Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Examen Parcial 1
Álgebra Lineal I
Mayo 30 de 2014
Javier Camargo

Nombre: ______________________________ Código: ______________

Conteste de manera ordenada. No se permite uso de calculadoras ni ningún dispositivo electrónico.

1. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. De ser verdadera, demuéstrela, en caso de ser falsa, muestre un ejemplo.

   a) $||u-v||^2 = ||u||^2 - ||v||^2$, para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}^n$.

   b) $u-v$ y $u+v$ son perpendiculares cuando $||u|| = ||v||$, donde $u, v \in \mathbb{R}^n$.

   c) El vector $proy_v u + proy_u v$ es paralelo al vector $u+v$, para cualquier par de vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$.

2. Un cubo tiene 4 diagonales. Demuestre que ningún par de ellas son perpendiculares.

3. Muestre que los puntos $(1,-1,1), (2,0,0), (2,1,2)$ y $(0,-2,2)$ son coplanares; es decir, existe un plano que contiene a los cuatro puntos.

4. Encuentre la ecuación de la recta que es la intersección de los planos:

$$2x - y - z = 1 \quad \text{y} \quad 3x - y - 2z = 0.$$

SOLUCIÓN

1. *a*) FALSO. Tomemos $u = (1,1)$ y $v = (1,-1)$. Entonces $u-v = (0,2)$. Calculando $||u-v||^2 = 4$, $||u||^2 = 2$ y $||v||^2 = 2$, donde es claro que $||u-v||^2 \neq ||u||^2 - ||v||^2$.

   b) VERDADERO. Calculando el producto punto para probar que son perpendiculares tenemos: $(u-v).(u+v) = u.u + u.v - v.u + v.v = u.u - v.v$, como $||u|| = ||v||$, $u.u = v.v$. Así, $u.u - v.v = 0$ y los vectores $u-v$ y $u+v$ son perpendiculares.

   c) FALSO. Tomamos $u = (1,0)$ y $v = (1,1)$. Calculando, $proy_v u = \frac{(1,1).(1,0)}{(1,1).(1,1)}(1,1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, y $proy_u v = (1,0)$. De lo anterior, $proy_v u + proy_u v = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + (1,0) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. Por otra parte, $u+v = (2,1)$ y claramente, los vectores $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ y $(2,1)$ no son paralelos.

2. Los vérices del cubo son $v_1 = (0,0,0), v_2 = (1,0,0), v_3 = (0,1,0), v_4 = (0,0,1), v_5 = (1,1,0), v_6 = (1,0,1), v_7 = (0,1,1)$ y $v_8 = (1,1,1)$; donde los cuatro diagonales están determinados por los vectores:

   $\overrightarrow{v_1v_8} = v_8 - v_1 = (1,1,1) - (0,0,0) = (1,1,1)$; $\overrightarrow{v_6v_3} = v_3 - v_6 = (0,1,0) - (1,0,1) = (-1,1,-1)$;

   $\overrightarrow{v_2v_7} = v_7 - v_2 = (0,1,1) - (1,0,0) = (-1,1,1)$; $\overrightarrow{v_4v_5} = v_5 - v_4 = (1,1,0) - (0,0,1) = (1,1,-1)$.

   Finalmente, debemos comprobar que no son perpendiculares ningún para de ellas:

$$\overrightarrow{v_1v_8}.\overrightarrow{v_6v_3} = -1, \quad \overrightarrow{v_1v_8}.\overrightarrow{v_2v_7} = 1, \quad \overrightarrow{v_1v_8}.\overrightarrow{v_4v_5} = 1,$$

$$\overrightarrow{v_6v_3}.\overrightarrow{v_2v_7} = 1, \quad \overrightarrow{v_6v_3}.\overrightarrow{v_4v_5} = 1, \quad \overrightarrow{v_2v_7}.\overrightarrow{v_4v_5} = -1$$

   Como ningún producto es 0, las diagonales del cubo no son perpendiculares.

3. Debemos calcular un plano y comprobar que los 4 puntos están en este plano. Primero, calculemos un plano que tenga los 3 primeros puntos: $(1,-1,1),(2,0,0)$ y $(2,1,2)$. Con esta información encontramos los vectores directores:

$$v_1 = (2,0,0) - (1,-1,1) = (1,1,-1) \quad \text{y} \quad v_2 = (2,1,2) - (1,-1,1) = (1,2,1).$$

Luego la ecuación vectorial del plano es

$$(x,y,z) = s(1,1,-1) + t(1,2,1) + (2,0,0).$$

Las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = s + t + 2 \\ y = s + 2t \\ z = -s + t \end{cases}$$

Sumando 1 y 3, y 2 y 3, tenemos las ecuaciones:

$$x + z = 2t + 2 \quad \text{y} \quad y + z = 3t.$$

Sustituyendo la t, tenemos el plano:

$$3x - 2y + z = 6.$$

Para finalizar, solo debemos comprobar que el punto que no usamos $(0,-2,2)$ está en el plano, pero es claro que $3(0) - 2(-2) + z = 6$. De lo anterior, los 4 puntos son coplanares.

Para encontrar el plano, también, podemos hacer el producto cruz entre v_1 y v_2 y encontrar el vector normal. Donde la ecuación del plano es inmediato. Sin embargo la conclusión es igual.

4. Este ejercicio tiene muchas maneras de resolver. Encontraremos dos puntos de la recta para encontrar la ecuación de la recta. Para encontrar estos puntos, tomemos por ejemplo $x = 0$, entonces quedan las ecuaciones:

$$y + z = -1 \quad \text{y} \quad -y - 2z = 0,$$

sumando $-z = -1$, así $z = 1$ y $y = -2$. Luego un punto sería $(0,-2,1)$. Repitiendo este proceso, hacemos $z = 0$ y tenemos

$$2x - y = 1 \quad \text{y} \quad 3x - y = 0.$$

Restando las ecuaciones $x = -1$, así, $y = -3$ y el segundo punto es $(-1,-3,0)$. Luego debemos encontrar una recta que pase por los puntos $(0,-2,1)$ y $(-1,-3,0)$. El vector director es:

$$v = (0,-2,1) - (-1,-3,0) = (1,1,1).$$

La ecuación vectorial de la recta es:

$$(x,y,z) = t(1,1,1) + (0,-2,1).$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t - 2 \\ z = t + 1. \end{cases}$$