Capítulo 8

Lanzamiento vertical y la derivada como razón de cambio

E. Johanna Mendoza-Higuera,
César Rodríguez, Jorge Fiallo

Justificación de la situación de aprendizaje

El cálculo es reconocido por modelar, a través de la derivada, las leyes que cuantifican, miden y predicen el cambio y la variación de diferentes fenómenos de la naturaleza o de la práctica (Vrancken y Engler, 2014). Por otro lado, la ingeniería busca formar cuadros capaces de transformar la vida del humano con el diseño de artefactos que moldeen la realidad según las necesidades que se presenten (Mendoza-Higuera, 2020). Es así como el cálculo, y en especial la derivada, se constituye como un objeto de conocimiento fundamental en la formación de ingenieros por aportar al estudio del comportamiento de fenómenos para regularlos o modificarlos y cumplir con los objetivos de la ingeniería.

Si nos adentramos a la derivada, conceptos como el de cociente, razón, proporcionalidad, función y límite; y procesos como representar y razonar están presentes en su aprendizaje. Debido a la complejidad de estos conceptos y procesos, se producen diversas dificultades a nivel cognitivo cuando se construye desde sus diferentes representaciones (la pendiente de la recta tangente, el límite del cociente incremental y la razón de cambio). Según Thompson y Carlson (2017), estas representaciones están ligadas con formas de pensar matemáticamente como la variación, covariación y función; y aclaran que la variación de una cantidad proviene de una persona que piensa en una sola cantidad cuyo valor varía y que una persona razona en forma covariacional cuando tiene en su mente una imagen sostenida de dos cantidades que varían simultáneamente (Thompson y Carlson, 2017).

Para ejemplificar lo anterior, consideremos el deslizamiento de una escalera, donde la parte inferior se separa de una pared a razón constante. Si se pretende describir y justificar la velocidad de la parte superior, se deberá tener en cuenta que dicha situación implica la variación entre dos magnitudes, la distancia vertical y el tiempo. Es una situación en la que se tiene que "imaginar" el deslizamiento de la escalera, y notar que, a medida que el tiempo transcurre, la distancia vertical cambia.

Así, el razonamiento covariacional se constituye como una herramienta analítica para evaluar el pensamiento de los estudiantes a través de acciones mentales asignadas a cinco niveles que se explicarán a continuación siguiendo el ejemplo de la escalera.

1. Nivel de coordinación: para describir y justificar el comportamiento de la velocidad, inicialmente hay que identificar y relacionar las magnitudes que cambian, es decir, se deberá expresar que, a medida que el tiempo cambia, la distancia vertical cambia; o que dado un valor en el tiempo t_0 se tiene un valor en la distancia vertical y_0; es decir, $y = d(t)$, en la que d es función.

2. Nivel de dirección: podría construirse o señalar con una línea recta decreciente la dirección del cambio, verbalizar que, a medida que el tiempo transcurre, la distancia vertical disminuye, o visto simbólicamente como: para un valor en el tiempo t_n y

un incremento cualquiera en el tiempo Δt y el incremento en la distancia vertical definido por $\Delta y_n = d(t_n + \Delta t) - d(t_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\Delta y_n < 0$ entonces, la distancia vertical disminuye.

3. Nivel de coordinación cuantitativa: dado que el objetivo es llegar hasta la velocidad, se deberá cuantificar los cambios de la distancia vertical con los cambios en el tiempo, a medida que se desliza la escalera a razón constante. Lo anterior se puede plantear al localizar puntos en la gráfica o colocar marcas de la distancia vertical para mostrar que el valor de los incrementos en la distancia vertical son cada vez más pequeños (o cada vez más grandes con signo negativo) al tocar el suelo; al expresar el cómo cambia la distancia vertical mientras considera incrementos de igual cantidad en el tiempo; o simbólicamente como: para Δy_n y Δy_{n+1}, se tiene que $\Delta y_n > \Delta y_{n+1}$, entonces la cantidad del cambio en la distancia vertical decrece; con esto, el estudiante coordina la cantidad del cambio en la distancia vertical con la cantidad del cambio constante en el tiempo.

4. Nivel de razón promedio: se debe plantear y analizar las razones de cambio promedio entre los incrementos (cantidad de cambio) de la distancia vertical y el tiempo, los cuales dan cuenta de la velocidad de la parte superior. Es decir, construir segmentos de recta, uno tras de otro en la gráfica, para la cual indica el valor de la pendiente de la recta secante correspondiente a la velocidad promedio (razón de cambio promedio de la distancia vertical respecto al tiempo) con la que decrece la distancia vertical; o al expresar sobre qué disminuye cada vez más la velocidad promedio; o simbólicamente como: para las razones $\frac{\Delta y_n}{\Delta t}$ y $\frac{\Delta y_{n+1}}{\Delta t}$, se tiene que $\frac{\Delta y_n}{\Delta t} > \frac{\Delta y_{n+1}}{\Delta t}$, entonces la velocidad promedio de la distancia vertical decrece.

5. Nivel de razón instantánea: dar paso al uso del concepto de límite y así construir rectas tangentes, en la que sus pendientes

> representan la velocidad instantánea con la que decrece la distancia vertical. En otras palabras, se refiere a que existe una recta tangente a un punto $(t_0, d(t_0))$ tal que el valor de la pendiente representa la velocidad en el instante t_0. Además, se debe poder expresar la naturaleza cambiante de la velocidad en la distancia vertical, mientras se imagina el cambio continuo en el tiempo; o simbólicamente como: para todo t_0 en el dominio y $y_0 = d(t_0)$ existe la razón de cambio instantánea definida por
>
> $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t},$$
>
> la cual representa tanto la pendiente de la recta tangente como la velocidad para cada instante de tiempo (Carlson *et al*., 2003).

Lo descrito anteriormente hace referencia al diseño de la situación de aprendizaje (Rodríguez, 2020) que se expondrá a continuación, en la que, a través del contexto del lanzamiento vertical de un objeto y basados en el desarrollo del razonamiento covariacional, se estructura un taller conformado por cuatro actividades, en las que el estudiante tendrá la oportunidad de realizar tareas que le permitan plantear una solución con el uso de la definición de la derivada en un punto, como resultado de la guía del profesor e interacción entre pares.

Además, incorporar las tecnologías digitales como GeoGebra, como lo mencionan Fiallo y Parada (2014), provee a los estudiantes de representaciones dinámicas sobre ideas centrales de cálculo al generar un pensamiento dinámico que contribuye a la construcción de significados de las ideas estudiadas.

Objetivos

El diseño tiene como propósito guiar al estudiante por medio del razonamiento covariacional hacia la descripción y definición de la derivada en un punto. A lo largo de cada actividad, se pretende dar solución a una situación que involucra el lanzamiento vertical de un objeto. Es importante resaltar la necesidad de la socialización al finalizar cada actividad, ya que será en estos momentos en los que el estudiante o bien deberá ir resolviendo sus dudas o ir fortaleciendo sus ideas.

Situación de aprendizaje

Nombre de la situación: Lanzamiento vertical

En el enlace https://www.geogebra.org/m/twhdmdwn se encuentra un Libro de GeoGebra con el taller en PDF y dos simulaciones para el desarrollo de las actividades.

Actividad 1

Una máquina ha lanzado un objeto verticalmente hacia arriba. Antes del lanzamiento, se han colocado tres sensores en posiciones distintas con el fin de determinar la velocidad del objeto en diferentes instantes de tiempo. Los registros tomados por los sensores se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 1. Registro de sensores.

Sensor	Tiempo $[s]$	Posición $[m]$	Velocidad $\left[\frac{m}{s}\right]$
1	0.25	2.625	7.25
2	0.8	5.1	1.75
3	$\frac{8}{5}$	$\frac{33}{10}$	$-\frac{25}{4}$

- Abre el archivo Problema lanzamiento vertical y **muestra matemáticamente** que el registro de la velocidad, tomado por cada sensor, es verdadero.
- **Discute** los resultados obtenidos con tus compañeros y el profesor. Después **escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 2

Abre el archivo Lanzamiento.ggb y contesta las siguientes preguntas en tu hoja de trabajo en el orden en que aparecen los ítems:

- ¿Cuáles son las magnitudes variables del problema? ¿Existe una relación de interdependencia entre las magnitudes variables? ¿Por qué?
- ¿Cómo se comportan los valores de la posición respecto al tiempo? **Explica** tu respuesta**.**
- ¿De cuánto es el incremento en los valores de la posición con respecto al tiempo? **Explica** tu respuesta**.**
- ¿Cuál es el comportamiento de la cantidad del incremento en los valores de la posición respecto al tiempo? **Justifica** tu respuesta**.**
- **Discute** los resultados obtenidos con tus compañeros y el profesor. Después, **escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 3

Las siguientes preguntas están relacionadas con la razón de cambio promedio de la posición con respecto al tiempo. Resuelve los siguientes ítems en tu hoja de trabajo.

- Calcula los incrementos de los valores en el tiempo (x) y completa las siguientes tablas:

Tabla 2.

$\Delta \boldsymbol{x_1} =$ ___	
$[x_1, x_2]$	$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$
$[0.78, 0.79]$	
$[0.79, 0.8]$	
$[0.8, 0.81]$	
$[0.81, 0.82]$	

Tabla 3.

$\Delta \boldsymbol{x_2} =$ ___	
$[x_1, x_2]$	$\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}$
$[0.79, 0.795]$	
$[0.795, 0.8]$	
$[0.8, 0.805]$	
$[0.805, 0.81]$	

Tabla 4.

$\Delta \boldsymbol{x_3} =$ ___	
$[x_1, x_2]$	$\frac{\Delta y_3}{\Delta x_3}$
$[0.798, 0.799]$	
$[0.799, 0.8]$	
$[0.8, 0.801]$	
$[0.801, 0.802]$	

- Aproximadamente, ¿con qué velocidad se mueve el objeto alrededor de $x = 0.8\ s$? **Justifica** tu respuesta**.**
- Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos de los extremos de los intervalos definidos en las Tablas 2, 3 y 4. Compara este resultado con los ítems anteriores y escribe una conclusión. **Justifica** tu respuesta.
- **Discute** los resultados obtenidos con tus compañeros y el profesor. Después, **escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 4

Las siguientes preguntas están relacionadas con la razón de cambio instantánea de la posición respecto al tiempo. Resuelve los siguientes ítems en la hoja de trabajo.

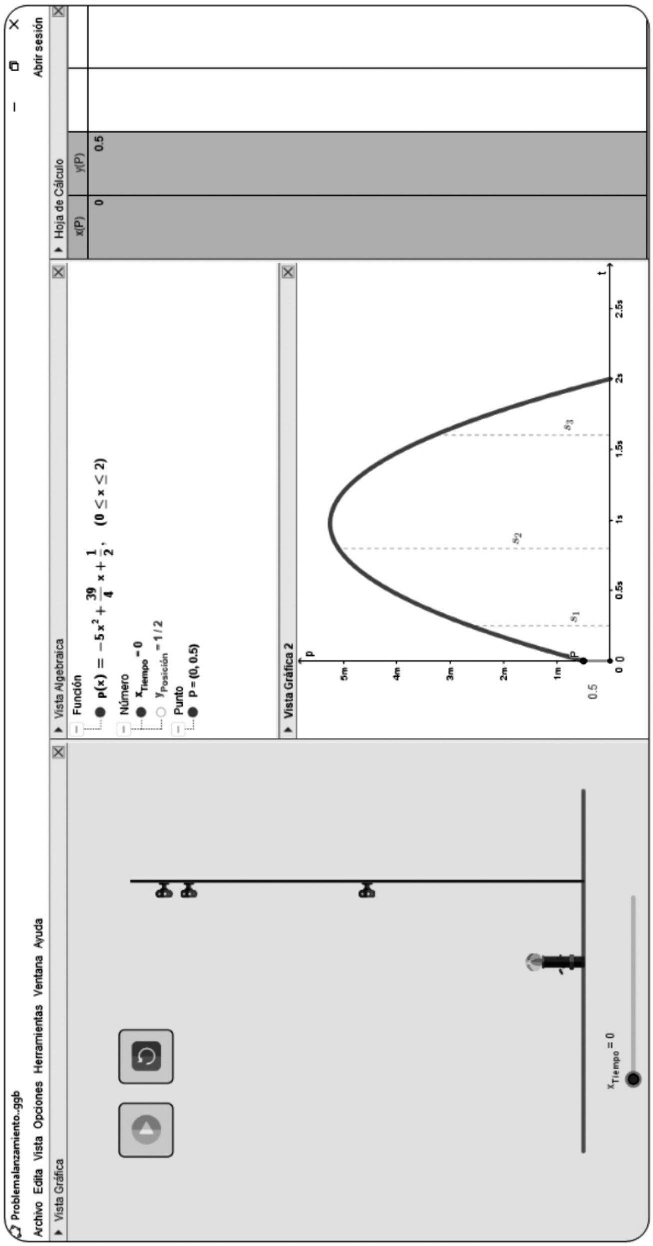
- ¿Qué sucede con la razón de cambio cuando $\Delta x \rightarrow 0$? Escribe una expresión analítica que represente la razón de cambio instantánea para $x = 0.8\ s$. **Justifica** tu respuesta.
- ¿Cuál es la velocidad instantánea para $x = 0.8\ s$? **Valida con reglas** tu respuesta.
- ¿Qué sucede con la recta que pasa por los puntos de los extremos de los intervalos al hacer que $\Delta x \rightarrow 0$? ¿Qué sucede con el valor de tu pendiente al hacer $\Delta x \rightarrow 0$? Escribe una conclusión respecto a la pendiente, la razón de cambio y la velocidad. **Argumenta** tu respuesta.
- **Discute** los resultados obtenidos con tus compañeros y el profesor. Después, **escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Intenciones y aprendizajes

Dentro de la metodología de implementación de las actividades se plantean dos fases, una de trabajo individual y otra de trabajo grupal.

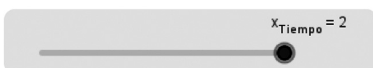
Figura 1. Simulación problema lanzamiento.

Figura 1. Simulación problema lanzamiento.



Además, la **Actividad 1** va acompañada de la simulación Problema lanzamiento (Applet de GeoGebra 1). Esta permite explorar y observar ideas conceptuales de los objetos matemáticos mostrados en las vistas que provee el software (algebraica, hoja de cálculo, gráfica) (Figura 1) para así plantear conjeturas y justificar matemáticamente las respuestas que ofrezcan, tanto en las fases de trabajo individual como en las de trabajo grupal.

Específicamente, en la simulación es posible interactuar de la siguiente manera:

- Animar la simulación, el movimiento del punto P y el registro de datos en la hoja de cálculo con el botón .
- Detener la simulación, el movimiento del punto P y el registro de datos en la hoja de cálculo con el botón .
- Reiniciar la simulación con el botón .
- Ajustar el tiempo deseado deslizando el siguiente botón 

.
- Registrar el tiempo deseado ● $x_{Tiempo} = 2$.
- Observar la posición ○ $y_{Posición} = 0$.
- Tener la expresión algebraica (simbólica), gráfica y tabular de la relación de interdependencia de las variables implicadas en el problema.
- Operar y registrar en las columnas de la hoja de cálculo cualquier operación entre los valores mostrados.

Las demás actividades (2, 3, 4), presentan las mismas fases (trabajo individual y grupal) y van acompañadas de la simulación Lanzamiento (Applet de GeoGebra 2) (Figura 2). Adicional a la primera simu-

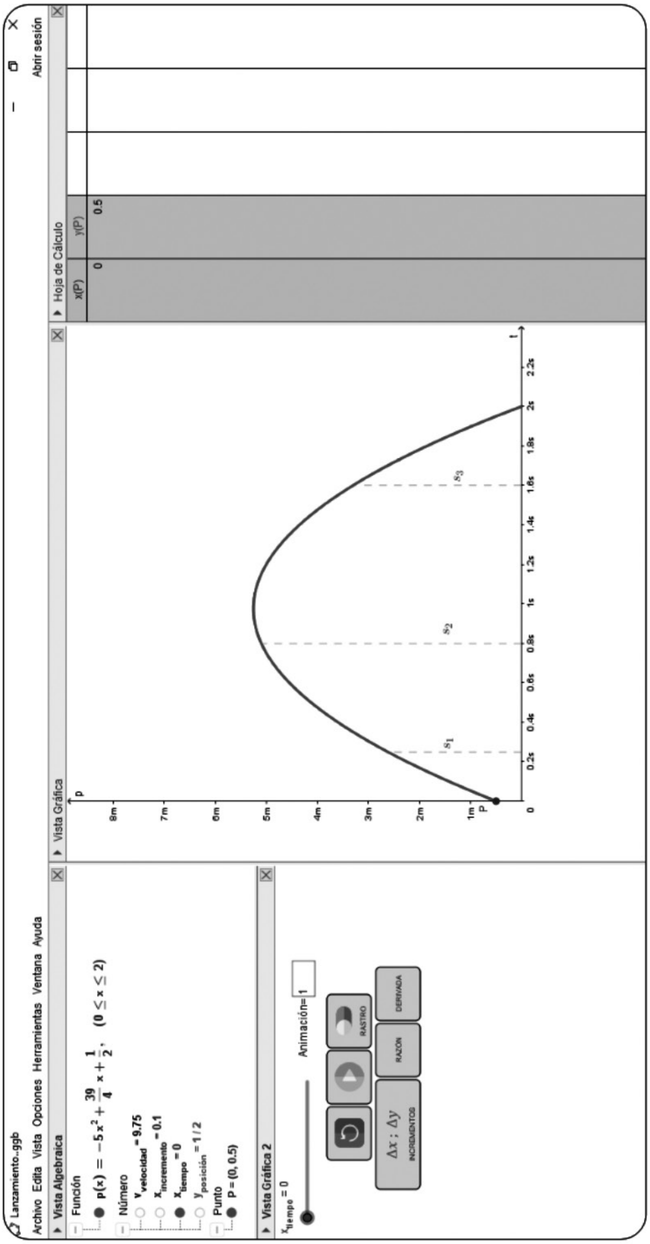
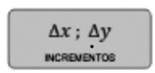


Figura 2. Simulación lanzamiento.

lación, esta tiene una configuración específica para observar ideas en torno a los incrementos, razones de cambio promedio, recta secante y pendiente, y la derivada, para así plantear conjeturas y justificar matemáticamente las respuestas que ofrezcan, tanto en las fases de trabajo individual como en las de trabajo grupal.

Además de la configuración del archivo anterior, en este otro, particularmente, es posible realizar y observar:

- Registrar el incremento en el tiempo deseado ○ $x_{incremento} = 0.1$.
- Observar la velocidad del objeto ○ $v_{velocidad} = 9.75$.
- Controlar la velocidad de la animación, con la posibilidad de registrar valores de incrementos menores a 0.05.
- Activar o desactivar el rastro de los objetos mostrados en la vista gráfica como el punto P y las razones promedio con el botón 

.
- Activar o desactivar una representación gráfica de los incrementos en el tiempo y la posición con el botón 

- Activar o desactivar una representación gráfica y simbólica, según el intervalo e incremento de tiempo considerado de la razón promedio con el botón 

.
- Activar o desactivar la representación gráfica de la pendiente de la recta secante y su pendiente sobre la función con el botón 

.
- Activar y desactivar las representaciones de la derivada como pendiente de la recta tangente y la razón de cambio instantánea (solo como cociente entre *dy* y *dx* con el botón 

.

En cada una de las actividades se espera:

Actividad 1. Durante el desarrollo de esta tarea, se observarán y se escucharán los argumentos de los estudiantes, para así realizar preguntas sobre las ideas de variación y cambio, enfocadas hacia la definición de velocidad por parte de los estudiantes: ¿qué es la velocidad?, ¿en qué consiste la velocidad?, ¿distancia sobre tiempo?, ¿qué quiere decir esa "fórmula"?, ¿cuáles son las condiciones para aplicar dicha "fórmula"?, ¿qué es una razón?, ¿qué es el cambio?, y ¿cuáles magnitudes cambian y cuáles permanecen constantes?

Actividad 2. Se pretende que el estudiante se cuestione sobre el qué, cómo y cuánto varían las magnitudes involucradas. Se observarán y se escucharán los argumentos de los estudiantes con la finalidad de poder realizar sugerencias como:

1. Toma ejemplos de valores para mostrar si aumenta, si disminuyen o si permanecen constantes las magnitudes variables. **Explica**.
2. Toma ejemplos de valores para mostrar el incremento en la posición en cierto intervalo de tiempo.
3. Toma, por ejemplo, [0.4,0.5] en el tiempo ¿De cuánto es el incremento en la posición?

O preguntas a modo de entrevista:

4. Según tu respuesta, ¿qué puedes decir acerca de la velocidad del objeto?
5. ¿En qué momentos (intervalos) la velocidad es positiva, en cuáles negativa o constante y por qué?
6. ¿Cómo se calcula el incremento en la posición? **Generaliza.**
7. Consideremos el incremento en el tiempo de igual medida. Calcula varios incrementos en la posición.

8. ¿La velocidad es cada vez mayor, menor, o permanece constante? **Explica.**

Actividad 3. Específicamente, se plantean tareas sobre la razón de cambio que se pueden acompañar de preguntas como:

1. ¿Qué es lo que entiendes por velocidad?
2. ¿Qué tipo de velocidad es?, ¿qué tipo de razón es?, y ¿por qué?
3. Dados dos puntos en el plano cartesiano, ¿cómo se calcula la pendiente de la recta que pasa por dichos puntos?
4. Activa mostrar función (si no lo está) y observa, ¿cómo es la recta que pasa por los puntos?
5. ¿Qué relación existe entre la razón promedio, la velocidad promedio y la pendiente de la recta secante? **Explica**.

Actividad 4. Específicamente se plantean tareas sobre la razón de cambio instantánea que se pueden acompañar de preguntas como:

1. Según la actividad anterior, ¿qué sucede con los incrementos en el tiempo?
2. Entonces, ¿qué suceden con los valores de las razones al hacer que los incrementos tiendan a cero?
3. ¿Qué entiendes por límite de una función en un punto?
4. Generaliza la expresión para hacer cualquier razón promedio alrededor de $x = 0.8\ s$.
5. En $r_p = \Delta y / \Delta x$ a, ¿qué es igual Δy? Usa lo encontrado en la actividad anterior. Escribe una expresión en que se incluya Δx.
7. Si se tiene que $r_p = \frac{y_2 - y_1}{\Delta x}$, ¿qué sería y_1?, y ¿qué sería y_2 en términos del incremento Δx y el $x = 0.8\ s$?
8. Resuelve el límite. ¿Cuánto debe dar?

9. ¿Qué quiere decir que la velocidad instantánea en $x = 0.8\ s$ es $1.75\ m/s$? **Argumenta**.
10. Observa la vista gráfica y muestra la función (si no lo está). ¿Qué sucede con la recta que era secante al hacer el incremento más pequeño (tienda a cero)? **Explica**.
11. Entonces, ¿cómo llamaríamos a esta pendiente si viene de la recta tangente?, ¿qué relación tiene con la razón instantánea?, ¿y con la velocidad instantánea?
12. Calcula los demás valores y determina si los sensores están en lo correcto.

Bibliografía

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *EMA*, *8*(2), 121-156.

Fiallo, J. y Parada, S. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Revista Científica, volumen (20),* 55-71.

Mendoza-Higuera, E. (2020). *El uso de la matemática en la Ingeniería Biónica. De la estabilidad a la reproducción de comportamientos en un sistema de control. Una Categoría de Modelación*. (Tesis de doctorado no publicada). Cinvestav-IPN. México.

Rodríguez, C. (2020). *La comprensión de la derivada como razón de cambio: las habilidades cognitivas vinculadas al estudio covariacional*. (Tesis de maestría no publicada). Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Colombia.

Thompson, P. & Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vrancken, S. y Engler, A. (2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: Resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Boletim de Educação Matemática*. *28*(48), 449-468.