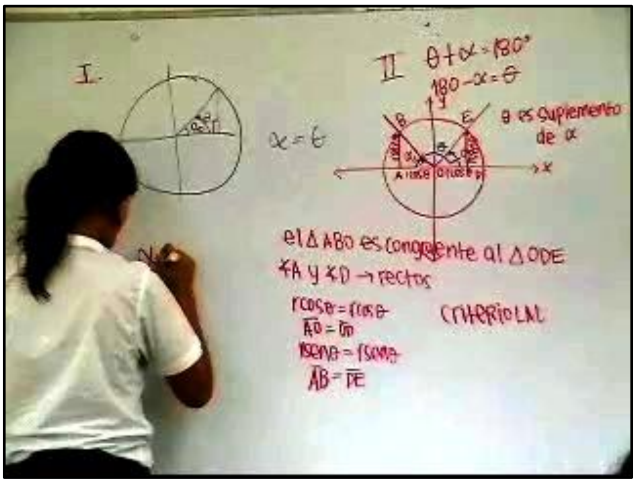


Figura 2: Demostración en la fase de explicitación

[8] Ale: *También tenemos que éste es el vector rcosθ* [vector *OA*] *y éste también es el vector rcosθ* [vector *OD*]. *Éste es rsenθ y éste también es rsenθ* [vectores *DE* y *AB* respectivamente].

[9] Ale: *Entonces, tenemos que el radio coseno de θ es igual a radio coseno de θ, entonces tenemos que estos dos vectores son iguales, entonces que AO, el vector AO es igual a OD* [escribe en el tablero las igualdades (Fig. 2)]

[10] Est 2. *¿No podemos poner que eso es congruente por el teorema lado, lado, lado?*

[11] Prof. *Eso es lo que está demostrando.*

[12] Est 2. *¿Pero hay que escribirlo todo?*

[13] Prof. *¿Si tu dices que es congruente por teorema lado, lado, lado, cuáles son los lados correspondientes que son congruentes? Eso es lo que está haciendo Ale, está aplicando uno de los criterios para justificar por qué los triángulos son congruentes.*

[14] Mabe: *¿Pero, el coseno en el segundo cuadrante no es negativo?*

[15] Prof.: *Sí, pero ella lo está dando como medida, sin mirar el sentido, pero tienes razón que tienen diferente sentido, pero tienen igual valor absoluto.*

[16] Ale: *Entonces, se podría hacer por lado, ángulo, lado, éste lado es igual a éste lado* [señala AB y DE], *éste ángulo es igual a éste ángulo* [señala los ángulos OAB y ODE] *y éste lado es igual a este lado* [señala OA y OD].

[17] Ale: *O también se podría hacer por lado, lado, lado, porque éste el radio* [señala OB y OE] *y los radios son iguales. Entonces se comprueba que…*

[18] Prof. *Ahí ya es suficiente, ¿con esos criterios entonces que puedes decir?*

[19] Ale: *Ah, si dos lados son…, son…, semejantes, ¿si? ¡no! los lados son equivalentes…eso quiere decir que los ángulos son congruentes a los ángulos del otro lado. Entonces, éste ángulo* [se refiere al ángulo *AOB* que nombra como α_1] *es igual a éste* [se refiere a α y escribe en el tablero $\alpha_1 = \alpha$]. *Entonces implica que podemos tomar esto como α* [señala α_1], *entonces acá se podría colocar esto como $180 - \alpha$* [se refiere a θ]

Ale construye una demostración deductiva formal estructurada que parte de una representación geométrica para representar la propiedad enunciada y usar las relaciones del dibujo como operadores y controles teóricos que conllevan a la demostración de la relación. Es evidente el manejo teórico de la situación y la convicción de la estudiante de la necesidad de demostrar todos los pasos planteados a través de propiedades matemáticas. Las dudas de algunos estudiantes son resueltas por Ale o por la profesora y la participación de otro estudiante es tenida en cuenta para decir que también se puede demostrar por ese teorema.

La actividad 3.7 (fase de explicitación) fue fundamental para el avance en el desarrollo de habilidades de demostración. Consideramos que este momento fue esencial para que los estudiantes, comprendieran la importancia de establecer conexiones entre los diferentes sistemas de representación, comprendieran la necesidad de demostrar la congruencia de triángulos para poder usar las mismas variables *x* e *y* al usar las definiciones de las razones en el plano cartesiano. Varios estudiantes pasaron a demostrar sus conjeturas planteadas. La mayoría explicó demostraciones de estructura deductiva apoyadas en la conexión entre el dibujo geométrico y las propiedades matemáticas. A continuación mostramos un ejemplo que ilustra lo mencionado.

Cami pasa al tablero a demostrar que $sen(180 + \alpha) = -sen(\alpha)$.

[1] Cami: *Escribe la identidad en el tablero* (Fig. *3*)

[2] Inv.: *¿Cómo se dieron cuenta de eso?*

[3] Cami: *Por el dibujo* [realiza el dibujo en el tablero (Fig. 3)]

[4] Est.: *¿No se puede decir que miramos en Cabri?*

[5] Prof.: *Pero eso no es suficiente, deben explicar lo que vieron.*

[6] Cami: *Entonces 180 +* α *sería* θ, *entonces* θ *queda en el tercer cuadrante, entonces este punto es x, y* [se refiere a la coordenada P(*x*, *y*) del dibujo (Fig. 3)].

[7] Cami: *Entonces, al quedar acá* [señala el ángulo α] *quedaría –x, –y* [se refiere a las coordenadas de α]. *Entonces, acá sería y sobre r* [escribe $\frac{y}{r}$ en el tercer cuadrante (Fig. 3)] *y acá sería, menos y sobre r* [escribe $\frac{-y}{r}$ en el primer cuadrante (Fig. 3)]

[8] Cami: *Ahora sí, la demostración* [escribe en el tablero:

$$sen(180 + \alpha) = -sen(\alpha)$$
$$\frac{y}{r} = \left(-\frac{-y}{r}\right)$$
$$\frac{y}{r} = \frac{y}{r}$$

]

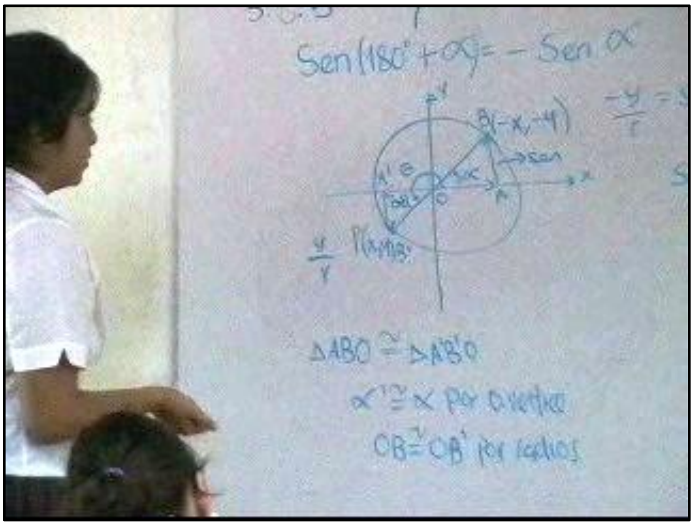


Figura 3: Fase de explicitación (demostración sen(180 + α) = - sen (α))

[9] Prof. *¿Cómo justificas el hecho de que uses para* α *y para 180 +* α, *en el seno el mismo valor y?*

[10] Cami: *Porque estos triángulos son congruentes* [señala los dos triángulos de la figura]

[11] Prof. *Eso es parte de la demostración.*

[12] Cami: [Marca los puntos de los triángulos y escribe $\triangle ABO \cong \triangle A'B'O$ (Fig. 3)]. *Entonces sería porque, estos son opuestos por el vértice* [señala α’ y α y escribe $\alpha' \cong \alpha$ por o. vértices (Fig. 3)]

[13] Cami: *Eh, esto con esto por radios* [señala *OB* y *OB*’ y escribe $OB \cong OB'$ por radios].

[14] Cami: *Y A’O con OA porque son la misma coordenada x.*

[15] Prof. *Sí, pero recuerda que lo que vamos a justificar es que podemos usar las mimas coordenadas a partir de que los ángulos son congruentes. Entonces, qué tienes, por opuestos por el vértice, los ángulos son congruentes, está bien. Por ser radios OB y OB’ son congruentes, ¿qué más puedes decir de los ángulos?*

[16] Cami: *Que estos son de 90* [señala y representa los ángulos *OA’B’* y *OAB*, luego escribe $\hat{A} \cong \hat{A}'$ rectos]

[17] Prof. *Para demostrar que es el mismo x, lo que tengo que demostrar es que los triángulos son congruentes. Entonces, tú tienes dos ángulos y un lado.*

[18] Cami: *Entonces, A, L, A* [escribe en el tablero ALA (Fig. 4)]

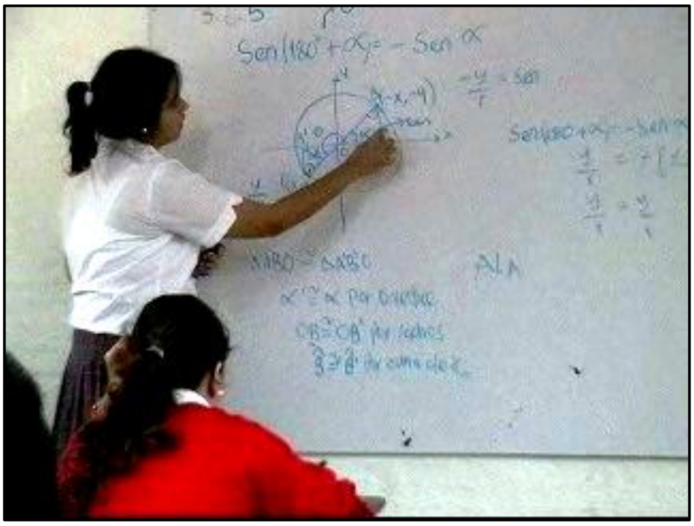


Figura 4: Demostración terminada

[19] Prof. *¿Con eso ya puedes decir A, L, A? ¿ya tienes dos ángulos y el lado que está entre esos dos ángulos?*

[20] Cami: *Ah, no, está el ángulo* [señala α], *está el lado* [señala *OB*], *pero falta este lado* [señala *OA*]

[21] Prof. *¿Qué puedes decir del otro ángulo?*

[22] Cami: *Ah, que son alternos, este lado es paralelo a este lado* [señala AB y A’B’]

[23] Prof.: *Bueno sí, pero, si ya dijiste algo de los otros dos, se puede decir que…*

[24] Cami: *Si estos dos son iguales, estos son iguales* [señala los respectivos ángulos iguales, borra $\hat{A} \cong \hat{A}'$ y escribe: $\hat{B} \cong \hat{B}'$ por suma de ∡ (Fig. 4)]

[25] Cami: *¿Ya? Entonces, serían congruentes por este teorema* [señala la palabra ALA en el tablero]

[26] Prof. *¿Qué implica que los triángulos sean congruentes?*

[27] Cami: *Que todos sus lados son iguales. Entonces, este y igual a este y* (Fig. 4).

Cami realiza una demostración deductiva formal estructurada, sabe responder a las preguntas de la profesora y demuestra manejo de los conceptos y propiedades involucrados en la demostración. La profesora recalca la necesidad de demostrar la igualdad de las coordenadas de las razones a través de la congruencia de triángulos y de explicar lo que se hizo para el planteamiento de la conjetura, además de mirar en Cabri.

En la fase de explicitación también se evidenció que algunos estudiantes se aprenden de memoria las demostraciones, pero no comprenden realmente lo que hicieron y por qué lo hicieron. Por ejemplo, Dani pasa a demostrar que $\cos(180+\alpha) = -\cos(\alpha)$.

[1] Dani: [Copia el dibujo, escribe las razones y plantea que 180º < θ < 270 y la identidad (Fig. 5)]

Figura 5: Planteamiento de la demostración de la identidad cos(180 + α) = -cos(α)

[2] Inv.: *¿Cómo se dieron cuenta de la relación?*

[3] Dani: *Hay que demostrar que estos dos triángulos son…*

[4] Prof. *Nuevamente la pregunta ¿cómo se dieron cuenta de la relación?*

[5] Dani*: Porque coseno de 180 – α es este* [señala el lado final de 180 – α y luego el vector $\overrightarrow{OA'}$*], y la razón coseno siempre es negativa en el tercer cuadrante, y como está en este es negativa y coseno de α es positivo* [señala el vector $\overrightarrow{OA}$]. *Los vectores tienen igual magnitud.*

[6] Prof. *¿El sentido?*

[7] Dani: *Contrario*.

[8] Prof. *Ahora si demuestra la relación.*

[9] Dani: *¿Escribo lo que tengo acá?*

[10] Prof. *Haz de cuenta que tienes que demostrar eso, contarle a sus compañeras.*

[11] Dani: [Copia de la hoja de trabajo: $OB \cong OB'$ por ser radios de la circunferencia]

[12] Est. *¿Siempre tenemos que copiar lo mismo?*

[13] Prof: *No es copiar lo mismo, es hacer la demostración de la relación, si eso implica algo que ya está hecho, vuelve a explicar*.

[14] Est. *¿Si ya demostramos que los dos triángulos eran iguales en el problema anterior?*

[15] Prof. *Hay que volverlo a demostrar*.

[16] Dani: [Copia de la hoja de trabajo: $OA \cong OA'$, por vector coseno, $BA \cong BA'$, por vector seno]

[17] Prof.: *Eso implica que los triángulos son congruentes, ¿y eso qué implica?*

[18] Dani: *Que los ángulos α' y α son congruentes*.

[19] Prof.: *¿Qué significa para la relación?*

[20] Dani: [Después de varios minutos de explicación de la profesora], *que esto es x, y* [escribe (*x*, *y*) al lado del punto B], *y esto es (–x, –y)* [lo escribe al lado de B']

[21] Dani: [Copia de la hoja de trabajo en el tablero:
$$cos(180+\alpha) = -cos(\alpha)$$
$$\frac{-x}{r} = -\left(\frac{x}{r}\right)$$
$$\frac{-x}{r} = \frac{-x}{r}$$
]

Vemos en la transcripción, que la estudiante sabe los pasos que hay que seguir para demostrar, pero no sabe conectar los diferentes pasos entre si. Tampoco sabe conectar los diferentes sistemas de representación, ni entiende la necesidad de demostrar que los triángulos son congruentes para garantizar que las coordenadas son iguales y por ello podemos usar la misma letra; esto se evidencia cuando justica que los lados *OA* y *OA'*, *BA* y *BA'* son iguales por ser vectores iguales (está asumiendo como verdadero lo que tiene que demostrar).

En los episodios mostrados también se destaca el papel de la profesora. Continuamente está señalando la necesidad de explicar, comunicar y justificar todo lo que escriben las estudiantes. De esta manera promueve las funciones de explicación, justificación y comunicación de la demostración.

Consideramos que en la fase de explicitación, estas dificultades se hacen evidentes y deben ayudar al profesor a identificar los conocimientos y las carencias de los estudiantes.

7.4 Fase de Orientación libre

Esta fase se caracterizó por el planteamiento de nuevos problemas, que requerían el uso de lo aprendido en las fases de orientación dirigida y de explicitación. Los problemas planteaban la búsqueda de nuevas relaciones para las razones cotangente, secante y cosecante, las cuales no se habían trabajado en la fase 2, se debían encontrar nuevas relaciones no explicitadas o se pedían nuevas formas de demostrar. El análisis de las hojas de trabajo de los estudiantes nos permitió identificar aspectos importantes de esta fase que contribuyeron al aprendizaje de la trigonometría y el desarrollo de habilidades de demostración.

En la actividad 1, la fase de orientación libre sirvió para reforzar algunos conceptos e ideas que habían sido resueltos de manera memorística en la fase de información, se plantearon preguntas que requerían de la comprensión de los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas. Los problemas buscaban reforzar la idea de que, cuando dos lados del triángulo rectángulo son constantes, no pueden existir triángulos con ángulos diferentes, pero, sí los ángulos son constantes, entonces, existen varios triángulos con medidas de sus lados diferentes, es decir que las razones no dependen de las medidas de los lados del triángulo, si no de sus ángulos.

En el problema 1.6.4, se planteaba que un triángulo rectángulo tenía un ángulo de 45º y se pedía hallar las longitudes de lados y la amplitud de los ángulos, todos los estudiantes usaron el teorema de Pitágoras para indicar que las medidas de los catetos era a y la hipotenusa $\sqrt{2}a$.

Algunas de las respuestas a la pregunta **¿Existen otros triángulos rectángulos con medida del ángulo igual a 45º y medidas de sus catetos e hipotenusa diferentes?** fueron las siguientes: “*sí, siempre que la medida de su hipotenusa sea el resultado de multiplicar el cateto por* $\sqrt{2}$”, “*sí, siempre y cuando las medidas de los catetos sea la misma*”, “*sí, pues al variar el valor de a (los catetos), también cambia el de la hipotenusa (*$a\sqrt{2}$*). Dando así triángulos semejantes, cuyos ángulos son iguales y los lados varían proporcionalmente*”.

La mayoría de estudiantes expresaron que $sen30 = \frac{1}{2}$ significa que, si en un triángulo existe un ángulo de 30º, la hipotenusa del triángulo es el doble del cateto opuesto al ángulo. Algunos usaron esta relación en el problema 1.6.7, para plantear que no existen triángulos rectángulos con un ángulo de 40º e hipotenusa el doble de uno de sus catetos. Algunas justificaciones dadas fueron las siguientes: “*para que la hipotenusa sea el doble de uno de los catetos, los ángulos del triángulo deben ser 30º, 60º, 90º*”, “$sen40 \stackrel{?}{=} \frac{a}{2a}$, $0{,}342 \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}$, $0{,}342 \neq 0{,}5$”.

Todos plantearon que no es posible que el coseno de un ángulo sea $\frac{3}{2}$, porque “*no es posible que la hipotenusa sea menor que un cateto*”, “*coseno varía entre 0 y 1*”

En la actividad 2 se plantearon varios momentos de la fase de orientación libre dentro de la clase (actividades 2.5 y 2.6). Analizando las hojas de trabajo de los estudiantes (conjetura y demostración como productos), se observa que al principio la mayoría de conjeturas y demostraciones estaban soportadas en ejemplos numéricos, a medida que se avanzaba fueron surgiendo demostraciones que podríamos considerar deductivas, las cuales usan las definiciones de las razones y las relaciones entre las coordenadas de los ángulos *A*, –*A*, 90 – *A*, y *A* – 90 para realizar planteamientos como el siguiente:

Conjetura: La relación entre *sen*(*A*) y *sen*(–*A*) es el mismo resultado y lo que cambia es el signo.

Demostración: $sen(A) = \frac{y}{r}$ y $sen(-A) = \frac{-y}{r}$

No usan ningún dibujo, ni presentan la relación entre las coordenadas de los ángulos. Debido a esto, la profesora plantea y recalca sobre la necesidad de representar en la hoja de trabajo lo que están observando en Cabri. Esta sugerencia fue tenida en cuenta en la actividad 2.6.1, en donde se hizo más frecuente el uso de dibujos o la explicitación de la relación entre las coordenadas de los ángulos para respaldar las demostraciones (Fig. 6).

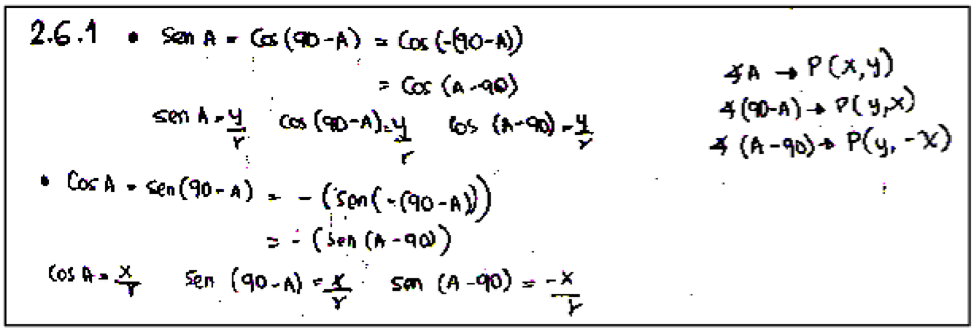


Figura 6: Uso de las relaciones entre las coordenadas en el proceso de demostración

Un grupo de estudiantes realizó la siguiente tabla (Fig. 7) para plantear y demostrar de manera algebraica las relaciones señaladas con las líneas.

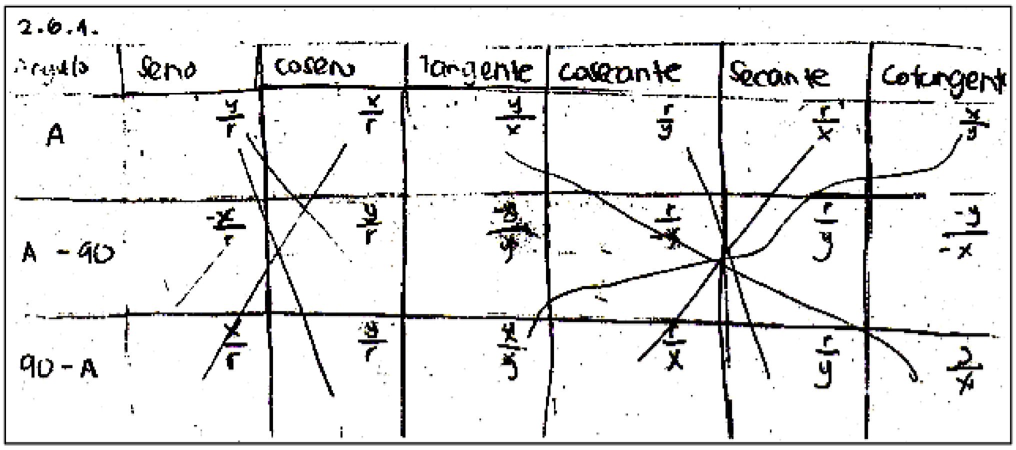


Figura 7: Tabla para relacionar las razones de los ángulos *A*, *A* – 90 y 90 - *A*

En la actividad 2.7 de explicitación, el grupo explicó sus conjeturas y demostraciones usando la tabla (Fig. 7) y un buen número de estudiantes la empezaron a usar en las siguientes actividades. Pensamos que esta forma de organización de la información ideada por los mismos estudiantes (que no esperábamos), contribuyó de manera significativa para que los estudiantes tuvieran una forma de analizar las relaciones sin la necesidad de Cabri, empezaran a utilizar con más frecuencia las definiciones de las razones en el plano cartesiano, usaran más el sistema de representación algebraico y tuvieran una forma nemotécnica de recordar la identidades trigonométricas. En la actividad 2.8 de orientación libre, trabajada fuera del salón de clase, algunos estudiantes ampliaron la tabla anterior y en base a ella plantearon y demostraron las conjeturas pedidas en las sub-actividades 2.8.2 a 2.8.6 (Fig. 8).

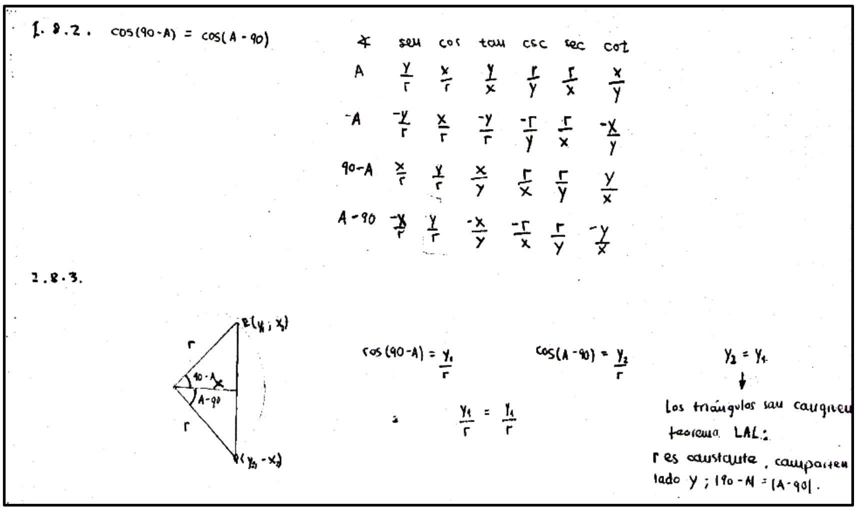


Figura 8: Demostración de la identidad *cos*(90 - A) = *cos*(A - 90)

En la actividad 3 se plantearon dos actividades de orientación libre, la actividad 3.6 en salón de clase y la 3.8 fuera del salón. En 3.6 se propuso que cada grupo conformado por dos o tres estudiantes planteara y demostrara una o dos conjeturas de las dadas y que todo el salón de clase conociera la forma de demostrarla en la siguiente actividad de la fase de explicitación (actividad 3.7). Esta actividad nos permitió detectar algunas dificultades que describimos a continuación.

Algunos estudiantes no son capaces de plantear una conjetura de la relación solicitada debido a que no reconocen los elementos o las propiedades geométricas implícitas en la construcción Si el estudiante no tiene claridad sobre los conceptos y los objetos representados en el archivo, por más que Cabri permita visualizar relaciones, el estudiante no las encontrará. Por ejemplo, en 3.6.3 y 3.6.4 debían resolver el siguiente problema **¿Qué relación existe entre $\boldsymbol{tan(180 - \alpha) y\ tan(\alpha)}$?** Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura. Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 3.6.3.

A continuación presentamos la transcripción de lo realizado por Mapa, quien no reconoce los vectores que representan las razones $tan(180 - \alpha)$ y $tan(\alpha)$, por lo tanto no "ve" ninguna relación como se tenía previsto.

[1] Inv.: *¿Qué es lo que pasa?*

[2] Mapa: *Me preguntan por la relación de la tangente de 180 – α y tangente de α, yo se que cuando está así, en ésta posición* [señala el lado final de ángulo θ en el segundo cuadrante (Fig. 9)] *180 – α es θ, y α es α, pero digamos si la tengo, digamos en el primer cuadrante*.

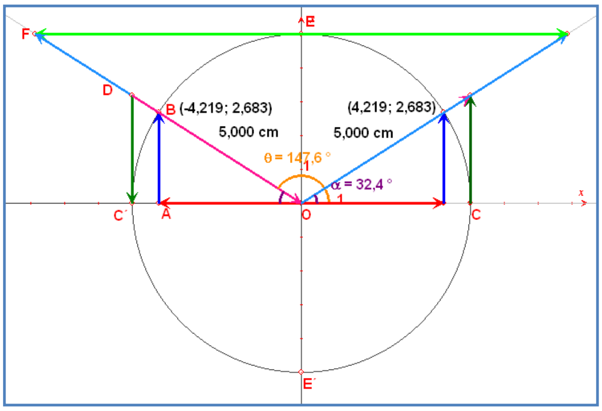


Figura 9: Archivo 3.6.1

[3] Inv.: *No sirve porque…*[Mapa no deja terminar la frase]

[4] Mapa: *Por eso, porque θ sería α y 180 – α sería esto* [señala el ángulo α] *¿entonces lo que me da lo cojo positivo?*

[5] Inv.: *No. Tienes que colocar θ en el segundo cuadrante, sería para θ en el segundo cuadrante*.

[6] Mapa: *¿O sea la pregunta vale sólo para θ en el segundo cuadrante?*

[7] Inv.: *Sí, por ahora estamos mirando sólo cuando θ está en el segundo cuadrante.*

[8] Mapa: *Entonces la relación de tangente solamente es así* [mueve el ángulo θ hacia el segundo cuadrante]

[9] Inv.: *¿Cuál sería la relación?*

[10] Mapa: *Para α tangente sería y sobre…*

[11] Inv.: *¿Cuál y?* [el investigador pregunta cuando ve que el estudiante señala el vector que representa seno y su ordenada]

[12] Mapa: *Ésta* [señala la ordenada del punto final del vector que representa seno]

[13] Inv.: *No, ese no es el y de la tangente* [el investigador le dice esto, debido a que Mapa señala el vector seno y no el vector tangente. Aunque la ordenada de seno se puede tomar para hallar tangente por formar triángulos semejantes con el vector tangente (Fig. 9), Mapa no está identificando la representación vectorial de tangente]

[14] Inv.: *¿Cuál es la tangente?*

[15] Mapa: *No se cual es la tangente.*

[16] Inv.: *Recuerde que ahí estamos representado las razones como vectores ¿cuál es el vector tangente? tu ya deberías saber, inclusive construirlos.*

[17] Mapa: *No me acuerdo.*

En otras ocasiones los estudiantes plantean la relación correcta basada en lo observado en el archivo de Cabri, pero no tienen los elementos teóricos para transformar lo que ven en propiedades matemáticas que conlleve a la construcción de la demostración. Por ejemplo, en 3.6.9 y 3.6.10 debían resolver el siguiente problema **¿Qué relación existe entre $\boldsymbol{tan(360-\alpha)}$ y $\boldsymbol{tan(\alpha)}$?** Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura. Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 3.6.9. A continuación transcribimos lo realizado por Andrea y Lady, en donde se ilustra la debilidad del razonamiento inductivo apoyado en la percepción.

[1] Andrea: *Que tangente de 360 – α da negativo en todos los cuadrantes.*

[2] Inv.: *¿En todos los cuadrantes da negativo?*

[3] Andrea: *No, eso si no me di cuenta, lo que sí me di cuenta, es que es la misma relación, que uno es positivo y el otro es negativo, de diferente signo, tienen el mismo valor absoluto y tienen signos contrarios.*

[4] Inv.: *¿La relación cuál es?*

[5] Lady: *Que* $tan(360-\alpha) = -tan(\alpha)$

[6] Inv.: *¿Cómo demostramos eso?*

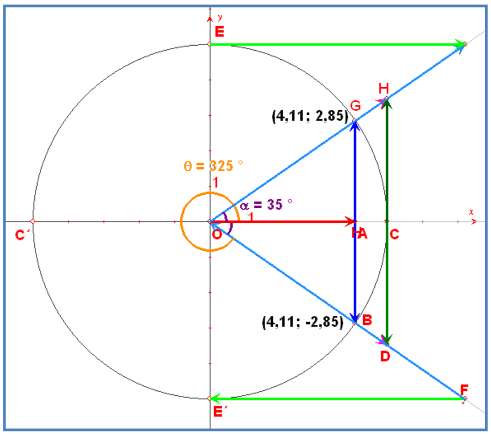


Figura 10: Archivo 3.6.1 para θ = 360 - α

[7] Lady: *Primero, demostramos por lo que dijo Ale, por opuestos por el vértice que este angulito* [se refiere al ángulo COD (Fig. 10)] *también es α ¿sí? Bueno, primero que los triángulos son congruentes* [se refiere a los triángulos COH y COG], *y después, esto….*

[8] Inv.: *Hay que demostrar que los triángulos son congruentes.*

[9] Andrea: *¿Tenemos que demostrar que los triángulos son congruentes?*

[10] Lady: *Cuando está en el segundo cuadrante para que diera θ tendría que ser $180 - \alpha$.*

[11] Inv.: *Ya es claro que en esta relación θ está en el cuarto cuadrante.*

[12] Lady: *La demostración la hacemos, bueno decimos que los triángulos son congruentes y mostramos que tangente…, menos tangente de $360 - \alpha$ es igual a tangente de α, en todos los cuadrantes y después demostramos que trescientos…, que sólo en el cuarto cuadrante se cumple que $360 - \alpha$ es θ, ¿ya?*

A pesar de que Andrea y Lady intentan usar lo explicado por su compañera en la fase de explicitación, lo que dicen da cuenta de que no han comprendido los conceptos, ni las formas de demostrar.

En la actividad 3.8 la mayoría de estudiantes presentó demostraciones deductivas de identidades trigonométricas, acompañadas de representaciones geométricas y algebraicas. Pensamos que esto se debe a que en la actividad 3.7 de explicitación, los estudiantes tuvieron la oportunidad de ver y discutir las demostraciones realizadas por sus compañeros y al hecho de que la actividad permita la interacción y ayuda entre compañeros fuera de clase. En estos casos no podemos decir que todos los estudiantes razonan de manera deductiva porque nos presentan una demostración deductiva (producto), pero este ejercicio les ayuda a ir comprendiendo las formas de argumentación que contribuyen al desarrollo de sus propias habilidades de demostración. Por ejemplo, en 3.8.2 debían resolver el siguiente problema **¿Es**

verdad que $cos(180 - \alpha) = \cos(\alpha)$? Si la igualdad es cierta demuéstrala, si es falsa refútala y encuentra una verdadera y demuéstrala.

Mechis realiza la siguiente demostración (Fig. 11), la cual se podría considerar como deductiva formal estructurada.

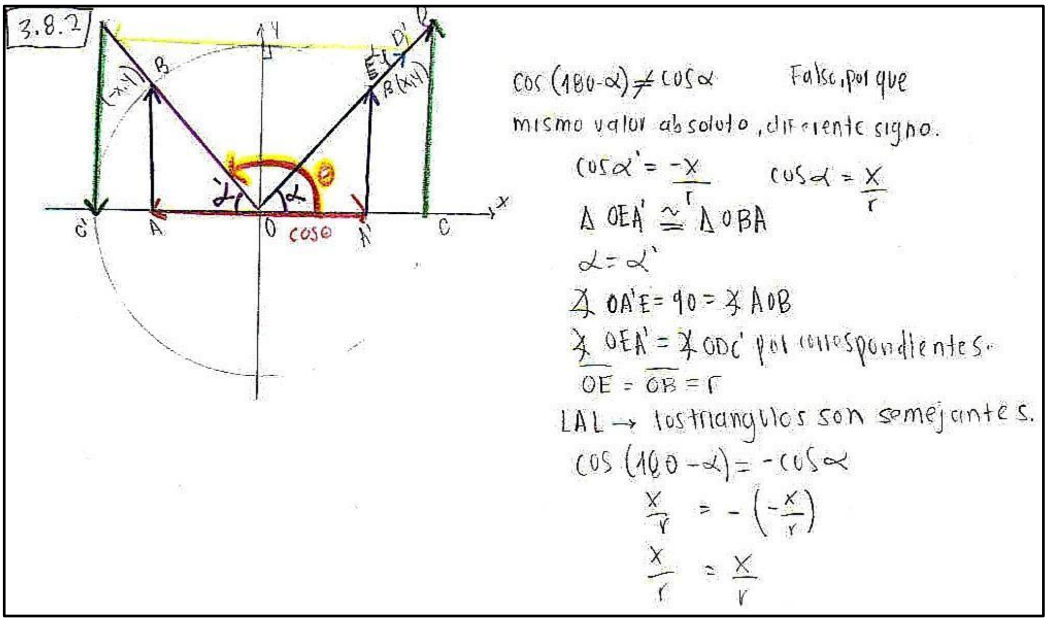
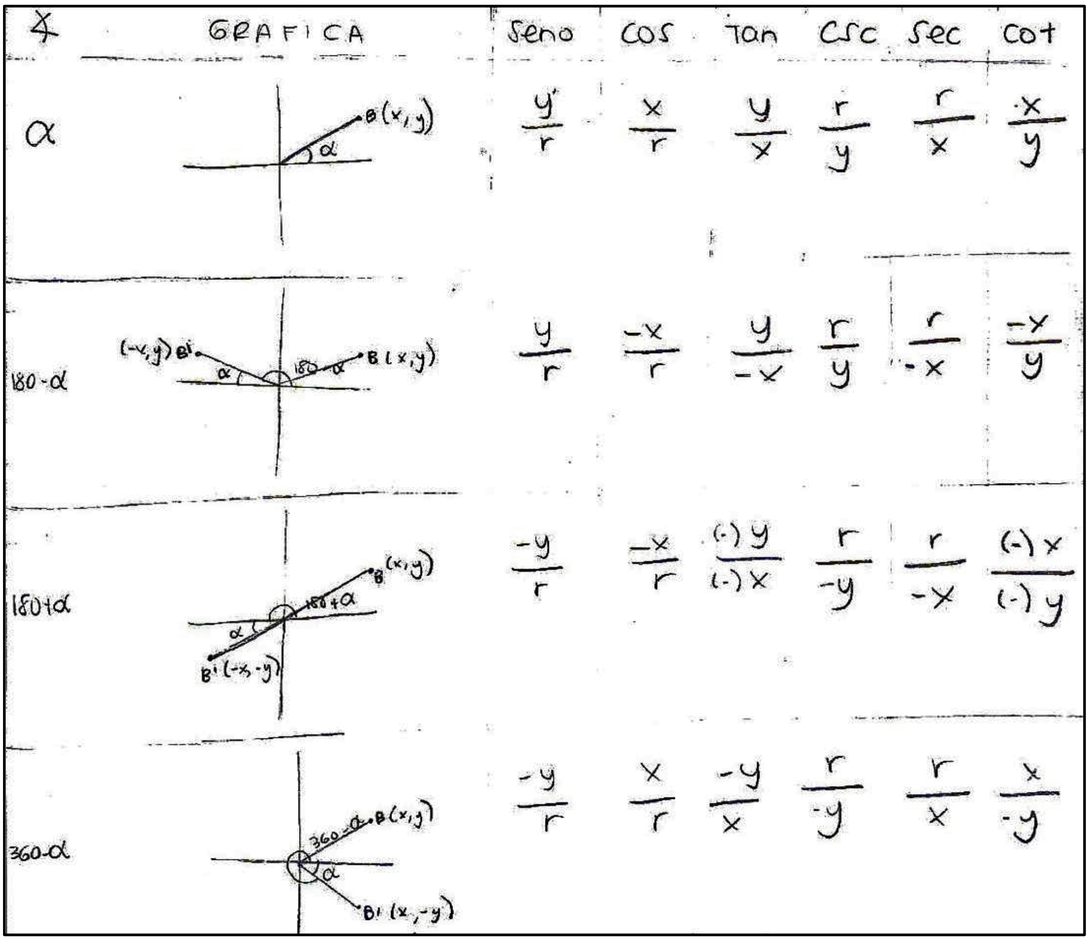


Figura 11: Demostración de $cos(180 - \alpha) = -cos(\alpha)$

En la demostración escrita se destaca la relación entre el diagrama dinámico de Cabri y el dibujo en la hoja de trabajo (uso de los vectores que representa cada lado trigonométrico con sus respectivos colores), el uso de la definición de coseno en el plano cartesiano, la relación entre las coordenadas de los ángulos 180 – α y α y la demostración de la congruencia de triángulos (aunque usa la palabra semejante) como operadores teóricos. Hay un control teórico caracterizado por la conexión entre las relaciones representadas en el dibujo, la definición de coseno, la demostración geométrica de la congruencia y la demostración algebraica de la identidad trigonométrica.

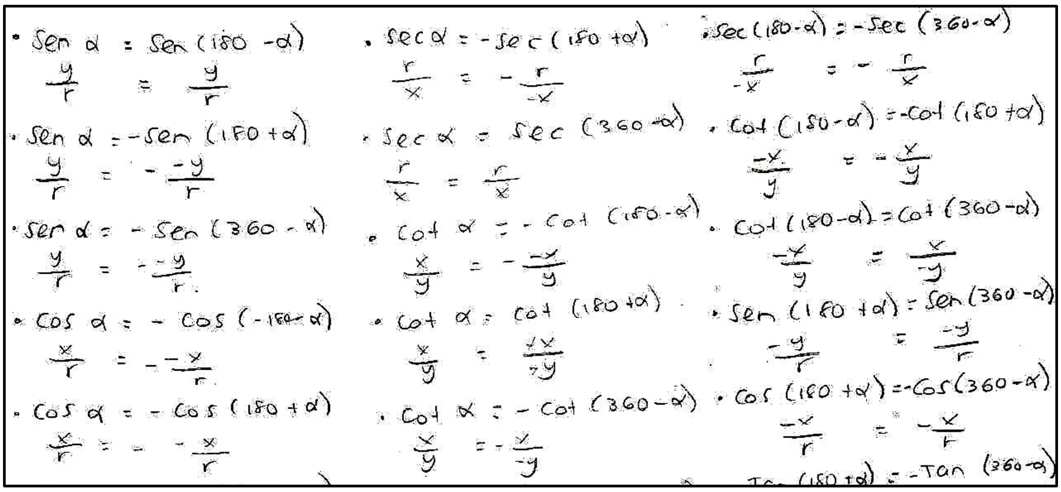
En 3.8.7 debían encontrar otras relaciones de las razones trigonométricas de los ángulos α, 180 – α, 180 + α y 360 – α que no hubieran encontrado y demostrado en las actividades anteriores y demostrarlas. Vicky plantea una nueva tabla (Fig. 12) para los ángulos α, 180 – α, 180 + α y 360 – α, acompañada de la representación de los ángulos y sus respectivas coordenadas.



∡	GRAFICA	Seno	Cos	Tan	Csc	Sec	Cot
α		$\frac{y}{r}$	$\frac{x}{r}$	$\frac{y}{x}$	$\frac{r}{y}$	$\frac{r}{x}$	$\frac{x}{y}$
$180-\alpha$		$\frac{y}{r}$	$\frac{-x}{r}$	$\frac{y}{-x}$	$\frac{r}{y}$	$\frac{r}{-x}$	$\frac{-x}{y}$
$180+\alpha$		$\frac{-y}{r}$	$\frac{-x}{r}$	$\frac{(-)y}{(-)x}$	$\frac{r}{-y}$	$\frac{r}{-x}$	$\frac{(-)x}{(-)y}$
$360-\alpha$		$\frac{-y}{r}$	$\frac{x}{r}$	$\frac{-y}{x}$	$\frac{r}{-y}$	$\frac{r}{x}$	$\frac{x}{-y}$

Figura 12: Tabla de identidades trigonométricas de los ángulos α, 180 - α, 180 + α y 360 - α

Apoyada en la tabla (Fig. 12) plantea y demuestra de forma algebraica 36 identidades trigonométricas de manera similar a las que se presentan en la figura 13, en donde hemos tomado solamente algunas de ellas.



- $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180-\alpha)$; $\frac{y}{r} = \frac{y}{r}$
- $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(180+\alpha)$; $\frac{y}{r} = -\frac{-y}{r}$
- $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(360-\alpha)$; $\frac{y}{r} = -\frac{-y}{r}$
- $\cos\alpha = -\cos(-180-\alpha)$; $\frac{x}{r} = -\frac{-x}{r}$
- $\cos\alpha = -\cos(180+\alpha)$; $\frac{x}{r} = -\frac{-x}{r}$
- $\sec\alpha = -\sec(180+\alpha)$; $\frac{r}{x} = -\frac{r}{-x}$
- $\sec\alpha = \sec(360-\alpha)$; $\frac{r}{x} = \frac{r}{x}$
- $\cot\alpha = -\cot(180-\alpha)$; $\frac{x}{y} = -\frac{-x}{y}$
- $\cot\alpha = \cot(180+\alpha)$; $\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$
- $\cot\alpha = -\cot(360-\alpha)$; $\frac{x}{y} = -\frac{x}{-y}$
- $\sec(180-\alpha) = -\sec(360-\alpha)$; $\frac{r}{-x} = -\frac{r}{x}$
- $\cot(180-\alpha) = -\cot(180+\alpha)$; $\frac{-x}{y} = -\frac{x}{y}$
- $\cot(180-\alpha) = \cot(360-\alpha)$; $\frac{-x}{y} = \frac{x}{-y}$
- $\operatorname{sen}(180+\alpha) = \operatorname{sen}(360-\alpha)$; $\frac{-y}{r} = \frac{-y}{r}$
- $\cos(180+\alpha) = -\cos(360-\alpha)$; $\frac{-x}{r} = -\frac{x}{r}$
- $\tan(180+\alpha) = -\tan(360-\alpha)$

Figura 13: Demostraciones de algunas identidades trigonométricas

En la actividad 4.4 todos los estudiantes plantearon las identidades correctas y realizaron una demostración algebraica, apoyándose en el teorema de Pitágoras, un buen grupo de estudiantes representó con un dibujo la relación en el primer cuadrante (Fig. 14).

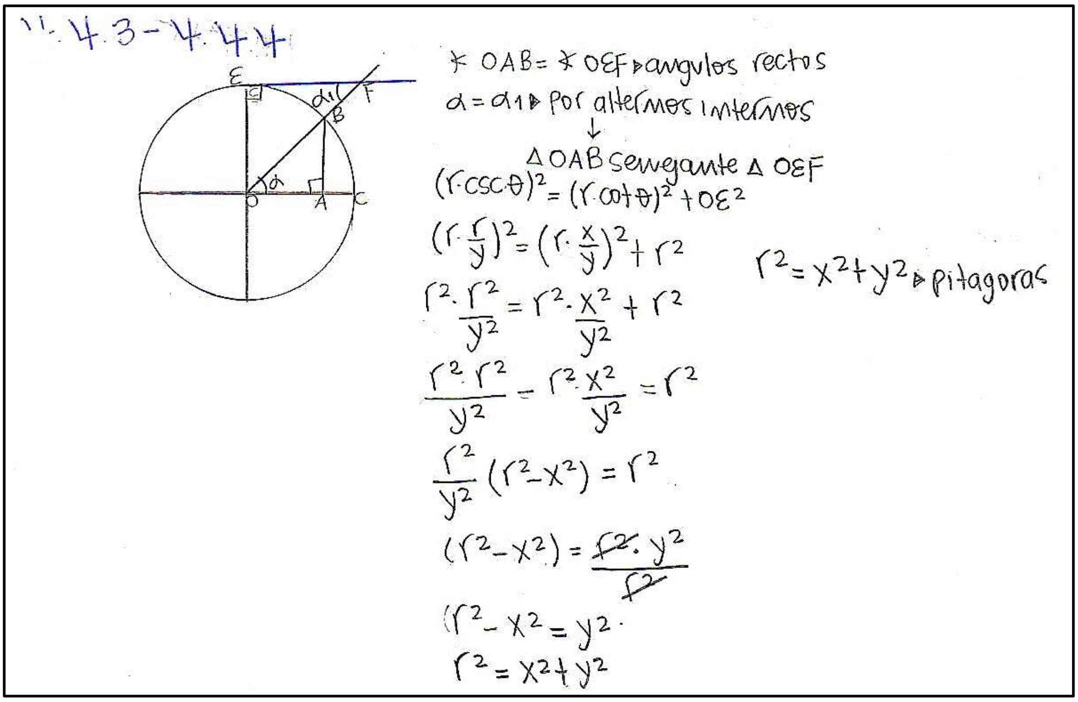


Figura 14: Demostración de la identidad $(r\csc\theta)^2 = (r\cot\theta)^2 + r^2$

En la actividad 5.4 la mayoría de estudiantes usó lo aprendido para la demostración del seno de la suma de dos ángulos, en el planteamiento y demostración del coseno de la suma de dos ángulos (Fig. 15).

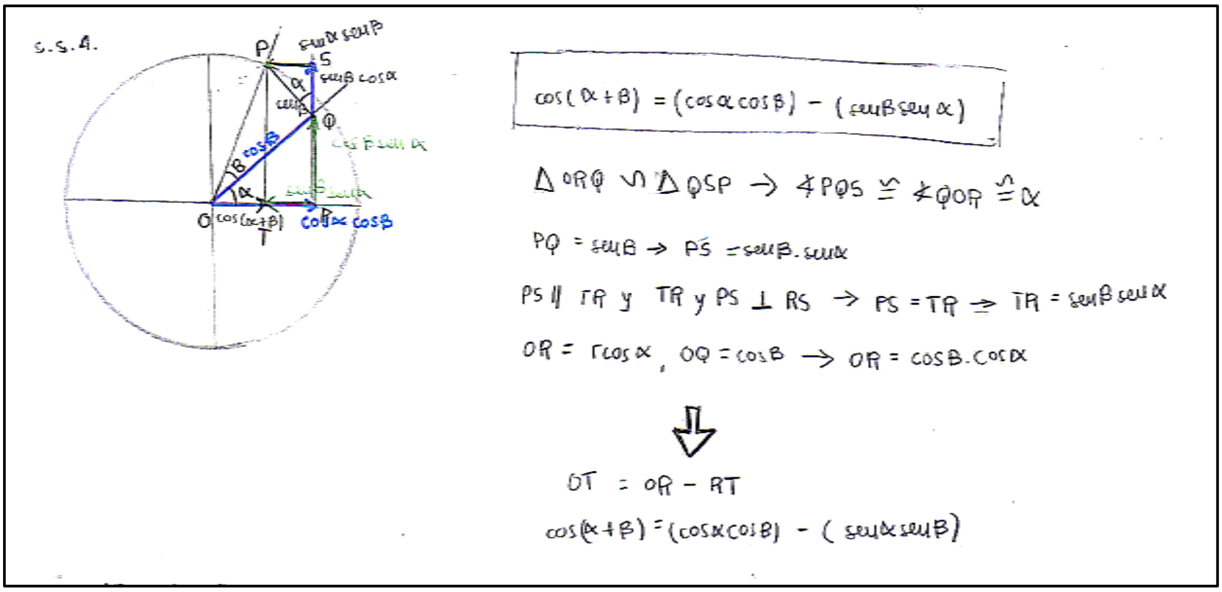


Figura 15: Demostración de $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) – \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta)$

En la sexta actividad usaron, desde la fase de información, lo aprendido en la quinta actividad. La mayoría de estudiantes usó dibujos geométricos para representar las relaciones visualizadas en el archivo dinámico de Cabri y conectar lo dibujado con las propiedades matemáticas representadas de manera algebraica.

De la fase de orientación libre podemos concluir que con las actividades planteadas se cumplió con el objetivo de la fase planteado en el modelo, el cual consiste en la aplicación de los conocimientos y lenguaje que los estudiantes acaban de adquirir a otras actividades y problemas diferentes a las anteriores. La invitación al planteamiento de nuevas relaciones entre las razones trigonométricas, permitió a los estudiantes explorar diversas posibilidades, utilizando lo aprendido para plantear nuevos conocimientos y formas de organización de la información, aplicando lo visualizado y explorado en Cabri.

En cuanto a las demostraciones construidas por los estudiantes en esta fase, consideramos que se debe tener cuidado en suponer que los estudiantes razonan y demuestran deductivamente, dado que la mayoría de conjeturas y demostraciones que presentan tienen esta apariencia. Pensamos que esto ocurre porque los estudiantes se reúnen fuera de la clase para trabajar en grupos y dentro de estos existe alguno que ya razonan deductivamente y ayudan a los que aún no lo hacen.

7.5 Fase de Integración

Como fase de integración, en las tres primeras actividades se planteó completar un mapa conceptual. Para las tres últimas actividades los estudiantes tenían que construir sus propios mapas.

De los tres primeros mapas, no es mucho lo que se puede decir respecto a la forma de organización de los conceptos y propiedades, dado que de alguna manera esta forma fue impuesta por el mapa entregado. De los estudiantes que completaron el mapa de manera similar a la planteada en el mapa de experto, debemos decir que supieron usar la información recopilada en sus hojas de trabajo para rellenar correctamente las celdas o huecos faltantes. Los mapas de los estudiantes que cometieron algunos errores o dejaron de llenar alguna celda nos sirvieron para detectar las siguientes dificultades, deficiencias y avances que se presentaron en cada una de las actividades.

En la actividad 1 más o menos el 25% de los estudiantes cometieron el error de plantear que las razones trigonométricas dependen del valor de los lados. El 25% cree que con el valor de un solo ángulo se pueden hallar los otros lados y ángulos del triángulo. El 40% no identificó las seis identidades trigonométricas que se podían establecer entre las razones de un ángulo y las razones de su ángulo complementario, posiblemente algunos lo hicieron por la estrechez de la celda correspondiente.

En la actividad 2 todos los estudiantes plantearon que la razones trigonométricas no dependen de los lados (o del radio), al parecer el error cometido en la primera actividad fue superado. En las definiciones de cotangente y secante el 50% no aclaró que el denominador debía ser diferente de cero. Todos los estudiantes plantearon correctamente los valores y los signos en cada cuadrante de las razones trigonométricas. La mayoría planteó correctamente las 18 identidades trigonométricas esperadas.

En la actividad 3 la mayoría de estudiantes completó correctamente el mapa entregado. Algunos no plantearon todas las identidades esperadas o cometieron errores en su planteamiento (Fig. 17). Al 30% de los estudiantes se les dificultó la representación como vectores de las identidades trigonométricas planteadas (Figuras 16 y 17).

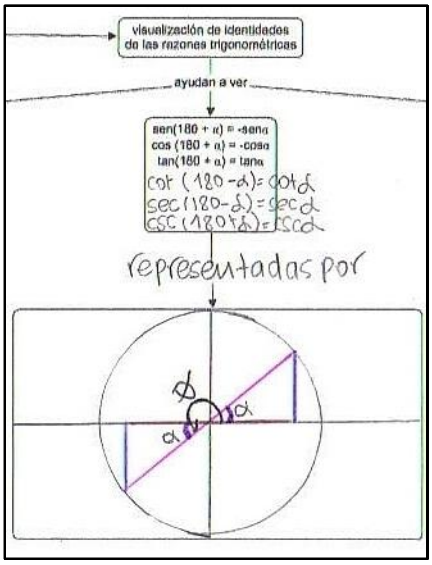


Figura 16: Algunas relaciones falsas; error de representación

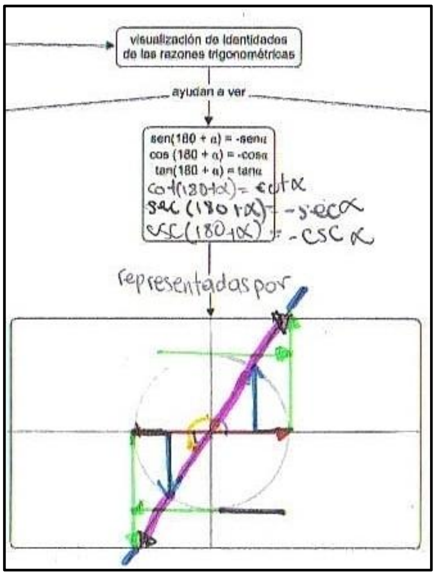


Figura 17: Error de representación

En la actividad 4 se evidenció que los estudiantes usan de manera adecuada los mapas conceptuales, todas las relaciones establecidas fueron correctas. El 40% usó representaciones geométricas en el mapa, ya fuera la representación de las razones como vectores en el primer plano, la representación de la identidad pitagórica fundamental o la representación de las tres identidades.

En la información organizada en el mapa algunos incluyeron las relaciones básicas de las tres identidades pitagóricas (Fig. 18).

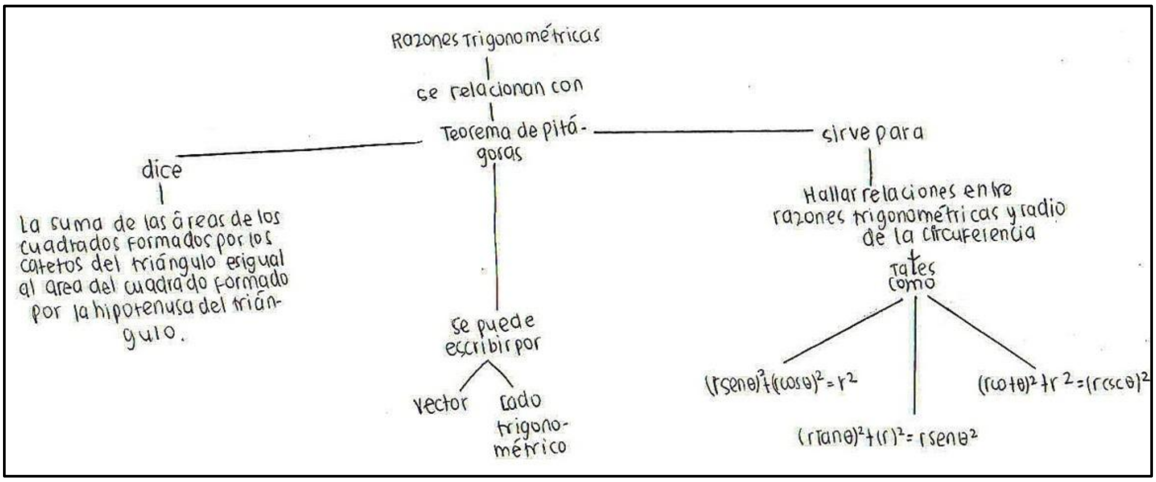


Figura 18: Mapa conceptual Identidades Pitagóricas

Otros involucraron todo lo trabajado en el taller, incluyendo las fórmulas que relacionan una razón en función de otra y la representación de las razones (Fig. 19).

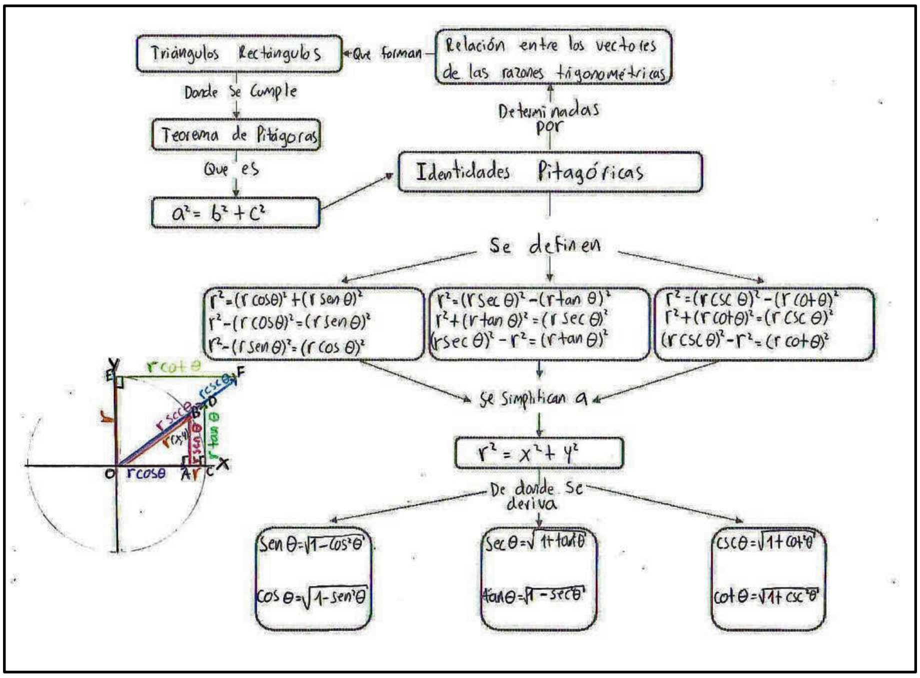


Figura 19: Mapa conceptual Identidades Pitagóricas

Un estudiante incluyó las representaciones de las tres identidades y sus respectivas demostraciones (Fig. 20).

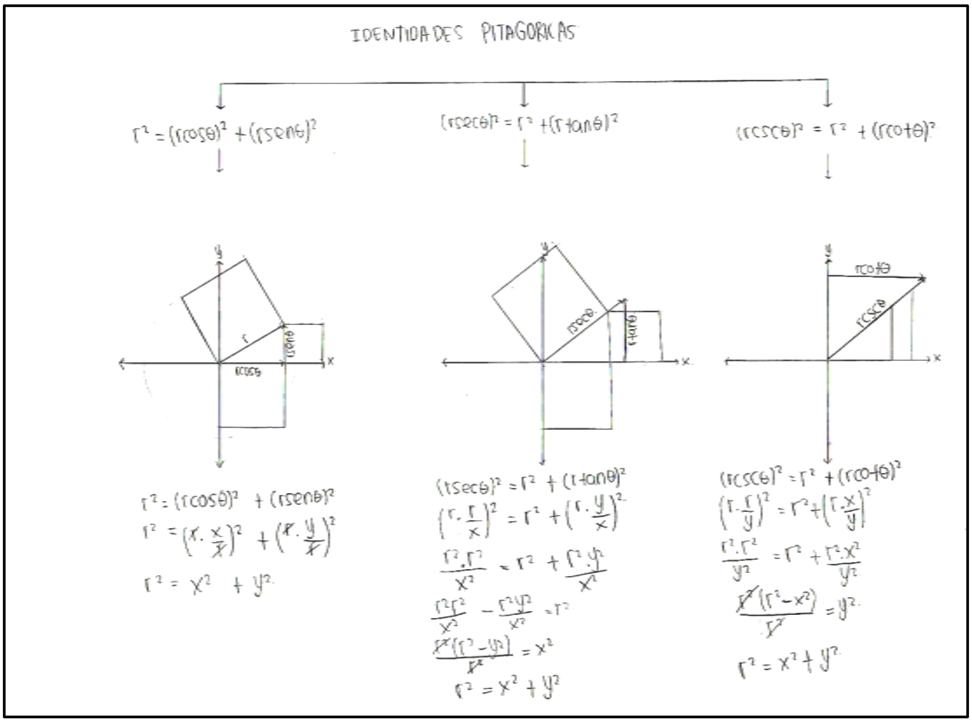


Figura 20: Mapa conceptual Identidades Pitagóricas

En la actividad 6 todos los estudiantes hicieron en el mapa el dibujo del archivo de Cabri para representar geométricamente las razones (Fig. 21).

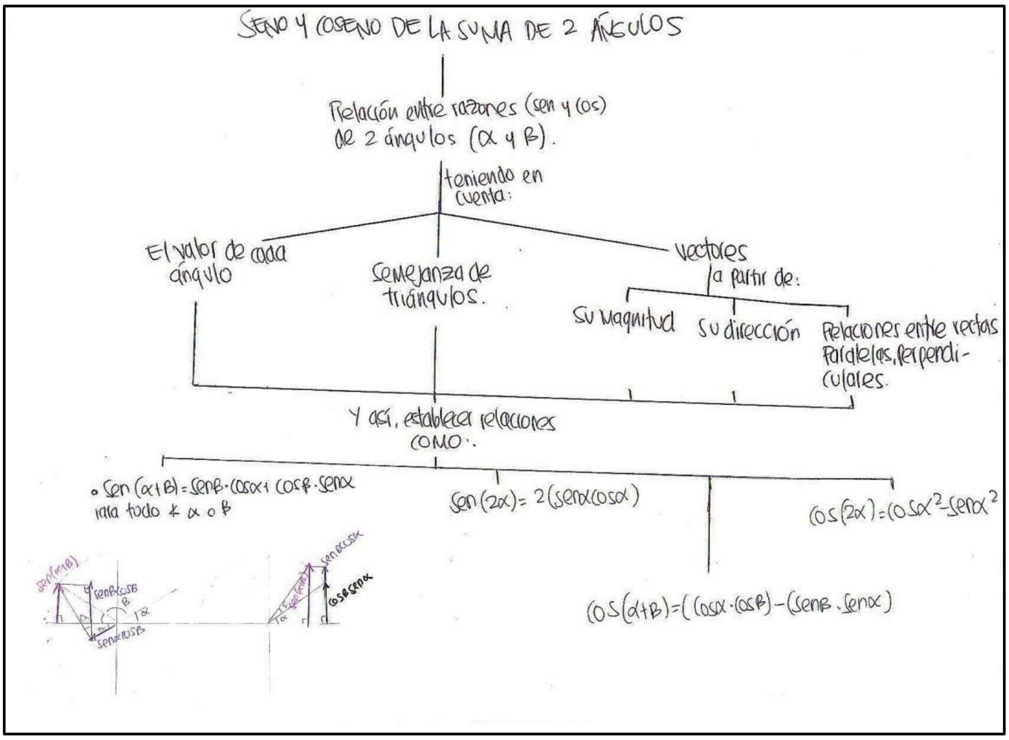


Figura 21: Mapa del seno y coseno de la suma de dos ángulos

En la actividad 6 todos los estudiantes tomaron como referencia el mapa del experto entregado al final de la actividad 5 y realizaron mapas muy similares (Fig. 22).

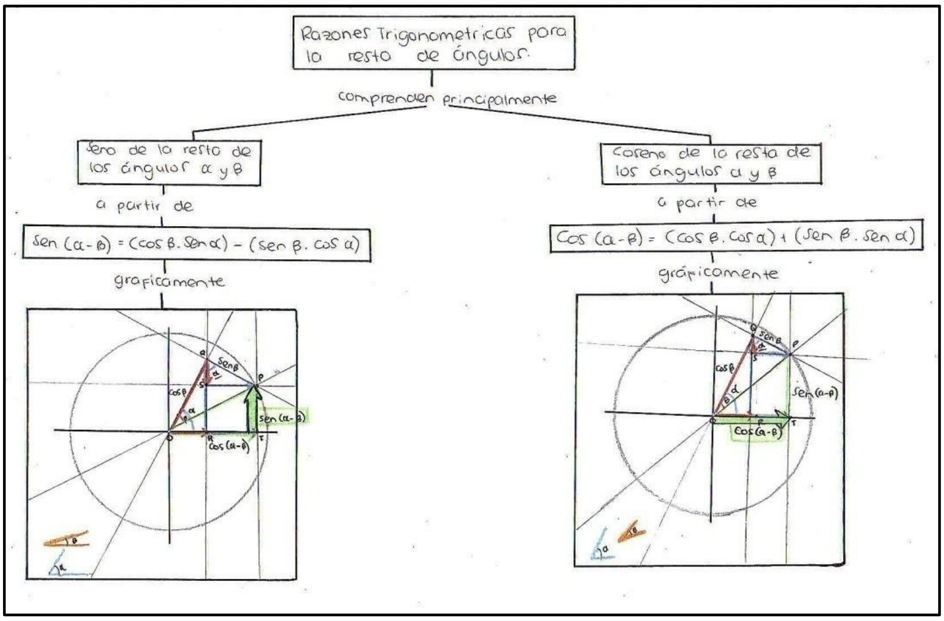


Figura 22: Mapa del coseno de la diferencia de dos ángulos

Hemos visto que los mapas ayudaron a detectar errores y dificultades que se fueron tratando de corregir en las siguientes actividades. Lo analizado también concuerda y refuerza lo dicho en la demás fases analizadas en cuanto al desarrollo de los conceptos y las habilidades de demostración, especialmente refuerzan el uso y la conexión entre los sistemas de representación geométrico y algebraico a partir de la tercera actividad.

Somos conscientes de que el análisis realizado a los mapas conceptuales es bastante superficial y no profundiza en el uso adecuado o no de dicha herramienta, pero lo presentado da cuenta de que es una herramienta valiosa para la obtención y organización de información, tanto para el estudiante, el profesor y el investigador. Consideramos que fue un acierto el haberlo incluido en la fase de integración de Van Hiele. Proponemos que para una próxima experimentación con la unidad de enseñanza, los mapas deben empezar a ser construidos por los estudiantes a partir de la tercera actividad y en los mapas de las dos primeras, tenemos que incluir dentro del mapa las representaciones geométricas, para que el estudiante empieza a considerarlas y a realizar conexiones con los otros sistemas de representación desde el principio.

7.6 Síntesis final

Consideramos que las actividades planteadas en cada una de las fases fueron apropiadas para lograr los objetivos perseguidos por el modelo de Van Hiele en cada una de ellas. También se cumplieron con varios de los objetivos de aprendizaje y se logró avanzar en el aprendizaje de ciertos conceptos y relaciones de las razones trigonométricas y el aprendizaje de procesos matemáticos como la representación, las conexiones y el razonamiento y la demostración (NCTM, 2003).

El haber planteado la unidad de enseñanza partiendo del estudio de las definiciones, propiedades e identidades de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, y posteriormente en el plano cartesiano, con sus representaciones en forma de vectores con la ayuda visual y dinámica de Cabri ayudó a superar la dificultad de poder establecer conexiones entre lo geométrico y lo analítico. En este sentido, las actividades planteadas en la fase de explicitación y la intervención de la profesora, insistiendo en la necesidad de representar y justificar lo visualizado en Cabri, ayudaron a superar esta dificultad señalada por varios de los investigadores en el tema. El enfoque geométrico, reflejado en las construcciones de los archivos suministrados y las herramientas de exploración y medición ofrecidas por Cabri, también ayudó a superar esta dificultad.

La inclusión de los mapas conceptuales en la fase de integración fue otro gran acierto, dado que en ellos se puede seguir insistiendo en la necesidad de conectar los diferentes conceptos y propiedades de las razones trigonométricas y sus diferentes representaciones. Como se mencionó en la sección anterior, los mapas conceptuales construidos por los mismos estudiantes deben ser incluidos, desde la actividad 3 y deben incluir las representaciones geométricas y vectoriales de las razones trigonométricas desde la actividad 1.

Con lo dicho en las secciones anteriores y lo resumido en ésta, consideramos que la unidad de enseñanza es de gran ayuda y aporta, tanto al aprendizaje del tema de las razones trigonométricas como a la investigación en didáctica de las matemáticas. En próximas experimentaciones se deben reducir algunas de las actividades propuestas, ya que algunas de ellas son repetitivas y quitan tiempo para el avance en otros temas de las razones trigonométricas que aún no hemos podido explorar.

8. Síntesis y conclusiones finales

El trabajo desarrollado en esta memoria nos ha permitido realizar varias contribuciones originales a la investigación en la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría y a la investigación en la enseñanza y el aprendizaje del proceso de demostración matemática en la secundaria y el bachillerato. Estas contribuciones y conclusiones se han venido presentando en el transcurso de cada uno de los capítulos de esta memoria, especialmente los capítulos 3, 4, 5 y 6.

Respecto a la investigación en la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, los aportes son los siguientes:

✓ Diseño, experimentación y evaluación de una unidad de enseñanza en un entorno de geometría dinámica, enfocándola además hacia el desarrollo de las habilidades de demostración. En el transcurso de la memoria se han descrito los aspectos conceptuales y metodológicos de la unidad de enseñanza, en el quinto capítulo se describieron en detalle las actividades, incluyendo algunas imágenes de los archivos usados. Estos archivos fueron construidos de tal manera que los estudiantes pudieran explorar y comprender que los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas se cumplen para cualesquier ángulo entre 0º y ±360º. Los archivos, junto con las preguntas propuestas en las guías de los estudiantes se constituyeron es una gran ayuda para el aprendizaje de los conceptos y el mejoramiento de las habilidades de demostración como se pudo constatar en al análisis de la unidad cognitiva y de las fases de aprendizaje. Un aspecto importante de esta propuesta es que los propios estudiantes, sin demasiada intervención del profesor son los que “descubren” dichos conceptos y propiedades. Esto los motiva a querer saber por qué son verdaderos y el SGD les proporciona los elementos necesarios para que encuentren dichas respuestas. El SGD proporcionó herramientas a los estudiantes para explorar y experimentar con objetos y relaciones geométricas y numéricas. También favoreció la interacción entre explorar y demostrar, entre hacer sobre el ordenador y justificar por medio de argumentos teóricos (Laborde, 2000). Los estudiantes plantearon conjeturas que se pudieron probar con las herramientas disponibles (Healey y Hoyles, 2001). De esta manera promovimos el planteamiento de conjeturas y la construcción de demostraciones, aunque inicialmente no todas las conjeturas planteadas fueron las esperadas, ni todas las demostraciones fueron deductivas. Al inicio de la experimentación y de cada una de las actividades (fase de información) de las tres primeras actividades, las demostraciones fueron inductivas, posteriormente, tanto en el avance de la misma actividad como en el avance de la temática, fueron apareciendo las demostraciones deductivas. A partir de la cuarta actividad la mayoría de demostraciones (como producto) fueron de tipo ejemplo genérico o deductivo en todas las fases. Esto corrobora la hipótesis de Harel y Sowder (1998) quienes plantean que los estudiantes realizan gradualmente el tránsito de las demostraciones inductivas a las deductivas.

✓ Uso de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele en la organización de las actividades de la unidad de enseñanza.

En cuanto a las fases de aprendizaje, destacamos lo siguiente:

➢ Según nuestra propuesta, temática, secuencia, objetivos de aprendizaje de conceptos y propiedades matemáticas conectados entre si y nuestro objetivo de mejorar las habilidades de demostración, consideramos que, a diferencia de otras propuestas (Jaime y Gutiérrez, 1990; Jaime, 1993; Corberán y otros, 1994; Guillén, 1997), la fase de información no se puede obviar dado que en ella los estudiantes pueden experimentar y explorar a través de un razonamiento inductivo, usar valores numéricos o la visualización de relaciones en el diagrama dinámico para comprobar los problemas o las conjeturas planteadas. Esto además de darle confianza al estudiante, le permite comprender hacia dónde se orienta la actividad, atreverse a plantear nuevas conjeturas, comprender que lo aprendido en una actividad anterior puede extenderse a casos más generales con nuevas definiciones y a conectar los conceptos y propiedades aprendidos. Al profesor la da la oportunidad de discutir acerca de los posibles errores o limitaciones de los argumentos inductivos, especialmente los soportados en valores numéricos o lo visualizado en el diagrama, sugerir al estudiante que traten de explicar por qué lo que ven o comprobaron es cierto. También ofrece información de los preconceptos, de la comprensión de conceptos, procedimientos y propiedades trabajados en actividades anteriores, de la unidad cognitiva y del avance en sus habilidades de demostración. Sirve para detectar errores conceptuales y procedimentales del tema cuando estos ya han sido abordados en el área de Física. Permite identificar los estudiantes que están empezando a dejar de lado los ejemplos y a razonar de manera más cercana al razonamiento deductivo, o lo contrario, aquellos que se rehúsan a dejar de lado las demostraciones inductivas y requieren de una mayor intervención.

- La fase de orientación dirigida, enfocada hacia la promoción del planteamiento de conjeturas y construcción de demostraciones con la ayuda de un SGD, siguiendo una secuencia de contenidos que tiene en cuenta las sugerencias de los documentos orientadores de currículo y los resultados de investigaciones e innovaciones, y el desarrollo normal de un curso de trigonometría en el tiempo real de una institución, fue muy importante ya que nos permite asegurar que en el contexto real, sí es posible el planteamiento de propuestas que contribuyan al mejoramiento del proceso de enseñanza y de aprendizaje de la trigonometría y la demostración. El planteamiento de las actividades conjeturando y demostrando permite distinguir los dos procesos de argumentación y demostración para el análisis de la unidad cognitiva. Este análisis cognitivo permite identificar avances y dificultades, tanto en el aprendizaje de conceptos como de la demostración. Del desarrollo de esta fase podemos decir que, aunque en las primeras actividades se presentaron las dificultades previstas por los investigadores en el proceso de aprendizaje de los conceptos trigonométricos y en el proceso de estudio de la demostración, estas dificultades se fueron superando. Podemos decir que en las últimas actividades, la mayoría de los estudiantes supo integrar, relacionar y conectar los diferentes conceptos, propiedades y representaciones de las razones, que los llevó a comprender las tres formar de ver las razones: como razones entre los lados del triángulo rectángulo, como la relación entre las coordenadas de un punto sobre el círculo y su radio, y como distancias horizontales y verticales asociadas a un circulo a través del sentido del vector. En este sentido vale la pena señalar que además del uso de SGD, las intervenciones de los estudiantes y del profesor en la fase de explicitación y la construcción del mapa conceptual en la fase de integración contribuyeron de manera significativa al logro de este objetivo.

- Como lo hemos dicho en varios párrafos y como se evidencia en los ejemplos mostrados en el capítulo anterior, la fase de explicitación es fundamental para hacer énfasis en la necesidad de usar argumentos teóricos y de representar y conectar lo observado en Cabri con lo escrito en la hoja de trabajo, promover la función de comunicación y de axiomatización. Se destaca el efecto positivo que tuvo en los estudiantes la observación y discusión de sus propias ideas y las de sus compañeros, incluyendo las del profesor, gracias al compromiso asumido por cada estudiante de convencer a sus compañeros y al profesor. En esta fase se socializó la primera propuesta de organización en una tabla de las definiciones de las razones para cada uno de los ángulos y sus ángulos relacionados que planteó un grupo y que la mayoría adoptó para el trabajo en las siguientes sesiones. La fase de explicitación es clave para que los estudiantes vayan modificando sus esquemas de razonamiento, vayan aprendiendo el nuevo lenguaje, vean diferentes tipos y formas de demostración, afiancen sus capacidades argumentativas y relacionen los diferentes sistemas de representación. Estas modificaciones producen mayor efecto cuando las explicaciones e intervenciones vienen de sus compañeros que de su profesor.
- La fase de orientación libre cumplió con los objetivos propuestos de que los estudiantes apliquen y profundicen en los conceptos, procedimientos y habilidades por medio de la solución de problemas diferentes a los de la fase de orientación dirigida. De estas actividades fue donde surgieron las tablas de organización mostradas en el capítulo anterior y mencionada en el párrafo anterior. La cual se constituyó en una ayuda para el planteamiento y demostración de las propiedades y herramienta de ayuda mnemotécnica y de conexión entre las representaciones geométricas, algebraicas y analíticas para algunos estudiantes.
- La fase de integración, caracterizada por la actividad de completar o construir un mapa conceptual, permitió detectar errores en los conceptos y en sus relaciones y conexiones mencionadas para cada actividad en el capítulo anterior. Igualmente permitió detectar el uso de diferentes formas de representación de los conceptos y propiedades en las tres últimas actividades.
- Estos logros y avances mencionados en cada una de las secciones del capítulo anterior nos permiten plantear que la unidad de enseñanza, su enfoque y su propuesta metodológica es una buena propuesta que merece tenerse en cuenta para la enseñanza y el aprendizaje de las razones trigonométricas en el contexto del desarrollo normal del currículo de una institución. En el análisis de la unidad cognitiva de cada uno de los problemas examinados y en el análisis de cada una de las fases en el capítulo anterior, también

resaltamos las dificultades que fueron surgiendo en el aprendizaje de los conceptos y la demostración. A su vez, se observa cómo estas dificultades se fueron superando a medida que se fue avanzado en las actividades. El problema más sobresaliente en el desarrollo de las tres primeras actividades fue la dificultad de conectar los operadores y las representaciones geométricas, numéricas, algebraicas y analíticas. Lograr un control teórico. Conectar el marco de la trigonometría del triángulo rectángulo con el marco de la trigonometría del plano cartesiano, sin embargo, a partir de la actividad 3.8 se notó el avance en esta dificultad. Una dificultad que aún permanece en las actividades propuestas tiene que ver con la cantidad excesiva de problemas y el manejo del tiempo, deben realizarse ajustes al número de actividades planteadas en la fase de orientación dirigida y de orientación libre, de tal manera que podamos avanzar hacia el estudio de los otros conceptos, propiedades y aplicaciones que quedaron pendientes.

Respecto a la investigación del proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática en la secundaria y el bachillerato, los aportes son los siguientes:

- ✓ En la unidad de enseñanza diseñamos una secuencia de enseñanza que promueve las funciones de la demostración propuestas por De Villiers (1993): En la actividad llamada *conjeturando*, la función de *descubrimiento* cuando invitamos al estudiante a plantear conjeturas. En la actividad *demostrando* las funciones de *explicación* y *verificación*. En la fase de explicitación la función de *comunicación*. Al solicitarles describir lo realizado, representar lo visualizado en Cabri, asignar letras, relacionar las representaciones, usar propiedades matemáticas validas para todos los casos, en lugar de números y de justificaciones basadas en lo visualizado en Cabri o en el dibujo, promovimos la función de *axiomatización*.
- ✓ En el marco teórico proponemos una reinterpretación de las demostraciones tipo experimento crucial y ejemplo genérico planteadas por Marrades y Gutiérrez (2000) y adaptamos el modelo de Toulmin para esquematizar los tipos de demostración de la nueva estructura propuesta.
- ✓ Adaptamos el constructo de unidad cognitiva para las demostraciones inductivas o empíricas. Este aporte, reconocido por Pedemonte (2009), nos facilitó el análisis de la unidad cognitiva desde un comienzo de la experimentación, en una trayectoria amplia de aprendizaje y en un contexto real de una institución con varios estudiantes que, en su mayoría, no han tenido experiencias previas con la actividad demostrativa.

- ✓ Planteamos una forma de organización de los esquemas de argumentación de Toulmin de cada uno de los enunciados que van surgiendo del proceso de transcripción y análisis del proceso de planteamiento de una conjetura y del proceso de construcción de una demostración en un esquema global que integra todos los esquemas de argumentación detectados. Este esquema global permite dar una mirada general al esquema del enunciado conclusión, identificar la conexión o desconexión entre cada paso de argumentación, identificar los pasos inductivos y/o deductivos planteados en cada uno de los procesos, contribuyendo de esta manera a identificar y comparar la estructura de cada uno de los procesos de argumentación y demostración. En este esquema también se pueden codificar y examinar los tipos de datos, operadores y enunciados usados en cada uno de los procesos para el análisis del sistema de referencia.
- ✓ Proponemos una forma de análisis del sistema de referencia y de la estructura de la argumentación y la demostración, dándole importancia y trascendencia a cada uno de los elementos que componen el sistema de referencia y la estructura. El estudio de todo el proceso de argumentación y de demostración a través de los medios de obtención de datos y de las herramientas aplicadas permite encontrar dificultades, errores o supuestos que no se detectan con la sola hoja de trabajo. Por ejemplo, en varios casos la demostración final escrita en la hoja muestra una estructura deductiva, pero esconde los posibles pasos inductivos que llevaron a su construcción, o puede ser que lo escrito con apariencia deductiva esté soportado en una forma de argumentación inductiva, soportada en un marco perceptivo; que no exista conexión entre las representaciones planteadas, o que los estudiantes no crean en lo escrito, sino que han aprendido a manejar los procedimientos y formas de demostración que realizan sus compañeros o que le gusta al profesor. Algunas conclusiones de la propuesta de análisis del sistema de referencia y de la estructura son las siguientes:

- ➢ Pensamos que en los análisis realizados por Pedemonte (2002, 2007, 2008), el sistema de representación es fácil de identificar porque los problemas son geométricos o algebraicos, mientras que en los problemas de trigonometría, el estudiante en ocasiones usa elementos que corresponden a diferentes representaciones (geométricas, numéricas, algebraicas, analíticas, segmentos de recta dirigidos) y marcos diferentes (perceptivo, geométrico, numérico, métrico, algebraico, analítico, trigonometría del triángulo rectángulo, trigonometría del plano cartesiano). En la tabla propuesta se pueden identificar, visualizar y comparar dichas representaciones y marcos.

- Al respecto, dado que las demostraciones trigonométricas se construyen en una combinación de los marcos geométricos, algebraicos, analíticos o trigonométricos, los estudiantes tienen que apoyar sus demostraciones en dichas combinaciones de marcos. Los archivos entregados a los estudiantes son construcciones geométricas que representan los teoremas (Mariotti, 2000), por lo tanto representan la demostración geométrica. Los estudiantes tienen que reconocer las relaciones geométricas en el diagrama (Laborde y otros, 2006) y deben construir su demostración en una combinación de marcos geométricos, algebraicos, analíticos o trigonométricos. De acuerdo a nuestro análisis planteamos las siguientes conclusiones:
- Si el estudiante plantea la conjetura soportada en un marco perceptivo numérico y no logra la ruptura referencial hacia una combinación de marcos geométricos, algebraicos, analíticos o trigonométricos, no es capaz de construir una demostración deductiva.
- Si la conjetura se plantea en un marco perceptivo geométrico, se puede pasar a una demostración deductiva si el marco necesario para la construcción de la demostración sigue siendo geométrico, pero, si el marco es algebraico, analítico o trigonométrico la posibilidad de una demostración deductiva es más lejana.
- Pedemonte deja en un segundo plano la estructura de control, mientras que en nuestro análisis los identificamos y usamos para la caracterización de las dificultades y avances en la demostración. Al respecto planteamos que al principio de cada actividad, el tipo de control es empírico caracterizado por el arrastre o por el uso de ejemplos numéricos o geométricos visualizados en el archivo, si el estudiante logra darse cuenta del concepto matemático lo puede reemplazar por un control teórico y tiene más posibilidades de construir una demostración deductiva, si el control sigue siendo el arrastre o los ejemplos no se logra construir una demostración deductiva.
- Respecto a la forma de argumentación constructiva o estructurante, consideramos que si la forma de argumentación es estructurante, existen mayores posibilidades de construcción de una demostración tipo genérica o deductiva. Cuando la forma de argumentación es constructiva, basada en operadores y controles perceptivos, producto de la exploración en Cabri, existen mayores posibilidades de construcción de una demostración inductiva empírica o experimento crucial, pero si los operadores y controles son teóricos, existe la posibilidad de una demostración tipo genérica o deductiva. Esto último se manifiesta cuando los estudiantes, después de haber realizado varias demostraciones

similares, empiezan a utilizar lo aprendido para plantear nuevas relaciones, y construir demostraciones de manera similar a las anteriores, o cuando en la fase de explicitación ven las formas de argumentación de sus compañeros, en el planteamiento de conjeturas y en la construcción de demostraciones.

✓ Planteamos cinco categorías de unidad o ruptura cognitiva, las cuales agrupan los diferentes logros o dificultades detectados. Con esta categorización planteamos aportes al estudio de la unidad cognitiva y detectamos dificultades para el aprendizaje de la demostración que describimos en el capítulo 6 y resumimos a continuación.

➢ En la categoría *unidad cognitiva empírica*, planteamos que la unidad cognitiva no favorece la construcción de demostraciones deductivas. Las dificultades que se presentan para la demostración son las siguientes: el uso de ejemplos o propiedades observadas en el diagrama dinámico, no permiten un control teórico, que permita el cambio de una concepción perceptiva - numérica del proceso de argumentación a un marco algebraico o analítico en el proceso de demostración. Dada esta continuidad del sistema de referencia, no es posible la ruptura estructural. Dificultad para poder establecer conexiones entre los marcos geométrico, algebraico y analítico.

➢ En la categoría *ruptura referencial – continuidad estructural inductiva* planteamos que si se logra la ruptura del sistema de referencia, sin la ruptura estructural, tampoco se llega a la construcción de demostraciones deductivas. Si las generalizaciones hechas sobre lo observado no se convierten en axiomas, definiciones o teoremas, y no se comprende su importancia en el proceso axiomático de demostración, no es posible la ruptura. Entre las dificultades detectadas para la demostración está el planteamiento de conjeturas por analogía y por generalización de enunciados y procedimientos realizados en problemas anteriores, sin ningún proceso de exploración o de verificación. Si el estudiante no usa los diagramas dinámicos para explorar las relaciones o realizar construcciones dinámicas que le permitan visualizar e integrar propiedades geométricas, métricas, numéricas y algebraicas y ejercer un control teórico sobre ellas, se les dificulta los procesos de planteamiento de la conjetura y de construcción de la demostración. Si la ruptura del sistema de referencia se da por las continuas intervenciones del profesor dentro de un proceso “guiado” y no por refutaciones potenciales que invaliden los operadores, de tal manera que el estudiante reflexione sobre las propiedad matemáticas y las considere como teoremas que tienen que ser incorporado a un proceso axiomático de demostración, la ruptura estructural no se logra.

Podemos suponer erróneamente que nuestros estudiantes razonan deductivamente porque usan operadores y controles teóricos, sistemas de representación algebraicos o analíticos, pero si este proceso ha sido producto de una orientación dirigida por el profesor, debemos reevaluar este concepción.

- En la categoría *ruptura referencial – argumentación inductiva – demostración genérica intelectual* consideramos que si la ruptura cognitiva es causada por la ruptura del sistema de referencia y se construye una demostración tipo ejemplo genérico intelectual (EGI), hay más posibilidades de una ruptura estructural que conlleve a la construcción de una demostración deductiva, puesto que las generalizaciones que hacen los estudiantes corresponden a una generalización del proceso, en donde se logra transformar los operadores y controles perceptivos en propiedades matemáticas y controles teóricos; los argumentos son propiedades matemáticas generales que se recuerdan al trabajar en el ejemplo y no son propiedades matemáticas particulares del ejemplo. En estos casos de demostraciones tipo EGI se empieza a tener un control teórico sobre el proceso de demostración, y esto favorece el uso de un razonamiento deductivo y la construcción de demostraciones deductivas.
- En la categoría *unidad referencial – argumentación inductiva – demostración deductiva falsa* concluimos que si la conjetura se plantea por analogía (Polya, 1966) con relaciones, procesos y procedimientos realizados en actividades anteriores, sin ningún proceso de exploración, puede que exista unidad del sistema de referencia y se logre la ruptura cognitiva, caracterizada por el cambio de una forma de razonamiento inductivo a una forma de razonamiento deductivo, pero esta ruptura no garantiza la construcción de una demostración correcta o pertinente al problema, dado que los operadores corresponden a relaciones falsas. El uso de la analogía, sin ningún proceso de exploración en el planteamiento de conjeturas, se vuelve una dificultad para el logro de un razonamiento deductivo, necesario para la construcción de una demostración deductiva. Los estudiantes se vuelven hábiles en la repetición de procedimientos que llevan a la construcción de demostraciones de apariencia deductiva, pero que no corresponden a un proceso de razonamiento deductivo o a una demostración válida.

En la categoría *unidad cognitiva deductiva* se corrobora la hipótesis de Pedemonte (2005) en el sentido de que la unidad cognitiva favorece la construcción de demostraciones deductivas. En estos tipos de demostración se evidencian la relación estrecha entre la trigonometría del triángulo rectángulo, la trigonometría del plano cartesiano y las representaciones vectoriales de las razones trigonométricas. Los pasos inductivos que realizan los estudiantes, los utilizan para comprobar la veracidad de la identidad planteada, pero la demostración final se basa en propiedades generales. Si los estudiantes no hacen uso del arrastre es debido a que estas demostraciones están caracterizadas por la descontextualización de los argumentos usados, se basan en los aspectos genéricos del problema, operaciones mentales, y deducciones lógicas, que apuntan a validar la conjetura de una manera general. Cuando la conjetura es producto de un proceso de exploración que conlleva al planteamiento de argumentos deductivos es más fácil que la demostración sea deductiva. Si la estructura de control en la fase de conjetura tiene elementos teóricos, éstos son usados o transformados con mayor facilidad en la fase de demostración.

Otras conclusiones complementarias a las expuestas en los párrafos anteriores son las siguientes:

- Algunos estudiantes no aprovechan al máximo el diagrama dinámico como una herramienta de exploración y de comprobación de ideas, se limitan a explorar máximo en el primer cuadrante y conjeturar relaciones basados en lo observado en dicho cuadrante o en el análisis estático del diagrama dinámico.
- El papel del profesor es fundamental en el logro de los objetivos de aprendizaje de los conceptos trigonométricos y de la demostración. Debe comprender muy bien el enfoque metodológico planteado y debe tener idea del tema de la demostración y del modelo de Van Hiele, especialmente en lo que respecta a las fases de aprendizaje.
- No se presentó ningún caso de una ruptura de un proceso de argumentación inductivo y de una demostración deductiva correcta. Al parecer es difícil de lograr la ruptura estructural en estos casos.
- No tuvimos ningún caso de demostraciones cruciales, al parecer el trabajo con los diagramas dinámicos, la estructura de la construcción y el tema de las razones trigonométricas no favoreció este tipo de demostraciones.

Limitaciones y futuras investigaciones

Un tema que quedó medio estudiado fue el de los mapas conceptuales. En próximas experimentaciones o investigaciones que usen la unidad de enseñanza propuesta se debe investigar más el tema.

La idea de considerar las demostraciones inductivas en el constructo de unidad cognitiva tiene que seguir siendo estudiada y complementada en futuras investigaciones.

Pensamos que existe un gran camino por recorrer. Lo presentado en esta memoria es apenas un granito de arena que pone el tema en la agenda de investigaciones.

Pensamos que el análisis de la unidad de enseñanza usando las fases de Van Hiele es una idea poco usada, que tiene que seguir siendo estudiada y analizada. Varios investigadores consideran que ya está estudiado y escrito todo lo que respecta al modelo de Van Hiele y que por lo tanto su investigación no es pertinente. Consideramos que dichos investigadores están equivocados y estamos desaprovechando un modelo que puede y sigue siendo útil, tanto en la investigación como en la clase de matemáticas. Debemos procurar que lo profesores conozcan y usen el modelo, al menos en las clases geometría.

Una limitación de esta investigación tiene que ver con el hecho de que se trata de un estudio de casos, por lo que no sería pertinente generalizar los resultados de la investigación.

9. Referencias bibliográficas

Aguilar, M.F. (2006). Origen y destino del mapa conceptual. Apuntes para una teoría del mapa conceptual. *Proceeding of the 2th International Conference on Concept Mapping. Concept Maps: Theory, Methodology,* 46-467.

Aguilar, M.F., García, O., Cuenca, I., Montero, V. (2006). La escritura y lectura de los mapas conceptuales en los alumnos de educación superior. *Proceeding of the 2th International Conference on Concept Mapping. Concept Maps: Theory, Methodology,* 311-318.

Antonini, S., Mariotti, M.A. (2007). Indirect proof: An interpreting model. *Proceeding of the 5th Conference of European Society for Research in Mathematics Education,* 541-550.

Antonini, S., Mariotti, M.A. (2008). Indirect proof: what is specific to this way of proving? *ZDM the International Journal on Mathematics Education, 40*, 401-412.

Arcavi, A., Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 5, 25-45.

Arsac, G. (1987). El Origen de la Demostración: ensayo de epistemología didáctica. *Recherches en didactique des mathématiques, 8*(3), 267-312.

Arsac, G. (2007). Origin of mathematical proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 27-42). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Arzarello, F. (2007). The proof in the 20th century: From Hilbert to automatic theorem proving. En P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 43-64). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Robutti, O. (1998). A model for analiysing the transition to formal proofs in geometry. *Proceedings of the 22th PME Conference 2*. 24-31.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri enviroments. *Zentralblatt dur Didaktik der Mathematik, 34*(3), 66-72.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., Robutti, O. (2007). The transition to formal proof in geometry. En P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 305-323). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Ayres, F. (1988). *Trigonometría plana y esférica*. Colombia: McGraw-Hill.

Back, R.J., Wright, J.V. (1999). A Method for Teaching Rigorous Mathematical Reasoning. *Proceedings of ICTM14,* 9 - 13.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 147-176.

Balacheff, N. (1988a). *Une Étude des Processus de Preuve en Mathématique chez des Élèves de Collège.* (Tesis doctoral). Grenoble, Francia.

Balacheff, N. (1988b). Aspects of proof in pupils´ practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children Hodder & Stoughton* (pp. 216-235). Londres: Hodder & Stoughton.

Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. En D. Grenier (Ed.), *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-1995* (pp. 219-244). Grenoble: Université Joseph Fourier.

Balacheff, N. (2002). Cadre, registre et conception: Note sur les relations entre trois concepts clés de la didactique. *Les cahiers du laboratoire Leibniz.* Recuperado el 03/08/2009 de *http://www-leibniz.imag.fr/leibniz/LesCahiers/2002/Cahier58/CLLeib58.pdf*(58), 1-18.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 4*0, 501-512

Balacheff, N., Gaudin, N. (2002). Students conceptions: an introduction to a formal characterization. *Les cahiers du laboratoire Leibniz.* Recuperado el 03/08/2009 de *http://www-leibniz.imag.fr/leibniz/LesCahiers/2002/Cahier65/CLLeib65.pdf*(65), 1-21.

Balacheff, N., Margolinas, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier, C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Francia: La Pensée Sauvage -Editions-.

Bartolini Bussi, Boero, P., Ferri, F., Garuti, R., Mariotti, M. A. (2007a). Approaching and Developing the Culture of Geometry Theorems in School: A Theoretical Framework. En P. Boero (Ed.), Theorems in School: *From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 211-217). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Bartolini Bussi, M., Boni, N., Ferri, F. (2007b). Construction Problems in Primary School: A Case from the Geometry of Circle. En P. Boero (Ed.), Theorems in School: *From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 219-247). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Battista, M. T., Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof. *The Mathematics Teacher, 88(1).*48-54.

Blackett, N., Tall, D. (1991). Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software. *Proceedings of the 15th PME International Conference.* 144-151.

Boero, P. (2007). Theorems in School: An introduction. En P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 19-24). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., Mariotti, A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceeding of the 20th PME International Conference,* 113-120.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E. (2007). Approaching theorems in grade VIII: Some Mental Processes Underlying Producing and Proving Conjectures, and Conditions Suitable to Enhance Them. En P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 249-264). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Boero, P., Consogno, V., Guala, E., Gazzolo, T. (2009). Research for innovation : A teaching sequence on the argumentative approach to probabilistic thinking in Grades I-V and some related basic research results. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 29*(I), 59 - 96.

Briguenti, M. (1998). *Alterando o ensino de Trigonometria em escolas de nível médio: a representação de algumas professoras*. (Tesis doctoral). Universidade Estadual Paulista, Brasil.

Brinkmann, A. (2005). Knowledge Maps – Tools for Building Structure in Mathematics. Recuperado el 05/11/2009 de http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/brinkmann.pdf

Brito, A. & Morey, B. (2004). Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental. *Revista Horizontes, 22 (1)*, 65-70.

Brown, S.A. (2006a). *Cognitive Obstacles in Understanding Sine and Cosine on the Coordinate Plane.* Disertación Doctoral sin publicar. Illionis State University.

Brown, S.A. (2006b). The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine. *Proceeding of the 30th PME International Conference, 1*, 1-228.

Buendía, G., Montiel, G. (2009). Acercamiento Socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22,* 1287-1296.

Burger, W.F., Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17, 1,* 31-48.

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo*. (Tesis de maestría). APM: Lisboa.

Casas, L.M., Luengo, R. (2004). Representación del conocimiento y aprendizaje. Teoría de los Conceptos Nucleares. *Revista Española de Pedagogía, 227*, 59-84.

Castagnola, E., Tortora, R. (2007). Some remarks on the theorem about the infinity of prime numbers. *Proceeding of the 5th Conference of European Society for Research in Mathematics Education,* 581-590.

Chacón, A., Sánchez, A. & Quirós, C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas: niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación,* 7 (2).

Challenger, M. (2009). *From triangles to a concept: a phenomenographic study of A-level students' development of the concept of trigonometry*. University of Warwick. Recuperado el 05/11/2009 de http://wrap.warwick.ac.uk/1935/1/WRAP_THESIS_Challenger_2009.pdf.

Chazan, D. (1993). High school geometry student's justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 359 - 389.

Corberán, R., Gutiérrez, Á., Huerta, M., Jaime, J., Peñas, A. y otros (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele.* España: Ministerio de Educación, Centro de Investigación y Documentación Educativa.

Costa, N. (1997). *Funções seno e cosseno: Uma sequência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental" e do computador.* (Tesis de maestría). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Crowley, M. L. (1987). The Van Hiele Model of the development of geometric thought. En N.C.T.M. (1987) (Ed.), *Learning and teaching geometry, K-12 (1987 Yearbook)* (pp. 1-16). N.C.T.M.: Reston, USA.

De la Torre, A. F. (2000). *La modelización del espacio y del tiempo.* Colombia: Universidad de Antioquia.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*, 17-24.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*(26), 15 - 29.

Ding, L., Jones, K. (2007). Using the Van Hiele theory to analyse the teaching of geometrical proof at grade 8 in Shanghai. *Proceeding of the 5th Conference of European Society for Research in Mathematics Education,* 612-621.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-31.

Douek, N. (1998). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. *Proceeding of the 1th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, 1,* 125 - 139.

Douek, N. (2007). Some remarks about argumentation and proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 163-181). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Dugdale, S. (1989). Building a qualitative perspective before formalizing procedures: Graphical representations as a foundation for trigonometric identities. *Proceedings of the 11th PME International Conference, 1,* 249-255.

Duval, R. (1989). Langage et représentation dans l'apprentissage d'une démarche déductive. *Proceeding of the 13th PME International Conference, 1*, 228 - 235.

Duval, R. (1992-1993). Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x, 31*, 37-61.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics 22: 233–261.*

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 137-161). Rotterdam, Los Países Bajos.

Esteban, M., Ibañes, M., Ortega, T. (1998). *Trigonometría*. Madrid: Síntesis.

Esteban, P.V., Vasco, E.D., Bedoya, J.A. (2006). Los mapas conceptuales en las fases de aprendizaje del modelo educativo de Van Hiele. *Procceding of the 2th International Conference on Concept Mapping, Concept Maps: Theory, Methodology,* 383-390.

Fi, C.D. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry.* Disertación doctoral sin publicar, The University of Iowa, Iowa City. Recuperado el 05/10/09 de http://www.pmena.org/2006/cd/TEACHER%20 KNOWLEDGE/TEACHER%20KNOWLEDGE-0016.pdf

Fi, C.D. (2006) Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: cofunctions. *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 833-834.

Fiallo, J. (2006). *Enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente cabri para el desarrollo de las habilidades de la demostración.* (Memoria de investigación). Universidad de Valencia, Valencia.

Fiallo, J. (2008). Propuesta de enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración [versión electrónica]. *Memorias del Noveno Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Valledupar, Colombia: Universidad Popular del Cesar.*

Fiallo, J., Gutiérrez, Á. (2006). Unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración (texto de la ponencia presentada en la reunión del Grupo durante el 10º Simposio de la SEIEM).

Fiallo, J., Gutiérrez, Á. (2007). Tipos de demostración de estudiantes del grado 10º en Santander (Colombia). En M. Camacho, P. Flores & P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática XI* (pp. 355-368).

Figueiredo, A.M. (2010). *Estructura cognitiva y conceptos nucleares en la enseñanza/aprendizaje de la trigonometría: Estudio comparativo realizado con alumnos del 10º al 12º curso de Enseñanza Secundaria mediante la aplicación de diferentes metodologías.* (Tesis doctoral). Universidad de Extremadura: Badajoz.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Reidel, Dordrecht.

Freudenthal, H. (2001). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (L. Puig, Trans.), E. Sánchez (Ed.), Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. (Textos seleccionados) (2ª edición).* México D.F.: Departamento de Matemática Educativa.

Furinghetti, F., Morselli, F. (2008). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 71-90.

Fuys, D., Geddes, D. y Tischler, R. (1984). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph Nº3*.

Galindo, E. (1998). Assessing Justification and Proof in Geometry Classes Taught using Dynamic Software. *Mathematics Teacher, 91,* 76-82.

Garuti, R., Boero, P., Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. *Proceedings of the 22th PME International Conference*, 345 - 352.

Godino, J., Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(3), 405 - 414.

Goldin, G. A. (1983). *Performance Difficulties Reported by First-Year Public School Science and Mathematics Teachers in Illinois.* Reporte de investigación sin publicar, Northern Illinois Univ., De Kalb.

Groman, M. (1996). Integrating geometer'skechpad into geometry course for secondary education mathematics major. *Proceedings of the Association of Small Computer Users in Education (ASCUE) Summer Conference.* 61-65.

Gualdrón, É. (2006). *Los procesos de aprendizaje de la semejanza por estudiantes de 9º grado.* (Memoria de investigación). Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia, Valencia.

Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje.* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia.

Gutiérrez, Á. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. *Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*, 7 - 10.

Gutiérrez, Á., Fiallo, J. (2007). Analysis of conjectures and proofs produced when learning trigonometry. *Proceeding of the 5th Conference of European Society for Research in Mathematics Education,* 622-632.

Gutiérrez, Á., Fiallo, J. (2009). Enseñanza de la trigonometría con ayuda de SGD. En T. Recio (Ed.), *Geometría Dinámica* (pp. 147-171). Madrid, España: Anaya.

Gutiérrez, Á., Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Spring & Summer Edition*, 20, 2 y 3*, 27-46.

Gutiérrez, Á., Jaime, A. Fortuny, J.M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22, 3*, 237-251.

Gutmann, T. (2003). A direct approach to computing the sine or cosine of the sum of two angles. *Mathematics Teacher, Volume 96*(5), 314-318.

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 127-150.

Hall, H., & Knight, S. (1961). *Trigonometría Elemental* (Primera edición en español). México: Uteha.

Hanna, G. (1990). Some *pedagogical* aspects of proof. *Interchange, 21*, 6-13.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics., 44*, 5-23.

Hanna, G. (2007). The ongoing value of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 3-18). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Hanna, G., Jahnke, N. (1993). Proof and Application. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 421- 438.

Hanna, G., Jahnke, N. (1996). Proof and proving. En A. Bishop y otros. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer.

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: a model for DNR - based instruction. En S. Campbell & R. Zaskis (Eds.), *Learning and teaching* *number theory, journal of mathematical behavior* (pp. 185 - 212). New Jersey: Ablex Publishing Corporation.

Harel, G. (2007). Students' proof schemes revisited. En P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 65-78). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Harel, G., Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: results from exploratory studies. En A. Schoenfeld y otros (Ed.), *Research in collegiate mathematics education, III* (Vol. 7, pp. 234 - 283). Providence, EEUU: American Mahematical Society.

Harel, G., Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842): Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Healy, L., Hoyles, C. (1998). Student's performance in proving: competence or curriculum? *Proceedings of the 1th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, 1*, 153 - 167.

Healy, L., Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

Hollebrands, K., Conner, A., Smith, R. (2010). The nature of arguments provided by college geometry students whith access to technology while solving problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(4), 324-350.

Hölzl, R. (2001). Using dinamic geometry software to add contrast to geometric situations - A case study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 6(2), 63-86.

Hoyles, C., Healy, L. (1999). Linking informal argumentation with formal proof through computer-integrated teaching experiments. *Proceeding of the 23th PME International Conference,* 105-112.

Hoyles, C., Healy, L. (2007). Curriculum change and geometrical reasoning. En P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 81-115). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Hoyles, C., Küchemann, D. (2002). Student's understandings of logical implication. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 193- 223.

Hoyles, C., Noss, R. (1992). A Pedagogy for Mathematical Microworlds. *Educational Studies in Mathematics, 23(1)*, 31-57.

Huerta, P. (1998). La entrevista clínica y los mapas conceptuales. *Actas del Segundo Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*, 56-66.

Huerta, P. (2006). La evaluación de mapas conceptuales multidimensionales de matemáticas: Aspectos metodológicos. *Procceding of the 2th International Conference on Concept Mapping. Concept Maps: Theory, Methodology,* 319-326.

Huerta, P., Granell, R., Galán, E. (2003). Los Mapas Conceptuales en Educación Matemática: Antecedentes y estado actual de la investigación. *Actas del Sexto Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*, 225-238.

Ibañes, M., Ortega, T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de las ciencias, 21*(1), 49-63.

Ibañes, M., Ortega, T. (2004). Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de bachillerato. *Números: Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas, 57*, 19-32.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia: Valencia.

Jaime, A., Gutiérrez, Á. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: el Modelo de Van Hiele. In S. Llinares & M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática* (pp. 295-384.). Sevilla: Alfar.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 55-85.

Kendal, M., Stacey, K. (1997). *Teaching trigonometry*. Recuperado el 10/05/2009 de http://staff.edfac.unimelb.edu.au/ ~kayecs/publications/1997/KendalStacey-Trig.pdf.

Kiat Ng, B., Hu, C. (2006). *Use Web-based Simulation to Learn Trigonometric Curves*. Recuperado el 04/11/2009 de http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/chunhu.pdf.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 4*0, 427- 441

Küchemann, D., Hoyles, C. (2001) Investigating factors that influence students´ mathematical reasoning. *Proceeding of the 25th PME International Conference,* 3, 257 - 264.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 151-161.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of Geometry tasks with cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6, 283-317.*

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with tecnology. En A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 275-304). Roterdam/Taipei.Sense Publishers.

Linardakis, P. (2000). The historical evolution of trigonometric notions and its influence on today„s teaching of trigonometry. *Proceedings of the 51th Conference CIEAEM,* 87-94.

Lindegger, L. (2000). *Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo rectângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos*. (Tesis de maestría). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Luengo, V. (2005). Some didactical and epistemological considerations in the designs of educational software: the Cabri – Euclide example. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10, 1-29.*

Maher, C., Muter, E.M., Kiczek, R.D. (2007). The development of proof making by students. En P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 197-209). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Mariotti, M.A. (1997). Justifying and proving: figural and conceptual aspects. *Proceedings of the European Research Conference on Mathematical Education,* 21-26.

Mariotti, M.A. (1997a). Justifying and proving in geometry: The mediation of a microworld. *versión revisada y extendida de la publicada en M. Hejny, J. Novotna (Eds.) Proceedings of the European Conference on Mathematical Education,* 21–26. Recuperado el 10/03/2009 de http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/ Mariotti/ Mariotti97a/Mariotti97a.html.

Mariotti, M.A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 25 - 53.

Mariotti, M.A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173 - 204). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Mariotti M.A., Bartolini M., Boero P., Ferri F. Garuti R. (1997) Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proceedings of the 21th PME International Conference,* 180 - 195.

Markel, W.D. (1982). Trigonometry - Forgotten and abused? *School Science and Mathematics, 82,*548-551.

Marrades, R., Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 87 - 125.

Martins, V (2003). *Atribuindo significado ao seno e cosseno utilizando o software Cabri-Géomètre*. (Tesis de maestría). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

mecd.es. (2001). *Razones trigonométricas. Operaciones. Identidades y Operaciones.* Página web de http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_CNST_1/razones_trigonometricas/ indicetri2.htm

mecd.es. (2003). *Funciones Trigonométricas*. Página web de http://descartes.cnice.mecd.es/ Analisis/Funciones_trigonometricas/

mecd.es. (2005). *Curso de Geometría ESO*. Página web de http://mimosa. cnice.mecd.es/ ~clobo/ geoweb/2eso.htm

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Areas obligatorias y fundamentales*. Colombia: M.E.N.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2003). *Estándares Básicos de Matemáticas*. Colombia: M.E.N.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Matemáticas*. Colombia: M.E.N.

Miyakawa, T. (2005). *Une étude du rapport entre connaissance et preuve : le cas de la notion de symétrie orthogonale,* (Tesis doctoral), Université Joseph Fourier - Grenoble 1, Grenoble.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica.* (Tesis doctoral), Instituto Politécnico Nacional: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México.

Montiel, G. (2008). *Una Construcción Social de la Función Trigonométrica. Implicaciones Didácticas de un Modelo Socioepistemológico.* Recuperado el 05/03/2011 de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/GMontiel-2008-ActaSeridim.pdf

Munné, J.M.i. (2002). Distintas formas de deducción de las fórmulas trigonométricas de suma o resta de ángulos. *SUMA*, 33-36.

Navarro, M. (2002). *Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo educativo de Van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica.* (Tesis doctoral), Universidad de Sevilla: Sevilla.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Novak, J.D., Gowin, D.B. (1988). *Aprendiendo a aprender (Trad. J. Campanario; E. Campanario)*. Barcelona, España: Martínez Roca. Libros universitarios y profesionales.

Orhun, N. (2001). Student‚s Mistakes and Misconceptions on Teaching of Trigonometry. The Mathematics Education into the 21st Century Project. *Proceedings of the International Conference New Ideas in Mathematics Education.* 208-211.

Palmer, C., Leigh, C., & Kimball, S. (1950). *Plane and spherical trigonometry*. New York: McGraw-Hill.

Parenti, L., Barberis, M., Pastorino, M., Viglienzone, P. (2007). From dynamic exploration to "theory" and "theorems" (from 6th to 8th grades). En P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 265-284). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démostration dans le apprentisage des mathématiques.* (Tesis doctoral). Université Joseph Fourier - Grenoble I, Grenoble.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l`analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en didactique des mathematiques, 25*(3), 313 - 348.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*, 23-41.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM Mathematics Education, 40*, 385-400.

Pedemonte, B. (2009). *Conversación personal.* Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Pedemonte, B., Reid, D. (2010). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 281-303.

Peirce C. S. (1960) Collected papers Cambridge, M A: Harvard University Press.

Perelman, C., Olbrechts_Tyteca, L., (1958) *Traité de l'argumentation*, París, P.U.F.

Pérez, R. (2006). Mapas conceptuales y aprendizaje de Matemáticas. *Procceding of the 2th International Conference on Concept Mapping. Concept Maps: Theory, Methodology* 407-414.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid, España: Editorial Tecnos.

Recio, T. (2009). *Geometría Dinámica.* Madrid, España: Anaya.

Serhan, D. (2009). Using Concept Maps to Assess the Effect of Graphing Calculators Use on Students' Concept Images of the Derivative at a Point. Recuperado el 09/11/2009 de http://www.cimt.plymouth. ac.uk/journal/serhan2.pdf.

Shaffer, D.W. (2006). *Exploring trigonometry with the sketchpad*. Emereville, EE.UU.

Sidericoudes, O. (1993). Uma atividade LEGO-Logo em Trigonometria. Recuperado el 02/03/2011 de http://pan.nied.unicamp.br/publicacoes/separatas/Sep18.pdf.

Sinclair, M.P. (2003). Some implications of the results of a case study for the design of pre - constructed dynamic geometry sketches and accompanying materials. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 289-317.

Stacey, K., Vincent, J. (2008). Modes of Reasoning in Explanations in Year 8 Textbooks. *Proceedings of the 31th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 475-481.

Stylianides, A. J., Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics, Publicado en línea, 6 de Marzo de 2009*.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the Transition from Empirical Arguments to Proof. *Journal for Research in Mathématics Education, 40*(3), 314-352.

Szendrei-Radnai, J., Török, J. (2007). The tradition and role of proof in mathematics education in Hungary. En P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 117-134). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Szetela, W. (1979). Hand-held Calculators and the Learning of Trigonometric Ratios, *Journal for Research in Mathematics Education, 10 (2)*, 111-119.

Toulmin, S.E., (1958) The use of argument, Cambridge University Press.

Tsamir, P., Tirosh, D., Dreyfus, T., Barkai, R., Tabach, M. (2009). Should proof be minimal? Ms T's evaluation of secondary school students' proofs. *The Journal of Mathematical Behavior, 28*, 58-67.

Usiskin, Z. (1982). Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. ERIC: Columbus, USA.

Van Hiele, P.M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría).* (Tesis doctoral). Universidad de Utrecht, Utrecht (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).

Weber, K. (2005). Students' Understanding of Trigonometric Functions. *Mathematics Education Research Journal, 17(3),* 91-112.

Weber, K., Maher, C., Powell, A. (2008). Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics, 68*, 247-261.

Weiss, M., Herbst, P., Chen, C. (2009). Teachers' perspectives on "authentic mathematics" and the two-column proof form. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 275-293.

Wenzelburger, E. (1992). The learning of trigonometric functions in a graphical computer environment. *Proceedings of the 16th PME International Conference, 3*, 106-113.

Winicki-Landman, G. (2007). Making possible the discussion of “impossible in mathematics”. En P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 185-195). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. *Procceding of the 25th PME International Conference, 1*, 9-24.

ANEXO 1.

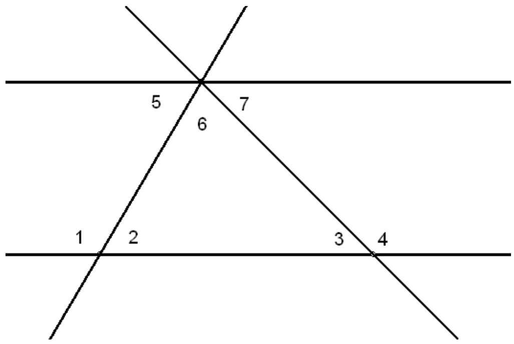
Evaluación Diagnóstica de Preconceptos

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA PRECONCEPTOS

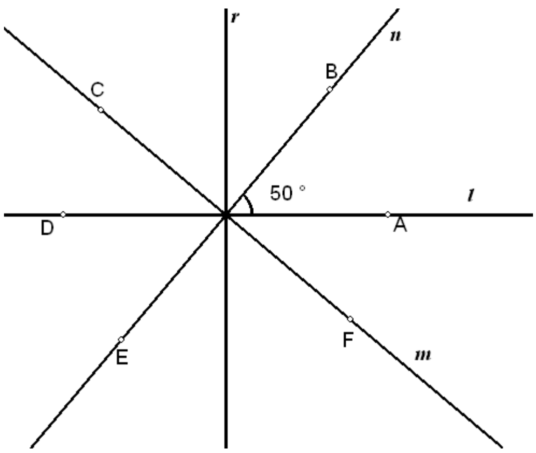
INSTITUCIÓN: ____
NOMBRE: ____
EDAD: _____________________ FECHA________________

1. En la figura de la derecha, las rectas *p* y *q* son paralelas. La medida del ángulo 1 es igual a 125º ($m\angle 1 = 125^\circ$), la medida del ángulo 4 es igual a 143º ($m\angle 4 = 143^\circ$). Halla la medida de los otros ángulos y explica ***por qué*** ese valor.

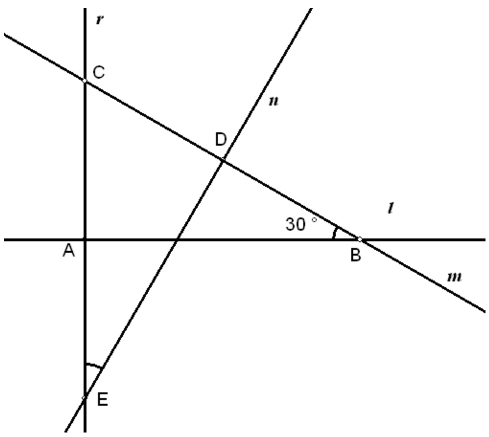
a) $m\angle 2 =$ ___ , porque ___________________________
b) $m\angle 3 =$ ___ , porque ___________________________
c) $m\angle 5 =$ ___ , porque ___________________________
d) $m\angle 6 =$ ___ , porque ___________________________
e) $m\angle 7 =$ ___ , porque ___________________________



2. Las rectas *l* y *r* son perpendiculares y las rectas *m* y *n* son perpendiculares. ¿Cuál es el valor de los ángulos COD, y DOE? **Explica tu respuesta.**

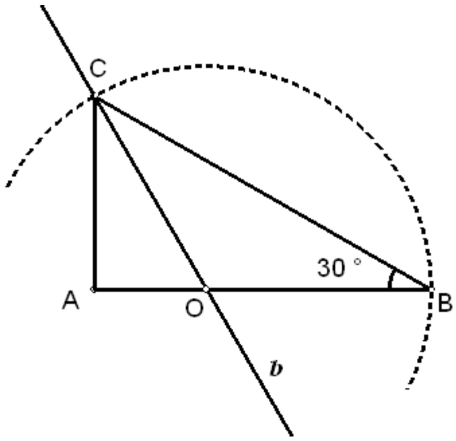


3. Las rectas *l* y *r* son perpendiculares y las rectas *m* y *n* son perpendiculares. ¿Cuál es el valor de ángulo CED? **Explica tu respuesta.**

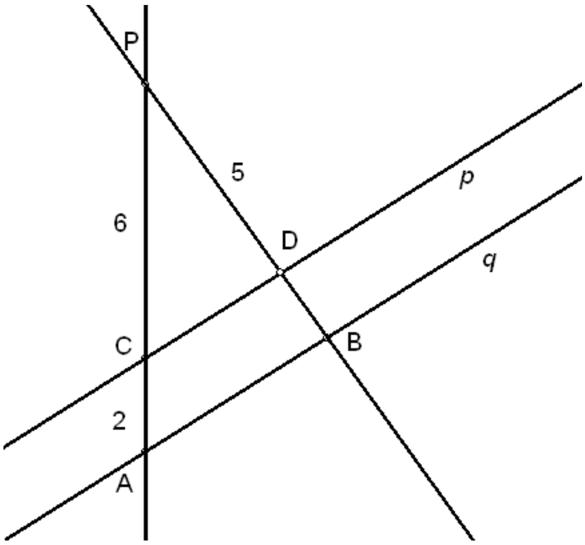


4. ¿Es posible que los lados de un triángulo midan 4 *cm.*, 5 *cm.*, y 12 *cm.*?. **Explica tu respuesta.**

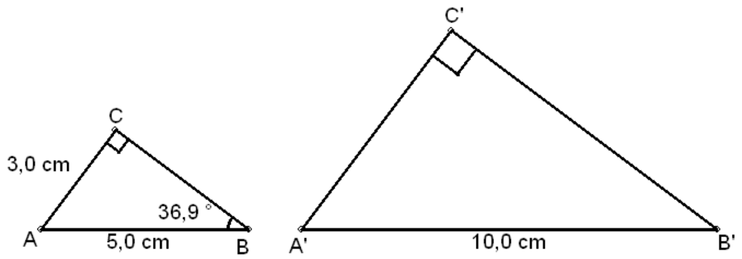
5. En la siguiente figura, *b* es la bisectriz del ángulo *ACB* y $m\angle ABC = 30^{\circ}$. ¿Es el triángulo *ABC* rectángulo? **Justifica tu respuesta.**



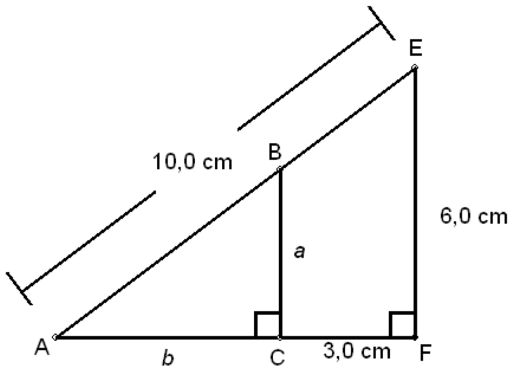
6. En la siguiente figura, las rectas *p* y *q* son paralelas. Calcula la longitud del segmento *PB*. **Explica tu respuesta.**



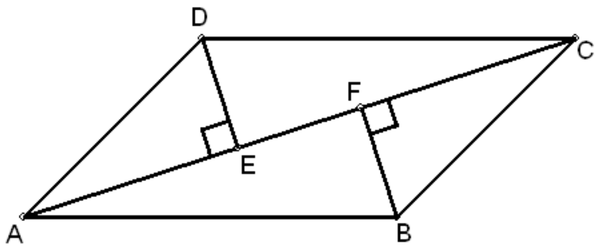
7. Los triángulos *ABC* y *A'B'C'* de la siguiente figura son semejantes.
    a. ¿Cuál es el valor de los lados *BC* y *B'C'*? **Explica tu respuesta.**
    b. ¿Cuál es el valor del ángulo *C'A'B'*? **Explica tu respuesta.**



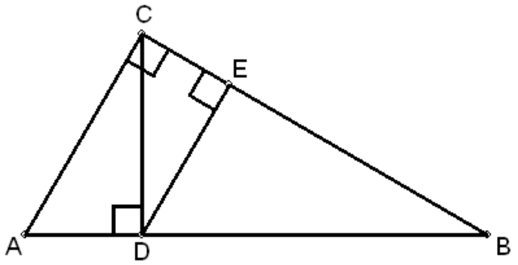
8. Si los triángulos representados en la figura son semejantes, halla las longitudes de los lados *a* y *b*. **Explica tu respuesta.**



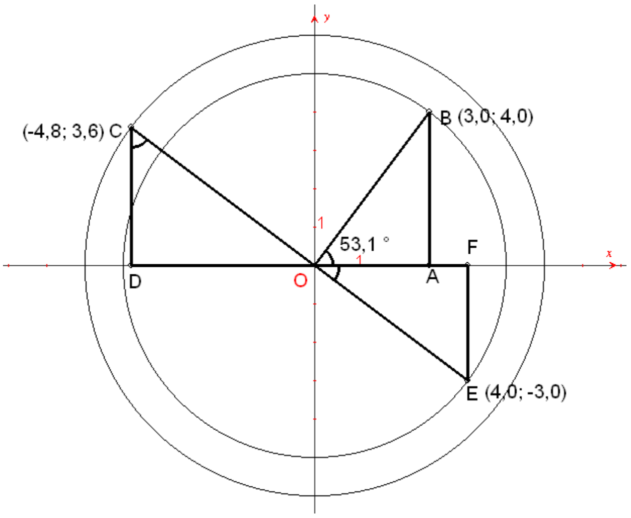
9. La siguiente figura del paralelogramo *ABCD* contiene uno o más pares de triángulos iguales. Encuentra una pareja de triángulos iguales. **Explica tu respuesta.**



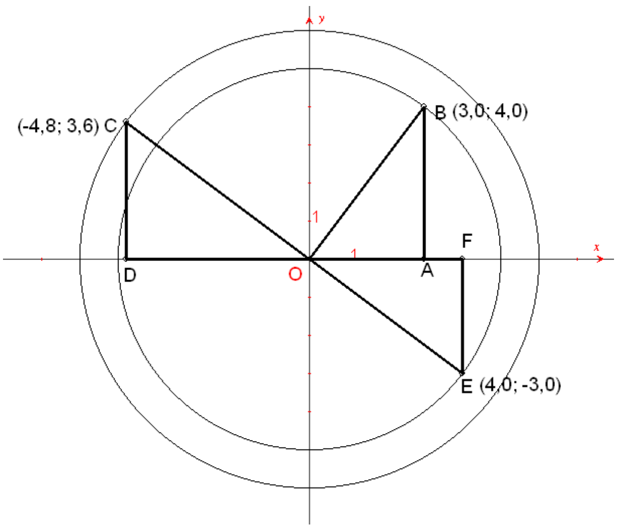
10. La siguiente figura contiene uno o más pares de triángulos semejantes. Encuentra una pareja de triángulos semejantes. **Explica tu respuesta.**



11. ¿Cuánto es la medida del ángulo FOE y del ángulo DCO? **Explica tu respuesta.**



12. ¿Qué relación hay entre los triángulos ΔOAB, ΔODC y ΔOFE? **Explica tu respuesta.**



DESCRIPCIÓN Y JUSTIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS

PROB.	CONTENIDOS EVALUADOS	COMENTARIOS Y RESULTADOS ESPERADOS
1	• Relaciones de ángulos entre paralelas y secantes. • Ángulos suplementarios. • Ángulos alternos interiores, ángulos. exteriores, ángulos correspondientes.	Los ángulos y sus propiedades son tema central del estudio de la trigonometría. De acuerdo a la experiencia se sugiere que se empiece hablando de grados y no de radianes. Este problema se utilizó en el trabajo de investigación y sirvió para detectar dificultades en cuanto al reconocimiento de ángulos y sus relaciones entre rectas. El problema lo pueden resolver por diferentes vías, por ejemplo reconociendo los ángulos suplementarios, se hallan los valores de los ángulos 2 y 3, se puede hallar el ángulo 6, utilizando la suma de los ángulos interiores del triángulo, 5 y 7 se pueden hallar como la diferencia entre 180º y el ángulo 1 y 4 respectivamente o como ángulos internos opuestos entre paralelas. Si hallan primero 5 y 7, pueden hallar 6 como la diferencia entre 180º y la suma de 5 y 7.
2	• Reconocimiento de ángulos por su nombre y en la figura. • Ángulos complementarios • Ángulos opuestos por el vértice.	En la unidad de enseñanza se necesita realizar construcciones de rectas perpendiculares sugeridas en la actividad, o como estrategia de solución de problemas y búsqueda de relaciones entre los elementos geométricos involucrados. Es importante que el estudiante sepa identificar ángulos en un gráfico cuando se nombra con letras y hallar su valor. El problema lo pueden resolver hallando el valor del ángulo DOC por opuesto por el vértice con el ángulo AOB, luego hallar COD por ser ángulo complementario entre las rectas m y n. También pueden hallar AOF complemento de AOB, COD por opuesto por el vértice a AOF y DOE complemento de COD.
3	• Reconocimiento de ángulos por su nombre y en la figura. • Ángulos complementarios. • Ángulos complementarios. • Ángulos opuestos por el vértice	En la unidad de enseñanza se necesita realizar construcciones de rectas perpendiculares sugeridas en la actividad, o como estrategia de solución de problemas y búsqueda de relaciones entre los elementos geométricos involucrados. Es importante que el estudiante sepa identificar ángulos en un gráfico cuando se nombra con letras y hallar su valor. Una forma de resolver el problema es identificado el triángulo rectángulo ABC como rectángulo y por suma de los ángulos interiores determinar que el ángulo ACB es 60º, luego identificar el triángulo rectángulo CDE y determinar que el ángulo CED es 30º por la suma de los ángulos interiores del triángulo. Otra forma sería identificar el triángulo rectángulo que forman las rectas *m, l* y *n*, hallar el ángulo de la intersección de *l* y *n* de 60º

PROB.	CONTENIDOS EVALUADOS	COMENTARIOS Y RESULTADOS ESPERADOS
		y su opuesto de 60º, identificar el triángulo rectángulo formado por las rectas *l*, *r* y *n* y por suma de ángulos determinar que el ángulo CED es 30º. También se podría reconocer que por propiedades de las perpendiculares los ángulos CED y ABC son iguales.
4	• Desigualdad triangular. • Construcción de triángulos.	En algunos problemas de los planteados en Cabri en la unidad de enseñanza, en algunos casos se "desparecen" los triángulos (cuándo se construye un triángulo en Cabri con medidas fijas, al mover algunos de sus vértice el triángulo "desaparece" de la pantalla, esto es debido a que no existe triángulo porque uno de sus lados es mayor que la suma de los otros dos lados, es decir, no se cumple la desigualdad triangular). Para resolver el problema puede enunciar la propiedad o intentar construir el triángulo para darse cuenta que no es posible.
5	• Propiedades de los triángulos rectángulos y de los triángulos isósceles. • Bisectriz de un ángulo • Suma de los ángulos interiores de un triángulo, suma y resta de ángulos.	En este problema se está evaluando la capacidad de aplicar propiedades de los triángulos y de la bisectriz para la resolución de problemas y la capacidad de reconocer propiedades de la circunferencia a través del diagrama, también se evalúa si los estudiantes utilizan las apariencias de los dibujos como soporte para sus justificaciones. El problema lo pueden resolver reconociendo que al triángulo BOC es isósceles, por lo tanto el ángulo OCB es 30º y el ángulo COB es 120º, si b es bisectriz del ángulo ACB, entonces el ángulo OCA es 30º, el ángulo AOC es 60º por ser suplementario de 120º y por lo tanto el ángulo CAB es 90º por lo que el triángulo es rectángulo. Otra forma (no muy común) de resolver el problema sería reconociendo el ángulo COA como ángulo central de la circunferencia y por lo tanto su valor es 60º, ACO es 30º y por lo tanto CAB 90º
6	• Teorema de Tales. • Propiedades de la proporcionalidad geométrica. • Semejanza de triángulos.	La mayoría de estudiantes que empiezan 10º de bachillerato desconocen el teorema de Thales y las propiedades de la proporcionalidad geométrica, por lo que se hace necesario indagar más acerca de sus preconceptos, además que el tema de la proporcionalidad es uno de los temas centrales de las justificaciones planteadas en casi todas las actividades. Para resolver el problema se debe reconocer que los segmentos correspondientes entre paralelas son proporcionales para hallar el valor de DB y luego sumarlo a PD.
7	• Teorema de Pitágoras. • Propiedades de los triángulos semejantes.	El teorema de Pitágoras es fundamental cuando se trabaja con triángulos rectángulos y su reconocimiento y aplicación son necesarios para el abordaje de la

PROB.	CONTENIDOS EVALUADOS	COMENTARIOS Y RESULTADOS ESPERADOS
	• Proporcionalidad geométrica.	trigonometría. Por otro lado el reconocimiento de las propiedades de los triángulos semejantes es una de los temas que fundamentan muchos de los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas planteadas en la unidad de enseñanza. Para resolver el problema se puede usar el teorema de Pitágoras para hallar el cateto CB o se puede reconocer la terna Pitagórica 3, 4, 5, conocido CB se halla C'B' al reconocer que los lados del triángulo A'B'C' son el doble del triángulo ABC. Si los triángulos son semejantes sus ángulos son iguales, por lo tanto C'A'B' es 50,1º por ser complemento del ángulo ABC.
8	• Teorema de Pitágoras. • Propiedades de los triángulos semejantes. • Proporcionalidad geométrica.	Profundizando en lo dicho para el anterior problema, se presenta otro problema de triángulos rectángulos semejantes para el reconocimiento de sus propiedades. Para resolver el problema se debe aplicar el Teorema de Pitágoras para hallar el valor del cateto AD o reconocer la terna Pitagórica 6, 8 10. Conocido AD se halla $b = AC = 8 - 3$. Por semejanza entre los triángulos ADC y ACB, se tiene que $\frac{6}{8} = \frac{a}{5}$, por lo tanto $a = \frac{15}{4}$
9	• Congruencia de triángulos. • Teoremas de triángulos congruentes.	Otro de los temas más usados en la unidad de enseñanza son los criterios de congruencia de de triángulos para justificar propiedades de las razones e identidades trigonométricas, por lo que se plantean varios problemas para la evaluación del uso de los teoremas de congruencia en la solución de problemas. No se usa la palabra congruencia en el planteamiento para evitar incomprensiones del enunciado. El problema es bastante abierto y a diferencia de los anteriores, no se pide un cálculo, sino el reconocimiento de la congruencia basado en propiedades de los ángulos, de los lados del paralelogramo y de los teoremas de congruencia. Esto puede ser un problema o un acierto para su evaluación, en dado caso se puede replantear utilizando datos. Al ser abierto el problema pueden haber varias soluciones, por ejemplo reconocer que ΔABC es congruente a ΔADC por teorema LAL o ALA al reconocer los lados AD = BC, DC = AB y los ángulos ADC y ABC opuestos del paralelogramos iguales, o los ángulos BAC y DCA, CAB y ACD iguales por alternos internos entre paralelas o por estar cortados por la diagonal, señalar dos ángulos y el lado correspondiente para usar el teorema ALA. ΔABF igual a ΔCDE ya que los ángulos BAF y ECD son iguales (alternos internos),

PROB.	CONTENIDOS EVALUADOS	COMENTARIOS Y RESULTADOS ESPERADOS
		ángulos AFB y CED iguales por ser complementarios de triángulos rectángulos AB = CD y por ALA congruentes. De manera similar se puede justificar que ΔAED y ΔFCB son iguales.
10	• Semejanza de triángulos. • Teoremas de triángulos semejantes.	Otro tema importante de la unidad de enseñanza, es el reconocimiento y aplicación de los criterios de semejanza de triángulos. Pueden reconocer los triángulos ABC y ACD son semejantes, puesto que los ángulos ACB y ADC son congruentes por ser rectos, ángulo DAC es común a los dos triángulos y por lo tanto el otro ángulo de los dos triángulos son congruentes. Por AAA los dos triángulos son congruentes (podrían argumentar que con dos ángulos congruentes es suficiente). Triángulos ABC y DBE son semejantes, porque los ángulos ACB y DEB son rectos, ángulos BAC y BDE son congruentes por que los lados AC y DE son paralelos, o ángulo ABC es común a los dos triángulos. Triángulos ADC y CDB son semejantes, porque los ángulos ADC y CDB son rectos, ángulo BAC igual a 90º - B y BCD igual a 90º - B, por lo tanto los triángulos son congruentes. De manera similar a las anteriores, pueden encontrar otras parejas de triángulos semejantes.
11	• Congruencia de triángulos. • Semejanza de triángulos. • Teoremas de triángulos congruentes y de triángulos semejantes. • Plano cartesiano, coordenadas, propiedades de la circunferencia.	Este tipo de situaciones se da especialmente cuando se quiere encontrar relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos. En este problema se necesitan los teoremas de congruencia y semejanza, del reconocimiento del plano cartesiano y de sus coordenadas asociadas a los lados de un triángulo rectángulo. Se puede determinar la medida del ángulo FOE viendo que los dos triángulos OAB y FEO son congruentes por LLL y que son ángulos agudos de un triángulo rectángulo. La medida del ángulo DCO se puede hallar encontrando la medida de DOC igual a FEO por opuesto por el vértice y por suma de la medida de los ángulos de un triángulo o ángulo complementario se sabe la medida de DCO.
12	• Congruencia de triángulos. • Semejanza de triángulos. • Teoremas de triángulos congruentes y de triángulos semejantes. • Plano cartesiano,	Este tipo de situaciones se da especialmente cuando se quiere encontrar relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos. En este problema se necesitan los teoremas de congruencia y semejanza, del reconocimiento del plano cartesiano y de sus coordenadas asociadas a los lados de un triángulo rectángulo. Se espera que los estudiantes encuentren que los triángulos OBA y OEF son congruentes porque sus lados

PROB.	CONTENIDOS EVALUADOS	COMENTARIOS Y RESULTADOS ESPERADOS
	coordenadas, propiedades de la circunferencia	son congruentes o porque los lados AB y OF son iguales según las coordenadas, el ángulo OAB y OFE son congruentes por ser rectos (según las coordenadas) y el lado OA y FE son iguales, según las coordenadas. El triángulo OCD es semejante al triángulo OFE por que los ángulos DOC y FOC son congruentes por ser opuestos por el vértice, los ángulos ODC y OFE son congruentes por ser rectos (según las coordenadas). El triángulo ODC es semejante a BAO por que éste es congruente al triángulo FOE. También podrían decir que DOC es semejante a los triángulos ABO y FOE por que sus lados son proporcionales.

ANEXO 2.

Actividad 1. Razones trigonométricas para triángulos rectángulos

1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Actividad 1.1: Resuelve los siguientes problemas en tu hoja de trabajo

1.1.1 En un triángulo rectángulo las medidas de sus catetos son iguales a 8 cm. y 10 cm.

a) ¿Cuál es la medida de la hipotenusa? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**
b) ¿Cuáles son las medidas de sus ángulos? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**
c) ¿Existen otros triángulos rectángulos con medidas de sus catetos 8 cm. y 10 cm. y medida de ángulos diferentes? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**

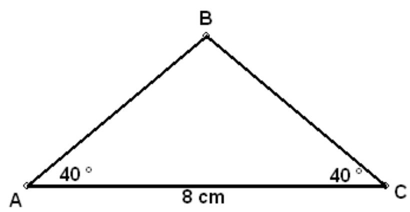
1.1.2 En un triángulo rectángulo un cateto mide 6 cm. y el ángulo adyacente a este cateto mide 32º.

a) ¿Cuál es la medida del otro cateto y de la hipotenusa? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**
b) ¿Cuáles son las medidas de sus ángulos? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**
c) ¿Existen otros triángulos rectángulos con medida del ángulo igual a 32º y medidas de sus catetos e hipotenusa diferentes? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**

1.1.3 En un triángulo rectángulo la medida de la hipotenusa es el doble de la medida de uno de sus catetos.

a) ¿Cuáles son las medidas de los catetos e hipotenusa? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**
b) ¿Cuáles son las medidas de sus ángulos? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**
c) ¿Existen otros triángulos rectángulos con diferentes medidas de su hipotenusa y sus catetos y medidas de ángulos iguales que cumplan la condición? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**
d) ¿Existen otros triángulos rectángulos con diferentes medidas de su hipotenusa y sus catetos y medidas de ángulos diferentes que cumplan la condición? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**
e) ¿Qué tienen en común todos los triángulos que cumplen la condición? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**

1.1.4 Halla el área del siguiente triángulo. **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**



1.1.5 Explora en Cabri las soluciones a los cuatro problemas anteriores y escribe tus conclusiones de comparar las soluciones de los problemas obtenidas inicialmente y las obtenidas con la ayuda de Cabri.

1.1.6 Discute con tus compañeros y el profesor las soluciones de los anteriores problemas y escribe una conclusión al respecto.

Actividad 1.2

1.2.1 ***Explorando***

Abre el archivo ACT.1.2.1 y halla las razones entre los lados del triángulo *ABC*. Nombra cada razón con su respectivo cociente entre los lados del triángulo, por ejemplo BC/AB.

1.2.2 ***Conjeturando***

¿Qué sucede con los valores de las razones cuando varía el ángulo *A* entre 0º y 90º? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

1.2.3 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 1.2.2.

1.2.4 ***Conjeturando***

¿Qué valores toma cada una de las razones a medida que varía el ángulo A entre 0º y 90º? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

1.2.5 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 1.2.4.

1.2.6 ***Conjeturando***

¿Qué relaciones existen entre las razones cuando el ángulo *A* varía entre 0º y 90º? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

1.2.7 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 1.2.6.

Actividad 1.3

1.3.1 ***Discutiendo y comunicando***

Discute con tus compañeros y el profesor los conceptos, las conjeturas y demostraciones de la actividad 1.2.

Actividad 1.4

1.4.1 ***Midiendo y calculando***

- Abre el archivo ACT.1.2.1 y mide el ángulo *B*.
- Calcula las razones trigonométricas del ángulo *B*.
- Nombra cada razón con su respectivo nombre (*sen B, cos B, tan B, cot B, sec B, csc B).*

1.4.2 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre la medida de los ángulos *A* y *B*? Expresa *B* en términos de *A*.

1.4.3 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 1.5.2.

1.4.4 ***Conjeturando***

¿Qué relaciones existen entre las razones trigonométricas halladas para el ángulo *A* y el ángulo *B*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

1.4.5 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** son verdaderas tu conjetura planteada en 1.5.4.

1.4.6 ***Conjeturando y demostrando***

¿Es verdad que *sen(A)=cos (90-A)*?; si tu afirmación es verdadera demuéstrala, en caso contrario da un contraejemplo (un ejemplo donde se vea que la afirmación sea falsa).

1.4.7 ***Conjeturando y demostrando***

¿Es verdad que *cos(A)=sen (90-A)*?; si tu afirmación es verdadera demuéstrala, en caso contrario da un contraejemplo (un ejemplo donde se vea que la afirmación sea falsa).

Actividad 1.5

1.5.1 ***Discutiendo y comunicando***

Discute con tus compañeros y el profesor los conceptos, las conjeturas y demostraciones de la actividad 1.4.

Actividad 1.6

1.6.1 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas *tan(A), sen(A) y cos(A)*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

1.6.2 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 1.6.1.

1.6.3 En un triángulo rectángulo un cateto mide 5 cm. y la hipotenusa mide 13 cm.

a) ¿Cuál es la medida del otro cateto? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**
b) ¿Cuáles son las medidas de sus ángulos? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**
c) ¿Existen otros triángulos rectángulos con medidas de su cateto 5 cm., hipotenusa 13 cm. y medida de ángulos diferentes? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**

1.6.4 En un triángulo rectángulo un ángulo mide 45º.

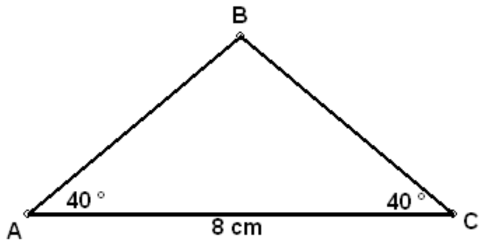
a) ¿Cuál es la medida de los catetos e hipotenusa? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**
b) ¿Cuáles son las medidas de sus ángulos? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**
c) ¿Existen otros triángulos rectángulos con medida del ángulo igual a 45º y medidas de sus catetos e hipotenusa diferentes? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**

1.6.5 ¿Qué significa que $sen\,30^{o} = \frac{1}{2}$? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**

1.6.6 ¿Es posible que el coseno de un ángulo sea $\frac{3}{2}$? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**

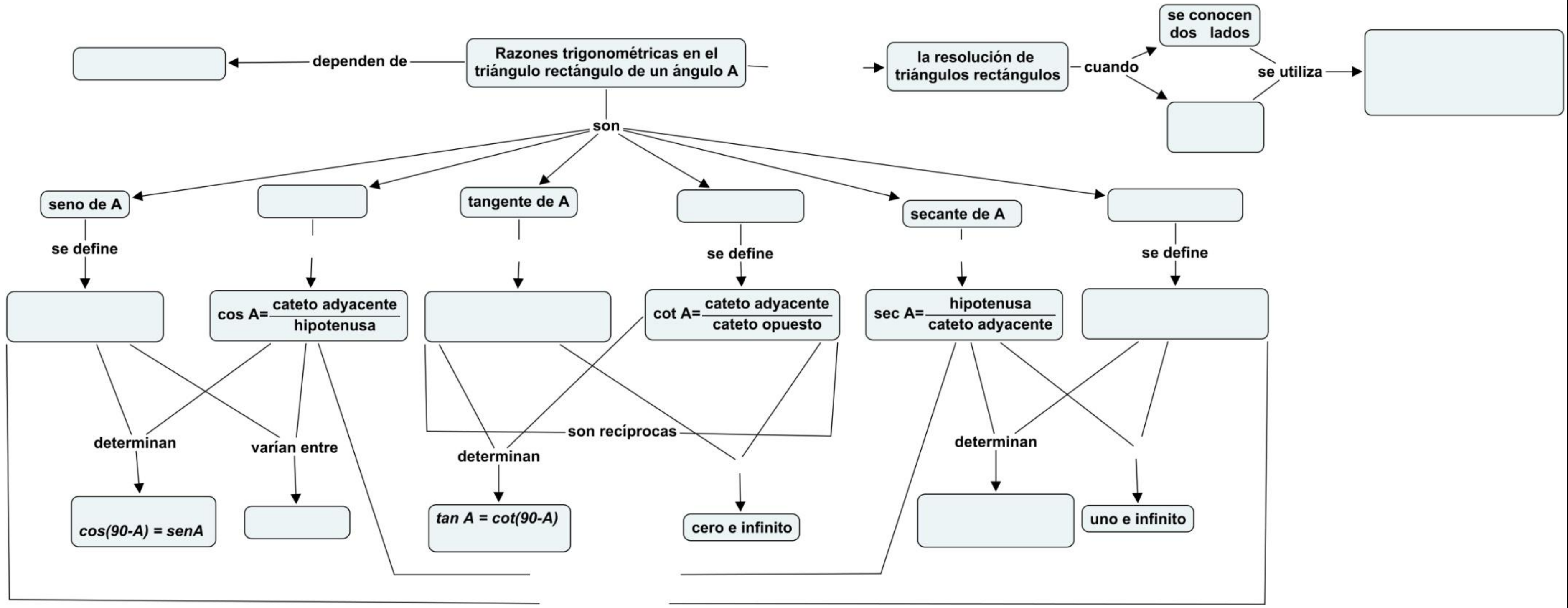
1.6.7 ¿Se puede construir un triángulo rectángulo con un ángulo de 40º y que su hipotenusa sea el doble de uno de sus catetos? **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**

1.6.8 Halla el área del siguiente triángulo. **JUSTIFICA TU RESPUESTA.**



Actividad 1.7

Completa el siguiente mapa conceptual, en donde relaciones todas las definiciones, características y propiedades encontradas en las razones trigonométricas de tal manera que tus compañeros entiendan a través de él todo lo que has aprendido.



ANEXO 3.

Actividad 2. Razones trigonométricas para ángulos en posición normal

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

Actividad 2.1

2.1.1 ***Conjeturando y demostrando***

¿Es verdad que *sen (A) = cos (A-90)* para todo ángulo A entre 0º y 360º? si tu afirmación es verdadera demuéstrala, en caso contrario da un contraejemplo (un ejemplo donde la afirmación sea falsa).

2.1.2 ***Conjeturando y demostrando***

¿Es verdad que *cos (A) = sen (A-90)* para todo ángulo A entre 0º y 360º? si tu afirmación es verdadera demuéstrala, en caso contrario da un contraejemplo (un ejemplo donde la afirmación sea falsa).

Actividad 2.2

2.2.1 ***Aprendiendo***

Abre el archivo 2.2.1, mueve el punto P alrededor de la circunferencia y ten en cuenta la siguiente información.

Observa que el ángulo *A* está determinado por el eje positivo de las *x*, que llamaremos lado inicial del ángulo, y la semirrecta *AP*, que llamaremos lado final del ángulo. A estos ángulos los llamaremos ***ángulos en posición normal***. Por convenio, si la semirrecta que determina el lado final del ángulo *A* gira desde el lado inicial en sentido contrario a las manecillas del reloj, decimos que el ángulo es positivo y si gira desde el lado inicial en sentido de las manecillas del reloj, decimos que es negativo.

Si *A* es un ángulo en posición normal, *P*(*x* , *y*) es cualquier punto sobre su lado final, diferente de (0 , 0), y $r = \overline{AP} = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces las razones trigonométricas para el ángulo *A* se definen de la siguiente manera:

$$sen\ A = \frac{y}{r};\quad \cos A = \frac{x}{r};\quad \tan A = \frac{y}{x},\ x \neq 0$$

$$\csc A = \frac{r}{y},\ y \neq 0;\quad \sec A = \frac{r}{x},\ x \neq 0;\quad \cot A = \frac{x}{y},\ y \neq 0$$

2.2.2 ***Explorando***

¿Qué elementos geométricos identificas en la construcción? **Descríbelos.**

¿Qué relaciones encuentras entre estos elementos geométricos? **Justifica tus respuestas.**

Actividad 2.3

2.3.1 ***Conjeturando***

¿Qué sucede con los valores de las seis razones trigonométricas a medida que varía el ángulo *A*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.3.2 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.3.1.

2.3.3 ***Conjeturando y demostrando***

Analiza los signos de las seis razones trigonométricas en cada uno de los cuatro cuadrantes del plano cartesiano. Plantea una conjetura al respecto y explica *por qué* es verdadera.

2.3.4 ***Conjeturando***

¿Qué sucede con los valores de las seis razones trigonométricas a medida que varía el radio *r*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.3.5 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.3.4.

2.3.6 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas *sen A* y *cos A* con las coordenadas del punto *P* cuando el radio de la circunferencia es 1? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.3.7 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.3.6.

2.3.8 ***Conjeturando***

¿Qué valores toma cada una de las razones trigonométricas a medida que varía el ángulo A? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.3.9 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.3.8.

2.3.10 ***Conjeturando y demostrando***

¿Qué ocurre cuando el ángulo *A* es igual a 0º, 90º, 180º, 270º y 360º?, **Explica lo que ocurre justificando con argumentos matemáticos.**

Actividad 2.4

2.4.1 ***Discutiendo y comunicando***

Discute lo encontrado en la actividad 2.3 con tus compañeros de clase y el profesor.

Actividad 2.5

2.5.1 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre *sen(A)* y *sen(-A)*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.5.2 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.5.1.

2.5.3 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre cos(A) y cos(-A)? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.5.4 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.5.3.

2.5.5 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre *tan(A)* y *tan(-A)*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.5.6 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.5.5.

Actividad 2.6

Abre el archivo 2.6.1.

2.6.1 ***Explorando, conjeturando y demostrando***

Busca relaciones entre los valores de las razones trigonométricas para los ángulos *A*, *A-90*, *90-A*. **Demuéstralas utilizando propiedades matemáticas.**

2.6.2 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre *cos(A)* y *sen(A - 90)*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.6.3 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.6.2.

2.6.4 ***Conjeturando y demostrando***

¿Es verdad que *tan(A) = cot(A - 90)*? si tu afirmación es verdadera demuéstrala, en caso contrario da un contraejemplo (un ejemplo donde la afirmación sea falsa).

2.6.5 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre *sen(A)* y *cos(90 - A)*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.6.6 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.6.5.

2.6.7 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre *sen*(90 - A) y *sen*(*A* – *90*)? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.6.8 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.6.7.

Actividad 2.7

2.7.1 Discute lo encontrado en las actividades 2.5 y 2.6 con tus compañeros de clase y el profesor.

Actividad 2.8

2.8.1 ¿Las propiedades encontradas en la actividad 1 para las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo se cumplen para los ángulos en posición normal? **¿Por qué?**

2.8.2 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre *cos*(90 - A) y *cos*(*A – 90*)? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.8.3 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.8.2.

2.8.4 ***Conjeturando***

¿Qué relaciones existen entre *sec(A), sec(-A), sec(A – 90) y sec(90 – A)*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tus conjeturas.

2.8.5 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** son verdaderas tus conjeturas planteadas en 2.8.4.

2.8.6 Encuentra otras relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos A, -A, 90 – A y A - 90 diferentes a las encontradas en los puntos anteriores y demuéstralas.

2.8.7 Encuentra los valores de las otras razones trigonométricas si se sabe que cos(*A*) = $\frac{-4}{5}$ y tan(*A*) es positiva. ¿Cuál es el valor del ángulo *A*? **Justifica tus respuestas.**

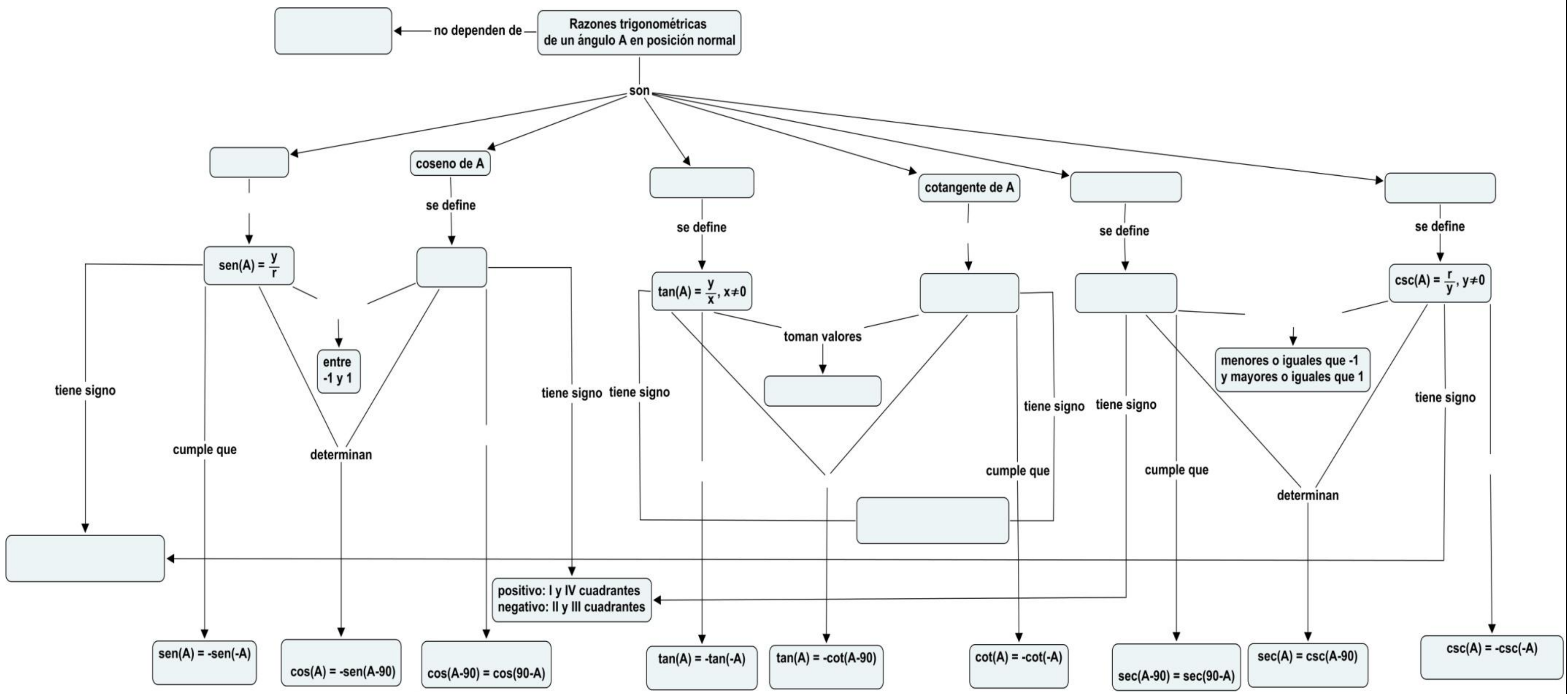
2.8.8 Encuentra los valores de las otras razones trigonométricas si se sabe que $sen(A) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos(A) = \frac{1}{2}$. ¿Cuál es el valor del ángulo *A*? **Justifica tus respuestas.**

2.8.9 ¿Qué significa que $\cos(135 ¼) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$?

Si *P*(*x, y*) es un punto del plano cartesiano en donde *x* > 0, *y* <0. ¿Cuáles son los posibles valores que toman *A* y *tan*(*A*)? **Justifica tus respuestas.**

Actividad 2.9

Completa el siguiente mapa conceptual, en donde relaciones todas las definiciones, características y propiedades encontradas en las razones trigonométricas de tal manera que tus compañeros entiendan a través de él todo lo que has aprendido.



ANEXO 4.

Actividad 3. Representación lineal y visualización de las razones trigonométricas

3. REPRESENTACIONES LINEALES Y VISUALIZACIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Actividad 3.1

3.1.1 Sin usar la calculadora, halla las razones trigonométricas *seno*, *coseno* y *tangente* de un ángulo de 150º, 225º y 300º. **Justifica tus respuestas.**

3.1.2 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre *cos* (*A*) y *cos* (180 – *A*)? Escribe una conjetura de lo encontrado en tu hoja de trabajo. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

3.1.3 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 3.1.2.

3.1.4 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre *sen* (*A*) y *sen* (180 + *A*)? Escribe una conjetura de lo encontrado en tu hoja de trabajo. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

3.1.5 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 3.1.4.

Actividad 3.2

3.2.1 ***Explorando y Aprendiendo***

Abre el archivo ACT.3.2 y mueve suavemente el punto *B* sobre la circunferencia hasta completar una vuelta, observa con atención los vectores que están representando las razones trigonométricas y ten en cuenta lo siguiente:

Cada razón está representada por un vector en donde: *la longitud del vector* representa el valor absoluto del producto del radio de la circunferencia por la razón representada; *el sentido del vector* determina el valor positivo o negativo de la razón. Consideramos que la razón es: ***positiva*** cuando el vector representante apunta *hacia la derecha, hacia arriba o hacia fuera del punto O* (origen del sistema coordenado) y ***negativa*** cuando apunta *hacia la izquierda, hacia abajo o hacia el punto O*.

Por convenio, llamamos ***"lados trigonométricos"*** del ángulo θ a los siguientes vectores:

Lado seno: El vector *AB* (azul), *lado seno=rsenθ.*

Lado coseno: El vector *OA*, (rojo), *lado coseno=rcosθ.*

Lado tangente: El vector *CD*, o *D´C´*, (verde oscuro), *lado tangente=rtanθ.*

Lado cotangente: El vector *EF* o *E´F´*, (verde claro), *lado cotangente=rcotθ.*

Lado secante: El vector *OD* o *D´O*, (rosado), *lado secante=rsecθ.*

Lado cosecante: El vector *OF* o *F´O* (celeste), *lado cosecante=rcscθ.*

Nota: los "lados trigonométricos" no sólo están definidos para ángulos en posición normal, sino para cualquier ángulo que no esté necesariamente en posición normal, pero teniendo en cuenta la definición que involucra la relación con la circunferencia de radio r (figura 1).

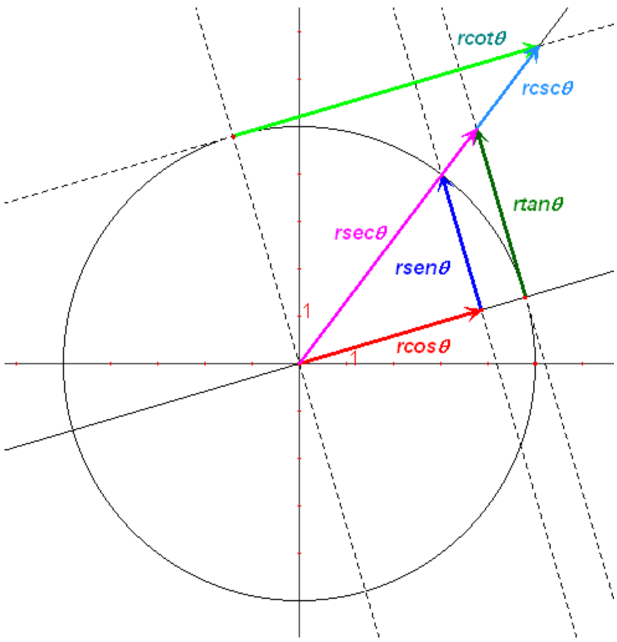


Fig. 1: "Lados trigonométricos" para un ángulo en cualquier posición.

3.2.2 *Explorando, Analizando y Aprendiendo*

Mueve suavemente el punto *B* sobre la circunferencia hasta completar una vuelta, observa, analiza y memoriza lo escrito en el recuadro anterior.

3.2.3 *Explorando, Analizando y Relacionando*

Busca objetos geométricos en el diagrama dinámico, descríbelos y analiza las relaciones entre ellos.

Actividad 3.3

3.3.1 *Demostrando*

Para "visualizar" la demostración y los vectores mencionados a continuación ten en cuenta el archivo ACT.3.2 de Cabri**.**

Vamos a demostrar con propiedades matemáticas que el lado tangente de θ (segmento *CD* o *C'D´*) está relacionado con la razón tangente de θ:

$CD = r.\tan\theta$, si $0^\circ < \theta < 90^\circ$, o, $270^\circ < \theta < 360^\circ$, y $C´D´ = r.\tan\theta$, si $90^\circ < \theta < 270^\circ$.

Veamos el caso del segmento *CD* ($0^\circ < \theta < 90^\circ$, o, $270^\circ < \theta < 360^\circ$):

Sabemos que $\tan\theta = \dfrac{lado\ \ opuesto}{lado\ \ adyacente} = \dfrac{CD}{OC}$.

El segmento $OC=r$, por lo tanto, $\tan\theta = \frac{CD}{OC} = \frac{CD}{r}$, entonces, $\tan\theta = \frac{CD}{r}$, por lo tanto, $CD = r.\tan\theta$.

De manera análoga, para el segmento $C'D'$ ($90° < \theta < 270°$):

$\tan\theta = \frac{C'D'}{OC'}$. El segmento $OC' = r$, por lo tanto, $\tan\theta = \frac{C'D'}{OC'} = \frac{C'D'}{r}$, entonces, $\tan\theta = \frac{C'D'}{r}$, por lo tanto, $C'D' = r.\tan\theta$.

3.3.2 ***Demostrando***

Demuestra que el segmento AB (si $0° < \theta < 360°$) está relacionado con el seno de θ.

3.3.3 ***Demostrando***

Demuestra que el segmento OA (si $0° < \theta < 360°$) está relacionado con el coseno de θ.

Actividad 3.4

3.4.1 ***Explorando, Analizando y Conjeturando***

Abre el archivo ACT.3.4.1 y analiza las relaciones entre los ángulos θ y α en cada cuadrante (toma como referencia los ángulos 0º, 90º, 180º y 360º).

a) ¿Cuál es el máximo valor de θ? ¿de α? **Explica tu respuesta.**

b) ¿Qué relación existe entre un ángulo θ que esté en el primer cuadrante y el ángulo α? **Explica tu respuesta.**

c) ¿Qué relación existe entre un ángulo θ que esté en el segundo cuadrante y el ángulo α? **Explica tu respuesta.**

d) ¿Qué relación existe entre un ángulo θ que esté en el tercer cuadrante y el ángulo α? **Explica tu respuesta.**

e) ¿Qué relación existe entre un ángulo θ que esté en el cuarto cuadrante y el ángulo α? **Explica tu respuesta.**

f) ¿Qué ocurre cuando θ es mayor de 360º? **Explica tu respuesta.**

3.4.2 ***Analizando y aprendiendo***

Si has analizado, cada ángulo en posición normal (θ), tiene como referencia un ángulo agudo (α), que se forma con respeto al eje *x*, y que nos sirve para hallar el valor de las razones del ángulo θ en función de ese ángulo α, difiriendo, en algunos casos, solamente en su signo, estos ángulos se llaman, ***ángulos de referencia***.

3.4.3 ***Aprendiendo y explicando***

Observa que el ángulo de referencia de 120º es 60º, *sen* (120º) = *sen* (60º) y *cos* (120º) = –*cos* (60º), tan (120º) = –tan (60º) **¿Por qué?**

3.4.4 ***Aprendiendo y explicando***

Observa que el ángulo de referencia de 210º es 30º, *sen* (210º) = –*sen* (30º) y *cos* (210º) = –*cos* (30º), tan (210º) = tan (30º) **¿Por qué?**

Actividad 3.5

3.5.1 ***Discutiendo y comunicando***

Discute con tus compañeros y el profesor los conceptos, las conjeturas y demostraciones de las actividades 3.1 a 3.4.

Actividad 3.6

3.6.1 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre $sen\ (180\ -\ \alpha)$ y $sen\ \alpha$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

3.6.2 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 3.6.1.

3.6.3 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre $tan\ (180\ -\ \alpha)$ y $tan\ \alpha$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

3.6.4 ***Demostrando***

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 3.6.3.

3.6.5 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre $sen\ (180\ +\ \alpha)$ y $sen\ \alpha$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

3.6.6 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 3.6.5.

3.6.7 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre $cos\ (180\ +\ \alpha)$ y $cos\ \alpha$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

3.6.8 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 3.6.7.

3.6.9 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre $tan\ (360\ -\ \alpha)$ y $tan\ \alpha$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

3.6.10 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 3.6.9.

Actividad 3.7

3.7.1 ***Discutiendo y comunicando***

Discute con tus compañeros y el profesor los conceptos, las conjeturas y demostraciones de la actividad 3.6.

Actividad 3.8

3.8.1 ***Demostrando***

Demuestra que: el segmento OD (si $0º < \theta < 90º$ y $270º < \theta < 360º$) u OD´ (si $90º < \theta < 270º$) está relacionado con la secante de θ.

3.8.2 ***Demostrando***

¿Es verdad que $\cos(180 - \alpha) = \cos\alpha$? Si la igualdad es cierta demuéstrala, si es falsa refútala y encuentra una verdadera y demuéstrala.

3.8.3 ***Demostrando***

¿Es verdad que $\operatorname{sen}(180 + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$? Si la igualdad es cierta demuéstrala, si es falsa refútala y encuentra una verdadera y demuéstrala.

3.8.4 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre $\cot(180 - \alpha)$ y $\cot\alpha$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

3.8.5 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 3.8.4.

3.8.6 ***Demostrando***

Intenta demostrar de forma diferente las conjeturas 3.8.2 y 3.8.4.

3.8.7 ***Conjeturando y demostrando***

Encuentra otras relaciones de las razones trigonométricas de los ángulos α, $180º - \alpha$, $180º + \alpha$ y $360 - \alpha$ que no hayas encontrado y demostrado en las actividades anteriores y demuéstralas.

3.8.8 ¿Puede ocurrir que existan dos o más ángulos cuyo coseno sea igual? **Explica tu respuesta.**

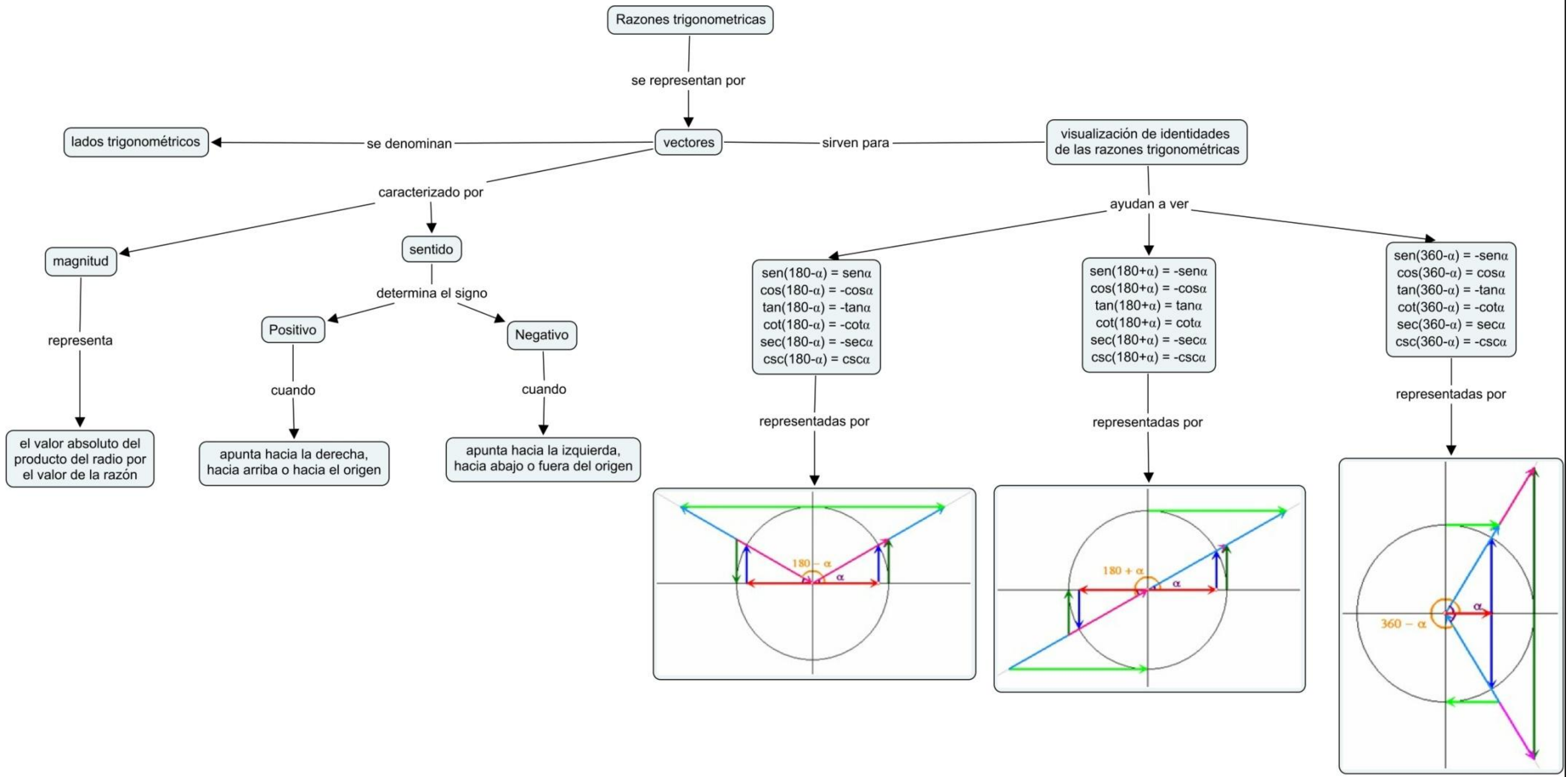
3.8.9 ¿Puede ocurrir que el seno y el coseno de un ángulo coincidan? **Explica tu respuesta.**

3.8.10 ¿Si conocemos el coseno de un ángulo queda determinado dicho ángulo? **Explica tu respuesta.**

3.8.11 ¿Para qué ángulos coinciden la tangente y la cotangente? **Explica tu respuesta.**

Actividad 2.9

Completa el siguiente mapa conceptual, en donde relaciones todas las definiciones, características y propiedades encontradas en las razones trigonométricas de tal manera que tus compañeros entiendan a través de él todo lo que has aprendido



ANEXO 5.

Actividad 4. Identidades Pitagóricas

4. IDENTIDADES PITAGÓRICAS

Actividad 4.1

4.1.1 Halla coseno del ángulo θ si se sabe que: $sen\ \theta = \frac{8.996}{10.727}$.

4.1.2 Expresa la razón trigonométrica coseno en función de la razón trigonométrica seno.

Actividad 4.2

4.2.1 ***Explorando, analizando y conjeturando.***

- Abre el archivo de Cabri ACT.4.2, explora la construcción y analiza las relaciones de los elementos del diagrama dinámico.

¿Qué relación existe entre el radio de la circunferencia y las razones trigonométricas *seno* y *coseno*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

4.2.2 ***Demostrando***

Demuestra tu conjetura planteada en 4.2.1.

Actividad 4.3

4.3.1 ***Discutiendo y comunicando***

Discute con tus compañeros y el profesor los conceptos, las conjeturas y demostraciones de la actividad 4.2.

Actividad 4.4

4.4.1 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre el radio de la circunferencia y las razones trigonométricas *tangente* y *secante*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

4.4.2 ***Demostrando***

Demuestra tu conjetura planteada en 4.4.1.

4.4.3 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre el radio de la circunferencia y las razones trigonométricas *cotangente* y *cosecante*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

4.4.4 ***Demostrando***

Demuestra tu conjetura planteada en 4.4.3.

4.4.5 ¿Existen otras formas de demostrar las conjeturas planteadas en 4.4.1 y 4.4.3? **Explica tu respuesta.**

Actividad 4.5

4.5.1 Sin hallar el valor del ángulo θ halla $sen\theta$ si se sabe que: $\cos\theta = 0.6427$.

4.5.2 Expresa la razón trigonométrica seno en función de la razón trigonométrica coseno. **Explica tu respuesta.**

4.5.3 Expresa la razón trigonométrica tangente en función de la razón trigonométrica secante. **Explica tu respuesta.**

4.5.4 Expresa la razón trigonométrica coseno en función de la razón trigonométrica tangente. **Explica tu respuesta.**

Actividad 4.6

4.6.1 Realiza un mapa conceptual, en donde relaciones todas las definiciones, características y propiedades encontradas en la actividad 4 de tal manera que tus compañeros entiendan a través de él todo lo que has aprendido.

Actividad 4.7

4.7.1 ***Discutiendo y comunicando***

Discute con tus compañeros y el profesor los conceptos, las conjeturas y demostraciones y mapas conceptuales de las actividades 4.4 a 4.6.

ANEXO 6.

Actividad 5. Seno y coseno de la suma de dos ángulos

5. SENO Y COSENO DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS

Actividad 5.1

5.1.1 Halla *sen*(α + β) si se sabe que $sen(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $sen(\beta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **EXPLICA TU RESPUESTA.**

5.1.2 Halla *cos*(α + β) si se sabe que $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos(\beta) = -\frac{1}{2}$. **EXPLICA TU RESPUESTA.**

5.1.3 ¿Es verdad que $sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha) + sen(\beta)$? **EXPLICA TU RESPUESTA**

5.1.4 ¿Es verdad que $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha) + cos(\beta)$? **EXPLICA TU RESPUESTA**.

5.1.5 Discute con tus compañeros y el profesor las soluciones de los anteriores problemas.

Actividad 5.2

5.2.1 ***Explorando y analizando***

Abre el archivo de Cabri ACT.5.2, mueve lentamente el lado final del ángulo β (se encuentra en el lado inferior izquierdo de la pantalla) hasta completar más de una vuelta; has lo mismo con el ángulo α manteniendo fijo el ángulo β. Observa, analiza y relaciona todos los elementos de la construcción (ángulos, lados de los ángulos, triángulos, vectores representantes de los lados seno y coseno, rectas auxiliares, segmentos etc.). Ten en cuenta las siguientes indicaciones y la figura 1:

- α es un ángulo que está en posición normal con respecto al eje *x* e *y* del plano.
- β es un ángulo que no está en posición normal con respecto al eje *x* e *y* del plano, aunque se puede considerar en posición normal con respecto al lado final del ángulo α.
- Para efectos de la "demostración dinámica" vamos a suponer que el radio de la circunferencia es uno (1) y lo indicamos con el segmento verde claro.
- El lado *sen*($\alpha + \beta$) está representado por el vector verde claro **TP**.
- El lado *cos*($\alpha + \beta$) está representado por el vector verde claro **OT**.
- El *lado seno* (producto del radio por la razón trigonométrica seno) correspondiente a un ángulo de cualquiera de los triángulos rectángulos formados, está representado por un vector azul y el *lado coseno* (producto del radio por la razón trigonométrica coseno) correspondiente a un ángulo de cualquiera de los triángulos rectángulos formados, está representado por un vector rojo.
- Los ángulos α y $\underline{\alpha}$, β y $\underline{\beta}$ se relacionan por el ángulo de referencia en cada cuadrante, en algunos casos $\alpha = \underline{\alpha}$ y $\beta = \underline{\beta}$ (esto debes tenerlos muy en cuenta para determinar el signo de las razones seno y coseno en cada cuadrante y para entender la dirección del vector representante de los lados trigonométricos seno y coseno).
- Aunque en algunos casos se "ve" un solo vector azul grueso (vector **RQ** o **RT**) o rojo grueso (vector **QS** u **OR**), esto no quiere decir que no exista el otro, lo que ocurre es que están superpuesto y el que se "ve" es el último vector construido.

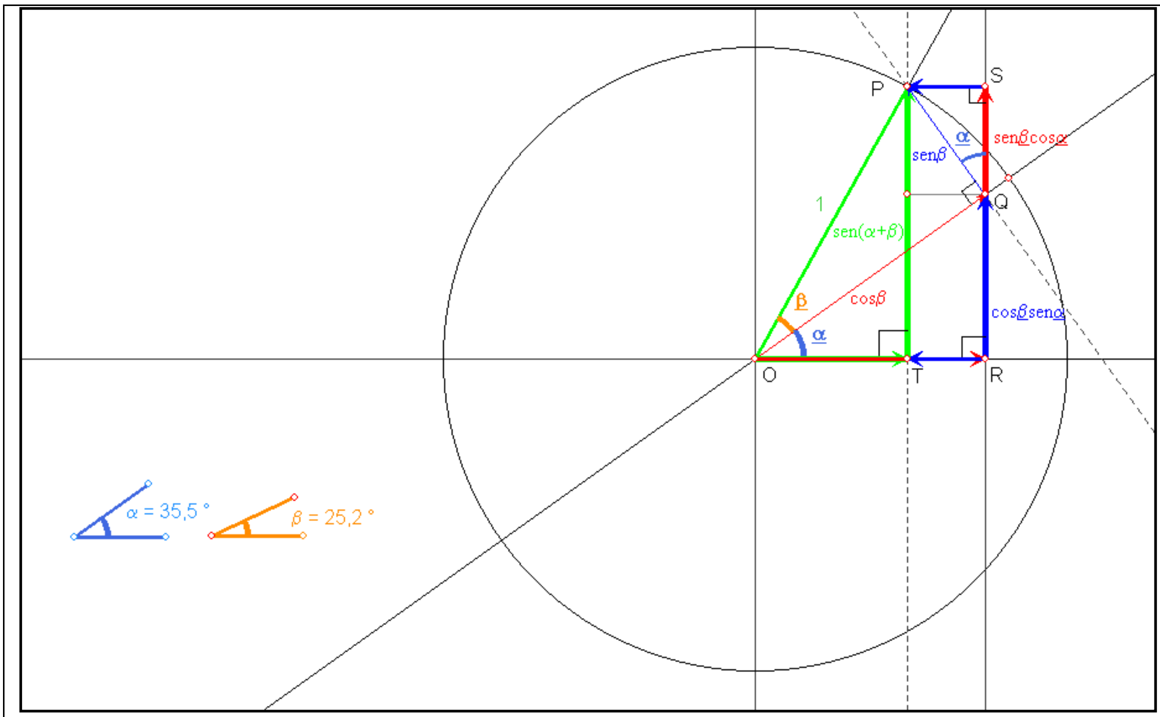


Fig. 1: Representación inicial de la fórmula del seno y del coseno de la suma de dos ángulos

Actividad 5.3

5.3.1 ***Explorando y analizando***

¿Qué relación existe entre el vector *TP* (vertical verde claro), y los vectores *RQ* (vertical azul) y *QS* (vertical rojo), representantes de los lados trigonométricos seno y coseno de los triángulos *ORQ* y *QSP*? **Explica tu respuesta.**

5.3.2 ***Explorando y analizando***

¿Qué relación existe entre los triángulos *ORQ* y *QSP*? **Explica tu respuesta.**

5.3.3 ***Conjeturando***

¿A qué es igual *sen*(α + β)? Escribe una conjetura de lo encontrado en tu hoja de trabajo. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

5.3.4 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 5.3.4.

5.3.5 ***Explorando y analizando***

¿La formula encontrada en 5.3.3 se cumple para cualesquier ángulo $\underline{\alpha}$ y $\underline{\beta}$? ¿Qué ocurre cuando uno de los ángulos $\underline{\alpha}$ o $\underline{\beta}$ es mayor de 90º? **Explica tu respuesta.**

Actividad 5.4

5.4.1 ***Discutiendo y comunicando***

Discute con tus compañeros y el profesor los conceptos, las conjeturas y demostraciones de las actividades 5.1 a 5.3.

Actividad 5.5

5.5.1 ***Conjeturando y demostrando***

¿A qué es igual $sen(2\alpha)$? **Escribe una conjetura y demuéstrala.**

5.5.2 ***Conjeturando y demostrando***

¿A qué es igual $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$? **Escribe una conjetura y demuéstrala.**

5.5.3 ¿Conocer $sen(\alpha)$ y $sen(\beta)$ es suficiente para hallar $sen(\alpha + \beta)$? **Explica tu respuesta.**

5.5.4 ***Conjeturando***

¿A qué es igual $cos(\alpha + \beta)$? Escribe una conjetura de lo encontrado en tu hoja de trabajo. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

5.5.5 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 5.5.4.

5.5.6 ***Conjeturando y demostrando***

¿A qué es igual $cos(2\alpha)$? **Escribe una conjetura y demuéstrala.**

Actividad 5.6

5.6.1 ***Integrando***

Realiza un mapa conceptual, en donde relaciones todas las definiciones, características y propiedades encontradas en la actividad 5 de tal manera que tus compañeros entiendan a través de él todo lo que has aprendido.

Actividad 5.7

5.7.1 ***Discutiendo y comunicando***

Discute con tus compañeros y el profesor los conceptos, las conjeturas y demostraciones de las actividades 5.5 a 5.6.

ANEXO 7.

Actividad 6. Seno y coseno de la diferencia de dos ángulos

6. SENO Y COSENO DE LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

Actividad 6.1

6.1.1 ¿A qué es igual $sen(\alpha-\beta)$? **EXPLICA TU RESPUESTA**.

6.1.2 ¿A qué es igual $cos(\alpha-\beta)$? **EXPLICA TU RESPUESTA**.

Actividad 6.2

6.2.1 ***Explorando y analizando***

Abre el archivo de Cabri ACT.6.2. Observa, analiza y relaciona todos los elementos de la construcción (ángulos, lados de los ángulos, triángulos, vectores representantes de los lados seno y coseno, rectas auxiliares, segmentos etc.). Ten en cuenta las siguientes indicaciones y la figura 1:

- α es un ángulo que está en posición normal con respecto al eje x e y del plano.
- β es un ángulo que no está en posición normal con respecto al eje x e y del plano, aunque se puede considerar en posición normal con respecto al lado final del ángulo α.
- Para efectos de la "demostración dinámica" vamos a suponer que el radio de la circunferencia es uno (1) y lo indicamos con el segmento verde claro.
- Los ángulos α y $\underline{\alpha}$, β y $\underline{\beta}$ se relacionan por el ángulo de referencia en cada cuadrante, en algunos casos $\alpha = \underline{\alpha}$ y $\beta = \underline{\beta}$ (esto debes tenerlos muy en cuenta para determinar el signo de las razones seno y coseno en cada cuadrante y para entender la dirección del vector representante de los lados trigonométricos seno y coseno).
- El lado $sen(\alpha-\beta)$ está representado por el vector verde claro **TP**.
- El lado $cos(\alpha-\beta)$ está representado por el vector verde claro **OT**.

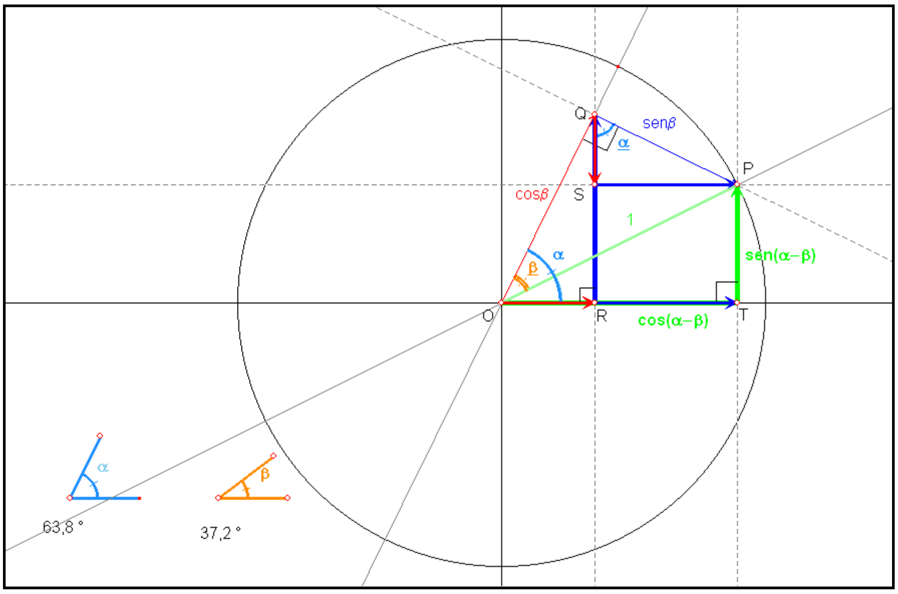


Fig. 1: Representación inicial de la fórmula del seno y coseno de la diferencia de dos ángulos

Actividad 6.3

6.3.1 ***Conjeturando***

¿A qué es igual *sen*$(\alpha - \beta)$? Escribe una conjetura de lo encontrado en tu hoja de trabajo. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

6.3.2 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 6.3.1.

6.3.3 ***Conjeturando***

¿A qué es igual *cos*$(\alpha - \beta)$? Escribe una conjetura de lo encontrado en tu hoja de trabajo. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

6.3.4 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 6.3.3.

6.3.5 ***Explorando y analizando***

¿Las formulas encontradas en 6.3.1 y 6.3.3 se cumplen para cualesquier ángulo $\underline{\alpha}$ y $\underline{\beta}$? ¿Qué ocurre cuando uno de los ángulos $\underline{\alpha}$ o $\underline{\beta}$ es mayor de 90º? **Explica tu respuesta.**

Actividad 6.4

6.4.1 ***Integrando***

Realiza un mapa conceptual, en donde relaciones todas las definiciones, características y propiedades encontradas en la actividad 6 de tal manera que tus compañeros entiendan a través de él todo lo que has aprendido.

Actividad 6.5

6.5.1 ***Discutiendo y comunicando***

Discute con tus compañeros y el profesor los conceptos, las conjeturas y demostraciones de las actividades 6.1 a 6.4.

ANEXO 8.

Otros ejemplos de análisis de la unidad cognitiva

Actividad 1.4.2, 1.4.3 – G1A

1.4.2 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre la medida de los ángulos *A* y *B*? Expresa *B* en términos de *A*.

1.4.3 ***Demostrando***

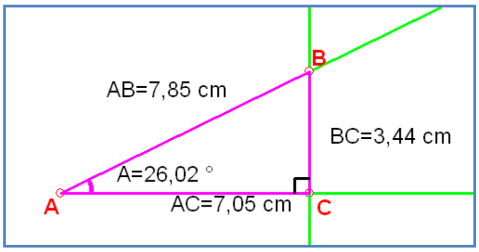
Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 1.4.2

PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

[1] G1: *Cuando el ángulo A va disminuyendo el ángulo B va aumentando, y lo mismo va a pasar con todas.*

[2] Diana: *Entonces, que A y B tienen relaciones inversamente proporcionales, que cuando uno aumenta, el otro disminuye, hay, pongamos esto.*

D_1: Valores numéricos de *A* visualizados en Cabri



E_1: Cuando un ángulo aumenta, el otro disminuye y viceversa (Los ángulos *A* y *B* tienen relaciones inversamente proporcionales) [2].

R_1: Se ve que cuando uno aumenta el otro disminuye.

Marco perceptivo-numérico

[3] G1. *O sea ¿Por qué? Tenemos que demostrar, el por qué.*

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

Aunque el grupo no planteó que los ángulos *A* y *B* son complementarios, proponen una conjetura verdadera, pero la enuncian de manera errónea, diciendo que la relación es de proporcionalidad inversa.

Los datos numéricos visualizados en Cabri, llevan al grupo a encontrar la relación planteada por ellos.

El indicador de fuerza es débil, debido a que el único argumento está dado por los valores numéricos visualizados en Cabri.

El operador R_1 es una consecuencia de los valores visualizados en Cabri durante el arrastre.

El sistema de representación es el archivo de Cabri (figura dinámica con valores numéricos), caracterizado por las sucesivas visualizaciones de la figura en la pantalla del ordenador.

El control lo ejerce el arrastre en Cabri para visualizar los datos numéricos que garanticen la conjetura planteada.

La forma de argumentación es constructiva porque los datos visualizados en Cabri, contribuyen a la construcción de la conjetura.

La estructura de la conjetura es la de una argumentación inductiva por generalización de los enunciados (datos numéricos de Cabri).

El marco de la concepción es perceptivo numérico.

PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

[4] Diana: *O sea, que cuando BC está en cero, el ángulo…, está en 89…, o sea, mire B está en 89,8…*

[5] Mapa: *No…, el ángulo A va aumentando, tiene que ver con el ángulo B que va a disminuir.*

[6] Diana: *El ángulo A sí está en cero.*

[7] Mapa: *No, con relación a éste* [señala el ángulo *A*], *éste está aumentando y este está* disminuyendo [señala los ángulos *A* y *B*], *eso es todo*.

[8] Diana: *Pero, eso no es lo que yo veo…, a medida que el lado BC aumenta, oiga, ¿eso, no* nos *debería dar noventa?*

[9] Mapa: *¿Qué?*

[10] Diana: *O sea, cuando BC está en cero, B debería ser noventa, bueno igual, hay como un error ahí de cálculo, entonces, cuando BC aumenta, el ángulo A aumenta y el ángulo B disminuye.*

[11] Diana: *Cuando AC es constante, entonces el ángulo A tiene que estar ligado a esta lado y cuando A supere el valor, o sea BC, hace que el valor de A aumente, entonces A va a superar a B, ¿si me entiende?*

[12] Diana: *Acá como tienen la misma longitud, entonces son iguales, AC, por eso, son iguales.*

[13] Diana: *Entonces ya, luego, este lado es mayor, y ya, el ángulo A va aumentando y cuando…*

[14] Mapa: *Este también* [refiriéndose al ángulo *B*]

[15] Diana: *No, mire, o sea cuando BC era menor que AC, el… ángulo B es mayor que A*.

[16] Mapa: *El ángulo B es igual al ángulo A* [se refiere al caso donde AC = BC]… *Oiga, ¿esa no era la conjetura?*

[17] Diana: *Yo no sé si será conjetura, o demostración, no, pero es como una demostración. ¡Jorge!*

[18] G1: *Mira, la relación que existe, es como…que cuando BC es menor, como AC es constante, entonces, cuando BC es menor que AC, entonces, el ángulo B va a ser mayor que A.*

[19] G1: *Y cuando están iguales son…, he, esto…, mira, entonces…, los ángulos son iguales.*

[20] G1: *Y cuando BC supera el valor de AC, porque es constante, entonces, el ángulo A se vuelve mayor que el ángulo B, y empieza a disminuir.*

[21] [El grupo escribe en la hoja de trabajo]: "*La relación entre los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ y los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ está en que cuando el lado $\overline{BC}$ es menor que la constante $\overline{AC}$ el $\angle B$ es mayor que el $\angle A$. sin embargo cuando el valor de $\overline{BC}$ es mayor que el de la constante, el ángulo $\angle A$ supera el valor del $\angle B$*".

D_1
D_2: Si $BC = 0 \Rightarrow \angle A = 0º$ y $\angle B = 89{,}8…$ [4]
D_3: AC constante, BC variable [11]

E_1: Cuando un ángulo aumenta, el otro disminuye y viceversa (Los ángulos A y B tienen relaciones inversamente proporcionales) [2]

R_1: [7], [8]
R_2: Si BC aumenta $\Rightarrow \angle A$ aumenta y $\angle B$ disminuye. [10]
R_3: Si $BC > AC \Rightarrow \angle A > \angle B$ [11], [20]
R_4: Si $BC = AC \Rightarrow \angle A = \angle B$ [12], [19]
R_5: Si $BC < AC \Rightarrow \angle B > \angle A$ [15], [18]

Marco perceptivo-numérico

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

El grupo utiliza argumentos matemáticos observados en los datos numéricos de los lados *AC* y *BC* del triángulo rectángulo *ABC* del archivo de Cabri. Expresan lo que ven, utilizando algunos términos geométricos, pero no sienten que hayan demostrado la conjetura; se preguntan si lo que están diciendo es la relación entre los ángulos *A* y *B* o la demostración del enunciado E_1, es decir el indicador de fuerza es débil.

Los operadores R_2 a R_5 que escribimos en forma de implicación, siguen siendo resultado de los datos numéricos observados en Cabri. Por otro lado, los estudiantes no justifican por qué estos operadores son verdaderos, ni por qué justifican la conjetura planteada.

Hay un cambio del sistema de representación de la figura dinámica de Cabri al lenguaje natural para enunciar y escribir datos y propiedades observadas, producto del arrastre en Cabri. Al escribir la demostración en la hoja de trabajo utilizan símbolos geométricos.

La estructura de control es el arrastre en Cabri (Σ_1) para comprobar numéricamente (Σ_2) las relaciones entre los ángulos *A* y *B* y las propiedades descubiertas por el propio arrastre.

El marco sigue siendo perceptivo numérico.

La estructura de la demostración es inductiva, y el tipo de demostración Empírico Ingenuo, al basar sus argumentos en la generalización de los datos observados en Cabri.

ANÁLISIS DE LA UNIDAD COGNITIVA

Esquema global de la argumentación	Esquema global de la demostración
$\boxed{D_1n} \longrightarrow \boxed{E_1n}$ $\boxed{R_1p}$ n: numérico; p: perceptivo	$\boxed{D_1n,\ D_2n,\ D_3an} \longrightarrow \boxed{E_1n}$ $\boxed{R_1p,\ R_2n,\ R_3n,\ R_4n,\ R_5n}$ n: numérico; p: perceptivo

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

ARGUMENTACIÓN			DEMOSTRACIÓN		
E_1: Cuando un ángulo aumenta, el otro disminuye y viceversa (Los ángulos *A* y *B* tienen relaciones inversamente proporcionales)			**E_1**: Cuando un ángulo aumenta, el otro disminuye y viceversa (Los ángulos A y B tienen relaciones inversamente proporcionales)		
CONCEPCIÓN			CONCEPCIÓN		
OPERADORES	**SIST. DE REPR.**	**E. DE CONTROL**	**OPERADORES**	**SIST. DE REPR**	**E. DE CONTROL**
R_1: Generalización de los datos observados en Cabri.	**L_1**: Figura dinámica de Cabri. ↔ **L_2**: Lenguaje natural ↔ **L_3**: Uso de datos numéricos.	**Σ_1**: Arrastre en Cabri.	**R_1**: Generalización de los datos observados en Cabri. **R_2**: Si BC aumenta $\Rightarrow \angle A$ aumenta y $\angle B$ disminuye. **R_3**: Si $BC > AC \Rightarrow \angle A > \angle B$. **$R_4$**: Si $BC = AC \Rightarrow \angle A = \angle B$. **$R_5$**: Si $BC < AC \Rightarrow \angle B > \angle A$.	**L_1**: Figura dinámica de Cabri. ↔ **L_2**: Lenguaje natural ↔ **L_3**: Uso de datos numéricos.	**Σ_1**: Arrastre en Cabri. **Σ_2**: Control numérico.
Marco Perceptivo - Numérico			Marco Perceptivo - Numérico		

CONTINUIDAD EN EL SISTEMA DE REFERENCIA

Análisis de la continuidad estructural

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva: Los datos ayudan a construir la conjetura	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Argumentación Inductiva (Generalización de los datos)	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Demostración Inductiva (Generalización sobre los datos)
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN EII (Generalización de los datos observados en Cabri)
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

La transcripción, los comentarios y la tabla muestran la unidad cognitiva, caracterizada por la continuidad referencial y estructural. Esta continuidad no permite la construcción de una demostración deductiva.

Durante el proceso de construcción de la demostración, el grupo va encontrando de manera perceptiva-numérica propiedades que supuestamente les ayudan a justificar la relación: relacionan los valores de los ángulos con los valores de los lados, plantean propiedades que no justifican matemáticamente, se dedican a ver y expresar propiedades válidas, pero no justifican por qué mientras que un ángulo aumenta el otro disminuye.

Un aspecto importante que se deriva de la trascripción es la toma de conciencia, por parte de los estudiantes, de la necesidad de justificar todas las propiedades encontradas y planteadas, desde el mismo proceso de argumentación [3], y también la confusión que los estudiantes tienen respecto al proceso de argumentación y de demostrar, en donde no distinguen un proceso del otro [16], [17].

Este ejemplo plantea un aporte importante en lo siguiente: Cuando el estudiante no tiene plena claridad sobre lo que tiene que demostrar, lo que realiza en los dos procesos es una búsqueda y planteamiento de propiedades, producto de la exploración, que utiliza como un listado de verdades matemáticas válidas percibidas en el diagrama, pero que no conducen al planteamiento de una conjetura, ni de una demostración relevantes para el problema planteado.

Actividad 2.5.5, 2.5.6 – G1A

2.6.1 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre *tan(A)* y *tan(-A)*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.6.2 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.5.5.

PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

[1] G1: *¿Qué relación existe entre tangente de A y tangente de menos A? ¿No es lo mismo? tangente es…, tangente de…, mire, da como 122…, también es lo mismo…, tangente es opuesto sobre hipotenusa.*

[2] Mapa: *Sobre adyacente.*

[3] Diana: *Pero es lo mismo.*

D₂: Valores numéricos observados en Cabri. [1]
D₁: $|senA| = |sen(-A)|$, $|cosA| = |cos(-A)|$
Act. 2.5.1 a 2.54.

E₁: $|\tan(A)| = |tan(-A)|$ [1], [3]

R₁: Generalización de los procesos de las actividades 2.5.1 a 2.5.4
Si $|senA| = |sen(-A)|$ y $|cosA| = |cos(-A)| \Rightarrow |tanA| = |tan(-A)|$

[4] Mapa: *Mire, espere…, vea, aquí, x es negativo y y es positivo, o sea sería, opuesto positivo* [se refiere al segundo cuadrante del plano cartesiano].

[5] Diana: *Menos x sobre y, menos x.*

[6] Mapa: *y sobre menos x* [se refiere al segundo cuadrante].

[7] Diana: *Eso, y sobre menos x.*

[8] Mapa: *Aquí sería* [se refiere al tercer cuadrante].

[9] Diana: *Al revés, menos y sobre menos x, menos y sobre menos x.*

[10] Mapa: *¿Cómo sería acá?* [se refiere el cuarto cuadrante]*..., aquí sería menos y sobre x, y aquí sería…*

[11] Diana: *menos y sobre x.*

[12] Mapa: *Hagamos cuadrantes* [dibuja un plano cartesiano al lado derecho de la hoja de trabajo (Fig. 1)], miremos de a un solo cuadrante.

[13] Mapa: *Para este cuadrante sería y sobre x, y sobre x* [escriben $\frac{y}{x}$ en el primer cuadrante del plano cartesiano de la hoja (Fig. 1)], *para este cuadrante…*

[14] Diana: *Ponga el opuesto, no, o sea, ponga como sería el opuesto de…*

[15] Mapa: *No, pero espere, primero, espere. En este, sería, menos y sobre x* [escribe $\frac{-\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$ en el cuarto cuadrante (Fig. 1)] *¿sí? Acá, sería…*

[16] Diana: *Sería y sobre…, menos y sobre x también* [tal vez se refieren nuevamente al cuarto cuadrante]

[17] Mapa: *¿Acá?*

[18] Diana*: y sobre menos x* [Mapa escribe $\frac{\mathrm{y}}{-\mathrm{x}}$ en el segundo cuadrante (Fig. 1)]

[19] Mapa*: ¿Seguro que eso es así?*

[20] Diana: *No, acá ya el otro es negativo.*

[21] Mapa: *Tenemos que, ¿cuál es el opuesto? O sea, este resultado va a dar opuesto a este* [se refieren a los valores de tangente en un cuadrante y su respectivo simétrico con respecto al eje x], *y este resultado va a dar opuesto a este.*

[22] Diana: *Yo no entiendo…*

[23] Mapa: *Vea…, éste va a dar positivo, el resultado* [se refiere al signo de la razón], *éste va a dar negativo, éste va a dar positivo y éste va a dar negativo* [se refiere a la razón tangente de un ángulo y de su opuesto]. *Entonces, este va a ser opuesto a este, este va a ser opuesto a este* [se refiere a la razón tangente de un ángulo y de su opuesto]…

[24] […] Diana: *Es la misma relación, es lo mismo, el valor absoluto de… ¿tangente?, de tangente de A, es igual al valor absoluto de menos A* [mientras van verbalizando, van escribiendo en la hoja de trabajo: tiene el mismo valor absoluto. Es decir $|\tan(\mathrm{A})| = |\tan(-\mathrm{A})|$].

D3: $\tan(A) = \frac{y}{-x}$ en el segundo cuadrante [7], [18]
D4: $\tan(A) = \frac{-y}{-x}$ en el tercer cuadrante, [8], [9]
D5: $\tan(A) = \frac{-y}{x}$ en el cuarto cuadrante, [10], [15]
D6: $\tan(A) = \frac{y}{x}$ en el primer cuadrante, [13]

E1: $|\tan(A)| = |tan(-A)|$ [24]

R2: [12], [13], [15], [18]

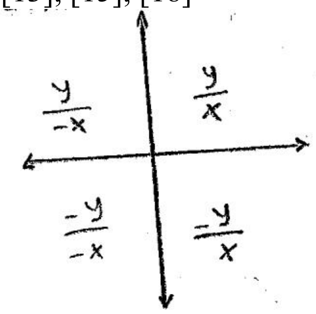


Figura 1: Plano cartesiano en la hoja de trabajo

R3: Los valores de la tangente de un ángulo y de su inverso son opuestos. [21], [23]

Trigonometría en el plano cartesiano

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

Los estudiantes sospechan desde un principio que la relación es $|\tan(A)| = |\tan(-A)|$. Inician un proceso de exploración en el archivo de Cabri que los conduce al descubrimiento de propiedades matemáticas que usan como argumentos en el planteamiento del enunciado. Es decir, la forma de argumentación es constructiva, dado que los datos y argumentos ayudan al planteamiento de la conjetura, como se puede deducir de la transcripción y el esquema.

Aunque el grupo no plantea la relación existente entre la razón tangente de un ángulo y su inverso, sino la relación entre sus valores absolutos, el proceso de exploración y de análisis, les sirve para encontrar operadores teóricos basados en la definición de tangente en el plano cartesiano y escritos en una combinación del dibujo y el uso de expresiones algebraicas (Fig. 1). En lo escrito en la hoja de trabajo usan una combinación del lenguaje natural y algebraico para enunciar la conjetura (Tiene igual valor absoluto, es decir $|\tan(A)| = |\tan(-A)|$).

En este proceso, también se evidencia una relación bidireccional entre el control de arrastre en Cabri, el dibujo en la hoja de trabajo, y el control teórico. Podemos decir que los estudiantes ya están usando como marco de sus concepciones la trigonometría en el plano cartesiano de manera abstracta.

El primer esquema planteado corresponde a una argumentación inductiva por analogía y la estructura de la argumentación a una generalización del proceso, pero en el segundo esquema vemos una argumentación deductiva, basada en la definición de tangente en el plano cartesiano y el análisis de los signos en los cuatro cuadrantes, acompañado de una representación geométrica – algebraica. Es de destacar estas conexiones que logran establecer entre los diferentes controles y sistemas de representación (diagramas de Cabri, geométrico, algebraico y analítico)

PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

[25] G1: [El grupo va verbalizando y escribiendo en la hoja de trabajo lo siguiente]:

Si $\tan(A) = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan(-A) = \frac{-y}{x}$,

Si $\tan(A) = \frac{-y}{x} \Rightarrow \tan(-A) = \frac{y}{x}$

Si $\tan(A) = \frac{y}{-x} \Rightarrow \tan(-A) = \frac{-y}{-x}$

Si $\tan(A) = \frac{-y}{-x} \Rightarrow \tan(-A) = \frac{y}{-x}$

$D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ → **E_1**: $|\tan(A)| = |tan(-A)|$ [24]

R_4: Si $\tan(A) = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan(-A) = \frac{-y}{x}$ [25]
R_5: Si $\tan(A) = \frac{-y}{x} \Rightarrow \tan(-A) = \frac{y}{x}$ [25]
R_6: Si $\tan(A) = \frac{y}{-x} \Rightarrow \tan(-A) = \frac{-y}{-x}$ [25]
R_7: Si $\tan(A) = \frac{-y}{-x} \Rightarrow \tan(-A) = \frac{y}{-x}$ [25]

Trigonometría en el plano cartesiano

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

Los estudiantes, basados en lo realizado en la fase de planteamiento de la conjetura, realizan una demostración deductiva formal correcta, que se caracteriza por el uso de los operadores teóricos R_4 a R_7, que corresponden a propiedades matemáticas válidas para justificar la relación planteada por ellos, es decir, estos se pueden interpretar como teoremas que validan los permisos de inferir.

La estructura de control es teórica, respaldada por lo visualizado en el dibujo realizado en la hoja de trabajo.

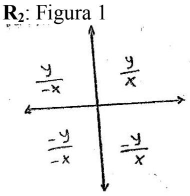
El marco de la concepción es el de la trigonometría del plano cartesiano.

El sistema de representación es el lenguaje algebraico.

ANÁLISIS DE LA UNIDAD COGNITIVA

Esquema global de la argumentación	Esquema global de la demostración
D_1proc, D_2n → E_1pm R_1gproc D_3pm, D_4pm, D_5pm, D_6pm, → E_1pm R_2an, R_3teo teo: teorema	D_1proc, D_2n, D_3pm, D_4pm, D_5pm, D_6pm → E_1pm R_4teo, R_5teo, R_6teo, R_7teo teo: teorema

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

ARGUMENTACIÓN $\mathbf{E_1}$: $\lvert\tan(A)\rvert = \lvert tan(-A)\rvert$			DEMOSTRACIÓN $\mathbf{E_1}$: $\lvert\tan(A)\rvert = \lvert tan(-A)\rvert$		
CONCEPCIÓN			CONCEPCIÓN		
OPERADORES	**SIST. DE REPR.**	**E. DE CONTROL**	**OPERADORES**	**SIST. DE REPR**	**E. DE CONTROL**
$\mathbf{R_1}$: Si $\lvert sen(A)\rvert = \lvert sen(-A)\rvert$ y $\lvert\cos(A)\rvert = \lvert cos(-A)\rvert \Rightarrow \lvert\tan(A)\rvert = \lvert tan(-A)\rvert$ $\mathbf{R_2}$: Figura 1  $\mathbf{R_3}$: Los valores de la tangente de un ángulo y de su inverso son opuestos.	$\mathbf{L_1}$: Lenguaje natural $\leftrightarrow$ $\mathbf{L_2}$: Dibujo. $\leftrightarrow$ $\mathbf{L_3}$: Uso de expresiones algebraicas.	$\mathbf{\Sigma_1}$: Arrastre en Cabri $\leftrightarrow$ $\mathbf{\Sigma_2}$: Dibujo $\leftrightarrow$ $\mathbf{\Sigma_3}$: Teórico.	$\mathbf{R_4}$: Si $\tan(A) = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan(-A)$ $\mathbf{R_5}$: Si $\tan(A) = \frac{-y}{x} \Rightarrow \tan(-A) = \frac{y}{x}$ $\mathbf{R_6}$: Si $\tan(A) = \frac{y}{-x} \Rightarrow \tan(-A) = \frac{-y}{-x}$ $\mathbf{R_7}$: Si $\tan(A) = \frac{-y}{-x} \Rightarrow \tan(-A) = \frac{y}{-x}$	$\mathbf{L_2}$: Dibujo. $\leftrightarrow$ $\mathbf{L_3}$: Uso de expresiones algebraicas.	$\mathbf{\Sigma_2}$: Dibujo $\leftrightarrow$ $\mathbf{\Sigma_3}$: Teórico.
Marco: Trigonometría en el plano cartesiano			Marco: Trigonometría en el plano cartesiano		

CONTINUIDAD EN EL SISTEMA DE REFERENCIA

Análisis de la continuidad estructural

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Deductiva.	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Deductiva.
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN **DFE**: La demostración está basada en una secuencia lógica derivada de los datos del problema.
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Se observa fácilmente la unidad cognitiva, caracterizada por la continuidad referencial y estructural, que conlleva a la construcción de una demostración deductiva. Se destaca el uso de la exploración en Cabri para la deducción y verificación de propiedades matemáticas; las conexiones que logran establecer entre los sistemas de representación, controles y operadores geométricos y algebraicos; y el uso de la definición de razón trigonométrica en el plano cartesiano. Los operadores usados en la construcción de la demostración, son complemento de los usados en el proceso de planteamiento de la conjetura, es decir, los argumentos usados en el proceso de argumentación, son tomados y complementados en el proceso de demostración.

Los estudiantes a través de la exploración y la discusión, se dan cuenta de sus errores ([1], [2]; [5], [6]) y de sus dudas, los corrigen y pueden construir una demostración deductiva. También es de resaltar la capacidad de establecer relaciones entre el marco geométrico y analítico.

El primer esquema de la conjetura muestra una argumentación inductiva, pero al tratarse de una generalización de un proceso, es fácil el cambio a una argumentación deductiva como se deduce del segundo esquema. Este episodio muestra que cuando la conjetura es producto de un proceso de exploración que conlleva al planteamiento de argumentos deductivos es más fácil que la demostración sea deductiva. Si la estructura de control en la fase de conjetura tiene elementos teóricos, éstos son usados o transformados con mayor facilidad en la fase de demostración.

Actividades 2.5.1, 2.5.2 – G2A

2.5.1 ***Conjeturando***

¿Qué relación existe entre *sen(A)* y *sen(-A)*? Escribe una conjetura de lo encontrado en tu hoja de trabajo. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.5.2 ***Demostrando***

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada en 2.5.1

PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

[1] G2: [Antes de empezar el diálogo con el investigador, el grupo había explorado y encontrado las siguientes relaciones que escribieron en la hoja de trabajo]:

a. *"La abertura de los 2 ángulos es la misma, pero el lado final está en diferentes cuadrantes.*

b. *El lado inicial de los dos ángulos está sobre el eje positivo de la x, pero como uno va en contra de las manecillas del reloj (es positivo) y el otro va con las manecillas del reloj (es negativo).*

c. *El seno en cada ángulo tiene diferente signo.*

d. *Si el ∡A está ubicado en el primer cuadrante, el ∡–A estará ubicado en el cuarto cuadrante.*

e. *Si el ∡A está ubicado en el segundo cuadrante, el ∡–A estará ubicado en el tercer cuadrante".*

[2] Mabe: *¿Por qué estamos hablando de los dos ángulos?*

[3] Cata: *Por lo que yo te decía, que sea menos A, significa que sea negativo.*

[4] Mabe: *No, no, si, pero, si tú dices que..., bueno, si*

[5] Cata: *O sea, que el seno de cualquiera de los dos ángulos...*

[6] Mabe: *Digamos si pones un ángulo, que sea..., como*

[7] Cata: *Es decir, si tu pones un ángulo aquí* [señala con el lápiz en el computador sobre el archivo un ángulo aproximado de –30], *menos treinta, te va a dar positivo el seno*.

[8] Mabe: *No, no, no, lo que te estoy diciendo es que si pones un ángulo, que sea como, menos...como menos doscientos, ¿cuánto te da?*

[9] Inv.: *A es menos doscientos, entonces ¿Cuánto sería A?*

[10] Cata: *Positivo, no mentiras*

[11] Mabe: *Por lo que está en este cuadrante, en el segundo* [señala con el lápiz en el computador girándolo en sentido de las manecillas del reloj (Fig. 2)], *está aquí* [señala con el lápiz en el computador]

[12] Inv.: *O sea, ahí en ese caso A es negativo ¿y el seno de A?*

[13] Cata: [Calcula $\text{sen}(-200)$ en la calculadora de Cabri] *Es positivo.*

[14] Mabe: *¿Positivo?*

[15] Cata: *Si, claro, da menos doscientos en el ángulo y el seno es positivo.*

[16] Mabe: *¿Positivo? ¿Cómo así, menos doscientos es A o menos doscientos es menos A?*

[17] Cata: *Menos A.*

[18] Inv.: *¿Menos A o A?*

[19] Cata: *¿Menos A?*

[20] Inv.: *¿No puede ser A?*

[21] Cata: *Si puede ser A, da lo mismo ¿no? O sea da…*

[22] Mabe: *Igual, pero siempre va a ser lo mismo, pero con diferentes signos porque queda en diferentes cuadrantes, ¿da menos A positivo en el primero y en el segundo cuadrante?*

[23] Inv.: *¿Qué relación encontraron?*

[24] Cata: *Espérate, escribamos lo último: "El lado final del ∡A determina la posición del lado final de ∡–A, en el cuadrante de arriba o abajo dependiendo donde se encuentre. El seno de los ∡A y ∡–A depende del cuadrante donde se ubique el lado final".*

[25] Inv.: *¿Cómo?*

[26] Mabe: *Que el seno de A y el seno de menos A es positivo cuando el lado final está en el primero o en el segundo cuadrante.*

D$_1$: La abertura de los 2 ángulos es la misma, pero el lado final está en diferentes cuadrantes. [1a]
D$_2$: El lado inicial de los dos ángulos está sobre el eje positivo de la *x*, pero cambia el signo de acuerdo a las manecillas del reloj. [1b]
D$_3$: El seno en cada ángulo tiene diferente signo [1c]
D$_4$: Si *A* está en el cuadrante I ⇒ –*A* está el cuadrante IV. [1d]
D$_5$: Si *A* está en el cuadrante II ⇒ –*A* está el cuadrante III. [1e]
D$_6$: $sen(-200) > 0$. [13], [14]

E$_1$: El lado final de *A* determina la posición del lado final de –*A* [24]

E$_2$: El seno de *A* y –*A* depende del cuadrante donde se ubique el lado final [24]

E$_3$: Si el lado final de *A* o –*A* está en el cuadrante I o II ⇒ $sen(A)$ y $sen(-A)$ son positivos [26]

R$_1$: Archivo 2.2.1

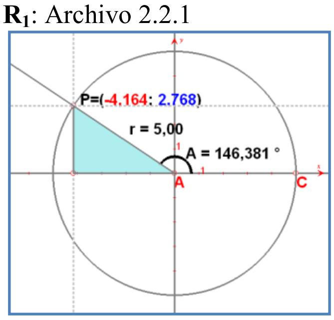


Figura 2: Archivo 2.2.1

Marco perceptivo – numérico

R$_2$: $A = -200° < 0$ queda en el cuadrante II y $sen(-200) > 0$ [28]
R$_3$: seno en el cuadrante I y II es positivo [30]

Marco numérico

[27] Inv.: *¿El seno de A y el seno de menos A son positivos?*

[28] Mabe: *Pues, quiero decir, o sea que en el momento en que el ángulo menos A, por ejemplo, menos A, supongamos que sea menos doscientos* [señala con el lápiz en el computador un ángulo aproximado de –200º], *entonces sería, o sea el lado final está en el segundo cuadrante, o sea que va a ser positivo, ¿si?, o sea que el momento en que el lado final del ángulo A o menos A quede en el segundo o en el primer cuadrante es positivo y…*

[29] Inv.: *Ah, sí, sí, cualquiera de los dos.*

[30] Cata: *Cualquiera de los dos, desde que sea el segundo o el primer cuadrante*.

[31] G2: [Con la ayuda del investigador construyen un archivo en donde se pueden ver los ángulos y las coordenadas de *A* y *–A* (Fig. 3)].

[32] Inv.: *Muevan A y analicen qué relación hay entre los dos, no que uno es positivo y el otro es negativo, sino en cualquier cuadrante qué relación hay entre los dos*.

[33] G2: [Mueven el ángulo *A* en ambos sentidos, pero solamente en los cuadrantes III y IV]

[34] Mabe: *Que es el mismo punto*.

[35] Inv.: *¿Es el mismo punto?*

[36] Mabe: *Entre el valor absoluto*.

[37] Inv.: *Es el mismo valor absoluto, ¿pero en qué se diferencian?*

[38] Cata: *No sé* [sigue moviendo el ángulo *A* solamente en el III y IV cuadrante], *en los signos.*

[39] Inv.: *¿En los signos de qué?*

[40] Cata: *No entiendo*.

[41] Inv.: *¿En qué se diferencian el seno de A y el seno de menos A?*

[42] Cata: *Que uno es positivo y el otro es negativo siempre*.

[43] Inv.: *¿Que uno es positivo y el otro es negativo? ¿siempre uno es negativo y el otro positivo?*

[44] G2: *Siempre*.

[45] Inv.: *¿Siempre seno de A es positivo y seno de menos A es negativo?*

[46] G2: *Si…, no, también puede ser al revés*.

[47] Cata: *No es que uno sea positivo y el otro negativo, no importa si es A o menos A*.

[48] Inv.: *O sea hay una relación, ¿cómo se llama esa relación?*

[49] Mabe: *Inversos*.

[50] Inv.: *Inversos aditivos, ¿cómo podemos expresar seno de A relacionado con seno de menos A?, ¿si tú tienes el valor del seno de A, cómo hallas el valor de seno de menos A?*

[51] Cata: *Se le cambia el signo*.

[52] Inv.: *Se le cambia el signo, o sea se multiplica por menos uno, ¿la relación como quedaría?*

[53] Mabe: *¿Uno puede escribir que seno de A es igual a menos seno de menos A?*

F: Débil

D₇:

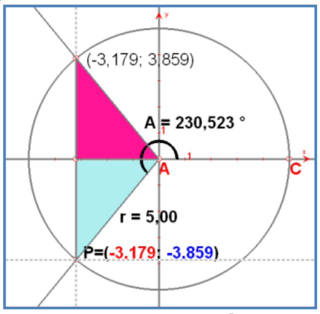


Figura 3: Visualización *A* y –*A*

E₄: $sen(A) = -sen(-A)$ [53]

R₄: El valor absoluto de las abscisas y de las ordenadas de *A* y –*A* son iguales [34] - [36]
R₅: $sen(A)$ y $sen(-A)$ son inversos aditivos [49]

Marco perceptivo numérico

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

A través de la exploración, el grupo encuentra una serie de datos y relaciones en la construcción geométrica que les sirve para darse cuenta que el ángulo –*A* depende del ángulo *A* (E_1), posteriormente se dan cuenta que el seno de *A* o –*A*, depende del cuadrante en donde se ubiquen los lados finales, y de allí concluyen que el seno de *A* o –*A* es positivo en el cuadrante I y II (E_3). Estos enunciados no plantean ninguna relación entre la razón seno de un ángulo y su opuesto. De hecho, inicialmente el grupo supone que –*A* siempre es un ángulo negativo, y si el ángulo es negativo, el seno de ése ángulo también es negativo. En la discusión entre las estudiantes y con la intervención del investigador, se dan cuenta que –*A* también puede ser positivo y el seno de un ángulo negativo puede ser positivo.

Los operadores son perceptivos, basados en los datos numéricos y signos observados en las coordenadas de los ángulos *A* y –*A* en el diagrama dinámico y los datos obtenidos de la calculadora. Debido a la ayuda del investigador para construir una imagen dinámica de un ángulo y su opuesto, y a las continuas intervenciones, el grupo plantea la relación de inversos aditivos entre el seno de un ángulo y de su opuesto (E_4), pero la fuerza de inferencia es débil porque surge más por las preguntas e intervenciones del investigador, que del proceso que llevaban hasta el momento.

El sistema de representación se caracteriza por el reconocimiento de variantes e invariantes en el diagrama dinámico (L_1), el movimiento de la mano para representar con el lápiz, algunos ángulos (L_2), la combinación del lenguaje natural (L_3) con algunos símbolos geométricos (L_4) y el lenguaje algebraico (L_5).

El control lo ejerce el arrastre en Cabri (Σ_1) para la visualización y comprobación de relaciones numéricas y geométricas (Σ_2).

La forma de argumentación es constructiva y la estructura de la conjetura es inductiva por generalización de los enunciados.

PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

[54] Inv.: *¿Cómo demuestran eso?*

[55] Cata: *¡Todo lo que hicimos es la demostración!*

[56] Inv.: *Esa no sería la demostración, esa sería las cosas que…*

[57] Cata: *Pero como tenemos que demostrar eso, simplemente que tienen la misma abertura, o sea, es el mismo valor.*

[58] Inv.: *Pero recuerda que la idea de demostrar, es que uno lo pueda sintetizar con lo que ya se conoce, por ejemplo, con la definición de seno, usando la definición de seno, ¿qué es seno?*

[59] G2: *y sobre r.*

[60] Inv.: *y sobre r, cierto, entonces, tú tienes que demostrar que seno de A es igual a menos seno de menos A, entonces, ¿qué es seno de A?*

[61] G2: *y sobre r y la otra va a ser –y sobre r.*

[62] Inv.: *Ah.*

[63] Cata: *¿Y ya está demostrado?*

[64] Inv.: *Esa sería la demostración.*

[65] G2: [Escriben en la hoja de trabajo, debajo de $sen(A) = -sen(-A)$

$\frac{y}{r} = -\left(\frac{-y}{r}\right)$]…

[66] […] Mabe: *Cata, pero acá en esta no sería, o sea, aquí, ¿menos, menos y sobre r? porque esto es igual.*

[67] Cata: *No es igual, menos y sobre r, lo que quiere decir eso es que… que, o sea, menos, no significa que sea negativa la y, sino que es el ángulo negativo, o sea, esta puede ser, por ejemplo, menos cinco y esta puede ser cinco, ¿sí? ¿cómo te explico?*

[68] Mabe: *No, pero espera, lo que voy a decir es que seno de A es y sobre r, seno de menos A también y sobre r, pero tiene un signo negativo acá.*

[69] Cata: *Exacto.*

[70] Mabe: *Para que sea positivo acá, o sea, es que se supone que seno de A y seno de menos A son inversos, entonces por eso le pusimos este menos acá.*

[71] Cata: *¿Qué pasa?*

[72] Mabe: *¿Y no debería ponerse eso acá para que quedara y sobre r igual a y sobre r?*

[73] Cata: *No, porque es que es igual a ¡menos!, o sea es que… esta y puede ser menos, o sea, esa y puede reemplazarse por menos, la coordenada, o por más, la coordenada, igual que ésta, o sea, lo que está diciendo es que es igual al… negativo.*

[74] Mabe: *Pero si reemplazas aquí una coordenada negativa y aquí una positiva, igual esta va a ser negativa, ¿esa es la idea?, si reemplazas menos cinco en y, y menos cinco en…*

[75] Cata: *Ah, ya entendí, o sea, si por ejemplo, pones aquí menos cinco y acá cinco, las dos van a dar menos cinco, yo creo que tiene que pasar el uno con el otro, si tu pones aquí cinco…ah no mentiras…, no mentiras si, si tu pones aquí cinco y aquí menos, menos cinco, la razón va a dar positiva, ¿sí?, este es menos por menos, entonces este se convierte en cinco ¿si entiendes?, o sea, tú tienes que la coordenada y es menos cinco, o sea aquí queda menos cinco sobre r es igual a menos, menos cinco, no, perdón, a cinco sobre r ¿sí?*

[76] Mabe: *O sea, si aquí reemplazo 5, ¿aquí -5?*

F: débil

$D_1 - D_6 \Rightarrow E_1 \Rightarrow E_2 \Rightarrow E_3$
$D_7 \Rightarrow E_4$

E$_4$: $sen(A) = -sen(-A)$ [53]

R$_6$: $sen(A) = -sen(-A)$ $\quad \frac{y}{r} = -\left(\frac{-y}{r}\right)$ [65]

R$_7$: $\frac{-5}{r} = -\left(\frac{5}{r}\right)$ y $\frac{5}{r} = -\left(\frac{-5}{r}\right)$ [75], [76]

Marco algebraico

ANÁLISIS Y COMENTARIOS DEL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

El grupo supone que ya tiene la demostración con lo realizado en la fase de conjetura, lo que evidencia que los estudiantes no diferencian las dos fases y aún no son conscientes de los pasos y requisitos requeridos para la construcción de una demostración. Inicialmente recurren a los argumentos planteados en la fase de conjetura, pero con la intervención del investigador construyen una demostración algebraica, cuyo producto podría interpretarse como una demostración deductiva, pero que resulta más de la intervención del investigador que del proceso de razonamiento de los estudiantes, por lo que la consideramos una demostración de estructura inductiva. Otra prueba de que la fuerza de inferencia es débil y que la demostración es producto de un razonamiento inductivo, se basa en la discusión de las estudiantes después de haber concluido lo que consideran la demostración, en donde se evidencia la confusión con los signos y la necesidad de recurrir a ejemplos (R_7) para validar la demostración realizada.

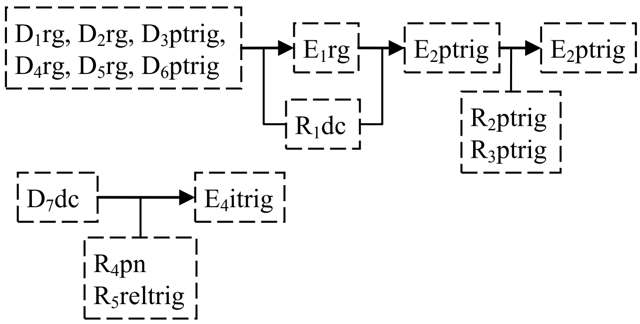
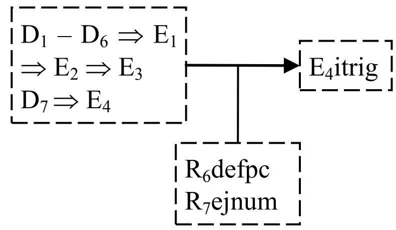
El operador R_6 es teórico, basado en la definición de seno en el plano cartesiano y las propiedades de las operaciones entre números reales.

El sistema de representación y el marco es algebraico (L_5).

El control (Σ_3) empieza siendo teórico, basado en la definición de seno, pero después se vuelve un control numérico – algebraico (Σ_4), basado en el uso de números y variables para verificar la igualdad planteada.

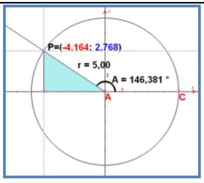
El tipo de demostración es un ejemplo genérico analítico, puesto que se trata de una generalización de las relaciones observadas en los datos numéricos de las coordenadas en Cabri, cuando el ángulo *–A* está en el cuadrante III y IV.

ANÁLISIS DE LA UNIDAD COGNITIVA

Esquema global de la argumentación	Esquema global de la demostración
 rg: relación geométrica, ptrig: propiedad trigonométrica, dc: diagrama Cabri, pn: propiedad numérica.	 dfpc: definición plano cartesiano, ejnum: ejemplo numérico.

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

ARGUMENTACIÓN **E₄**: $sen(A) = -sen(-A)$			DEMOSTRACIÓN **E₄**: $sen(A) = -sen(-A)$		
CONCEPCIÓN			CONCEPCIÓN		
OPERADORES	**SIST. DE REPR.**	**E. DE CONTROL**	**OPERADORES**	**SIST. DE REPR**	**E. DE CONTROL**
R_1: Figura 2	**L_1**: Diagrama dinámico de Cabri **L_2**: Gestos y movimientos con las manos **L_3**: Lenguaje	**Σ_1**: Arrastre en Cabri. **Σ_2**: Teórico (relaciones geométricas y numéricas).	**R_6**: $sen(A) = -sen(-A)$ $\frac{y}{r} = -\left(\frac{-y}{r}\right)$ **R_7**: $\frac{-5}{r} = -\left(\frac{5}{r}\right)$ y	**L_5**: Lenguaje algebraico	**Σ_2**: Teórico (definición de seno).

<table>
<tr><th colspan="3">ARGUMENTACIÓN
$\mathbf{E_4}$: $sen(A) = -sen(-A)$</th><th colspan="3">DEMOSTRACIÓN
$\mathbf{E_4}$: $sen(A) = -sen(-A)$</th></tr>
<tr><td>

R$\mathbf{R_2}$: $A = -200° < 0$ queda en el cuadrante II y $sen(-200) > 0$.
$\mathbf{R_3}$: seno en el cuadrante I y II es positivo.
$\mathbf{R_4}$: El valor absoluto de las abscisas y de las ordenadas de A y $-A$ son iguales.
$\mathbf{R_5}$: $sen(A)$ y $sen(-A)$ son inversos aditivos .</td><td>natural
$\mathbf{L_4}$: Símbolos geométricos
$\mathbf{L_5}$: Lenguaje algebraico.</td><td></td><td>$\frac{5}{r} = -\left(\frac{-5}{r}\right)$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Marco perceptivo – numérico – geométrico</td><td colspan="3">Marco algebraico</td></tr>
<tr><td colspan="6">RUPTURA EN EL SISTEMA DE REFERENCIA</td></tr>
</table>

Análisis de la continuidad estructural

<table>
<tr><th>ARGUMENTACIÓN</th><th>DEMOSTRACIÓN</th></tr>
<tr><td>FORMA DE ARGUMENTACIÓN
Constructiva</td><td></td></tr>
<tr><td>ESTRUCTURA DE LA CONJETURA
Inductiva por generalización de los enunciados</td><td>ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN
Inductiva.</td></tr>
<tr><td></td><td>TIPO DE DEMOSTRACIÓN
EGA: Generalización de las relaciones observadas en los datos numéricos de las coordenadas en Cabri, cuando el ángulo $-A$ está en el cuadrante III y IV</td></tr>
<tr><td colspan="2">CONTINUIDAD ESTRUCTURAL</td></tr>
</table>

La ruptura del sistema de referencia conlleva a una ruptura cognitiva, a pesar de la continuidad estructural. Esta ruptura cognitiva es necesaria y debe contribuir a la comprensión y a la construcción de una demostración deductiva. Como mencionamos en el análisis de la demostración, al final parece que se logra una ruptura estructural cuando se les indica a los estudiantes que usen la definición de seno, con la cual construyen una demostración algebraica que puede ser considerada deductiva en su forma, pero que procede de un proceso netamente inductivo, como se constata cuando el grupo vuelve a discutir lo realizado y recurre al uso de ejemplos para comprender lo realizado.

El esquema global de la conjetura nos ilustra la desconexión entre los datos, enunciados y operadores perceptivos del primer esquema con el segundo. En el primer esquema los datos conllevan al planteamiento de enunciados no relevantes para el problema planteado, cuyos operadores son de tipo perceptivo, mientras que en el segundo, debido a la intervención del investigador, se plantea la identidad trigonométrica, justificada por operadores basados en las relaciones y propiedades de las razones trigonométricas en el plano cartesiano, pero son de tipo perceptivo, lo que no permite tener un control teórico sobre el problema, necesario para la construcción de una demostración deductiva en la siguiente fase de demostración.

Actividad 4.2 – G2A

4.2.1 ***Explorando, analizando y conjeturando.***

- Abre el archivo de Cabri ACT.4.2, explora la construcción y analiza las relaciones de los elementos del diagrama dinámico.

¿Qué relación existe entre el radio de la circunferencia y las razones trigonométricas *seno* y *coseno*? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

4.2.2 ***Demostrando***

Demuestra tu conjetura planteada en 4.2.1.

PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

[1] Inv.: *¿Cómo relacionas a la vez el radio, coseno y seno?*

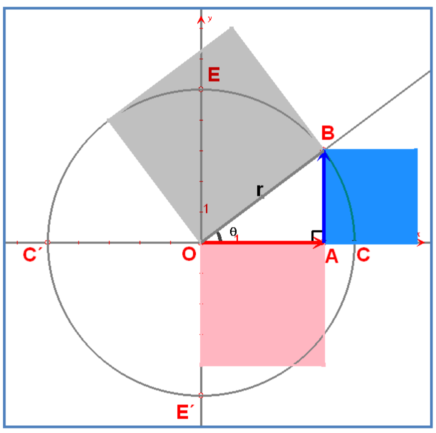
[2] Cata: *Ah, ya, la roja es el coseno y la azul es el seno* [señala en el archivo los lados coseno y seno respectivamente (Fig. 4)]

[3] Inv.: *Ese es el lado seno, ¿entonces?*

[4] Cata*: Lo de Pitágoras, sería r a la dos, igual a r por seno de θ a la dos, más r por coseno de θ a la dos, ¿sí?*

[5] Inv.: *Sí*

[6] G2: [Escriben en la hoja de trabajo: $r^2 = (r.cos\theta)^2 + (r.sen\theta)^2$]



D$_1$:

Figura 4: Archivo 4.2 en la posición inicial

E$_1$: $r^2 = (r.cos\theta)^2 + (r.sen\theta)^2$ [4]

R$_1$: Teorema de Pitágoras [4]

Marco geométrico – algebraico

ANÁLISIS DEL PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

Inicialmente, el grupo no entendía a qué relación se refería la pregunta, pero al observar el archivo recuerdan las representaciones de los lados seno y coseno y plantean la Identidad Pitagórica.

El operador R_1 es el teorema de Pitágoras, tal vez recordado al observar la construcción.

El sistema de representación se caracteriza por el uso del diagrama dinámico en Cabri (L_1) como dibujo (no utilizan el arrastre) para ver la relación, el uso del lenguaje natural (L_2), usado para plantear verbalmente la relación, al lenguaje algebraico (L_3), usado para escribir la identidad.

El control es teórico (Σ_1), basado en el teorema de Pitágoras.

La forma de argumentación es constructiva, ya que primero mencionan el Teorema de Pitágoras y luego plantean la identidad trigonométrica, usando los nombres de los lados del triángulo rectángulo *OAB*, asociado a los vectores azul y rojo.

La estructura de la argumentación es deductiva.

PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

[7] Cata: *Ahora toca demostrarlo.*

[8] Inv.: *¿Cómo demuestras eso? ¿qué estás haciendo ahí?*

[9] Cata: *Reemplazando lo que es seno* [Escribe en la hoja de trabajo: $r^2 = \left(r.\frac{x}{r}\right)^2 + \left(r.\frac{y}{r}\right)^2$]

[1] Inv.: *La definición.*

[10] Cata: [Realiza el siguiente procedimiento en la hoja de trabajo: $r^2 = \left(\cancel{r}.\frac{x}{\cancel{r}}\right)^2 + \left(\cancel{r}.\frac{y}{\cancel{r}}\right)^2$ $r^2 = x^2 + y^2$]

¿Si está bien?

[11] Inv.: *Tú qué dices.*

[12] Cata: *No se, pues, no sé si esté comprobado.*

[13] Inv.: *¿Por qué?*

[14] Cata: *Porque…*

[15] Inv.: *¿Cuál es la duda? ¿es cierto a lo que llegaste?*

[16] Cata: *Sí es cierto.*

[17] Inv.: *¿Por qué es cierto?*

[18] Cata: *Porque así son los lados, así es como se define los lados del triángulo… ¿Si está bien la comprobación?*

D₁: Archivo 4.2 (Fig. 28)
D_2: $cos\theta = \frac{x}{r}$, $sen\theta = \frac{y}{r}$ [9]

$\rightarrow$ **E_1**: $r^2 = (r.cos\theta)^2 + (r.sen\theta)^2$ [4]

R_2: $r^2 = \left(r.\frac{x}{r}\right)^2 + \left(r.\frac{y}{r}\right)^2$ [9]

R_3: $r^2 = \left(\cancel{r}.\frac{x}{\cancel{r}}\right)^2 + \left(\cancel{r}.\frac{y}{\cancel{r}}\right)^2$] [11]
$r^2 = x^2 + y^2$

Marco algebraico

ANÁLISIS DEL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

Inmediatamente después de que escriben al Identidad Pitagórica, empiezan a reemplazar por la definición de seno y coseno en el plano cartesiano (R_2) y a usar propiedades de las operaciones y de la igualdad (R_3) para demostrar de forma algebraica la identidad.

El sistema de representación es el lenguaje algebraico (L_2).

El control es teórico (Σ_1), basado en el uso de las definiciones de las razones y el método de demostración algebraica.

La estructura de la demostración es deductiva y el tipo de demostración deductivo formal estructurado, aunque existe la duda de que lo realizado sea suficiente para la demostración.

ANÁLISIS DE LA UNIDAD COGNITIVA

Esquema global de la argumentación	**Esquema global de la demostración**
D_1g $\rightarrow$ E_1idpit R_1teopit idpit: Identidad Pitagórica, teopit: teorema de Pitágoras.	D_1g, D_2defpc $\rightarrow$ E_1idpit R_2pig, R_3demalg pig: propiedades de la igualdad, demalg: demostración algebarica.

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

ARGUMENTACIÓN **E**$_1$: $r^2 = (r.cos\theta)^2 + (r.sen\theta)^2$			**DEMOSTRACIÓN** **E**$_1$: $r^2 = (r.cos\theta)^2 + (r.sen\theta)^2$		
CONCEPCIÓN			CONCEPCIÓN		
OPERADORES	**SIST. DE REPR.**	**E. DE CONTROL**	**OPERADORES**	**SIST. DE REPR**	**E. DE CONTROL**
R$_1$: Teorema de Pitágoras.	**L**$_1$: Diagrama dinámico de Cabri como dibujo. **L**$_2$: Lenguaje natural. **L**$_3$: Uso de expresiones algebraicas.	**Σ**$_1$: Teórico (Teorema de Pitágoras).	**R**$_2$: $r^2 = \left(r.\frac{x}{r}\right)^2 + \left(r.\frac{y}{r}\right)^2$ **R**$_3$: $r^2 = \left(\cancel{r}.\frac{x}{\cancel{r}}\right)^2 + \left(\cancel{r}.\frac{y}{\cancel{r}}\right)^2$ $r^2 = x^2 + y^2$	**L**$_3$: Lenguaje algebraico.	**Σ**$_1$: Teórico (demostración algebraica basada en la definición de seno y coseno, propiedades de la igualdad, teorema de Pitágoras).
Marco geométrico – algebraico			Marco algebraico		

CONTINUIDAD EN EL SISTEMA DE REFERENCIA

Análisis de la continuidad estructural

ARGUMENTACIÓN	**DEMOSTRACIÓN**
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Deductiva.	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Deductiva.
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN **DFE**: Secuencia lógica derivada de los datos del problema, las definiciones y el teorema de Pitágoras.

CONTINUIDAD ESTRUCTURAL

Tanto en los esquemas generales como en las tablas, se evidencia la unidad cognitiva que conlleva a la construcción de una demostración deductiva formal estructurada. Aunque los operadores son diferentes y la forma de la demostración es algebraica, ésta continúa el planteamiento realizado en la fase de conjetura, el sistema de representación sigue siendo el algebraico planteado al final de la primera fase y el control sigue siendo teórico. La estructura sigue siendo deductiva.

Este episodio ratifica que si la estructura de la conjetura es deductiva y el control es teórico, la posibilidad de construcción de una demostración deductiva es más alta.