Sucesiones Cuasi-Cauchy[*]

David Burton y Jhon Coleman[**]

Las sucesiones de Cauchy son más que sucesiones en la cual existe un elemento de la sucesión, tal que, para los términos sucesivos la distancia entre entre dos cualquiera de ellos tiende a ser tan pequeña como se quiera. Además, permiten determinar si una sucesión converge sin necesidad de intuir o saber de antemano el valor del límite (definición de convergencia de una sucesión) y no necesita ser una sucesión monótona (teorema de la convergencia monótona) para aplicar la definición de Cauchy. El objetivo de este documento es mostrar que, si se debilita la definición de Cauchy, las sucesiones que la satisfagan pueden obtener propiedades interesantes. A este "debilitamiento" lo llamamos sucesiones cuasi-Cauchy. Se hablará primero de la recta real y luego se extiende a espacios métricos.

1. En la recta real $\mathbb{R}$

Definición 1.1. *Sea* (x_n) *una sucesión de números reales.*

† (x_n) *es de Cauchy si dado* $\epsilon > 0$ *existe un entero* $K > 0$ *tal que* $m, n \geq K$ *implica que* $|x_m - x_n| < \epsilon$.

† (x_n) *es cuasi-Cauchy si dado* $\epsilon > 0$ *existe un entero* $K > 0$ *tal que* $n \geq K$ *implica que* $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$.

Observación 1. *Note que toda sucesión de Cauchy es cuasi-Cauchy. Basta hacer* $m = n + 1$ *en el primer inciso de la definición* (1.1).
No es cierto que toda sucesión cuasi-Cauchy es de Cauchy. Para ver esto, sea (s_n) *la sucesión de sumas parciales de la serie* $\sum 1/n$. *Se probará que esta sucesión es cuasi-Cauchy pero no es de Cauchy.*

[*] Unas notas acerca de estas sucesiones. Versión α. Jorge Andres Rojas.
[**] Ver bibliografía para más info acerca del artículo.

Para ver que es cuasi-Cauchy, sea $\epsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \epsilon$. Para $n \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq n+1$ se tiene que

$$\begin{aligned} |s_{n+1} - s_n| &= \left|1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\right| \\ &= \left|\frac{1}{n+1}\right| \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Luego se tiene que

$$|s_{n+1} - s_n| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{k} < \epsilon$$

Por lo tanto, para $\epsilon > 0$ dado, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq k$ implica que $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$. Así, (s_n) es cuasi-Cauchy.
Se procede a mostrar que (s_n) no es de Cauchy. Sea k un natural dado. Para $m, n > k$ naturales se tiene que

$$|s_m - s_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m}$$

Como $n+1 < n+2 < n+3 < \cdots < m$ entonces

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m}$$

Note que el número de elementos que hay de n hasta m es $m - n$. Así, se concluye que

$$\frac{m-n}{m} < |s_m - s_n|$$

En particular cuando $m = 2n$ se tiene que

$$\frac{2n-n}{2n} = \frac{1}{2} < |s_{2n} - s_n|$$

Se concluye que existe $\epsilon_0 = 1/2$ tal que para toda k existe al menos un $n > k$ y al menos un $m = 2n > k$ tal que $|s_m - s_n| \geq \epsilon_0$. Por lo tanto, no es de Cauchy.
Un comentario adicional a todo esto, es que no toda sucesión divergente es

cuasi-Cauchy. Por ejemplo, la sucesión $(x_n) = (-1)^n$ *no es cuasi-Cauchy. Observe que, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene lo siguiente*

$$\begin{aligned} |(-1)^{n+1} - (-1)^n| &= |(-1)(-1)^n - (-1)^n| \\ &= |(-1-1)(-1)^n| = 2 \end{aligned}$$

Así, el valor de $\epsilon_0 = 1/2$ *tiene la propiedad de que para todo* K *existe al menos un* $n > K$ *tal que* $\epsilon_0 < |(-1)^{n+1} - (-1)^n|$. *Por lo tanto* $(x_n) = (-1)^n$ *no es cuasi-Cauchy.*

Así hemos llegado al primer aspecto interesante acerca de la condición cuasi-Cauchy. El criterio de Cauchy para sucesiones en $\mathbb{R}$ el cual afirma que toda sucesión de números reales converge si y sólo si es de Cauchy. Esto es lo mismo a afirmar que sólo las sucesiones convergentes en $\mathbb{R}$ son de Cauchy. Como la sucesión de sumas parciales de la serie armónica diverge, entonces no es de Cauchy; Aunque se ha mostrado que es cuasi-Cauchy. Así, no solo son las sucesiones convergentes cuasi-Cauchy sino que existen sucesiones divergentes que también lo son. Así, ejemplos de sucesiones cuasi-Cauchy hay muchos, como se puede deducir de lo anteriormente mencionado.

Proposición 1.2. *Una sucesión* (x_n) *de números reales es de Cauchy si y sólo si toda subsucesión de* (x_n) *es cuasi-Cauchy.*

Demostración. $\Rightarrow$)
Sea (x_n) una sucesión de Cauchy. Entonces, para $\epsilon > 0$ dado, existe N tal que para todo $m, n \geq N$ implica que $|x_m - x_n| < \epsilon$. Sea (x_{n_k}) una subsucesión de (x_n). En particular para todo $k_r, k_s \geq N$ cumplen que

$$|x_{k_r} - x_{k_s}| < \epsilon$$

Por lo tanto, (x_{n_k}) es de Cauchy. Como toda sucesión (una subsucesión es una sucesión) de Cauchy es cuasi-Cauchy, entonces se deduce que (x_{n_k}) es cuasi-Cauchy.
$\Leftarrow$)
Suponer que (x_n) no es de Cauchy. Se probará que existe una subsucesión de (x_n) no es cuasi-Cauchy.
Como (x_n) no es de Cauchy, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para toda N existe al menos un $n > N$ y al menos un $m > N$ tal que $|x_m - x_n| \geq \epsilon_0$. En particular, para $n_k > N$ y $m = n_{k+1} > N$ se tiene $|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| \geq \epsilon_0$ Por lo tanto la subsucesión (x_{n_k}) no es cuasi-Cauchy. $\square$

Se podría pensar que si una sucesión es cuasi-Cauchy, entonces toda subsucesión de ella es cuasi-Cuachy. En realidad, esto no es cierto.

Observación 2. *Como ya se hizo ver en la observación* (1)*, la sucesión de sumas parciales de la serie armónica es cuasi-Cauchy. Vamos a mostrar que existe una subsucesión de ella que no es cuasi-Cauchy.*
Sea (s_n) *la sucesión de sumas parciales de la serie armónica. Considere la siguiente subsucesión de* (s_n)*:*

$$(s_{100}, s_{200}, s_{300}, \ldots)$$

Sea $K \in \mathbb{N}$*. Por la propiedad Arquimediana existe algún valor* $m > K$ *con* m *algún múltiplo de* 100 *(para que pertenezca a algún término de la subsucesión así definida) tal que*

$$\begin{aligned}|s_{m+100} - s_m| &= \left|\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{m+100}\right| \\ &= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{m+100}\end{aligned}$$

como $m+1 < m+2 < \ldots < m+100$ *entonces*

$$\frac{1}{m+100} + \frac{1}{m+100} + \cdots + \frac{1}{m+100} < \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{m+100}$$

Así,

$$\frac{100}{m+100} < |s_{m+100} - s_m|$$

En particular, para algún valor K *con* $0 < K \leq 99$ *se tiene que*

$$\frac{100}{100+100} = \frac{1}{2} < |s_{200} - s_{100}|$$

Generalizando, se tiene que existe $\epsilon_0 = 1/2$ *tal que para toda* K *existe al menos un* $m > K$ *tal que* $\epsilon_0 \leq |s_{m+1} - s_m|$*. Se concluye que existe una subsucesión de una sucesión cuasi-Cauchy que no es cuasi-Cauchy.*

Es bueno preguntarse cómo se puede saber que una sucesión cuasi-Cauchy sea de Cauchy. La respuesta esta en la siguiente proposición:

Proposición 1.3. *Una sucesión cuasi-Cauchy es de Cauchy si y sólo si tiene exactamente un punto de acumulación.*

Demostración. $\Leftarrow$)
Sea (x_n) una sucesión de Cauchy. Se probará que (x_n) es cuasi-Cauchy y que (x_n) tiene exactamente un punto de acumulación.
De la observación (1) se tiene de inmediato que (x_n) es cuasi-Cauchy. Ahora, como (x_n) es de Cauchy (en $\mathbb{R}$) entonces converge a $L \in \mathbb{R}$. Entonces, para $\epsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica que $|x_n - L| < \epsilon$. Como ϵ es arbitrario, se tiene que toda ϵ-vecindad de L contiene infinitos puntos de la sucesión (los mayores a N), luego L es un punto de acumulación de (x_n). Como (x_n) es convergente, entonces su límite es único. Así, L es el único punto de acumulación de (x_n).
$\Rightarrow$)
Sea L el único punto de acumulación de (x_n) con (x_n) cuasi-Cauchy. Se probará que (x_n) es de Cauchy. Así, para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$ implica que $|x_{k+1} - x_k| < \epsilon$. Como ϵ es arbitrario, a partir del N-ésimo término toda ϵ-vecindad de L contiene infinitos puntos de la sucesión. Así, para $m, n \geq N$ se tiene que

$$|x_n - L| < \epsilon, \quad |x_m - L| < \epsilon$$

Así, para el valor $|x_m - x_n|$ se tiene

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - L + L - x_n| \\ &\leq |x_m - L| + |L - x_n| \\ &\leq |x_m - L| + |x_n - L| \\ &< \epsilon + \epsilon \\ &< 2\epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto, para ϵ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N$ implica $|x_m - x_n| < \epsilon$. Por lo tanto, (x_n) es de Cauchy.

$\square$

Proposición 1.4. *Suponer que (x_n) y (y_n) son sucesiones positivas de números reales cuasi-Cauchy . Entonces $(x_n y_n)$ es también cuasi-Cuachy.*

Demostración. Como (x_n) es de Cauchy, entonces para el real positivo $\frac{\epsilon}{2|y_n|}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se tenga

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{\epsilon}{2|y_n|}$$

Por otro lado, como (y_n) es de Cauchy, entonces para el real positivo $\frac{\epsilon}{2|x_{n+1}|}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > m$ se tenga

$$|y_{n+1} - y_n| < \frac{\epsilon}{2|x_{n+1}|}$$

Sea $K = \min\{m, N\}$. Entonces para todo $n > K$ se tiene

$$\begin{aligned} |x_{n+1}y_{n+1} - x_n y_n| &= |x_{n+1}y_{n+1} - x_{n+1}y_n + x_{n+1}y_n - x_n y_n| \\ &= |x_{n+1}(y_{n+1} - y_n) + y_n(x_{n+1} - x_n)| \\ &\leq |x_{n+1}||y_{n+1} - y_n| + |y_n||x_{n+1} - x_n| \\ &< |x_{n+1}|\frac{\epsilon}{2|x_{n+1}|} + |y_n|\frac{\epsilon}{2|y_n|} = \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $\epsilon > 0$ dado, existe K tal que para todo $n > K$ se tiene

$$|x_{n+1}y_{n+1} - x_n y_n| < \epsilon$$

Por lo tanto $(x_n y_n)$ es cuasi-Cauchy. □

Lema 1.5. *Suponga que I es un intervalo y $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$ es una sucesión de parejas ordenadas en I con $\lim_{i\to\infty} |a_i - b_i| = 0$. Entonces existe una sucesión cuasi-Cauchy (x_i) con la propiedad de que para todo entero $i \geq 1$ existe $j \geq 1$ tal que $(a_i, b_i) = (x_j, x_{j+1})$.*

Demostración. Esta es una prueba de existencia. Luego se pone a consideración un candidato y se prueba que cumple con lo propiedad deseada.
Considere la siguiente subsucesión de $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$

$$(z_n) = \left(a_1, b_1, y_0^1, y_1^1, y_2^1, \cdots, y_{n_1}^1, a_2, b_2, y_0^2, y_1^2, \cdots, y_{n_2}^2, a_3, b_3, \cdots\right)$$

con $y_0^k = b_k$,$y_{n_k}^k = a_{k+1}$ para todo $k \geq 1$, y $\left|y_i^k - y_{i-1}^k\right| < \frac{1}{k}$ para $1 \leq i \leq n_k$.
Lo primero es probar que la sucesión presentada es cuasi-Cauchy.
Suponer que el t_0 término de (z_n) es tal que $z_{t_0} = y_0^k$. Note que, el término anterior a ese y_0^k es de la forma b_k. Así,

$$|y_0^k - b_k| = |b_k - b_k| = 0$$

Por lo tanto, se tiene que $|y_0^k - \ b_k| < \epsilon$ con $\epsilon > 0$ dado.
Suponer que el t_1 término de (z_n) es tal que $z_{t_1} = y_{n_k}^k$ Note que, el término anterior a ese $y_{n_k}^k$ es de la forma $y_{n_{k-1}}^k$. Así, de las premisas se tiene

$$\left|y_{n_k}^k - y_{n_{k-1}}^k\right| < \frac{1}{k}$$

Así, es hacer k tal que $1/k < \epsilon$. Esto es posible por la propiedad arquimediana. Así, $|y^k_{n_k} - y^k_{n_{k-1}}| < \epsilon$.
Suponer que el t_2 término de (z_n) es tal que $z_{t_2} = y^k_i$. Note que, el término anterior a ese y^k_i es de la forma y^k_{i-1}. Así, este caso es análogo al anterior.
Suponer que el t_3 término de (z_n) es tal que $z_{t_3} = a_t$, para t natural. Note que, el término anterior a ese a_t es de la forma $y^{t-1}_{n_{t-1}}$.Así,

$$\left|a_t - y^{t-1}_{n_{t-1}}\right| = 0$$

Por lo tanto, se tiene que $|a_t - y^{t-1}_{n_{t-1}}| < \epsilon$ con $\epsilon > 0$ dado.
Para el caso en el que el término t_4 es de la forma b_t, de la premisa se tiene que dado un ϵ se puede hacer la distancia entre $|b_t - a_t|$ tan pequeña como se desee. Para cualquier caso, si se toma $\delta = \text{mín}\{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4\}$ se tiene que (z_n) es cuasi-Cauchy.
Para la segunda condición, note que para todo $j \geq 1$ existe un $j \geq 1$ en (z_n) tal que $(a_i, b_i) = (x_j, x_{j+1})$.Esto completa la demostración. $\square$

Es bueno recordar una conexión que hay entre las funciones continuas y las sucesiones de Cauchy. Se explica en el siguiente resultado:

Proposición 1.6. *Sea I un intervalo cerrado. Entonces, una función f es continua en I si y sólo si está definida en I y preserva la propiedad de Cauchy, esto es,*
(x_n) es de Cauchy en I con $(x_n) \subset I$ implica que $(f(x_n))$ es de Cauchy.

Demostración. $\Rightarrow$)
Como I es cerrado, entonces I contiene a todos sus puntos de acumulación y contiene a su frontera (Recordar $\overline{I} = I \cup I'$ y $\overline{I} = Int(I) \cup \partial I$). Por lo tanto, toda sucesión convergente de I debe tener su punto de convergencia en I. Es importante que sea convergente (note por ejemplo $[0, \infty)$). De la continuidad de f se tiene que f está definida en I.
Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en I, entonces (x_n) converge y debe hacerlo a un punto de I. Así, por el criterio de sucesiones para la continuidad se tiene que $(f(x_n))$ converge a $f(L)$. Luego $(f(x_n))$ es de Cauchy.
$\Leftarrow$)
Suponer que f no es continua en I. Se va a probar que $f(I)$ no está definida en I o que existe (x_n) de Cauchy tal que $(f(x_n))$ no es de Cauchy.
Si f no es continua en I, entonces $f(I)$ no está definida en todo punto de I, esto es, $f(I)$ no está definida en I.

Como f no es continua en I, existen puntos $x_n, x_m \in I$ tales que $0 < |x_n - x_m| < 1/n$ implica que $|f(x_n) - f(x_m)| \geq \epsilon_0$. Del principio de compresión se tiene que para valores de n grandes, el valor $|x_n - x_m|$ es cada vez más pequeño, pues $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Así, existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq k$ la diferencia se hace tan pequeña como se desee, mientras que, en el caso de $|f(x_n)-f(x_m)|$ ocurre lo contrario. Por lo tanto $(f(x_n))$ no es de Cauchy. $\square$

Ahora se veran las conexiones entre funciones uniformemente continuas y las sucesiones cuasi-Cauchy.

Teorema 1.7. *Suponga que I es un intervalo. Entonces una función de variable real es uniformemente continua en I si y sólo si está definida en I y la imagen de cualquier sucesión cuasi-Cauchy de I es cuasi-Cauchy.*

Demostración. $\Rightarrow$)
Sea (x_n) una sucesión cuasi-Cauchy en I y sea ϵ dado. Se elije $\delta > 0$ tal que si $x, y \in I$ satisfacen $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ (esta elección se puede hacer pues f es uniformemente continua). Como (x_n) es cuasi-Cauchy, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq k$ se tenga $|x_{n+1} - x_n| < \delta$, luego se tiene $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| < \epsilon$.
Por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq k$ se tiene $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| < \epsilon$. Así, $(f(x_n))$ es de Cauchy.
$\Leftarrow$)
Suponga que f no es uniformemente continua en I. Entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existen $a, b \in I$ con $|a-b| < \delta$ pero $|f(a)-f(b)| \geq \epsilon_0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ hacer $a_n, b_n \in I$ tales que $|a_n-b_n| < 1/n$ y $|f(a_n)-f(b_n)| \geq \epsilon_0$. por el lema (1.5), existe una sucesión cuasi-Cauchy (x_i) tal que para todo $i \geq 1$ existe j con $a_i = x_j$ y $b_i = x_{j+1}$. Se tiene entonces que $|x_j - x_{j+1}| < 1/n$ implica $|f(x_j)-f(x_{j+1})| \geq \epsilon_0$. Note que existe ϵ_0 tal que para todo j se tenga $|f(x_j) - f(x_{j+1})| \geq \epsilon_0$. Así, se concluye que $(f(x_i))$ no es cuasi-Cauchy. $\square$

El teorema precedente puede ser fortalecido si I es acotado

Teorema 1.8. *Suponer que f es una función definida en un intervalo acotado I. Entonces f es uniformemente continua en I si y sólo si la imagen bajo f de toda sucesión de Cauchy en I es cuasi-Cauchy.*

Demostración. $\Rightarrow$)
Para probar esta implicación, se procede a probar que si f es uniformemente

continua en I y si (x_n) es una sucesión de Cauchy en I, entonces $(f(x_n))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Así, $(f(x_n))$ es cuasi-Cauchy.
Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en I y sea $\epsilon > 0$ dado. Como f es uniformemente continua se elije δ tal que si $x, u \in I$ satisfacen $|x - u| < \delta$, entonces $|f(x) - f(u)| < \epsilon$. Como (x_n) es de Cauchy, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq k$ se tenga $|x_m - x_n| < \delta$. Por la elección de δ se tiene que $|f(x_m) - f(x_n)| < \epsilon$. Así, para $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq k$, $|f(x_m) - f(x_n)| < \epsilon$. Por lo tanto $(f(x_n))$ es de Cauchy. Se concluye que $(f(x_n))$ es cuasi-Cauchy.
$\Leftarrow)$
Suponga que la imagen de toda sucesión de Cauchy es cuasi-Cauchy y que f no es uniformemente continua en I. Entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existen puntos $x, y \in I$ con $|x - y| < \delta$ pero $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon_0$. Además, para todo $n \geq 1$ se buscan puntos $x_n, y_n \in I$ con $|x_n - y_n| < 1/n$ pero $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$ (esto se puede hacer, pues f no es uniformemente continua). Se afirma sin pérdida de generalidad que (x_n) converge. Si (x_n) no converge, como I es acotado y $(x_n) \subset I$ entonces existe una subsucesión de (x_n) que converge (Teorema de Bolzano-Weierstrass) y se trabajan con esos puntos en $|x_{n_k} - y_{n_k}| < 1/n_k$. De lo anteriormente dicho se tiene que $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots$ converge. Como converge entonces es de Cauchy, pero $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \ldots$ no es cuasi-Cauchy.
Por lo tanto, se ha encontrado una sucesión de Cauchy cuya imagen bajo f no es cuasi-Cauchy. Esto es una contradicción. $\square$

Observación 3. *La importancia de tener una función uniformemente continua en el Teorema* (1.8) *esta dada en la función* $f(x) := 1/x$ *en el intervalo* $(0, 1)$. *Se observa que la sucesión dada por* $x_n := 1/n$ *en* $(0, 1)$ *es una sucesión de Cauchy, pero* $f(x_n) = n$ *no es sucesión de Cauchy en* $\mathbb{R}$ *pues no es convergente.*

2. En espacios métricos

La noción de cuasi-Cauchy en espacios métricos en general es la misma, es decir, es el comportamiento que tiene una sucesión en un espacio métrico X con métrica d de forma que pequeños incrementos entre términos consecutivos tiene el mismo comportamiento que en $\mathbb{R}$, esto es, los incrementos en la sucesión se pueden hacer tan pequeños como se desee.

Definición 2.1. *Sea* (X, d) *un espacio métrico con métrica* d*. Sea* (x_n) *una sucesión de* X*.*

- † (x_n) *es de Cauchy si dado* $\epsilon > 0$ *existe un entero* $K > 0$ *tal que* $m, n \geq K$ *implica que* $d(x_m, x_n) < \epsilon$*.*

- † (x_n) *es cuasi-Cauchy si dado* $\epsilon > 0$ *existe un entero* $K > 0$ *tal que* $n \geq K$ *implica que* $d(x_{n+1}, x_n) < \epsilon$*.*

Se introduce una forma de definir métrica desde algo llamado "pseudométrica".

Definición 2.2. *Sea* X *un conjunto y* $d : X^2 \to [0, \infty]$ *una función.*

- † d *es una* pseudométrica *si satisface* $d(x, x) = 0$*,* $d(x, y) = d(y, x)$*, y* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *para todo* $x, y, z \in X$*.*

- † d *es una* métrica *si también satisface* $d(x, y) < \infty$ *y* $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ *para todo* $x, y \in X$*.*

El aspecto más interesante de las sucesiones de Cauchy y de las cuasi-Cauchy en espacios métricos es que existen algunos espacios en el que la distinción entre Cauchy y cuasi-Cauchy desaparece. Para esto se introduce nueva terminología.

Definición 2.3. *Un espacio métrico* (X, d) *es llamado* no incremental *si toda sucesión cuasi-Cauchy es de Cauchy en* X*. En este caso* d *es llamada una metrica no incremental.*

Observación 4. *El conjunto de los enteros con la métrica Euclídea es no incremental. Se demostrará que toda sucesión cuasi-Cauchy es de Cauchy en los enteros con la métrica Euclídea.*
Sea (x_n) *una sucesión en* $\mathbb{Z}$*. Como es cuasi-Cauchy, para* $\epsilon/(m-n) > 0$ *dado existe* $K > 0$ *tal que* $m \geq n \geq K$ *implica que* $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon/(m-n)$*. Note*

lo siguiente para valores $m \geq n$

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &< \epsilon/(m-n) \\ |x_{n+2} - x_{n+1}| &< \epsilon/(m-n) \\ |x_{n+3} - x_{n+2}| &< \epsilon/(m-n) \\ &\vdots \\ |x_{m-1} - x_{m-2}| &< \epsilon/(m-n) \\ |x_m - x_{m-1}| &< \epsilon/(m-n) \end{aligned}$$

En virtud de la desigualdad triangular se tiene

$$|x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \cdots + |x_m - x_{m-1}| < \frac{\epsilon}{m-n} + \frac{\epsilon}{m-n} + \cdots + \frac{\epsilon}{m-n}$$

$$|x_{n+1} - x_n + x_{n+2} - x_{n+1} + \cdots + x_m - x_{m-1}| < \frac{m-n}{m-n}\epsilon$$

$$|x_m - x_n| < \epsilon$$

Por lo tanto, para ϵ *arbitrario existe* $K \in \mathbb{N}$ *tal que* $m \geq n \geq K$ *implica* $|x_m - x_n| < \epsilon$. *Por lo tanto,* (x_n) *es de Cauchy.*

Toda métrica es por definición, una pseudométrica. Se procede a mostrar que no toda pseudométrica es métrica. Considere la siguiente función $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *definida por* $d(x, y) := |x^2 - y^2|$.

note que

$$d(x, x) = |x^2 - x^2| = |0| = 0$$

$$d(y, x) = |y^2 - x^2| = |(-1)(x^2 - y^2)| = |x^2 - y^2| = d(x, y)$$

$$d(x, y) = |x^2 - y^2| = |x^2 - z^2 + z^2 - y^2| \leq |x^2 - z^2| + |z^2 - y^2| = d(x, z) + d(z, y)$$

De lo anterior, se tiene que d es una pseudométrica. Suponga que $d(x, y) = 0$. *Así,*

$$\begin{aligned} d(x, y) &= 0 \\ |x^2 - y^2| &= 0 \\ x^2 - y^2 &= 0 \\ x^2 &= y^2 \end{aligned}$$

Note que $x^2 = y^2 \not\Rightarrow x = y$. *Por lo tanto d no es métrica.*

Definición 2.4. *Un espacio* ultramétrico *es un espacio métrico* (X, d) *el cual satisface la siguiente desigualdad (llamada la desigualdad ultramétrica):*

$$d(x, y) \leq \sup\{d(x, z), d(z, y)\} \quad \textit{para todo} \;\; x, y, z \in X$$

Los espacios ultramétricos son llamados espacios no arquimeadianos o espacios isosceles. Esto último porque tienen la propiedad de que todos los triangulos en esos espacios son isosceles(?).
El siguiente teorema relaciona estos conceptos.

Teorema 2.5. *Los espacios ultramétricos son no incrementales*

Demostración. Sea (X, d) espacio ultramétrico. Suponga que (x_n) es una sucesión cuasi-Cauchy en X. Sea $\epsilon > 0$ dado. Entonces existe $K > 0$ tal que $n \geq K$ implica que $d(x_n, x_{n+1}) < \epsilon$. Considere m tal que $m, n \geq K$ con $m \leq n$. Como estamos en un espacio ultramétrico, la distancia entre dos puntos cualesquiera de la sucesión (x_n) se puede medir si se mide la distancia entre los términos consecutivos entre ellos. Más precisamente, la desigualdad ultramétrica para este caso es

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sup\{d(x_m, x_{m+1}), d(x_{m+1}, x_{m+2}), \cdots, d(x_{n-1}, x_n)\} \\ &< \sup\{\epsilon, \epsilon, \ldots, \epsilon\} = \epsilon \end{aligned}$$

La última desigualdad es cierta, pues esos elementos pertenecen a (x_n) con $m, n \geq K$. Por lo tanto, (x_n) es de Cauchy. $\square$

Observación 5. *Es natural preguntarse si el reciproco del teorema* (2.5) *es cierto. La respuesta es no. Considere un conjunto* X *de tres elementos los cuales son vértices cualquier triangulo no isósceles, y sea* d *la distancia entre estos vértices. Entonces* (X, d) *no es ultramétrico (?)(en el caso de los isosceles, el triangulo de catetos de lado* 1 *e hipotenusa de lado* $\sqrt{2}$ *no cumple la desigualdad ultramétrica), pero es no incremental pues toda sucesión cuasi-Cauchy debe tener un elemento* x_K *tal que la distancia entre términos consecutivos sea tan pequeña como uno quiera. Esto implica que las sucesiones cuasi-Cauchy son casi constantes, esto es , a partir de ese* x_K *se tiene que* $x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots$ *para poder satisfacer la condición cuasi-Cauchy.*

Definición 2.6. *Suponer que* (X_1, d_1) *y* (X_2, d_2) *son espacios pseudométricos. Se dice que*

1. topológicamente equivalentes *si existe un homeomorfismo* $h : X_1 \to X_2$

2. uniformemente equivalente *si existe una biyección* $h : X_1 \to X_2$ *tal que* h *y* h^{-1} *son uniformemente continuas con respecto a pseudométricas dadas. Tal* h *es llamada una* equivalencia uniforme

Proposición 2.7. *Sean* (X, d), (Y, m) *espacios métricos y* (x_n) *una sucesión cuasi-Cauchy en* X. *Si* f *es uniformemente continua entonces la imagen bajo* f *de* (x_n) *es cuasi-Cauchy.*

Demostración. Como f es uniformemente continua, entonces para $\epsilon > 0$ dado, existe δ tal que para $x, y \in X$ se tenga

$$d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad m(f(x), f(y)) < \epsilon$$

Como (x_n) es cuasi-Cauchy, existe $K > 0$ tal que

$$k \leq n \quad \Rightarrow \quad d(x_{n+1}, x_n) < \delta$$

Así, de lo anteriormente mencionado se tiene que $m(f(x_{n+1}), f(x_n)) < \epsilon$. Por lo tanto, para ϵ dado, existe K tal que

$$k \leq n \quad \Rightarrow \quad m(f(x_{n+1}), f(x_n)) < \epsilon$$

Así, se obtiene el resultado. □

Observación 6. *La propiedad de ser no incremental es preservada por la equivalencia uniforme. Esto se debe al resultado* (2.7). *Por otro lado, ,los espacios métricos de tres elementos (incluyendo los equilateros) son uniformemente equivalentes entre si. Entonces, la propiedad de ser un espacio ultramétrico no esta preservado por la equivalencia uniforme.(?)*

Definición 2.8. *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Sean* $x, y \in X$ *se dice que* x *e* y *están* ϵ*-conectados si existen puntos* $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ *con* $x_0 = x$,$x_n = y$ *y* $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$ *para* $i < n$. *Tal sucesión de puntos es llamada una* ϵ*-cadena que conecta* x *e* y.

Definición 2.9. *Sea* X *un espacio. se define la siguiente función para* $x, y \in X$

$$d^*(x, y) = \inf\{\epsilon \mid x \textit{ e } y \textit{ estan } \epsilon\textit{-conectados}\}$$

Proposición 2.10. d^* *es una ultra-pseudométrica*

Demostración. de la definición de d^* se tiene directamente que $d^*(x,y) \geq 0$ pues es el ínfimo de cantidades positivas. Note que si $d^*(x,y) < \epsilon$, entonces x e y están ϵ-conectados con respecto a d (directo de la definición de esa función). Así, si se supone que $d^*(x,y) < \epsilon$, entonces existe una sucesión de puntos con $x_0 = x$ y $x_n = y$ tal que $d(x_i, d_{i+1}) < \epsilon$. Como $d(x_i, x_{i+1}) = d(x_{i+1}, x_i)$ pues d es métrica, entonces se sigue que $d^*(x,y) = d^*(y,x)$ porque $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$ si y sólo si $d(x_{i+1}, x_i) < \epsilon$. Suponer que $d^*(x,z) < \epsilon$ y que $d^*(z,y) < \epsilon'$ y sin pérdida de generalidad suponer que $\epsilon < \epsilon'$. Así, x e z están ϵ-conectados y z e y están ϵ'-conectados. Luego x e z estan ϵ'-conectados. Por lo tanto, la distancia para ir de x a y está determinada por cual de los dos épsilon es mayor. La sucesión de puntos es la unión de las dos sucesiones con una distancia entre términos consecutivos menor al épsilon mayor. Por lo tanto, $d^*(x,y) \leq \sup\{d^*(x,z), d^*(z,y)\}$, esto es, la relación de ser ϵ-conectado es transitiva. Esto completa la demostración ☐

Teorema 2.11. *Sea (X,d) un espacio no incremental. Entonces es topológicamente equivalente a un espacio ultramétrico.*

Demostración. Se procede a probar que $B_d(x,\epsilon) = B_d^*(x,y)$.

Sea $B_d(x,\epsilon) = \{y \mid d(x,y) < \epsilon\}$ y
$B_{d^*}(x,\epsilon) = \{y \mid d^*(x,y) < \epsilon\}$
Como estamos en un espacio métrico, entonces es posible ϵ-conectar dos puntos x, y de más de una forma,pues es encontrar sucesiones adecuadas que tengan como punto inicial y final a x e y. Así, se tiene que $d^*(x,y) \leq d(x,y)$. Esto implica que para todo $x \in X$ y todo $\epsilon > 0$

$$B_d(x,\epsilon) \subseteq B_d^*(x,\epsilon)$$

Por otro lado, suponga $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Se quiere probar que existe un δ tal que $B_{d^*}(x,\delta) \subseteq B_d(x,\epsilon)$. Suponga que no existe tal δ. Entonces para todo entero$n \geq 1$ existe un punto $a_n \in B_{d^*}(x, 1/n)$ tal que no pertenece a $B_d(x,\epsilon)$. Como $B_{d^*}(x, 1/n)$ existe una $(1/n)$-cadena $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ que conecte x a a_n. Entonces $x_0 = x$,$x_k = a_n$, y $d(x_{x_i}, d_{x_{i+1}}) < 1/n$ para $i < k$. Sea

$$x_0, x_1, x_2, \ldots x_{k-1}, x_k, x_{k-1}, \ldots x_1, x_0$$

un $(1/n)$-circuito. Va desde el punto x hasta el punto afuera de $B_d(x,\epsilon)$ y vuelve a x con pasos de longitud $< 1/n$.Se define una sucesión (y_n) la cual empieza en el 1-circuito, sigue al $(1/2)$-circuito y así sucesivamente. Como los circuitos empiezan y terminan en x, entonces la distancia entre puntos consecutivos posicionados en la frontera entre circuitos sucesivos es cero. Por otro lado si y_i e y_{i+1} estan ambos dentro de un circuito (sin pérdida de generalidad el $(1/n)$-circuito) entonces $d(y_i, y_{i+1}) < 1/n$. Cuando i en y_i va para infinito, la sucesión va para infinito, esto es $n \to \infty$ en (y_n), esto quiere decir que los términos consecutivos se van acercando entre si tanto como se quiera. $1/n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Así, (y_n) es cuasi-Cauchy en (X, d). Además para todo $K > 0$ se puede escoger $i \geq K$ tal que $y_i = x$ y se puede escoger $j > i$ como el punto medio del circuito que empezó en y_i de tal forma que $d(y_i, y_j) \geq \epsilon$ para $\epsilon > 0$ dado. Por lo tanto (y_n) no es de Cauchy. Esto contradice el hecho de que (X, d) es no incremental, por lo tanto ese δ debe existir. $\square$

Observación 7. *Se observa que si* (X, d) *es un espacio métrico entonces* d *uniformemente equivalente a una ultramétrica implica que* d *es no incremental por el teorema* (2.5) *lo cual implica que* d *es equivalente a una ultramétrica por el teorema* (2.11). *Sus reciprocos no son ciertos. Los espacios métricos discretos son equivalentes a un espacio ultramétrico (?). Sea* X *el conjunto de las sumas parciales de la serie armónica con* d *la métrica euclidiana.* (X, d) *es discreto(?) pero no es incremental. Por lo tanto, ser equivalente a una ultramétrica no implica que sea no incremental.*

Referencias

[1] Quasi-Cauchy Sequences, *Amer. Math. Monthly* **(2010)328-333**. doi:10.4169/000298910X480793

[2] Elon Lages Lima. *Análise Real*. Volumen I, Séptima Edición. IMPA, Rio de Janeiro Brasil, 2004.