

# Proyecto Investigador

José Manuel Gutiérrez Llorente

Concurso al

Cuerpo de Profesores Titulares

Universidad de Cantabria

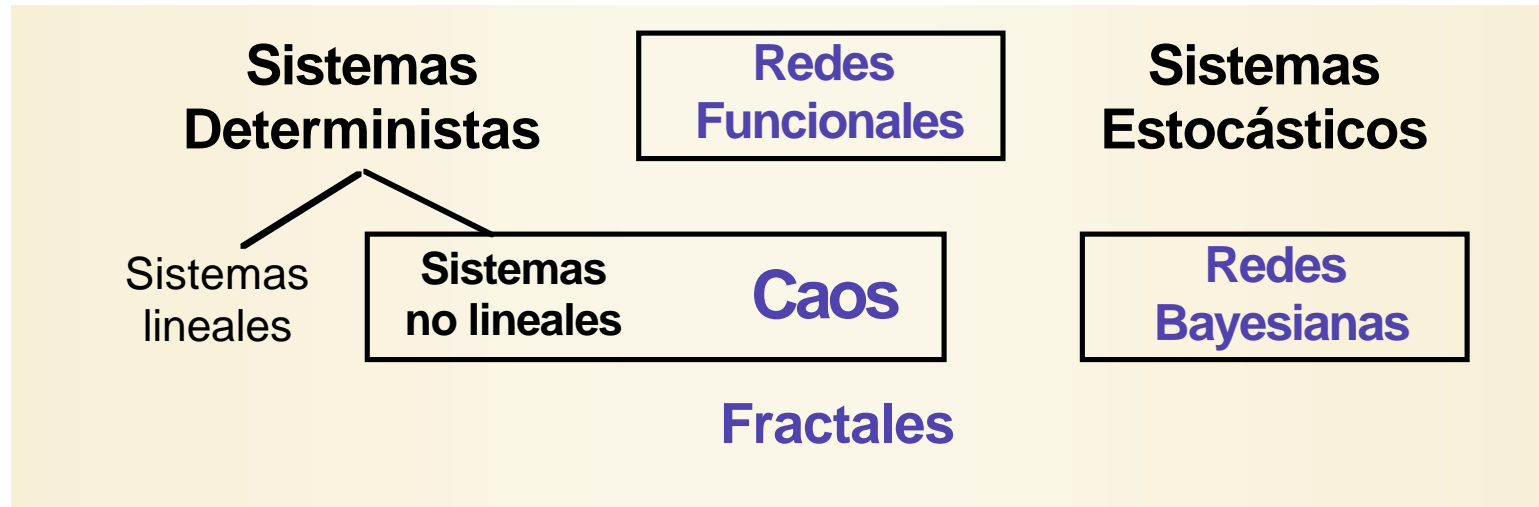


B.O.E. del 23 de Octubre de 1998

Area de conocimiento: Matemática Aplicada.

Actividad: Docencia en Ampliación de Matemáticas

Centro: Escuela de Ingeniería Técnica Minera.



1. Sistemas Dinámicos y Geometría Fractal.
2. Control y Sincronización del Caos.
3. Redes Probabilísticas (Bayesianas).
4. Redes Funcionales.
5. Investigación Aplicada en Meteorología.

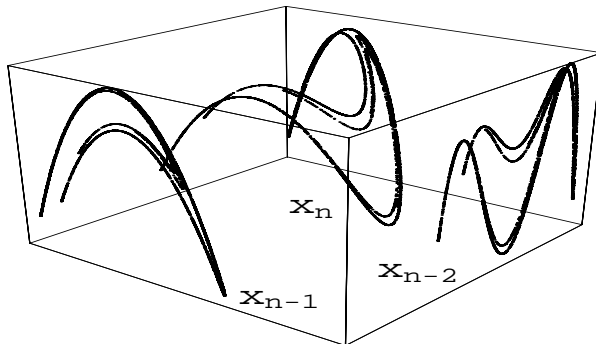
# Sistemas Dinámicos y Geometría Fractal

## Ecuaciones Diferenciales

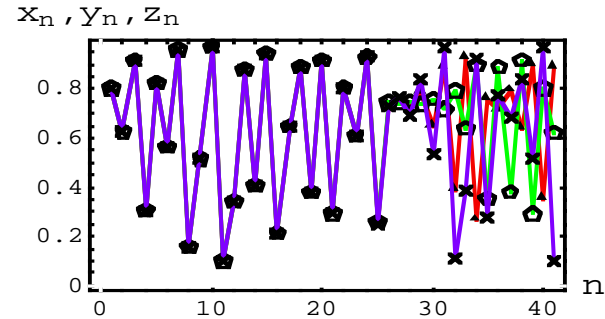
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - \omega \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + fv + F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - fu + F_y \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \\ \frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y} + \omega \left( \frac{\kappa T}{p} - \frac{\partial T}{\partial p} \right) + \frac{\dot{H}}{c_p} \\ \frac{\partial \omega}{\partial p} = -\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{cases}$$

## Ecuaciones Iteradas

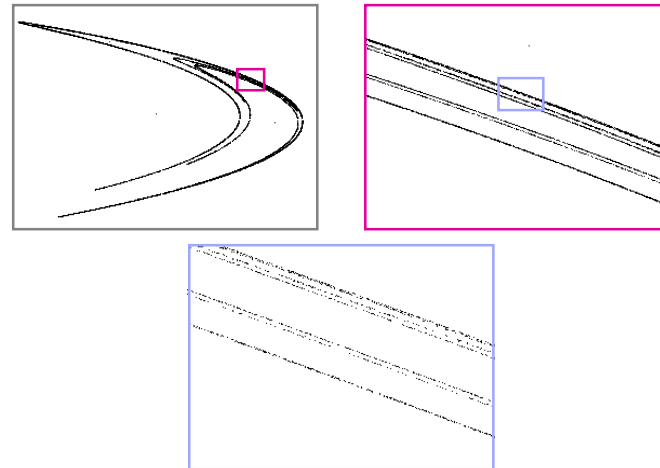
$$x_n = 1 - ax_{n-1}^2 + 0.3x_{n-2}$$



## Sensibilidad a las Cond. Iniciales



## Soporte con Geometría Fractal



## Impredecibilidad a medio plazo

# Geometría Fractal y Medidas Multifractales

*La geometría fractal permite estudiar fenómenos irregulares que no pueden ser caracterizados con las teorías geométricas clásicas.*

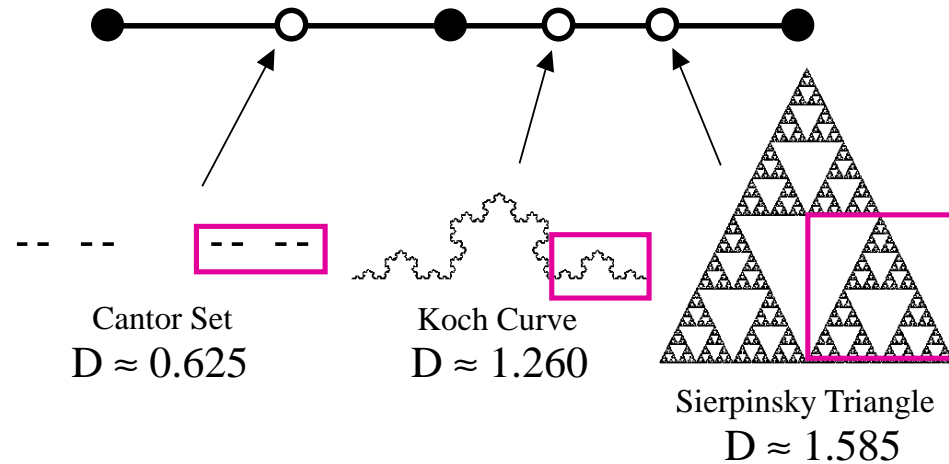
**Invarianza a cambios de escala.** Misma estructura (determinista o estadística) a cualquier escala.

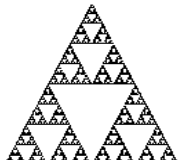

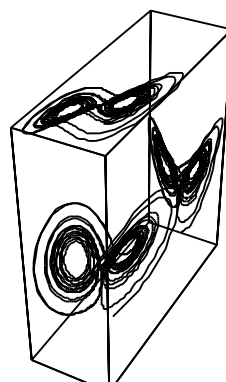
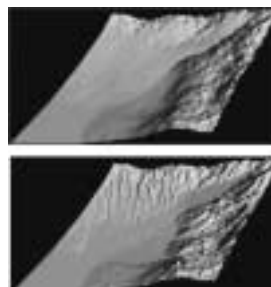
**Leyes de potencia.**  
 $m(l) \sim l^D$

**Soluciones de EDs**

**Curvas y superficies de interpolación**

**Sistemas de Funciones Iteradas**



<p>IFS</p>  <p>L-sistemas</p> 	<p>Atractores extraños</p> 	<p>Paisajes fractales</p>  <p>Curvas de interpolación fractal</p>
---	---	---

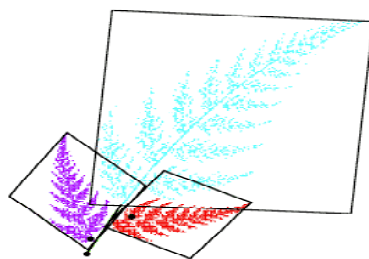
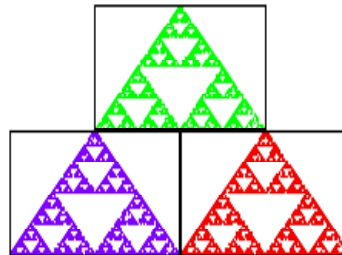
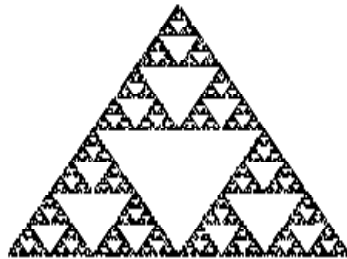
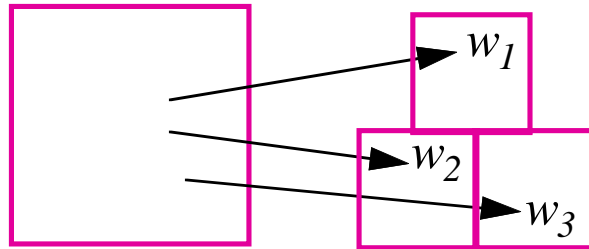


# Sistemas de Funciones Iteradas (SFI)

Un SFI consiste en  $N$  aplicaciones

$$w_1, \dots, w_N$$

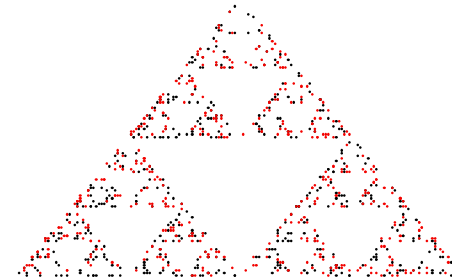
$$A = \bigcup_{i=1}^N w_i(A) \quad \text{“atractor”}$$



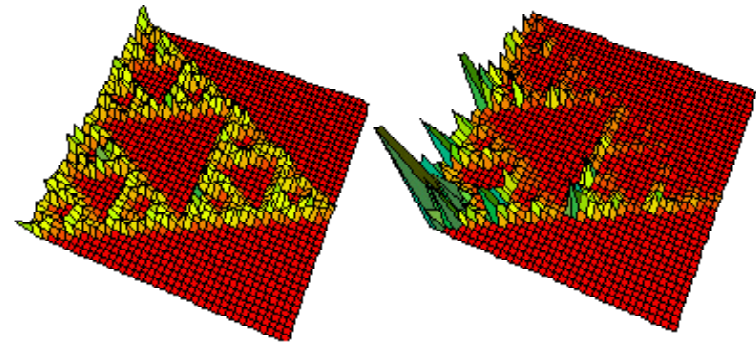
## Algoritmo Probabilístico:

$$x_n \}_{n=1}^{\infty}, \quad x_{n+1} = w_{\sigma_n}(x_n)$$

$$P(\sigma_n = i) = p_i, \quad i = 1, \dots, N$$



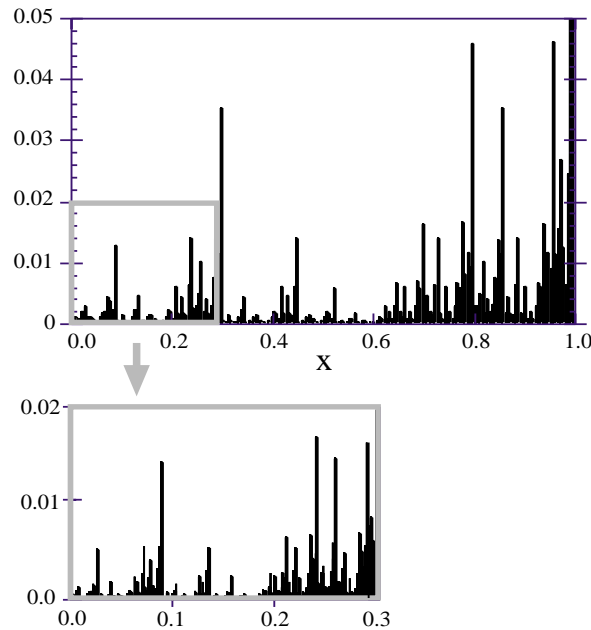
## Medidas multifractales



# Medidas Multifractales. Un Nuevo Enfoque

**Medidas multiplicativas de escalas múltiples**

**Medidas invariantes de sistemas de funciones iteradas**



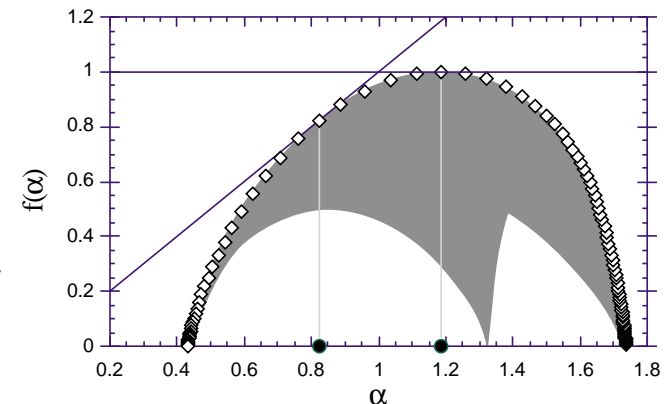
$$E_r = \left\{ x \in S : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\delta_{i\sigma_k}}{n} = r_i, i = 1, \dots, N \right\}.$$

$$\alpha_r = \frac{\sum_i r_i \log p_i}{\sum_i r_i \log s_i}, \quad f(\alpha_r) = \frac{\sum_i r_i \log r_i}{\sum_i r_i \log s_i}$$

$$\dim_H(E(\alpha)) \geq \sup \left\{ \dim_H(E_r), \alpha = \frac{\sum_i r_i \log p_i}{\sum_i r_i \log s_i} \right\}$$

**Sistema paramétrico implícito!!!**

$$\begin{cases} \sum_i s_i^{f(\alpha) - q\alpha} p_i^q = 1. \\ \alpha = \frac{\sum_i s_i^{f(\alpha) - q\alpha} p_i^q \log p_i}{\sum_i s_i^{f(\alpha) - q\alpha} p_i^q \log s_i} \end{cases}$$



A Multifractal Analysis of IFSP ...  
J.M. Gutiérrez, et. al.  
**Fractals**. Vol. 5(1), 17-27. 1996.

A New Exact Method for Obtaining the Multifractal ...  
J.M. Gutiérrez and M. A. Rodríguez  
**Chaos, Solitons and Fractals**. en prensa.

# Conjunto Óptimo de Probabilidades

Aplicando el análisis multifractal anterior:

$$\alpha_{max} = \max_{s_j} \left\{ 1 - \frac{\log(\sum s_i)}{\log s_j} \right\}$$

$$\alpha_{min} = \min_{s_j} \left\{ 1 - \frac{\log(\sum s_i)}{\log s_j} \right\}.$$

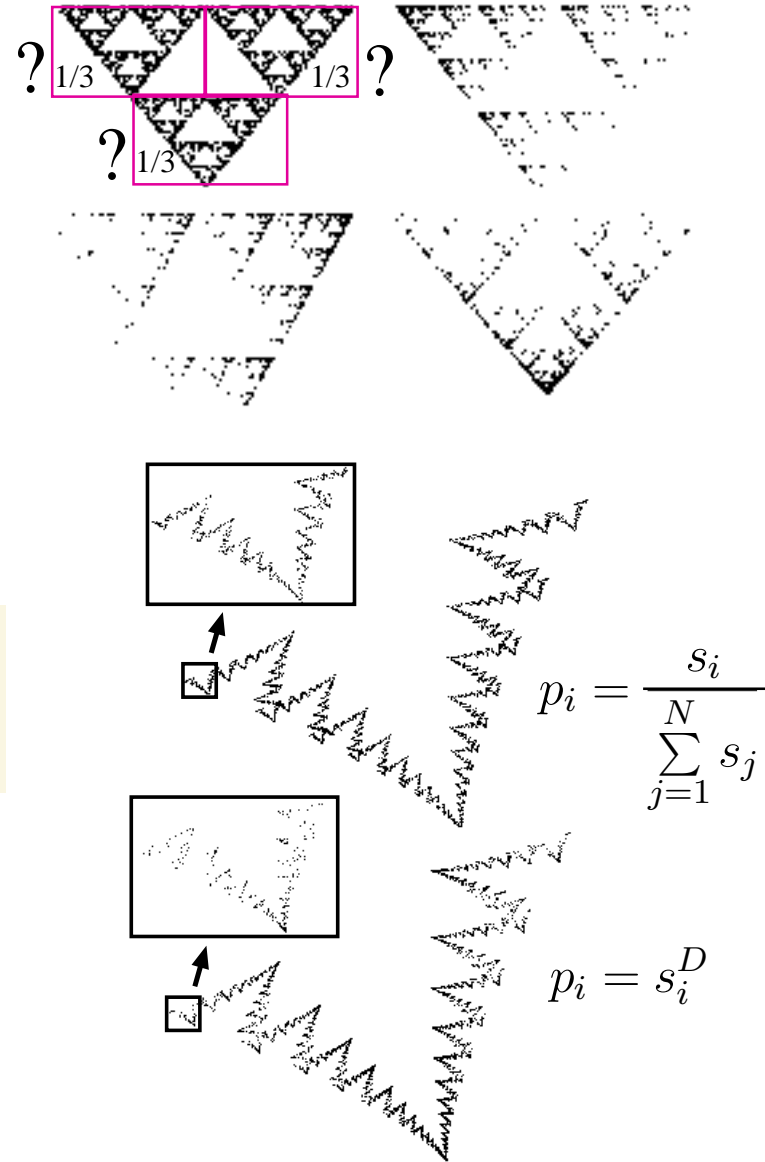
$$D = \frac{\ln p_j}{\ln s_j} = \frac{\ln p_i}{\ln s_i}, \quad \forall i \neq j.$$

*Ecuación no lineal*

$$p_i + \sum_{j \neq i} p_j \frac{\ln s_j}{\ln s_i} = 1.$$

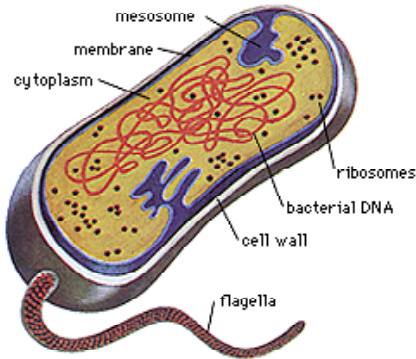
Generating and Rendering Fractal Images  
 J.M. Gutiérrez y otros  
**The Mathematica Journal**. 7(1), 6-14. 1997.

Gutiérrez, J.M. y otros  
 Mathematics with Vision. 175-182. 1995.  
**Computational Mechanics Publications.**





# Estructura de las Secuencias de ADN

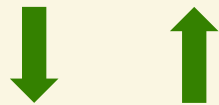


Escherichia Coli  
176195 bases

gccattacct  
ctggtctgga  
agtagtctgg  
acccagacgc  
cgaccagtg  
gagcaactat  
ttcttcgaga  
acctgttcaa  
gtatgagtgg

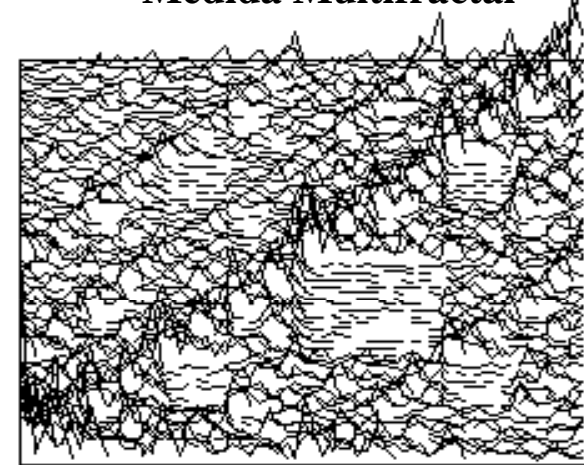
Secuencia  
Simbólica

Alfabeto con 4 símbolos  $\{1, \dots, 4\}$



SFI con 4 transformaciones  
 $w_1, w_2, w_3, w_4$

Medida Multifractal

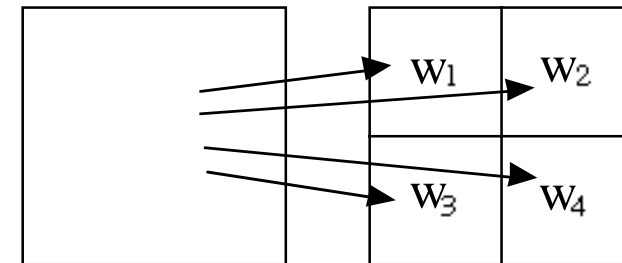


⋮

$$x_n \}_{n=1}^N,$$

$$x_{n+1} = w_{s_n}(x_n)$$

11	21	12	22
31	41	32	42
13	23	14	24
33	43	34	44





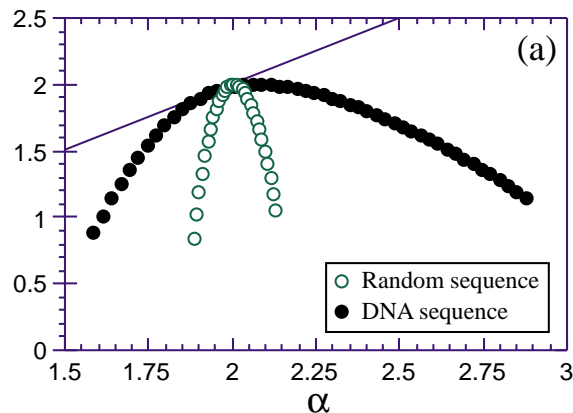
# Secuencias Codificantes y No Codificantes

## Análisis Multifractal

$$f(\mathbf{x}) = \dim_H(E_{\mathbf{x}}) = \frac{\sum x_i \log(x_i)}{\sum x_i \log(s_i)}$$

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\sum x_i \log(p_i)}{\sum x_i \log(s_i)}$$

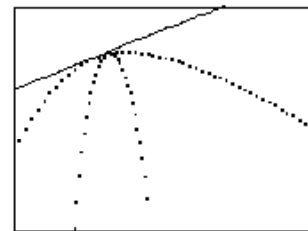
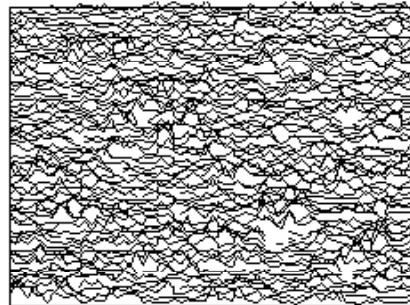
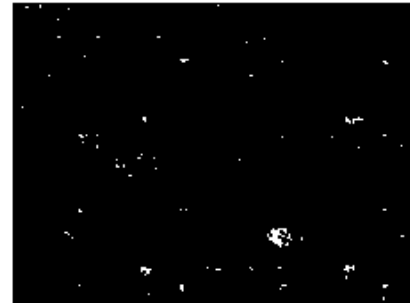
$$\overline{f(\alpha)} = \sup_{\alpha=\alpha(\mathbf{x})} \{f(\mathbf{x})\}$$



Gutiérrez y Rodríguez  
**Anales de Física**. Monografías Vol. 4.  
 129-132. 1998.

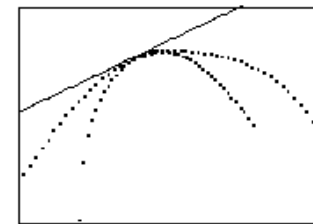
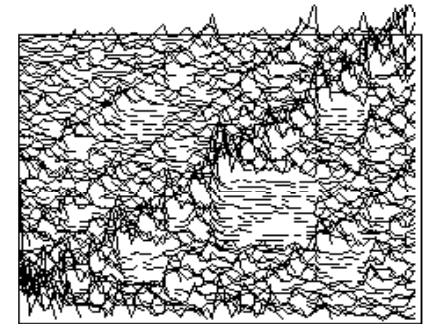
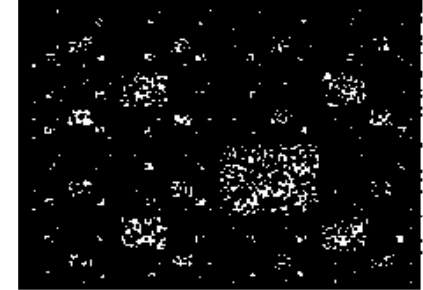
Gutiérrez, Iglesias, Rodríguez, Burgos  
 Chaos and Noise in Biology, 315-319,  
**World Scientific**.

**Escherichia coli**  
 176195 base pairs



**(82 % coding)**

**Homo sapiens DNA**  
 180388 base pairs



**(1.5 % coding)**

# Control y Sincronización del Caos

*La sensibilidad de los sistemas caóticos a las pequeñas perturbaciones es un gran inconveniente, al reducir el rango de operación de muchos mecanismos de tipo electrónico o mecánico (circuitos, láseres, etc...).*

*Por tanto, el control del comportamiento de tales sistemas, conocido usualmente como "control de caos" resulta de gran interés práctico.*

Los mecanismos de control de caos aprovechan la geometría del modelo.

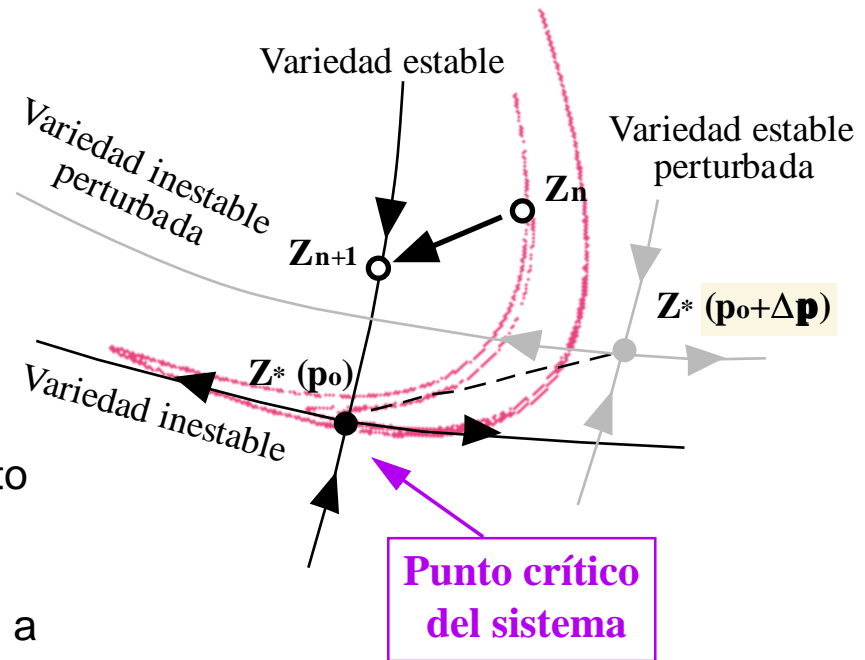
A Mathematica Package for the Analysis ...  
 Gutiérrez, J.M. and Iglesias, A.  
**Computers in Physics.**  
 Vol. 12(6), 608-619. □ 1998.

## PROBLEMAS

Se necesita un conocimiento previo del sistema

El método es aplicable sólo a sistemas de baja dimensión

El método utiliza aproximaciones lineales. Ello implica que sólo funciona en las cercanías del punto.



# Nuevo Método de Control de Caos

*Para evitar los problemas anteriores, se planteó un nuevo mecanismo de control que actúa no sobre los parámetros, sino sobre las variables del sistema*

En sistemas discretos descritos por ecuaciones en iteradas (mapas)  $x(n+1) = f(x(n))$ , el algoritmo de control aplica un pulso de amplitud  $\gamma$  cada  $\Delta n$  iteraciones, bien en forma multiplicativa:

$$x(n) \rightarrow x(n)(1 + \gamma)$$

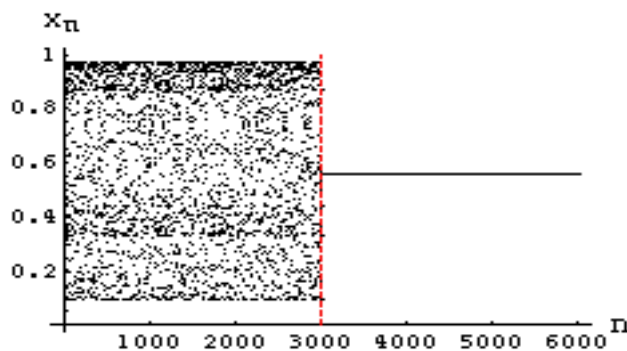
o bien de forma aditiva:

$$x(n) \rightarrow x(n) + \gamma$$

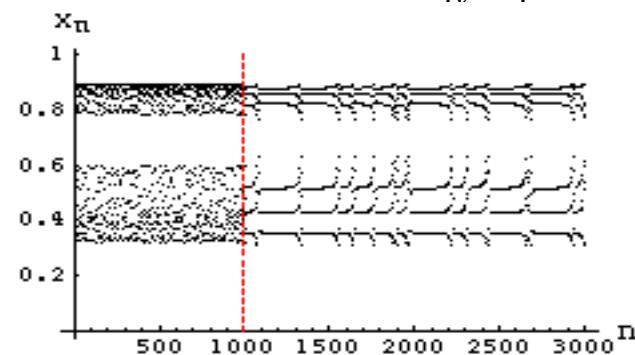
donde  $\gamma$  es una constante y  $\text{mod}(n, \Delta n) = 0$ .

## Mapa Logístico

$$x_n = -a x_{n-1}^2 + a x_{n-1}$$



Punto Fijo



Intermitencias



# Algunas Publicaciones Relevantes

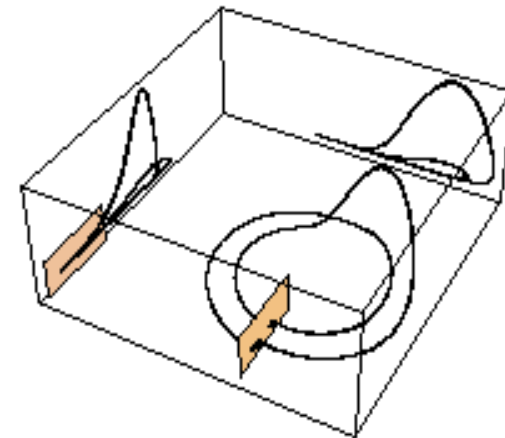
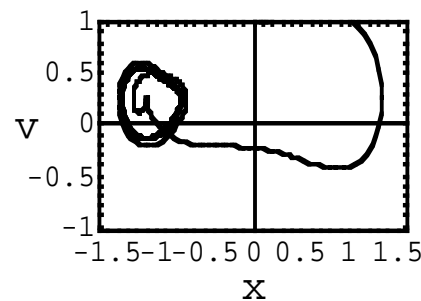
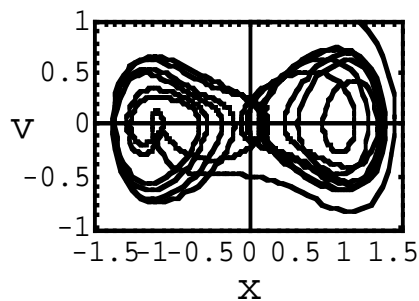
J.M. Gutiérrez, A. Iglesias, and M.A. Rodríguez  
**Physical Review E**. Vol. 48(4), 2507-2513. 1993.

J. Güémez, J.M. Gutiérrez, A. Iglesias, and M.A. Matías  
**Physica D**. Vol. 79, 164-173. 1994.

J. Güémez, J.M. Gutiérrez, A. Iglesias, and M.A. Matías  
**Physics Letters A**. Vol. 190, 429-433. 1994.

Suppression of Chaos through Changes in the System Variables and Numerical Rounding Errors  
 J.M. Gutiérrez, A. Iglesias, J. Güémez and M.A. Matías  
**Chaos, Solitons and Fractals**. Vol. 7(8), 1305-1316. 1996.

A. Iglesias, J.M. Gutiérrez y otros  
**International Journal of Bifurcation and Chaos**.  
 Vol. 6(5), 1351-1362. 1996.

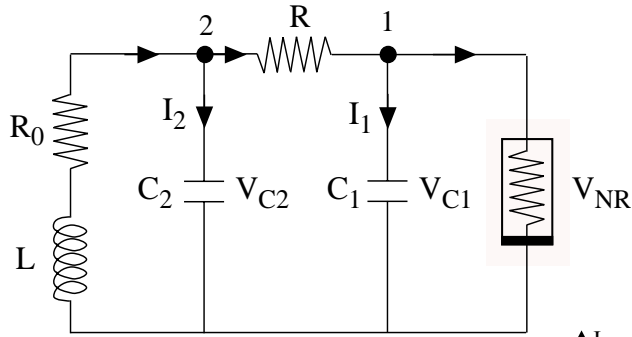


Synchronizing Chaotic Systems ...  
 J.M. Gutiérrez and A. Iglesias  
**Physics Letters A**. Vol. 239(3), 174-180. 1998.



# Implementación Experimental (circuito de Chua)

Laboratorio del Instituto de Física de Cantabria (CSIC)



$$L \frac{dI_L(t)}{d(t)} = -V_{C2} - I_L(t)R_o$$

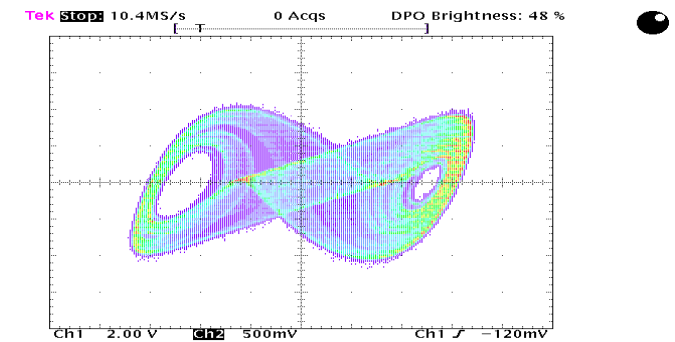
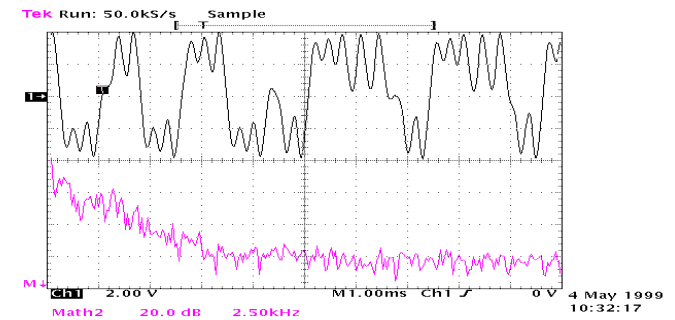
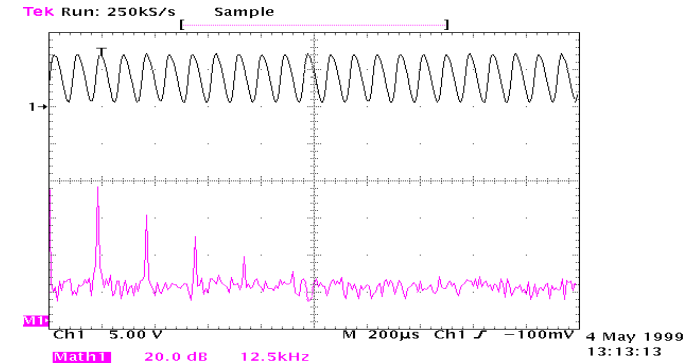
$$C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} = I_L(t) - G(V_{C2}(t) - V_{C1}(t))$$

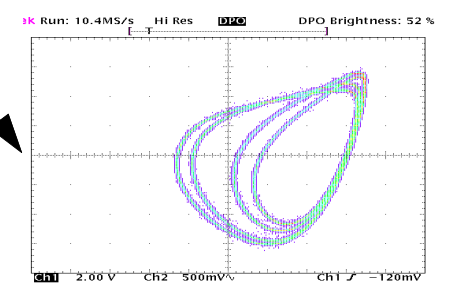
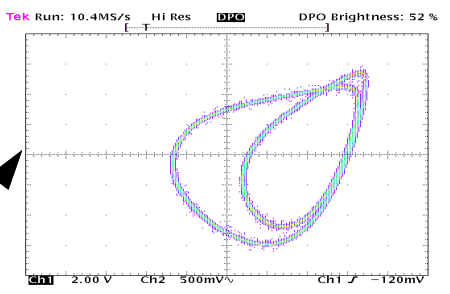
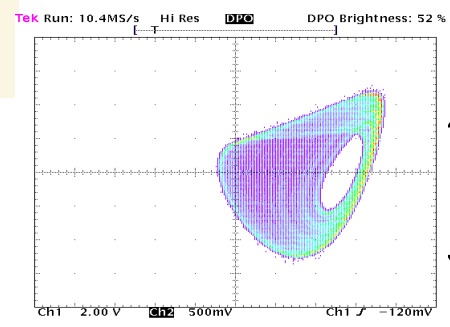
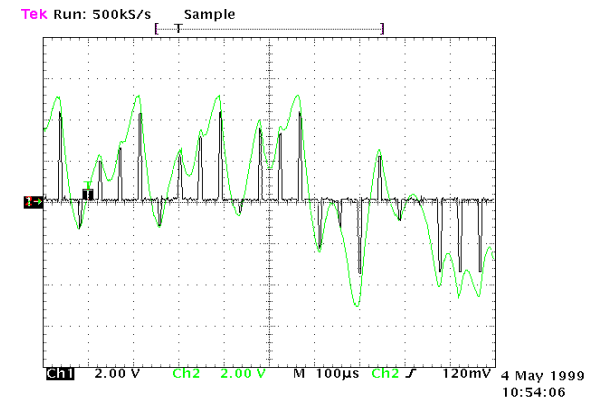
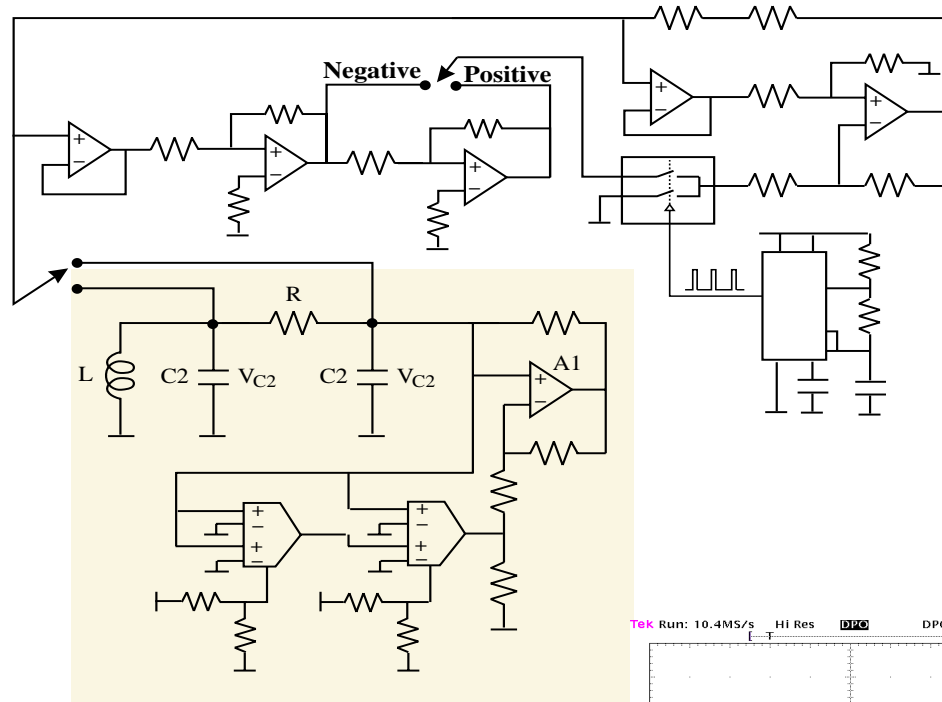
$$C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} = G[V_{C2}(t) - V_{C1}(t)] - gV_{C1}(t)$$

$$I_R = g(V_R) = G_B V_R + \frac{1}{2}(G_B - G_A)(|V_R - 1| + |V_R + 1|)$$

$$\begin{aligned} X &= V_1/B_p & Y &= V_2/B_p & Z &= i_3/B - p \\ T &= tG/C_2 & a &= G_a/G & b &= G_b/G \\ \alpha &= C_2/C_1 & \beta &= C_2/LG^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha[y - x - f(x)] \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y \end{aligned} \quad f(x) = bx + \frac{1}{2}(a - b)[|x + 1| - |x - 1|]$$





**Proyecto Fin de Carrera:**

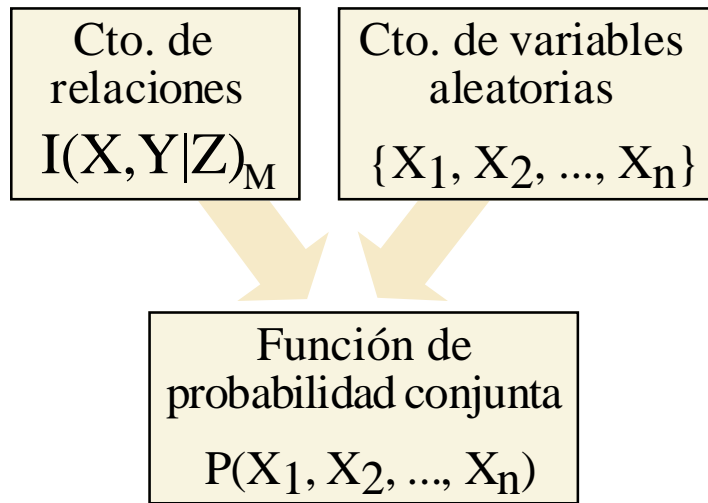
*“Desarrollo e Implementación Práctica de Sistemas de Control para Circuitos no Lineales. Aplicación al Circuito de Chua”*

*Pablo Ruiz Alamo. Ingeniería de Telecomunicación.  
E.T.S.I. de Ingenieros Industriales y de Telecominicación.  
Mayo de 1999. **Matricula de Honor (10)***

# Redes Probabilísticas. Redes Bayesianas

Algunos problemas involucran gran número de variables y se conocen ciertas relaciones de independencia entre ellas.

Obtener un modelo probabilístico

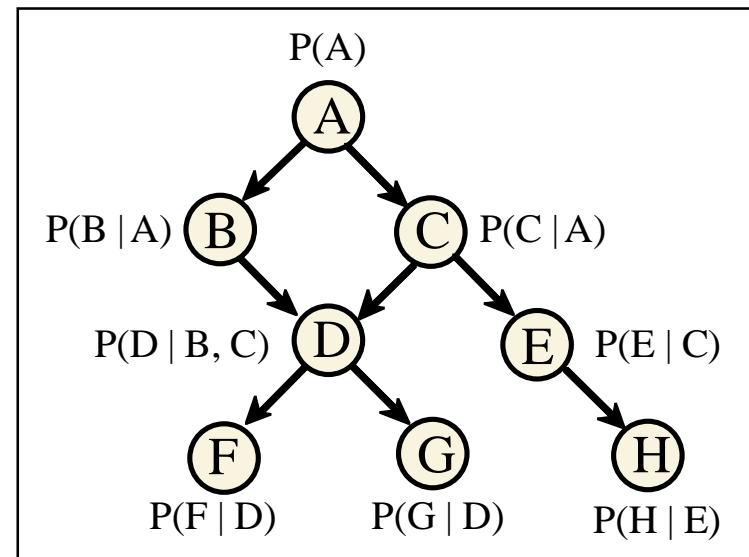


**PROBLEMA:**

Elevado número de parámetros.

$n$  variables binarias:  $2^n$  pars.

## Red Bayesiana



$$P(A, B, C, D, E, F, G, H) = P(A) P(B|A) P(C|A) P(D|B, C) \times P(E|C) P(F|D) P(G|D) P(H|E)$$

Factorización de la probabilidad !!

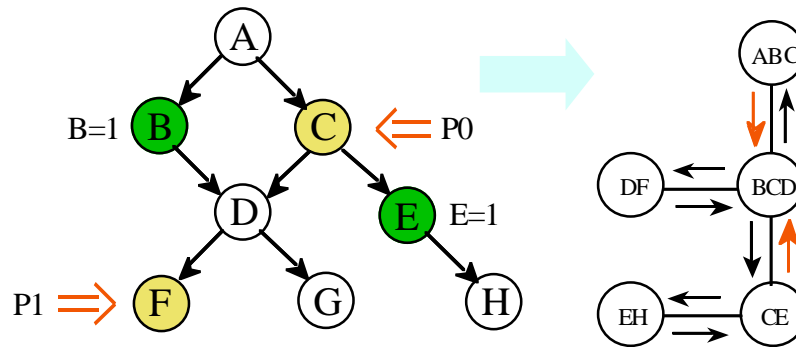
$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P_i(x_i | \pi_i)$$

# Cálculo Simbólico de Probabilidades

¿Cómo actualizar las probabilidades de las variables cuando se tiene nueva información (evidencia)?

Prob. inicial,  $P(\mathbf{D})$ ?

Prob. condicionada,  $P(\mathbf{D} \mid \mathbf{B}=1, \mathbf{E}=1)$ ?



Factorización  $P(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n \Psi_i(C_i)$

Mensajes  $M_{ij} = \sum_{C_i - C_j} \Psi_i(C_i) \prod_{k \in A_i - j} M_{ki}$

Marginal  $P_i(C_i) = \Psi_i(C_i) \prod_{k \in A_i} M_{ki}$

A New Method for Efficient Symbolic Propagation in Discrete Bayesian Networks

E. Castillo, J.M. Gutiérrez y A.S. Hadi

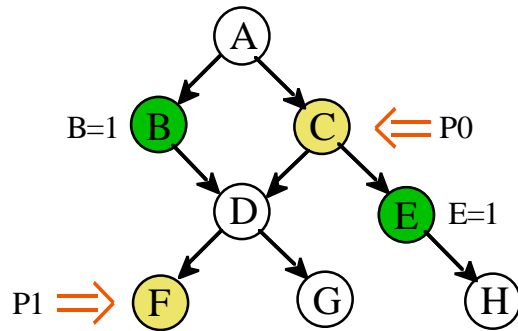
**Networks**. Vol. 28, 31-43. 1996.

A	0.3	$p(\mathbf{x}_i=0)$
B	0.46	
C	$0.4 + 0.2 p_0$	
D	$0.424 - 0.056 p_0$	
E	$0.18 + 0.04 p_0$	
F	$0.51 + 0.05 p_0 + 0.42 p_1 - 0.05 p_0 p_1$	
G	$0.472 + 0.016 p_0$	
H	$0.364 - 0.008 p_0$	

A	$(0.126 - 0.028 p_0) / n$	$p(\mathbf{x}_i=0 \mid \{\mathbf{B}=1, \mathbf{E}=1\})$
B	0	
C	$(0.14 + 0.098 p_0) / n$	
D	$(0.1644 - 0.021 p_0) / n$	
E	0	
F	$(0.25 - 0.06 p_0 + 0.16 p_1 - 0.02 p_0 p_1) / n$	
G	$(0.218 - 0.01 p_0) / n$	
H	$(0.178 - 0.11 p_0) / n$	
n		$= 0.446 - 0.028 p_0$



# El Método de las Componentes Canónicas



## Estructura algebraica:

Las probabilidades marginales son polinomios de grado menor o igual que el número de parámetros.

Las probabilidades condicionadas son funciones racionales; cocientes de polinomios de la forma anterior

## Aplicaciones:

Obtención de cotas para probs.

Estudio de sensibilidad.

Inferencia simbólica numéricamente.

Número

Valores numéricos

$$P_{p_0 p_1}^k(F) = \frac{a_{00}^k + a_{10}^k p_0 + a_{01}^k p_1 + a_{11}^k p_0 p_1}{d_{00} + d_{10} p_0 + d_{01} p_1 + d_{11} p_0 p_1}$$

Componentes Canónicas

$$C = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$$

Cálculos Numéricos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00}^0 \\ a_{10}^0 \\ a_{01}^0 \\ a_{11}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00}^0 \\ p_{10}^0 \\ p_{01}^0 \\ p_{11}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.253 \\ 0.247 \\ 0.418 \\ 0.390 \end{pmatrix}$$

$$P_{p_0 p_1}^0(F) = \frac{0.253 - 0.006 P_0 + 0.164 P_1 - 0.021 P_0 P_1}{0.446 - 0.028 P_0}$$

# Algunas Publicaciones Relevantes

Expert Systems and Probabilistic Network Models.  
E. Castillo, J.M. Gutiérrez, y A.S. Hadi  
**Springer-Verlag**, New York (1997).

**Monografías de la Academia Española de Ingeniería.**

Causal Network Models in Expert Systems  
E. Castillo, A. Cobo, J.M. Gutiérrez, A. Iglesias and H. Sagástegui  
**Microcomputers in Civil Engineering**, Vol. 9, 315-328. 1994.

Sensitivity Analysis in Discrete Bayesian Networks  
E. Castillo, J.M. Gutiérrez y A.S. Hadi  
**IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**. Vol. 27(4), 412-423. 1996.

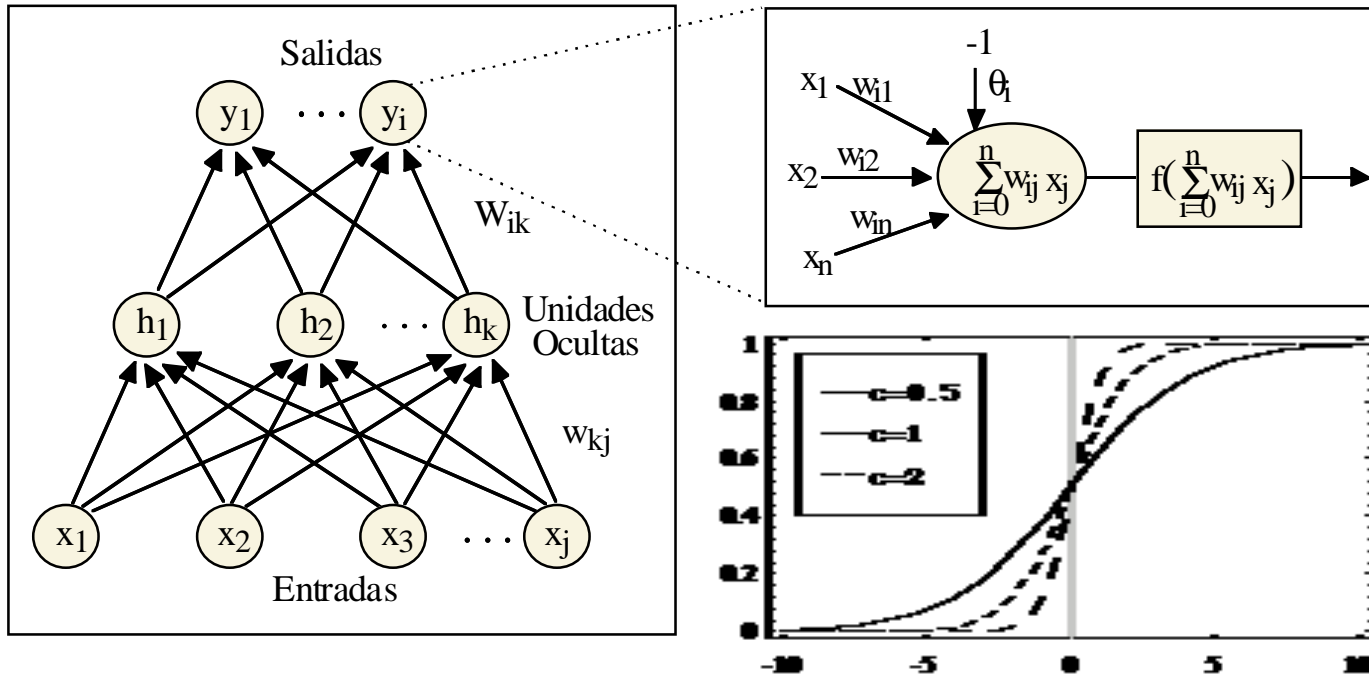
A Modified Simulation Scheme for Inference in Bayesian Networks  
R. R. Bouckaert, E. Castillo y J. M. Gutiérrez  
**International Journal of Approximate Reasoning**. Vol. 14(1), 55-80. 1995.

Modelling Probabilistic Networks of Discrete and Continuous Variables  
E. Castillo, J.M. Gutiérrez, and A.S. Hadi  
**Journal of Multivariate Analysis**. Vol. 64, 48-65. 1998.

... Gaussian Bayesian Networks with Application to Damage Assessment  
E. Castillo, J.M. Gutiérrez, A.S. Hadi, and C. Solares  
**Artificial Intelligence in Engineering**. Vol. 11, 173-181. 1997.

# Desarrollo de las Redes Funcionales

Las **redes neuronales** permiten obtener una aproximación funcional de un modelo dado en base a un conjunto de datos y a operadores sigmoidales.



$$y_i = f\left(\sum_k W_{ik} f\left(\sum_j w_{kj} x_j - \theta_k\right) - \theta_i\right).$$

## PROBLEMAS

- Son “cajas negras” cuya topología no guarda relación con el problema.
- No permiten introducir conocimiento cualitativo sobre el problema.
- En algunos casos, el uso de funciones sigmoidales no está justificado.

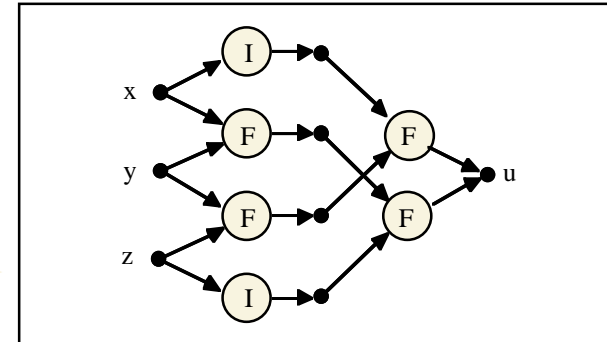
# Redes Funcionales. Ejemplo

Las **redes redes funcionales** son una generalización de las redes neuronales que **combinan conocimiento cualitativo y cuantitativo**.

Conjunto de datos  $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$  obtenidos de una función  $x_3 = F(x_1, x_2)$ , y se sabe que es asociativa;

$$F(F(x_1, x_2), x_3) = F(x_1, F(x_2, x_3)).$$

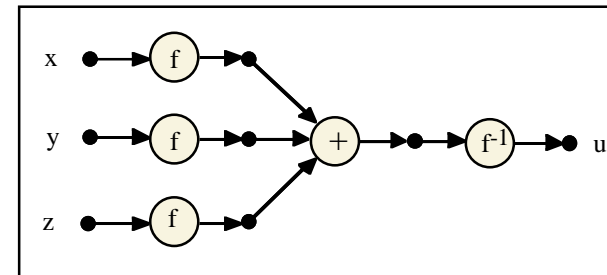
**Topología inicial** →



Ecuaciones funcionales (simplificaci on):

$$F(x_1, x_2) = f^{-1}[f(x_1) + f(x_2)],$$

**Topología simplificada** →



**Aprendizaje:**

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^m a_i \phi_i(x), \quad e_j = \hat{f}(x_{1j}) + \hat{f}(x_{2j}) - \hat{f}(x_{3j}); j = 1, \dots, n.$$

$$Q = \sum_{j=1}^n e_j^2 = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m a_i [\phi_i(x_{1j}) + \phi_i(x_{2j}) - \phi_i(x_{3j})] \right)^2$$

$$f(x_0) \equiv \sum_{i=1}^m a_i \phi_i(x_0) = \alpha,$$

**Mínimos cuadrados.**

**Minimax.**



## Algunas Publicaciones Relevantes



An Introduction to Functional Networks  
 E. Castillo, A. Cobo, J.M. Gutiérrez and E. Pruneda  
**Kluwer Academic Publishers**, Norwell (1999).  
**Paraninfo/International Thomson Publishing.**

A Package for Solving One Type of Functional Equations  
 E. Castillo, J.M. Gutiérrez y A. Iglesias  
**The Mathematica Journal**. Vol. Vol. 5(1), 82-87. 1995.

A Minimax Method for Learning Functional Networks  
 E. Castillo, J.M. Gutiérrez, A. Cobo and C. Castillo  
**Neural Processing Letters**, en prensa.

Learning Functional Networks.  
 E. Castillo, J.M. Gutiérrez, A. Cobo and C. Castillo  
**Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering**, en prensa.

Nonlinear Time Series Modeling and Prediction Using Functional Networks...  
 E. Castillo and J.M. Gutiérrez  
**Physics Letters A**. Vol. 244, 71-84. 1998.

Working with Differential, Functional and Difference Equations using Functional Nets  
 E. Castillo, A. Cobo, J.M. Gutiérrez, and E. Pruneda  
**Applied Mathematical Modelling**. Vol. 23, 89-107. 1999.

# Investigación Aplicada en Meteorología

*Análisis e Implementación de Nuevas Técnicas Automáticas Inteligentes para el Problema de la Predicción Meteorológica.*

*Convenio Universidad de Cantabria - Instituto Nacional de Meteorología*

*Nuevas Técnicas Inteligentes para la Predicción Meteorológica.*

*Mejora de la Resolución en el Post-proceso de los Modelos Numéricos*

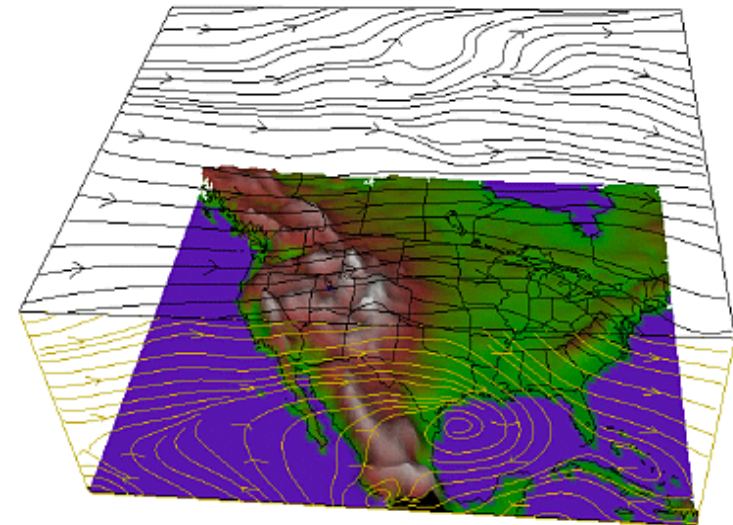
*Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología*

*Programa Nacional sobre el Clima, CLI99-0589*



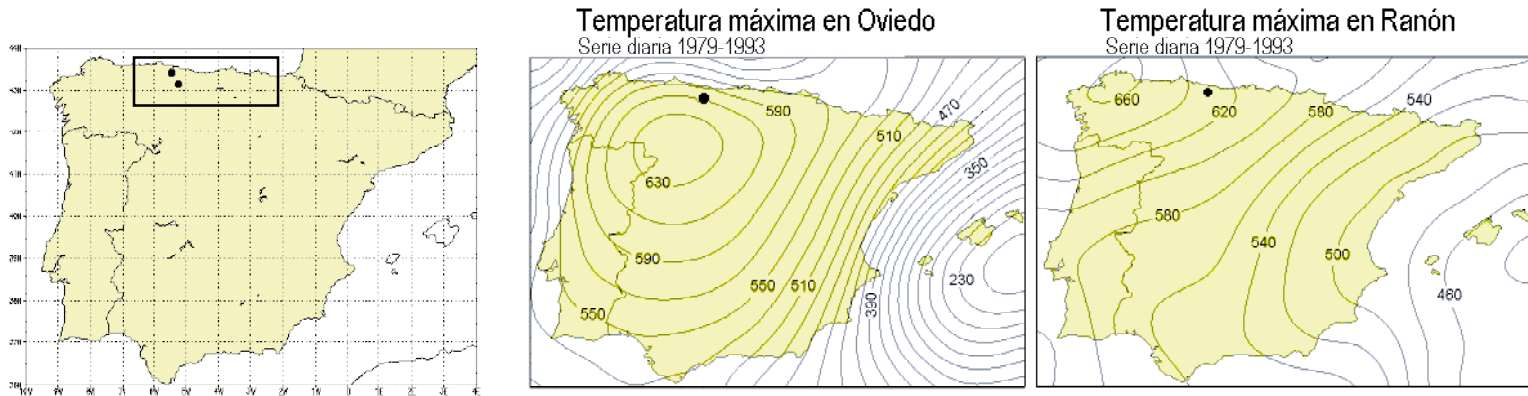
Mejora de resolución de las predicciones de los modelos

Técnicas de predicción robustas a la no linealidad de los modelos

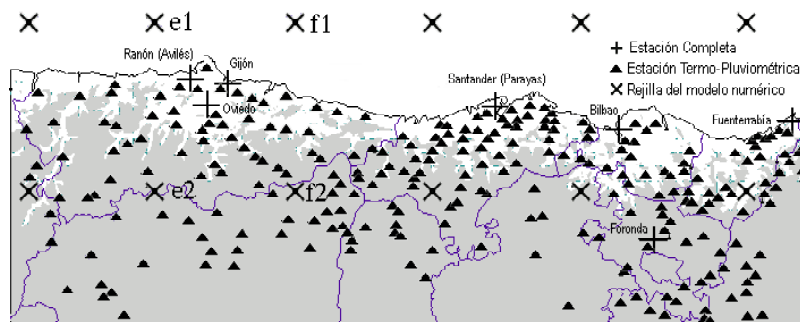


## Mejora de Resolución de los Modelos de Predicción Meteorológica

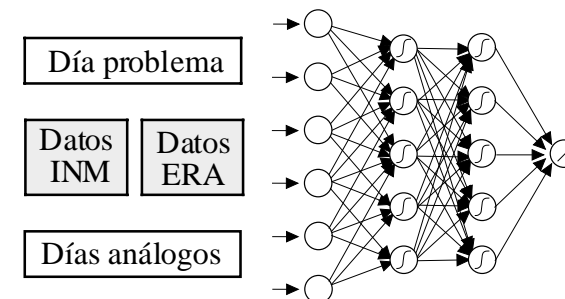
El tiempo de cómputo necesario para resolver los modelos numéricos hace que, hasta la fecha, el tamaño de rejilla no pueda ser reducido a resoluciones operativas para la predicción "local".



La red de observatorios del INM contiene las características climáticas particulares de distintas zonas.



### Patrones análogos y modelos de regresión



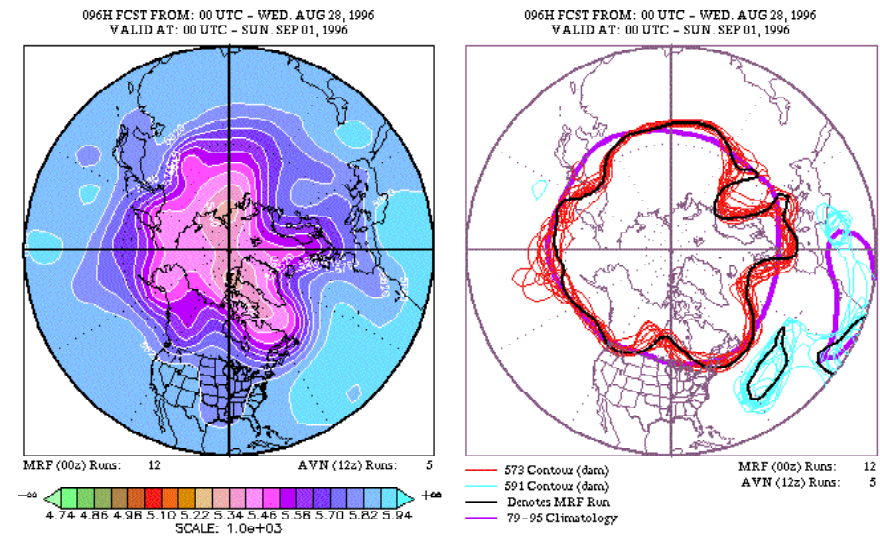
Gutiérrez, Cano, Cofiño, Rodríguez  
**Proceedings del II Congreso Nacional de Climatología**, 234-241.



## Técnicas de Predicción Robustas a la “no linealidad” del modelo

Se estudiará la influencia sobre las predicciones a plazo medio de los efectos no lineales asociados con las ecuaciones de los modelos tratando de desarrollar una metodología robusta frente a este efecto.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - \omega \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + fv + F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - fu + F_y \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \\ \frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y} + \omega \left( \frac{\kappa T}{p} - \frac{\partial T}{\partial p} \right) + \frac{\dot{H}}{c_p} \\ \frac{\partial \omega}{\partial p} = -\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{array} \right.$$



**Predicción por Conjuntos:**  
 Conjunto de condiciones iniciales perturbando ligeramente la original.

**Crítica:** Considera la equiprobabilidad de todas las condiciones iniciales para calcular la probabilidad combinada final.

Hay que tener en cuenta la dinámica.