Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Examen Parcial 2
Álgebra Lineal I
Julio 18 de 2014
Javier Camargo

Nombre: ______________________________ Código: ______________

Conteste de manera ordenada. No se permite uso de calculadoras ni ningún dispositivo electrónico.

1. Determine si cada matriz es invertible. Si es invertible encuentre su inversa. Si no es invertible argumente claramente su respuesta.

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Determine para qué valor o valores de k, si hay alguno, el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + y + kz & = & 1 \\ x + ky + z & = & 1 \\ kx + y + z & = & -2 \end{array} \right.$$

   a) Tiene una única solución.

   b) No tiene solución.

   c) Tiene infinitas soluciones.

3. Encuentre una base para cada subespacio que satisfaga las condiciones indicadas:

   a) $V = \{(x, y, z) : 2x - y = 0\}$ tal que la base contenga al vector $(1, 2, 1)$.

   b) $\mathbb{R}^3$ tal que la base contenga los vectores $(1, 1, 2)$ y $(-1, 0, 1)$.

4. Encuentre $\nu(A)$ y $\rho(A)$ (nulidad y rango de A), donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

1. Inversas:

   a) La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ NO es invertible, pues fácilmente se observa que la tercer columna es la suma de la primera y segunda; es decir, la columnas son linealmente dependientes y por tanto, no invertible. Esta respuesta se puede argumentar de muchas maneras.

   b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ es invertible y su inversa, siguiendo por ejemplo el método de Gauss-Jordan, se obtiene que $B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ -7 & -6 & 10 \end{bmatrix}$.

2. Escribimos la matriz ampliada:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & -2 \end{array}\right].$$
Solucionando paso a paso, obtenemos:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & -2-k \end{array}\right] \to$$
ahora si $k \neq 1$:
$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & -2-k \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -k^2-k+2 & -2-k \end{array}\right].$$
Además note que:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -k^2-k+2 & -2-k \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (-k-2)(k-1) & -2-k \end{array}\right].$$
Para deducir lo siguiente:

   a) Tiene única solución si la matriz es invertible, esto es, si $k \neq 1$ y $k \neq -2$.

   b) No tiene solución si $k = 1$, pues $(1, 1, 2)$ no está en el generado por $\{(1, 1, 1)\}$ (único vector columna linealmente independiente si remplazamos en la ecuación original por $k = 1$).

   c) Tiene infinitas soluciones si $k = -2$, ya que la ultima fila del sistema de ecuaciones es cero.

3. Bases:

   a) Basta observar que V representa un plano en $\mathbb{R}^2$. Así, $dim(V) = 2$. Luego solamente debemos encontrar un vector en V que sea linealmente independiente con el vector $(1, 2, 1)$, éste puede ser $(1, 2, 0)$; es claro que $(1, 2, 0) \in V$, $\{(1, 2, 1), (1, 2, 0)\}$ es linealmente independiente, es decir $\beta = \{(1, 2, 1), (1, 2, 0)\}$ es base de V. Este segundo vector se puede dar de muchas maneras.

   b) Sabemos que una base de $\mathbb{R}^3$ tiene 3 vectores. Luego nuevamente debemos encontrar un vector que sea linealmente independiente con los dos vectores dados. Para esto, podemos calcular el generado por $\{(1, 1, 2), (-1, 0, 1)\}$ y dar un vector fuera de este generado, así:

   $$gen\{(1, 1, 2), (-1, 0, 1)\} = \{(x, y, z) : z = 3y - x\}.$$

   La base se completa con cualquier vector que no satisfaga la condición $z = 3y - x$; por ejemplo $(1, 1, 1)$. Una posible base que da respuesta al problema es

   $$\beta = \{(1, 1, 2), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}.$$

4. Para encontrar $\nu(A)$ y $\rho(A)$ podemos usar la relación $\nu(A)+\rho(A) = 3$. Así, encontrando alguno $\nu(A)$ o $\rho(A)$, obtenemos el otro. Hagamos algunas operaciones por renglones para encontrar $\rho(A)$.

   $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   De lo anterior, el rango $\rho(A) = 2$ y por consiguiente, $\nu(A) = 1$. Esta respuesta se puede obtener de muchas maneras.