

Un continuo generado con el triángulo de Sierpiński usando límites inversos

JAVIER CAMARGO*, RAFAEL ISAACS

Universidad Industrial de Santander, Escuela de Matemáticas, Bucaramanga, Colombia.

Resumen. Los límites inversos de continuos son una herramienta para construir espacios con propiedades topológicas curiosas a partir de espacios muy simples. A continuación, usaremos los límites inversos y una construcción inductiva del triángulo de Sierpiński para construir un continuo que, además de preservar propiedades de autosimilitud, tiene propiedades topológicas interesantes.

Palabras claves: Continuos, límite inverso, sistema iterado de funciones, triángulo de Sierpiński, atractor, continuo indescomponible, solenoide diádico, autosimilitud, fractales.

MSC2010: 54F15, 54F50, 54B99.

A continuum generated by the Sierpiński triangle using inverse limits

Abstract. Inverse limits are a tool to construct spaces with curious topological properties, from very simple spaces. In this paper, we use inverse limits and an inductive construction of the Sierpinski triangle to build a continuum with very interesting topological properties, in particular, it is self-similar.

Keywords: Continua, inverse limit, iterated function system, Sierpiński triangle, atractor, indecomposable continuum, dyadic solenoid, self-similarity, fractals.

1. Introducción

El triángulo de Sierpiński es un espacio métrico, compacto, conexo y localmente conexo del plano, donde sus puntos de ramificación forman un subconjunto denso y, además, tiene propiedades que lo clasifican como un objeto fractal [10]. Este espacio ha sido parte de muchas investigaciones en matemáticas, principalmente en topología y sistemas

* Autor para correspondencia: *E-mail:* jcam@matematicas.uis.edu.co
Recibido: 16 de enero de 2012, Aceptado: 21 de abril de 2012.

dinámicos. Existen diferentes construcciones en diferentes contextos que tienen como resultado el triángulo de Sierpiński. Una de las construcciones más conocidas es usando sistemas iterados de funciones, introducidos en [4], donde el triángulo de Sierpiński es el límite de una sucesión de Cauchy en un espacio completo.

Por otra parte, los límites inversos de continuos son una herramienta para construir espacios, que a menudo tienen propiedades topológicas interesantes, usando espacios y funciones continuas muy simples [5]. Aunque es sencillo definir una sucesión inversa, lo que constituye el primer paso para generar un límite inverso, en general es difícil describir con precisión cuál es su límite inverso.

En este trabajo definiremos tres contracciones, w_1, w_2 y w_3 en \mathbb{R}^2 , tales que el sistema iterado de funciones asociado (SIF), $\{\mathbb{R}^2, w_1, w_2, w_3\}$, tiene como atractor el triángulo de Sierpiński. La forma en que definimos estas contracciones nos permite, usando las inversas w_1^{-1}, w_2^{-1} y w_3^{-1} , definir una sucesión inversa que tiene como límite inverso un continuo que contiene como subespacios continuos de gran interés en la teoría de continuos, como son: continuos de Knaster, el solenoide diádico y copias del triángulo de Sierpiński por todo el espacio. Por esta razón, consideramos que el continuo que construimos y llamamos \mathcal{L}_S es muy interesante. Además, la construcción muestra la posibilidad de usar los SIF para construir espacios usando límites inversos.

2. Preliminares

Para un subconjunto A de un espacio topológico X , denotamos por $Int_X(A)$ y $Cl_X(A)$ al interior y la clausura de A , respectivamente. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío. Un continuo X se dice *indescomponible* si no existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. El símbolo \mathbb{N} denota al conjunto de enteros positivos y un *arco* es un espacio homeomorfo a $[0, 1]$. Denotaremos por S^1 la circunferencia unitaria en \mathbb{R}^2 ; es decir, $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Un *grafo* es la unión de un número finito de arcos tal que cada par de estos arcos son disjuntos, o se intersecan en uno o sus dos puntos extremos. Los arcos que forman el grafo los llamaremos *aristas* y los puntos de intersección de las aristas de un grafo los llamaremos *vértices*. Un vértice de un grafo lo llamaremos *vértice simple*, si es un punto de intersección de a lo más dos aristas. Dada una función continua $f : X \rightarrow X$, denotaremos por $f^{\circ n}$ a la composición de f consigo misma, n veces. Para $n = 1$, escribiremos f en lugar de $f^{\circ 1}$.

Dado un espacio métrico completo X , con métrica acotada d , definimos el espacio

$$\mathcal{H}(X) = \{A \subset X : A \text{ es compacto y diferente del vacío}\}. \quad (1)$$

Sabemos que $\mathcal{H}(X)$ es un espacio métrico completo siempre que $\mathcal{H}(X)$ esté dotado con la métrica de Hausdorff \tilde{d} [2, Teorema 1, pág. 37]. Para la definición de \tilde{d} ver [2, Definición 4, pág. 34].

Un resultado muy conocido es el *Teorema del punto fijo de Banach*, que dice que toda contracción w definida sobre un espacio métrico completo X tiene exactamente un punto fijo; es decir, existe un único punto $x \in X$ tal que $w(x) = x$ [11, Teorema 24.16].

Además, si x es el punto fijo, este punto se puede obtener calculando el límite de la sucesión $(z, f(z), f^{\circ 2}(z), \dots)$, tomando cualquier punto $z \in X$.

Una prueba del siguiente teorema puede ser consultada en [2, Teorema 1, pág. 82]. Este resultado nos muestra la posibilidad de construir una contracción sobre $\mathcal{H}(X)$ usando un número finito de contracciones sobre X .

Teorema 2.1. Si $\{w_i : i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ son contracciones en X , donde X es un espacio métrico completo, entonces $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ definida por $W(A) = \cup_{i=1}^n w_i(A)$, para cada $A \in \mathcal{H}(X)$, es una contracción.

El espacio $\mathcal{H}(X)$ es llamado *espacio de fractales*.

Definición 2.2. Un *sistema iterado de funciones* (SIF), consiste de un espacio métrico completo X y un conjunto finito de contracciones w_1, w_2, \dots, w_n sobre X . Lo notaremos por $\{X, w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Además, el punto fijo de la contracción W definida en $\mathcal{H}(X)$ por las contracciones w_1, w_2, \dots, w_n como en el Teorema 2.1, lo llamaremos *atractor*.

El atractor de un SIF, por definición, es un espacio autosimilar y, en general, es un espacio de tipo fractal. Algunos ejemplos y resultados adicionales relacionados con los SIF se pueden encontrar en [2].

Es conocido que todo espacio métrico y compacto es completo [11, 24B.4]. En este artículo nuestros espacios serán métricos y compactos.

Definición 2.3. Sean X un espacio métrico y compacto y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X . Definimos el *límite inferior* de $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, denotado por $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$, y el *límite superior* de $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, denotado por $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$, como:

1. $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \in X : \text{para toda vecindad } U \text{ de } x, \text{ tenemos que } U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para cada } n \geq k, \text{ para algún } k\}$;
2. $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \in X : \text{para toda vecindad } U \text{ de } x, \text{ tenemos que } U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para un número infinito de índices}\}$.

Finalmente, diremos que la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *converge* a A , denotado por $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, si $A = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Obsérvese que para cualquier sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, por definición, tenemos que $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Así, probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ es equivalente a probar que $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subset A$ y $A \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ [6, Lema 4.3].

El límite dado en la Definición 2.3 coincide con el límite que obtenemos si consideramos la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}(X)$ como espacio métrico [6, Corolario 4.8].

Definición 2.4. Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos compactos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n^{n+1} : X_{n+1} \rightarrow X_n$ una función continua y sobreyectiva. La doble sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ la llamaremos *sucesión inversa*. Además, el *límite inverso* de la sucesión inversa $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$, que denotamos por $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$, lo definimos por

$$\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\} = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n : f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n, \text{ para cada } n \right\}.$$

Sea $\pi_k: \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \rightarrow X_k$ la función proyección definida por $\pi_k((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = x_k$, para cada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Denotaremos por $f_k: \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\} \rightarrow X_k$ la función restringida $f_k = \pi_k|_{\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}}$. Es importante tener en cuenta que las funciones f_k son sobreyectivas para cada $k \in \mathbb{N}$ [8, 2.1.6].

Una prueba del siguiente teorema se puede ver en [9, Teorema 2.4].

Teorema 2.5. *El límite inverso de espacios métricos compactos es un espacio métrico compacto y el límite inverso de continuos es un continuo.*

El espacio de Cantor es un espacio métrico, perfecto, compacto y totalmente desconexo. En [11, Corolario 30.4], se muestra que el espacio de Cantor es el único espacio, salvo homeomorfismos, que cumple estas propiedades. Una versión del espacio de Cantor, aparece como el conjunto ternario de Cantor que consiste en los números del intervalo cerrado $[0, 1]$ que, representados en base tres, se pueden escribir sin unos [11, Ejemplo 17.9.c]. Con la siguiente proposición mostramos una construcción del espacio de Cantor como límite inverso, construcción que usaremos más adelante. Creemos que la prueba debe estar en la literatura, sin embargo, no sabemos dónde y mostramos una demostración para comodidad del lector.

Proposición 2.6. *Sea $\{A_n, f_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión inversa, donde cada A_n es un espacio métrico compacto, totalmente desconexo y $(f_n^{n+1})^{-1}(y)$ no es degenerado, para cada $y \in A_n$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\varprojlim \{A_n, f_n^{n+1}\}$ es homeomorfo al espacio de Cantor.*

Demostración. Sea $A = \varprojlim \{A_n, f_n^{n+1}\}$. Sabemos que A es un espacio métrico compacto, por el Teorema 2.5.

Observemos primero que si D es una componente de A tal que d_1 y d_2 son dos puntos diferentes en D , entonces existe $k \in \mathbb{N}$ con $f_k(d_1) \neq f_k(d_2)$. Esto implica que $f_k(D) \subset A_k$ es conexo y no es degenerado, contradiciendo que A_k es totalmente desconexo. Con lo que tenemos que A es totalmente desconexo.

Probemos ahora que A es perfecto. Sean $a \in A$ y \mathcal{U} un abierto en A tal que $a \in \mathcal{U}$. Entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y un abierto U_k en A_k tales que $a \in f_k^{-1}(U_k) \subset \mathcal{U}$, por [8, Proposición 2.1.9]. Como $(f_k^{k+1})^{-1}(f_k(a))$ no es degenerado, podemos construir inductivamente un punto $b \in A$ tal que $f_i(b) = f_i(a)$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, y $f_{k+1}(b) \neq f_{k+1}(a)$. Así, $b \in f_k^{-1}(U_k) \subset \mathcal{U}$, $a \neq b$ y A es perfecto.

Finalmente, A es el espacio de Cantor, por [11, Corolario 30.4]. □

3. Construcción

En esta sección mostramos una construcción de un límite inverso que llamamos \mathcal{K}_S , basados en un SIF que tiene como atractor el triángulo de Sierpiński. Algunas propiedades de \mathcal{K}_S las estudiaremos en la Sección 4.

El triángulo de Sierpiński, que denotamos por \mathcal{T} , es uno de los espacios más importantes y emblemáticos de la geometría fractal. La definición inductiva de \mathcal{T} hoy en día es muy

popular; se puede encontrar en manuales divulgativos sobre fractales, por ejemplo [1, pág. 6], y libros clásicos como [7, pág. 276].

El triángulo de Sierpiński se puede obtener como atractor de diferentes SIF. El más corriente consta de tres homotесias con factor de contracción un medio y se puede ver en [1, Ejemplo 4.1.5]. El SIF de nuestro interés incluye además giros.

Definición 3.1. Sean w_1, w_2 y w_3 contracciones en \mathbb{R}^2 , definidas de la siguiente manera:

$$w_1(x, y) = \frac{1}{2}(x, y), \quad w_2(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{y } w_3(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Entonces $\{\mathbb{R}^2, w_1, w_2, w_3\}$ es un sistema iterado de funciones. Además, no es difícil ver que su atractor es el triángulo de Sierpiński \mathcal{T} . Sea T_1 el grafo en \mathbb{R}^2 tal que las aristas forman un triángulo equilátero con vértices (simples): $(0, 0), (1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Definimos $T_n = W^{\circ n-1}(T_1)$, donde W es la contracción sobre $\mathcal{H}(X)$ definida usando las contracciones w_1, w_2 y w_3 , como en el Teorema 2.1 (ver Figura 1).

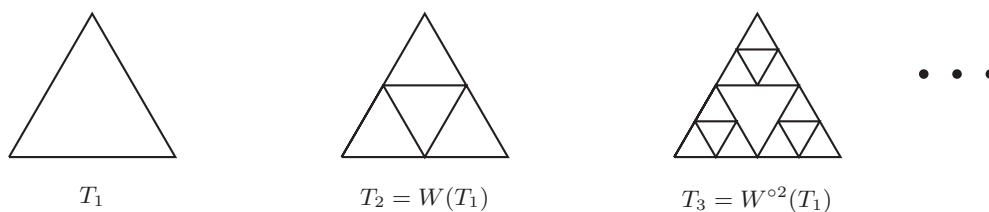


Figura 1. Construcción de \mathcal{T} a partir de $\{\mathbb{R}^2, w_1, w_2, w_3\}$.

Es importante tener en cuenta la siguiente observación.

Observación 3.2. Por la definición de W , el grafo $T_{k+1} = w_1(T_k) \cup w_2(T_k) \cup w_3(T_k)$. Sea $T_k^i = w_i(T_k)$, con $i \in \{1, 2, 3\}$. Entonces $w_i: T_k \rightarrow T_k^i$ es un homeomorfismo, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, tal que T_k^1 tiene sus vértices simples en $(0, 0), (\frac{1}{2}, 0)$ y $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$, T_k^2 en $(\frac{1}{2}, 0), (\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ y T_k^3 en $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, como se puede ver, para $k \in \{1, 2\}$, en la Figura 1. Además, para cada k , T_k siempre tiene los mismos vértices simples $(0, 0), (1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos $f_k^{k+1}: T_{k+1} \rightarrow T_k$ de la siguiente manera:

$$f_k^{k+1}(x, y) = w_i^{-1}(x, y) \text{ cuando } (x, y) \in T_k^i, i \in \{1, 2, 3\}. \quad (3)$$

Evaluando en (2), tenemos que $w_1(1, 0) = w_2(1, 0) = (\frac{1}{2}, 0), w_1(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = w_3(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ y $w_2(0, 0) = w_3(0, 0) = (\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$. Además, $T_k^1 \cap T_k^2 = \{(\frac{1}{2}, 0)\}, T_k^1 \cap T_k^3 = \{(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})\}$

y $T_k^2 \cap T_k^3 = \{(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})\}$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$. De lo anterior tenemos que f_k^{k+1} está bien definida y es continua, para cada $k \in \mathbb{N}$ [11, Teorema 7.6]. La razón por la cual escogimos las contracciones definidas en la Definición 3.1 es para que la función f_k^{k+1} esté bien definida.

Es importante resaltar, para tener una idea geométrica, que la definición de la función $f_k^{k+1}: T_{k+1} \rightarrow T_k$ se puede presentar como $f_{k-1}^k = f|_{T_k}: T_k \rightarrow T_{k-1}$, donde $f(x, y) = 2(g_3(g_2(g_1(x, y))))$, y:

$$g_1(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } \sqrt{3}(x - \frac{1}{2}) \leq y; \\ (\frac{-x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} + \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}) & \text{si } y \leq \sqrt{3}(x - \frac{1}{2}), \end{cases}$$

$$g_2(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } y \leq \frac{\sqrt{3}}{4}; \\ (x, \frac{\sqrt{3}}{2} - y) & \text{si } \frac{\sqrt{3}}{4} \leq y, \end{cases}$$

$$g_3(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } y \leq -\sqrt{3}(x - \frac{1}{2}); \\ (\frac{-x}{2} - \frac{\sqrt{3}y}{2} + \frac{3}{4}, \frac{-\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}) & \text{si } -\sqrt{3}(x - \frac{1}{2}) \leq y. \end{cases}$$

Esta definición muestra con mayor claridad la continuidad de la función. Además, no es difícil verificar que las funciones g_1, g_2 y g_3 son dobles del plano \mathbb{R}^2 , como mostramos, para $k = 2$ en la Figura 2.

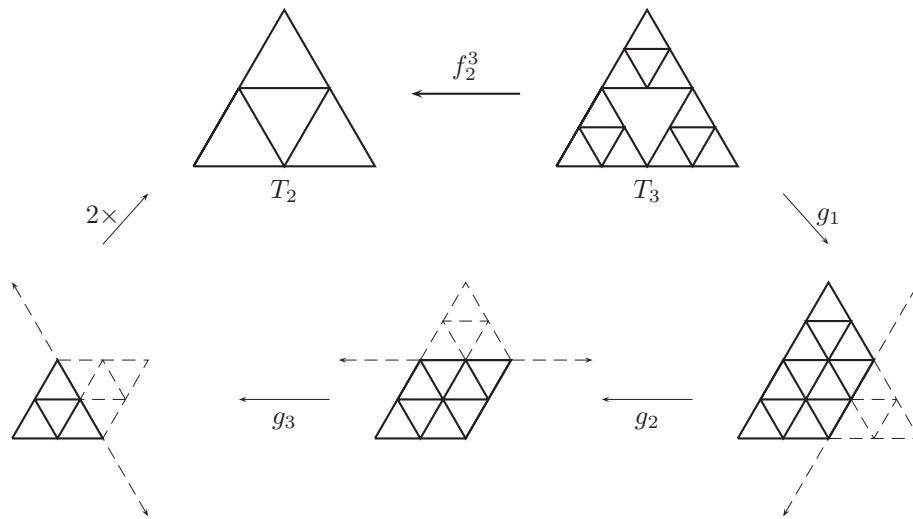


Figura 2. La función f_2^3 paso a paso.

Basándonos en lo anterior y en la Definición 2.4, $\{T_n, f_{n-1}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión inversa. Definimos el continuo (ver Teorema 2.5)

$$\mathcal{K}_S = \varprojlim \{T_n, f_{n-1}^n\}. \tag{4}$$

El espacio \mathcal{K}_S lo describiremos con más detalle en la siguiente sección.

4. Propiedades de \mathcal{K}_S

A continuación, en el Teorema 4.2, describiremos el continuo \mathcal{K}_S y finalizaremos esta sección con propiedades adicionales de este espacio.

En adelante usaremos la siguiente notación: sean a, b y c los vértices de T_1 . Entonces ab, bc y ac serán las aristas del grafo T_1 que unen los vértices a y b , b y c , y a y c , respectivamente. Para cada par de enteros positivos m y n , con $n < m$, denotamos por $f_n^m : T_m \rightarrow T_n$ la composición $f_n^{n+1} \circ f_{n+1}^{n+2} \circ \dots \circ f_{m-1}^m$.

Lema 4.1. *Sea f_k^{k+1} la función definida en (3), para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces, los conjuntos $(f_1^k)^{-1}(ab)$, $(f_1^k)^{-1}(bc)$ y $(f_1^k)^{-1}(ac)$ son arcos en T_k , para cada $k \geq 2$.*

Demostración. Supongamos primero que $k = 2$. En la Figura 3 denotamos por a los vértices de T_2 que al aplicar f_1^2 van a a , por b los que van a b y por c los que van a c .

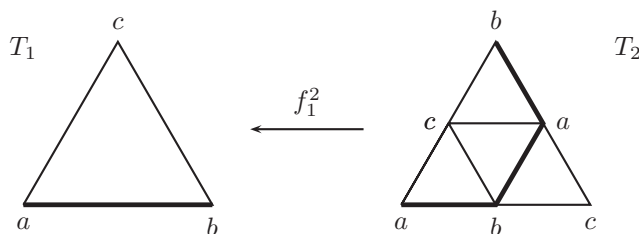


Figura 3. $(f_1^2)^{-1}(ab)$, $(f_1^2)^{-1}(bc)$ y $(f_1^2)^{-1}(ac)$ son arcos.

Con la definición de f_k^{k+1} que dimos en (3), es fácil concluir que $(f_1^2)^{-1}(ab)$ es la unión de las aristas en T_2 con vértices a y b (ver Figura 3); es decir, $(f_1^2)^{-1}(ab)$ es un arco en T_2 . De la misma forma es fácil ver que $(f_1^2)^{-1}(bc)$ y $(f_1^2)^{-1}(ac)$ también son arcos.

Supongamos ahora que $(f_1^{m-1})^{-1}(ab)$, $(f_1^{m-1})^{-1}(bc)$ y $(f_1^{m-1})^{-1}(ac)$ son arcos en T_{m-1} . Claramente, $f_1^m = f_1^{m-1} \circ f_{m-1}^m$. Así, es suficiente probar que $(f_{m-1}^m)^{-1}((f_1^{m-1})^{-1}(ab))$, $(f_{m-1}^m)^{-1}((f_1^{m-1})^{-1}(bc))$ y $(f_{m-1}^m)^{-1}((f_1^{m-1})^{-1}(ac))$ son arcos en T_m .

Algo que se puede verificar fácilmente de la definición dada en (3) es:

1. Los vértices simples de T_n van, cuando aplicamos f_{n-1}^n , a los vértices simples de T_{n-1} . Así, si codificamos con a, b o c a los vértices en cada espacio T_n que, por medio de la función f_1^n , tienen como imagen a, b o c en T_1 , respectivamente (como lo hicimos en el caso $k = 2$), entonces los vértices simples de T_n tienen cada uno una letra diferente.

2. Sabemos que $T_m = \cup_{i=1}^3 T_{m-1}^i$, donde $T_{m-1}^i = w_i(T_{m-1})$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Como $f_{m-1}^m|_{T_{m-1}^i} = w_i^{-1}$ es un homeomorfismo, por la Observación 3.2, tenemos que los vértices simples de T_{m-1}^i tienen cada uno letra diferente, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

De las afirmaciones 1. y 2., sin pérdida de generalidad podemos suponer la situación que presentamos en la Figura 4 (cualquier otra codificación con a, b y c es equivalente).

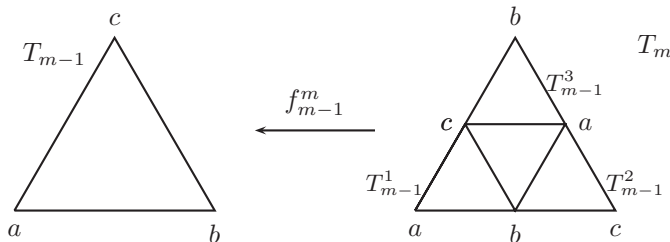


Figura 4. Codificación de los grafos T_{m-1} y T_m .

Por nuestra suposición, $(f_1^{m-1})^{-1}(ab)$ es un arco en T_{m-1} tal que contiene los vértices simples a y b representados sobre T_{m-1} en la Figura 4. Es importante resaltar que estos puntos a y b ubicados en los vértices simples de T_{m-1} son en realidad puntos finales del arco $(f_1^{m-1})^{-1}(ab)$. Como $f_{m-1}^m|_{T_{m-1}^i} : T_{m-1}^i \rightarrow T_{m-1}$ es un homeomorfismo, tenemos que

$$(f_{m-1}^m)^{-1}((f_1^{m-1})^{-1}(ab)) \cap T_{m-1}^i$$

es un arco que contiene los vértices representados con las letras a y b para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Así,

$$\begin{aligned} (f_1^m)^{-1}(ab) &= (f_{m-1}^m)^{-1}((f_1^{m-1})^{-1}(ab)) = ((f_{m-1}^m)^{-1}((f_1^{m-1})^{-1}(ab)) \cap T_{m-1}^1) \\ &\cup ((f_{m-1}^m)^{-1}((f_1^{m-1})^{-1}(ab)) \cap T_{m-1}^2) \cup ((f_{m-1}^m)^{-1}((f_1^{m-1})^{-1}(ab)) \cap T_{m-1}^3). \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} ((f_{m-1}^m)^{-1}((f_1^{m-1})^{-1}(ab)) \cap T_{m-1}^1) \cap ((f_{m-1}^m)^{-1}((f_1^{m-1})^{-1}(ab)) \cap T_{m-1}^2) &= \{b\}, \\ ((f_{m-1}^m)^{-1}((f_1^{m-1})^{-1}(ab)) \cap T_{m-1}^2) \cap ((f_{m-1}^m)^{-1}((f_1^{m-1})^{-1}(ab)) \cap T_{m-1}^3) &= \{a\}, \\ ((f_{m-1}^m)^{-1}((f_1^{m-1})^{-1}(ab)) \cap T_{m-1}^1) \cap ((f_{m-1}^m)^{-1}((f_1^{m-1})^{-1}(ab)) \cap T_{m-1}^3) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Con lo que tenemos que $(f_{m-1}^m)^{-1}((f_1^{m-1})^{-1}(ab))$ es un arco, y así, $(f_1^m)^{-1}(ab)$ es un arco.

Con el mismo argumento podemos mostrar que $(f_1^m)^{-1}(bc)$ y $(f_1^m)^{-1}(ac)$ son arcos en T_m para completar la prueba. \square

A continuación describimos al continuo \mathcal{K}_S .

Teorema 4.2. *El continuo \mathcal{K}_S es unión de tres continuos indescomponibles, K_1, K_2 y K_3 , tales que $K_i \cap K_j$ es un espacio de Cantor, para $i \neq j$.*

Demostración. Sean $Z_1^1 = ab$ y Z_n^1 el arco $(f_1^n)^{-1}(ab)$ en T_n , para cada $n \geq 2$ (ver Proposición 4.1). Definamos

$$K_1 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_S : x_1 \in ab\}.$$

Probemos que $K_1 = \varprojlim \{Z_n^1, f_n^{n+1}|_{Z_{n+1}^1}\}$. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K_1$, entonces $f_1^m(x_m) = x_1$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Como $x_1 \in ab$, $x_m \in (f_1^m)^{-1}(ab) = Z_m^1$, para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Con lo que concluimos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim \{Z_n^1, f_n^{n+1}|_{Z_{n+1}^1}\}$ y $K_1 \subset \varprojlim \{Z_n^1, f_n^{n+1}|_{Z_{n+1}^1}\}$. Como Z_1^1 es ab , es claro que $\varprojlim \{Z_n^1, f_n^{n+1}|_{Z_{n+1}^1}\} \subset K_1$. Así, $K_1 = \varprojlim \{Z_n^1, f_n^{n+1}|_{Z_{n+1}^1}\}$.

Como Z_n^1 es un continuo y $f_n^{n+1}|_{Z_{n+1}^1} : Z_{n+1}^1 \rightarrow Z_n^1$ es continua y sobreyectiva para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que K_1 es un continuo, por el Teorema 2.5.

De la prueba del Lema 4.1, sabemos que Z_n^1 es un arco y $Z_n^1 = L_{n1}^1 \cup L_{n2}^1 \cup L_{n3}^1$, donde cada L_{ni}^1 es un arco y $f_n(L_{ni}^1) = Z_{n-1}^1$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Con lo que K_1 es un continuo indescomponible, por [8, Teorema 2.1.19].

De la misma manera definimos $K_2 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Z : x_1 \in bc\}$ y $K_3 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Z : x_1 \in ac\}$. Nótese que $Z = K_1 \cup K_2 \cup K_3$, y de lo anterior, que K_i es indescomponible, para $i \in \{1, 2, 3\}$.

Finalmente, probemos que $K_i \cap K_j$ es un espacio de Cantor, siempre que $i \neq j$. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K_1 \cap K_2$ (es igual para $K_2 \cap K_3$ o $K_1 \cap K_3$). Entonces $x_1 \in ab \cap bc$, esto es, $x_1 = b$. Por la Proposición 2.1.20 de [8],

$$K_1 \cap K_2 = \varprojlim \{A_n, f_n^{n+1}|_{A_{n+1}}\},$$

donde $A_n = (f_1^n)^{-1}(b)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese que A_n es finito para cada n , y $|f_n^{-1}(z)| \geq 2$ para cada $z \in A_{n-1}$. Así, $K_1 \cap K_2$ es un espacio de Cantor, por la Proposición 2.6. \square

Es conocido que si definimos $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}; \\ 2 - 3x & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}; \\ 3x - 2 & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

entonces, $\varprojlim \{[0, 1], f\}$ es el continuo indescomponible conocido como continuo de Knaster con dos puntos finales, que representamos en la Figura 5. Los detalles de la construcción y la gráfica que presentamos se pueden consultar en [7, Ejemplo 3, pág. 205].

Usando la notación que utilizamos en la prueba del Teorema 4.2, escribimos $K_1 = \varprojlim \{Z_n^1, f_n^{n+1}|_{Z_{n+1}^1}\}$, donde Z_n^1 es un arco para cada $n \in \mathbb{N}$. Además,

$$Z_{n+1}^1 = L_{n1}^1 \cup L_{n2}^1 \cup L_{n3}^1,$$

donde cada L_{ni}^1 es un arco y $f_n^{n+1}|_{L_{ni}^1} : L_{ni}^1 \rightarrow Z_n^1$ es un homeomorfismo, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. De lo anterior, se puede ver que existen homeomorfismos $h_n : Z_n^1 \rightarrow [0, 1]$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tales que:

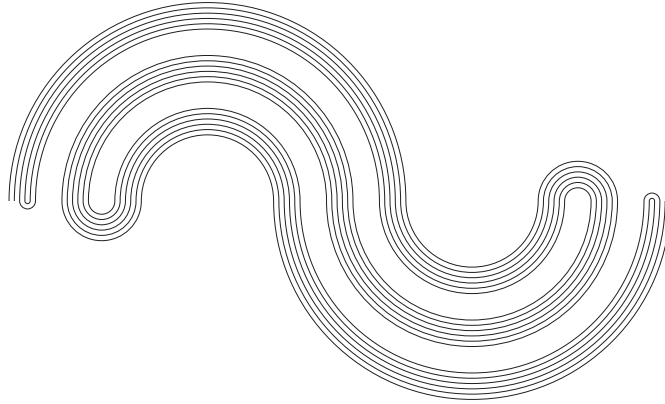


Figura 5. Continuo de Knaster con dos puntos finales.

$$f \circ h_{n+1} = h_n \circ f_n^{n+1} |_{Z_{n+1}^1}.$$

Con esto concluimos que K_1 es homeomorfo al continuo representado en la Figura 5, por [8, Teorema 2.1.49]. De la misma manera, tenemos que K_2 y K_3 son también continuos indescomponibles homeomorfos al continuo de Knaster con dos puntos finales (Figura 5). Por consiguiente, en el Teorema 4.2 mostramos que \mathcal{K}_S es la unión de tres continuos de Knaster con dos puntos finales homeomorfos, tales que la intersección entre cada par de ellos es un conjunto de Cantor.

En otras palabras, \mathcal{K}_S es un “triángulo” que tiene como lados continuos de Knaster y los vértices son espacios de Cantor.

Definición 4.3. Sea $\Sigma_2 = \varprojlim \{X_n, j_n^{n+1}\}$, donde $X_n = S^1$ y $j_n^{n+1}: S^1 \rightarrow S^1$ se define como $j_n^{n+1}(z) = z^2$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces Σ_2 es un continuo, que se conoce como *solenoides diádico*.

El solenoide diádico es un continuo indescomponible de dimensión uno y no aplanable, tal que cada subcontinuo propio es un arco; Σ_2 es un grupo topológico con la operación que hereda como subgrupo de $(S^1)^\mathbb{N}$. Esto implica que para cada par de puntos x e y en Σ_2 , existe un homeomorfismo $h: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ tal que $h(x) = y$; es decir, Σ_2 es homogéneo. Por lo anterior, el solenoide diádico es un ejemplo importante en teoría de los continuos. Es importante resaltar que la función $j_n^{n+1}(z) = z^2$ se puede reemplazar por $j_n^{n+1}(z) = z^p$ para cualquier $p \in \mathbb{N}$, y obtener el *solenoides p -ádico*, que se denota por Σ_p y tiene las propiedades que mencionamos anteriormente para Σ_2 [9, 2.8 y 2.16].

A continuación, mostramos que \mathcal{K}_S contiene una copia de Σ_2 .

Proposición 4.4. *Existe un subcontinuo Y de \mathcal{K}_S tal que Y es homeomorfo a Σ_2 . Además, $\text{Int}_{\mathcal{K}_S}(Y) = \emptyset$.*

Demostración. Sea $F_n \subset T_n$ definido como el grafo cuyas aristas forman el triángulo equilátero con los vértices simples de T_n ; es decir, F_n es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Observe que $f_n^{n+1}(F_{n+1}) = F_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $g_n^{n+1} = f_n^{n+1}|_{F_{n+1}}$, entonces $\{F_n, g_n^{n+1}\}$ es una sucesión inversa y $Y = \varprojlim \{F_n, g_n^{n+1}\}$ es un subcontinuo de \mathcal{K}_S .

Mostremos que Y es homeomorfo a Σ_2 . Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\psi_n: F_n \rightarrow S^1$ de la siguiente forma: $\psi_n(0, 0) = (1, 0)$, $\psi_n(1, 0) = e^{\frac{2\pi}{3}i}$, $\psi_n(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = e^{\frac{4\pi}{3}i}$, y extendemos de manera lineal cada arista del triángulo tal que $(\psi_{n+1})^2 = \psi_n \circ g_n^{n+1}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$; es decir el diagrama representado en la Figura 6 es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 F_n & \xleftarrow{g_n^{n+1}} & F_{n+1} \\
 \psi_n \downarrow & & \downarrow \psi_{n+1} \\
 S^1 & \xleftarrow{z^2} & S^1
 \end{array}$$

Figura 6. Funciones ψ_n .

Entonces la sucesión $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ induce un homeomorfismo $\psi: Y \rightarrow \Sigma_2$ definido por $\psi((w_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (\psi_n(w_n))_{n \in \mathbb{N}}$, por [8, Teoremas 2.1.47 y 2.1.48]. De esta manera concluimos que \mathcal{K}_S contiene un subcontinuo Y homeomorfo al solenoide diádico Σ_2 .

Finalmente, mostremos que $Int_{\mathcal{K}_S}(Y) = \emptyset$. Sea $f_n: \mathcal{K}_S \rightarrow T_n$ la función proyección, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\beta = \{f_n^{-1}(U_n) : U_n \text{ es abierto en } T_n \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$ es una base para \mathcal{K}_S , por [8, Proposición 2.1.9]. Sean $z \in \mathcal{K}_S$, $n_0 \in \mathbb{N}$ y U_{n_0} un abierto de T_{n_0} tales que $z \in f_{n_0}^{-1}(U_{n_0})$. Como $T_{n_0+1} = T_{n_0}^1 \cup T_{n_0}^2 \cup T_{n_0}^3$ y $f_{n_0+1}^{n_0+1}|_{T_{n_0}^i}: T_{n_0}^i \rightarrow T_{n_0}$ es un homeomorfismo para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, tenemos que $(f_{n_0+1}^{n_0+1})^{-1}(U_{n_0}) \cap (T_{n_0+1} \setminus F_{n_0+1}) \neq \emptyset$. Así, podemos encontrar un punto $x \in \mathcal{K}_S$ tal que $f_{n_0}(x) \in U_{n_0}$ y $f_{n_0+1}(x) \in T_{n_0+1} \setminus F_{n_0+1}$. Esto implica que $x \in f_{n_0}^{-1}(U_{n_0}) \setminus Y$ y, por tanto, $Int_{\mathcal{K}_S}(Y) = \emptyset$. \square

La prueba de la Proposición 4.4 se puede informalmente aceptar, de una manera más intuitiva, observando la Figura 4 y recorriendo el espacio T_m a lo largo de su triángulo definido por los vértices simples, y notando que la imagen de este recorrido se hace “dos veces” más rápido y en el mismo sentido sobre T_{m-1} . Esto corresponde al comportamiento de la función $f(z) = z^2$ sobre S^1 . Esto muestra que el continuo Y , definido en la prueba de la Proposición 4.4, es esencialmente el solenoide diádico dado de la Definición 4.3.

5. El continuo \mathcal{L}_S

Como \mathcal{T} es el atractor del SIF $\{\mathbb{R}^2, w_1, w_2, w_3\}$ que definimos en la Sección 3, entonces tenemos que $W(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$. Así, es natural definir una sucesión inversa donde cada uno de los espacios factor es homeomorfo a \mathcal{T} . Con base en esta idea, definiremos un continuo que denotaremos como \mathcal{L}_S .

Sabemos que $\mathcal{T} = w_1(\mathcal{T}) \cup w_2(\mathcal{T}) \cup w_3(\mathcal{T})$, donde w_1, w_2 y w_3 son las contracciones definidas en (2). Por las razones que expusimos en la definición de f_n^{n+1} en (3), la función $g: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$, definida por $g(x, y) = w_i^{-1}(x, y)$ si $(x, y) \in w_i(\mathcal{T})$, $i \in \{1, 2, 3\}$, está bien definida y es continua. Así, podemos definir la sucesión inversa $\{\mathcal{T}_n, g_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}$ y $g_n^{n+1} = g$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$\mathcal{L}_S = \varprojlim \{\mathcal{T}_n, g_n^{n+1}\}. \quad (5)$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $\mathcal{K}_S^k = \varprojlim \{T_{n+k}, f_{n+k}^{n+k+1}\}$, donde T_i y f_i^{i+1} las tomamos como en (4). Notemos lo siguiente:

1. \mathcal{K}_S^k es homeomorfo a \mathcal{K}_S , para cada $k \in \mathbb{N}$, por [8, Teorema 2.1.38].
2. Como $T_{k+1} \subset T_{k+2}$, tenemos que $\mathcal{K}_S^k \subset \mathcal{K}_S^{k+1}$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Una propiedad adicional en relación al continuo \mathcal{K}_S es que, como \mathcal{K}_S es el límite inverso de grafos, \mathcal{K}_S tiene dimensión 1 [3, Proposición 2]. Además, como contiene un solenoide diádico (ver Proposición 4.4), \mathcal{K}_S no es plano. Por lo tanto $\mathcal{K}_S \subset \mathbb{R}^3$ [7, Teorema 1, pág. 116]. Con el siguiente teorema mostramos en particular que $\mathcal{L}_S = Cl_{\mathbb{R}^3}(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_S^k)$ [6, Ejercicio 4.16].

Teorema 5.1. $\mathcal{L}_S = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{K}_S^k$.

Demostración. Usando la Definición 2.3, debemos probar dos contenciones $\mathcal{L}_S \subset \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{K}_S^k$ y $\limsup_{k \rightarrow \infty} \mathcal{K}_S^k \subset \mathcal{L}_S$.

Sean $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}_S$ y U_m abierto en \mathcal{T}_m tal que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in g_m^{-1}(U_m)$ [8, Proposición 2.1.9]. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} T_{m+k} = \mathcal{T}_m$, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $T_{m+l} \cap U_m \neq \emptyset$. De esta forma, existe $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_S^l$ tal que $w_m \in T_{m+l} \cap U_m$. Con lo que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_S^l \cap g_m^{-1}(U_m)$. Así, $\mathcal{K}_S^r \cap g_m^{-1}(U_m) \neq \emptyset$ para cualquier $r \geq l$, según se vio en el párrafo 2., y $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{K}_S^k$. Entonces, $\mathcal{L}_S \subset \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{K}_S^k$.

Mostraremos ahora que $\limsup_{k \rightarrow \infty} \mathcal{K}_S^k \subset \mathcal{L}_S$. Sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \limsup_{k \rightarrow \infty} \mathcal{K}_S^k$. Entonces, por la Definición 2.3, párrafo 2., existe una sucesión $(v_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$, donde $v_{k_l} = (w_{k_l+n})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_S^{k_l}$ tal que $\lim_{l \rightarrow \infty} v_{k_l} = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Notemos que $f_{n+k_l}^{n+k_l+1} = g_n^{n+1}|_{T_{n+k_l}}$. Así, $g_n^{n+1}(w_{k_l+n+1}) = w_{k_l+n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como g_n^{n+1} es continua, $g_n^{n+1}(z_{n+1}) = z_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Con lo que concluimos que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}_S$ y $\limsup_{k \rightarrow \infty} \mathcal{K}_S^k \subset \mathcal{L}_S$. \square

Finalmente, mostraremos una propiedad de autosimilitud que preserva el continuo \mathcal{L}_S .

Proposición 5.2. Si $x \in \mathcal{L}_S$, entonces existe un subcontinuo T de \mathcal{L}_S tal que $x \in T$ y T es homeomorfo al triángulo de Sierpiński \mathcal{T} .

Demostración. Sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un punto en \mathcal{L}_S . Como $\mathcal{T}_2 = w_1(\mathcal{T}_1) \cup w_2(\mathcal{T}_1) \cup w_3(\mathcal{T}_1)$, tenemos que $x_2 \in w_{k_1}(\mathcal{T}_1)$ para algún $k_1 \in \{1, 2, 3\}$. Obsérvese que $g_1^2|_{w_{k_1}(\mathcal{T}_1)} = w_{k_1}^{-1}: w_{k_1}(\mathcal{T}_1) \rightarrow \mathcal{T}_1$ es un homeomorfismo. De la misma manera, existe $k_2 \in \{1, 2, 3\}$ tal que $x_3 \in w_{k_2}(\mathcal{T}_2)$ y $g_2^3|_{w_{k_2}(\mathcal{T}_2)} = w_{k_2}^{-1}: w_{k_2}(\mathcal{T}_2) \rightarrow \mathcal{T}_2$ es un homeomorfismo. Como $w_{k_1}(\mathcal{T}_1) \subset \mathcal{T}_2$, tenemos que $w_{k_2}(w_{k_1}(\mathcal{T}_1))$ es un subcontinuo de $w_{k_2}(\mathcal{T}_2)$ y

$g_2^3|_{w_{k_2}(w_{k_1}(\mathcal{T}_1))}: w_{k_2}(w_{k_1}(\mathcal{T}_1)) \rightarrow w_{k_1}(\mathcal{T}_1)$ es un homeomorfismo. De forma inductiva, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen k_1, k_2, \dots, k_n en $\{1, 2, 3\}$ tales que $x_{n+1} \in (w_{k_n} \circ \dots \circ w_{k_1})(\mathcal{T}_1)$ y $g_n^{n+1}|_{(w_{k_n} \circ \dots \circ w_{k_1})(\mathcal{T}_1)}: (w_{k_n} \circ \dots \circ w_{k_1})(\mathcal{T}_1) \rightarrow (w_{k_{n-1}} \circ \dots \circ w_{k_1})(\mathcal{T}_1)$ es un homeomorfismo. Así, definimos $L_n = (w_{k_n} \circ \dots \circ w_{k_1})(\mathcal{T}_1)$ y $h_n^{n+1} = g_n^{n+1}|_{(w_{k_n} \circ \dots \circ w_{k_1})(\mathcal{T}_1)}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Nótese que $\{L_n, h_n^{n+1}\}$ es una sucesión inversa tal que $x \in T = \varprojlim \{L_n, h_n^{n+1}\}$ y $T \subset \mathcal{L}_S$. Obsérvese además que como L_n es homeomorfo a \mathcal{T} y h_n^{n+1} es un homeomorfismo para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que T es homeomorfo a \mathcal{T} , por [8, Proposición 2.1.37]. \square

Observemos que por la autosimilitud del triángulo de Sierpiński \mathcal{T} , podemos decir que para cualquier abierto U en \mathcal{L}_S , existe una copia de \mathcal{T} contenido en U .

Agradecimientos. Esta investigación fue parcialmente soportada por COLCIENCIAS, proyecto 372, y la Vicerrectoría de Investigación y Extensión de la Universidad Industrial de Santander, proyecto 8191.

Referencias

- [1] Arenas G. y Sabogal S.M., *Una introducción a la geometría fractal*, Ediciones Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2011.
- [2] Barnsley M., *Fractals everywhere*, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.
- [3] Charalambous M.G., “The dimension of inverse limits”, *Proc. Amer. Math. Soc.* 58 (1976), 289–295.
- [4] Hutchinson J.E., “Fractals and self-similarity”, *Indiana Univ. Math. J.* 30 (1981), no. 5, 713–747.
- [5] Ingram W.T., “Inverse Limits”, *Aportaciones Matemáticas: Investigación* 15, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2000.
- [6] Illanes A. and Nadler S.B., Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and recent advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 216. Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [7] Kuratowski K., *Topology*, Vol II, Academic Press, New York, 1968.
- [8] Macías S., *Topics on continua*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005.
- [9] Nadler S.B., Jr., *Continuum theory. An introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.
- [10] Sierpiński W., “Sur une courbe dont tout point est un point de ramification”, *Prace Mat.-Fiz* 27 (1916), 77-86.
- [11] Willard S., *General topology*, Dover Publication, Inc. Mineola, New York, 2004.