IX Simposio Nororiental de Matemáticas

Diciembre 2 - 4, 2012, Bucaramanga - SAN, Colombia

Y. Takeuchi, 1927 - 2014, In Memoriam

Juegos infinitos, Filtros sobre $\mathbb{N}$ y Caracterización de Estrategias Ganadoras

Viviana Andrea Parada*

Resumen

Continuando con las investigaciones realizadas por Laflamme[2], Laflamme y Leary[3], y Bartoszynski y Scheepers[5], caracterizaremos las estrategias ganadoras de los jugadores de algunos juegos infinitos que involucran filtros sobre $\mathbb{N}$ en términos de las propiedades combinatorias y estructurales de un filtro dado. Este enfoque nos proporcionará demostraciones alternativas de algunos resultados conocidos, como es la caracterización de filtros magros dada por Talagrand[1] y de otras propiedades como: selectivo, P^+, Q^+ y $\mathrm{Q}^+(\mathcal{F})$, las cuales han sido estudiadas ampliamente en Teoría de Conjuntos y Topología, pero jamás abordadas desde este punto de vista conjuntista.

Palabras & frases claves: Filtros, juegos infinitos, juegos de filtros, estrategias ganadoras, selectivo, P^+, Q^+ y $\mathrm{Q}^+(\mathcal{F})$.

1. Introducción

Desde principios del siglo XX varios matemáticos abordaron algunos problemas en términos de juegos; es decir, de planteamientos en los cuales dos o más jugadores realizan por turnos una sucesión de jugadas respetando unas reglas de juego con el objetivo de ganar una partida [1]. Este planteamiento dio origen a la

*Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga - Colombia

teoría de juegos, que aunque en sus comienzos fue desarrollada como una herramienta para entender el comportamiento de la economía, actualmente se usa en otros campos como la biología, la sociología e incluso la misma matemática pura.

Un juego infinito es una terna de la forma $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ donde $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ representan las colecciones de donde juegan I y II, respectivamente; y $\mathcal{Z}$ representa la colección que determina el resultado del juego. Veamos un ejemplo sencillo.

Ejemplo 1. *Sea $\mathbb{N}^{[\omega]}$ la colección de todos los subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Denotaremos por $\mathfrak{G}(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N}^{[\omega]})$ al juego en el cual dos jugadores,* I *y* II*, alternan turnos en una sucesión infinita de jugadas, tal como se indica en el siguiente diagrama.*

$$\begin{array}{lcccccccccc} \mathrm{I} & m_0 & & m_1 & & \cdots & & m_k & & \cdots & \\ & & & & & & & & & & n_k, m_k \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} \\ \mathrm{II} & & n_0 & & n_1 & & \cdots & & n_k & & \cdots \end{array}$$

La sucesión $\langle m_0, n_0, m_1, n_1, \ldots \rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ corresponde a una partida del juego $\mathfrak{G}(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N}^{[\omega]})$. Si el conjunto $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{N}^{[\omega]}$, diremos que el jugador II *gana la partida, mientras que si $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \notin \mathbb{N}^{[\omega]}$ el ganador será* I. *Además, diremos que el juego $\mathfrak{G}(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N}^{[\omega]})$ estará determinado, si uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora; es decir, si cuenta con un criterio para determinar cada una de sus jugadas en función de las jugadas anteriores, de modo que sin importar cuales sean las jugadas de su adversario, terminará ganando la partida.*

Las estrategias ganadoras que caracterizaremos a lo largo de este trabajo serán estrategias en juegos de filtros, esto es, juegos de la forma $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ en los que las colecciones $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ se asocian a un filtro $\mathcal{F}$. En particular, supondremos que $\mathcal{X}$ es $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_r$ ó $\mathcal{F}^+$, $\mathcal{Y}$ es $\mathbb{N}$ ó $\mathbb{N}^{[<\omega]}$ y $\mathcal{Z}$ es $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^+$, $\mathcal{F}^c$ ó $\mathcal{F}^*$. Así mismo, haremos referencia solo a juegos infinitos cuyas estrategias ganadoras pueden ser caracterizadas en términos de las propiedades de filtros que se muestran en la figura 1, como por ejemplo: la caracterización de filtros magros dada por Bartoszynski y Scheepers en [5], en la que se prueba que ser magro es equivalente a afirmar que el jugador I del juego $\mathfrak{G}_1(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F})$ tiene una estrategia ganadora.

El diagrama central de la figura 1, constituye el principal aporte de esta investigación, dado que involucra propiedades de filtros que no fueron consideradas en los trabajos de Laflamme, ni en ninguno de los autores citados anteriormente.

Algunos de los resultados más relevantes son:

Teorema 2. *Dado un filtro $\mathcal{F}$, considere el juego $\mathfrak{G}(\mathcal{F}_r, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$. Entonces,*
(i) I *tiene estrategia ganadora si, y solo si, $\mathcal{F}$ no es $\mathrm{Q}^+(\mathbb{N})$.*
(ii) II *tiene estrategia ganadora si, y solo si, $\mathcal{F}$ es ω-diagonalizable.*

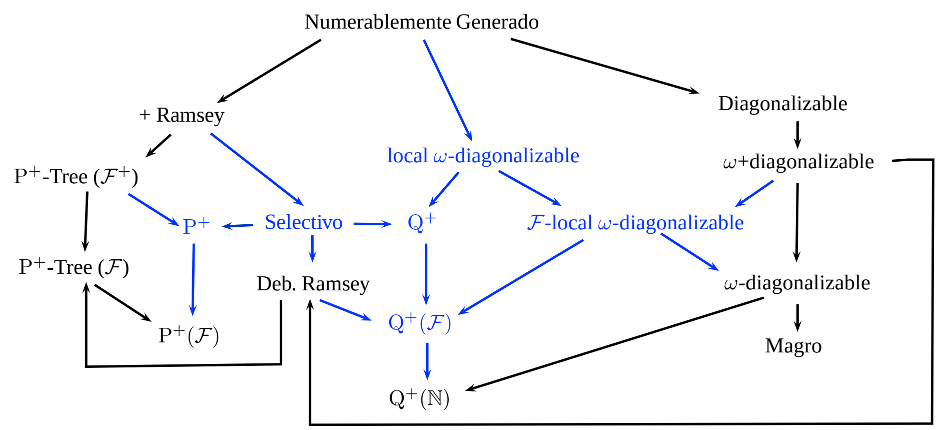

Figura 1: Propiedades de filtros

Teorema 3. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre $\mathbb{N}$, entonces*
(i) I *tiene estrategia ganadora en* $\mathcal{G}_{\mathrm{A}}(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ *para algún* $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ *sí, y solo sí,* $\mathcal{F}$ *no es* $\mathrm{Q}^+(\mathcal{F})$.
(ii) II *tiene estrategia ganadora en* $\mathcal{G}_{\mathrm{A}}(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ *para todo* $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ *sí, y solo sí,* $\mathcal{F}$ *es* $\mathcal{F}$*-localmente* ω*-diagonalizable.*

Aunque hasta el momento se han demostraron cada una de las implicaciones que se muestran en la figura 1, quedan pendientes algunas de las pruebas de que estas implicaciones no son estrictas, y asimismo, quedan planteados nuevos interrogantes relacionados con la caracterización de propiedades como selectivo, P^+, $\mathrm{P}^+(\mathcal{F})$ y diagonalizable.

Referencias

[1] C. Ivorra, *Teoría Descriptiva de Conjuntos*[en línea]: documento electrónico recuperado de internet. 2011 [fecha de consulta: 16 de marzo de 2013]. Disponible en: <http://www.uv.es/ ivorra/Libros/TDC.pdf>.

[2] C. Laflamme, *Filter Games and Combinatorial Properties of Strategies*. Proc. American Mathematical Society, Contemporary Mathematics. **192** (1996):51–67.

[3] C. Laflamme y C.C. Leary, *Filter games on ω and the dual ideal*. Fundamenta Mathematicae. **173** (2002):159-173.

[4] M. Talagrand, *Compacts de fonctions mesurables et filtres non mesurables*. Studia Mathematica. **67** (1980):13-43.

[5] T. Bartoszynski y M. Scheepers, *Filter and Games*. Proc. American Mathematical Society. **123** (8) (1995):2529-2534.