Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Ortogonalidad
Álgebra Lineal II
Julio de 2018
Prof. Javier Camargo

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1. ¿Qué entiende por ortogonalidad?
2. Sea $u = (1, -5, a)$ y $v = (2a, a-1, -1)$. ¿Para qué valores de a, los vectores u y v son ortogonales?
3. Demuestre que si u es ortogonal tanto a v como w, entonces u es ortogonal a $v + w$.
4. Demuestre que si u es ortogonal tanto a v como w, entonces u es ortogonal a $sv + tw$ para todos los escalares s y t.
5. Sea $u = (2, 0, -3)$ y $v = (6, 5, 4)$.
   a) ¿Los vectores u y v son ortogonales?
   b) Encuentre un vector w que sea ortogonal tanto a u como a v.
   c) ¿El conjunto de vectores $S = \{u, v, w\}$ es linealmente dependiente o independiente?
   d) ¿Es posible encontrar un vector z que sea ortogonal a u, v y w? Justifique su respuesta.
6. Construya una base ortogonal del espacio vectorial dado:
   a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y = 0\}$.
   b) $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0\}$.
   c) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$, donde $abc \neq 0$.
   d) $L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0\}$.
   e) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 = 0 \text{ y } x_2 - 2x_4 = 0\}$.
   f) $R = \text{gen}\{(1, 1, -1, 2), (2, -1, 1, 1), (-1, 2, -2, 1)\}$.
7. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$
.
   a) Calcule una base ortogonal de $Nu(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$.
   b) Determine $\text{Proy}_{Nu(A)} v$, donde $v = (1, 1, 0, 0)$.
8. Sea $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$.
   a) Calcule una base ortogonal de W.
   b) Calcule $[(-1, 1, 1, -1)]_\beta$ donde β es la base que calculó en el punto anterior.
   c) Encuentre $W^\perp$.

9. Encuentre una base ortonormal en $\mathbb{R}^4$ que incluya los vectores:

$$u_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0) \quad \text{y} \quad u_2 = (-1/2, 1/2, 1/2, -1/2).$$

10. En los siguientes ejercicios se dan el subespacio H y un vector v.

    a) Calcule $\text{Proy}_H v$;

    b) Encuentre una base ortogonal de $H^\perp$;

    c) Escriba v como $h + p$ donde $h \in H$ y $p \in H^\perp$.

    (I) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x/2 = y/3 = z/4\}$ y $v = (1, 1, 1, 1)$;

    (II) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$ y $v = (1, -1, 2)$;

    (III) $H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + 3z - w = 0\}$ y $v = (1, -1, 2, 3)$;

    (IV) $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = x_2 \text{ y } x_3 - 2x_4 + x_5 = 0\}$ y $v = (1, -1, 0, -1, 1)$.

11. Considere los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$L = \text{gen}\{(1, 2, 1, 2), (0, 1, 0, 1)\} \quad \text{y} \quad H = \text{gen}\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 0)\}.$$

    a) Calcule $L^\perp$ y $H^\perp$.

    b) Calcule una base β_1 de $L^\perp + H^\perp$.

    c) Sea A la matriz formada por los elementos de β_1 como columnas. Calcule $\text{Nu}(A^T)$.

    d) Deduzca una base a partir de $L \cap H$, a partir de la relación $L \cap H = (L^\perp + H^\perp)^\perp$.

    e) Aplique lo anterior a los espacios

$$L_1 = \text{gen}\{(1, 2, 1), (2, 1, 0)\} \quad \text{y} \quad H_1 = \text{gen}\{(1, 1, 1), (1, 1, 3)\}.$$

12. Demuestre que si u y v son vectores ortonormales de $\mathbb{R}^n$, entonces $||u - v|| = \sqrt{2}$.

13. Demuestre el Teorema de Pitágoras: Sean u y v vectores de $\mathbb{R}^n$ tales que $u \perp v$. Entonces

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$$