Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Examen Final
Álgebra Lineal I
Septiembre 8 de 2014
Prof. Javier Camargo

Nombre: _____ Código: _____

Conteste de manera ordenada. No se permite uso de calculadoras ni ningún dispositivo electrónico.

1. *(10 puntos)* Resuelva:
   - *a)* Calcular $5i(2+3i)+4(6-2i)$.
   - *b)* Calcular $\frac{1+2i}{2-i}$.
   - *c)* Calcule el conjugado de $(1+i)(1-i)$.
   - *d)* Escriba en forma polar $1-i$.
   - *e)* Encuentre todas las soluciones de la ecuación $z^3=i$.
2. *(8 puntos)* Si $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$, encuentre $ren(A)$ y $nul(A)$.
3. *(8 puntos)* Encuentre una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenga los vectores $(1,-1,0,1)$ y $(1,1,1,0)$.
4. *(14 puntos)* Sea $W=\{(x,y,z,w): x=-2y=-w\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^4$.
   - *a)* Encuentre una base de W.
   - *b)* Calcule $W^{\perp}$.
   - *c)* Encuentre una base ortogonal de W.
   - *d)* Si $v=(1,1,1,0)$ escriba $v=w+w'$ donde $w\in W$ y $w'\in W^{\perp}$.
5. *(10 puntos)* Encuentre la factorización QR de la matriz

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

1. *(10 puntos)* Resuelva:
   - *a)* Calcular $5i(2+3i)+4(6-2i)=9+2i$.
   - *b)* Calcular $\frac{1+2i}{2-i}=i$.
   - *c)* Calcule el conjugado de $(1+i)(1-i)=2$, luego el conjugado es 2.
   - *d)* Escriba en forma polar $1-i$. El argumento es $-\frac{\pi}{4}$ y $r=\sqrt{2}$, luego $1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.
   - *e)* Encuentre todas las soluciones de la ecuación $z^3=i$. Debemos encontrar la raíz cúbica de i, estas son: $e^{\frac{\pi}{6}i}, e^{\frac{5\pi}{6}i}$ y $e^{\frac{9\pi}{6}i}$.

2. *(8 puntos)* Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, encuentre $ren(A)$ y $nul(A)$. Así, es fácil ver que $ren(A) = gen\{(1,0,-1),(1,1,0)\} = \{(x,y,z) : x = t+s,\ y = s \text{ y } z = -t\}$. Además, $nul(A) = \{(x,y,z) : -x = y = z\}$. Son solamente cálculos que se podían plantear de varias maneras.

3. *(8 puntos)* Encuentre una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenga los vectores $(1,-1,0,1)$ y $(1,1,1,0)$. Lo primero que debemos hacer es notar que los vectores $(1,-1,0,1)$ y $(1,1,1,0)$ son ortogonales; es decir, el problema tiene solución. Completemos una base de $\mathbb{R}^4$. Por ejemplo, podemos construir la base $\beta = \{(1,-1,0,1),(1,1,1,0),(1,0,1,1),(0,1,0,0)\}$ (cada quien la puede construir como considere). Para construir la base ortogonal, aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt:

   - $w_1 = (1,-1,0,1)$.
   - $w_2 = (1,1,1,0) - \frac{(1,1,1,0).(1,-1,0,1)}{(1,-1,0,1).(1,-1,0,1)}(1,-1,0,1) = (1,1,1,0)$.
   - $w_3 = (1,0,1,1) - \frac{(1,0,1,1).(1,-1,0,1)}{(1,-1,0,1).(1,-1,0,1)}(1,-1,0,1) - \frac{(1,0,1,1).(1,1,1,0)}{(1,1,1,0).(1,1,1,0)}(1,1,1,0) = (1,0,1,1) - \frac{2}{3}(1,-1,0,1) - \frac{2}{3}(1,1,1,0) = (-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.
   - $w_4 = (0,1,0,0) - \frac{(0,1,0,0).(1,-1,0,1)}{(1,-1,0,1).(1,-1,0,1)}(1,-1,0,1) - \frac{(0,1,0,0).(1,1,1,0)}{(1,1,1,0).(1,1,1,0)}(1,1,1,0) - \frac{(0,1,0,0).(-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{1}{3})}{(-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}).(-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{1}{3})}(-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = (0,1,0,0) + \frac{1}{3}(1.-1,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1,0) = (0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

   De lo anterior, una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contiene a los vectores $(1,-1,0,1)$ y $(1,1,1,0)$ es $\{(1,-1,0,1),(1,1,1,0),(-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}),(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})\}$.

4. *(14 puntos)* Sea $W = \{(x,y,z,w) : x = -2y = -w\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

   a) Encuentre una base de W.

   b) Calcule $W^{\perp}$.

   c) Encuentre una base ortogonal de W.

   d) Si $v = (1,1,1,0)$ escriba $v = w + w'$ donde $w \in W$ y $w' \in W^{\perp}$.

   a) Una base de W es $\beta = \{(2,-1,0,-2),(0,0,1,0)\}$.

   b) Para calcular $W^{\perp}$ debemos encontrar los vectores que son ortogonales a β; esto es $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ tal que $(x,y,z,w).(2,-1,0,-2) = 0$ y $(x,y,z,w).(0,0,1,0) = 0$. Resolviendo este sistema homogéneo, tenemos que

   $$2x - y - 2w = 0 \quad \text{y} \quad z = 0.$$

   Así,

   $$W^{\perp} = \{(x,y,z,w) : 2x - y - 2w = 0 \text{ y } z = 0\}.$$

   c) En nuestro caso, la base dada en la parte *a)* es ortogonal!, luego, $\beta = \{(2,-1,0,-2),(0,0,1,0)\}$ da respuesta a este punto. En caso de no ser ortogonal, debe aplicar Gram-Schmidt para ortogonalizar o buscarla de otra manera.

   d) Para escribir $v = w + w'$, debemos encontrar las proyecciones sobre W y $W^{\perp}$. Como tenemos una base ortogonal de W, entonces

   $$\text{Proy}_W(v) = \frac{(1,1,1,0).(2,-1,0,-2)}{(2,-1,0,-2).(2,-1,0,-2)}(2,-1,0,-2) + \frac{(1,1,1,0).(0,0,1,0)}{(0,0,1,0).(0,0,1,0)}(0,0,1,0)$$

   $$\text{Proy}_W(v) = \frac{1}{9}(2,-1,0,-2) + \frac{1}{1}(0,0,1,0) = (\frac{2}{9},-\frac{1}{9},1,-\frac{2}{9}).$$

   Ahora, como $v = \text{Proy}_W(v) + \text{Proy}_{W^{\perp}}(v)$, tenemos que

   $$\text{Proy}_{W^{\perp}}(v) = (1,1,1,0) - \text{Proy}_W(v) = (1,1,1,0) - (\frac{2}{9},-\frac{1}{9},1,-\frac{2}{9}) = (\frac{7}{9},\frac{10}{9},0,\frac{2}{9}).$$

Finalmente,

$$(1,1,1,0) = (\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, 1, -\frac{2}{9}) + (\frac{7}{9}, \frac{10}{9}, 0, \frac{2}{9}).$$

5. *(10 puntos)* Encuentre la factorización QR de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ortogonalizando las columnas de A tenemos

- $w_1 = (1,1,1)$.
- $w_2 = (1,0,1) - \frac{(1,0,1).(1,1,1)}{(1,1,1).(1,1,1)}(1,1,1) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.
- $w_3 = (1,1,0) - \frac{(1,1,0).(1,1,1)}{(1,1,1).(1,1,1)}(1,1,1) - \frac{(1,1,0).(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})}{(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}).(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})}(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = (1,1,0) - \frac{2}{3}(1,1,1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$.

Ahora normalizando w_1, w_2 y w_3 tenemos la matriz Q:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Para encontrar R tenemos que:

- $(1,1,1) = [(1,1,1).(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})](\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) = \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.
- $(1,0,1) = [(1,0,1).(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})](\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) + [(1,0,1).(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6})](\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}) = = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{\sqrt{6}}{3}(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6})$.
- $(1,1,0) = [(1,1,0).(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})](\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) + [(1,1,0).(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6})](\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}) + +[(1,1,0).(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})](\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) - \frac{\sqrt{6}}{6}(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}) + +\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Luego

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Así,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$