

UIS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
CALCULO 2

VOLUMEN DE SOLIDOS DE REVOLUCIÓN

Resumen

Ejercicios planteados de volúmenes sólidos de revolución

Al tratar de hallar el volumen de un sólido, encaramos el mismo tipo de problemas que al buscar áreas. Tenemos una idea intuitiva de lo que significa volumen, pero debemos afinarla aplicando el cálculo para dar una definición exacta de volumen.

1. Cálculo de volúmenes de sólidos con los métodos de rebanadas, discos y anillos

1. Encuentre el volumen del sólido S descrito.
 - a) Un cono circular recto con altura h y radio r de la base
 - b) Una pirámide con altura h y base rectangular con dimensiones b y $2b$.
 - c) Un tetraedro con 3 caras mutuamente perpendiculares y tres aristas mutuamente perpendiculares con longitudes de 3 cm, 4 cm y 5 cm .
 - d) La base de S es una región elíptica con la curva frontera $9x^2 + 4y^2 = 36$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos rectángulo isósceles con la hipotenusa en la base.
2. La base de S es un disco circular con radio r . Las secciones transversales paralelas, perpendiculares a la base, son triángulos isósceles con altura h y lado desigual en la base.
 - a) Establezca una integral para obtener el volumen de S.
 - b) Interprete la integral como un área y encuentre el volumen de S.
3. Halle el volumen común a dos esferas, cada una con radio r , si el centro de cada una se encuentra sobre la superficie de la otra.
4. Un tazón tiene una forma semejante a un hemisferio con un diámetro de 30 cm. Se coloca una pelota con diámetro de 10 cm dentro del tazón y se vierte agua en éste hasta una profundidad de h centímetros. Encuentre el volumen del agua en el tazón.

5. Algunos de los pioneros del cálculo, Kepler y Newton por ejemplo, pensaron en el problema de determinar los volúmenes de las barricas de vino. (Kepler de hecho en 1715 publicó un libro dedicado a los métodos para calcular esos volúmenes con el título *Stereometría Doliorum*.) En ocasiones aproximaban el perfil lateral con parábolas.

a) Una barrica de altura h y radio máximo R se construye haciendo girar alrededor del eje de abscisas, la parábola $y = R - cx^2$, $\frac{-h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2}$, donde c es una constante positiva. Muestre que el radio en los extremos del tonel es $r = R - d$, con $d = \frac{ch^2}{4}$.

b) Muestre que el volumen comprendido es

$$V = \pi h(2R^2 + r^2 - \frac{2}{5}d^2)$$

6. Consideremos una región \mathfrak{R} que tiene área A situada arriba del eje x . Al girar \mathfrak{R} alrededor del eje x , barrerá un sólido con volumen V_1 . Cuando \mathfrak{R} gira alrededor de la recta $y = -k$ (donde k es un número positivo), barre un sólido de volumen V_2 . Expresé V_2 en términos V_1, k y A .
7. Obtenga la fórmula del volumen de una esfera generada al hacer girar alrededor del eje x la región acotada por el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ y el eje x .
8. Obtenga la fórmula del volumen de un cono circular recto de altura h y un radio de base a , generado al hacer girar la región acotada por un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos.
9. Calcule el volumen del sólido generado cuando la región limitada por la curva $y = \csc x$, el eje x y las rectas $x = \frac{\pi}{6}$ y $x = \frac{\pi}{3}$ se gira alrededor del eje x .
10. La región acotada por la curva $y = \cot x$, la recta $x = \frac{\pi}{6}$, y el eje x gira alrededor del eje x . Calcule el volumen del sólido que se genera.
11. Un tanque de aceite (de forma esférica) tiene 20 cm de diámetro. ¿Cuánto aceite contiene si la profundidad del aceite es 8 metros?
12. Un paraboloides de revolución se obtiene por la rotación de la parábola $y^2 = 4px$ alrededor del eje x . Encuentre el volumen limitado por un paraboloides de revolución y un plano perpendicular a su eje si el plano se encuentra a 10 cm del vértice, y si la sección plana de la intersección es un circunferencia de 6 cm de radio.
13. La base de un sólido es la región encerrada por una circunferencia con radio de 4 cm y todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base, son triángulos isósceles con altura de 10 cm y una cuerda del círculo como base. Obtenga el volumen del sólido.

14. La base de un sólido es la región acotada por una circunferencia con radio de r unidades, y todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos isósceles rectos, cuya hipotenusa está en el plano de la base. Encuentre el volumen del sólido.
15. Resuelva el ejercicio anterior si los triángulos isósceles rectos tienen un cateto en el plano de la base.
16. Dos cilindros circulares rectos, ambos con radio r unidades, tienen ejes que se cortan con ángulos rectos. Obtenga el volumen del sólido común a los dos cilindros.
17. Se corta una cuña de un sólido con forma de cilindro circular recto y radio r cm, por medio de un plano a través de un diámetro de la base, inclinado 45° con respecto al plano de ésta. Obtenga el volumen de la cuña.
18. Se corta una cuña de un sólido con forma de cono circular recto con base de radio igual a 5 m y una altura de 20 m, por medio de dos semiplanos que contienen los ejes del cono. El ángulo entre los dos planos mide 30° . Determine el volumen de la cuña.

2. Cálculo de volúmenes mediante cascarones cilíndricos

1. Emplee cascarones cilíndricos para calcular el volumen de los sólidos que se describen a continuación.
 - a) Una esfera de radio r .
 - b) Un cono circular recto, con altura h y base de radio r .
2. La región limitada por las curvas $x = y^2 - 2yx = 6 - y^2$ gira alrededor de los ejes indicados. Determine el volumen del sólido generado.
 - a) El eje x .
 - b) El eje y .
 - c) La recta $x = 2$.
 - d) La recta $y = 2$.
3. Halle el volumen del sólido generado por el giro de la región delimitada por la gráfica de $y = 4x - \frac{x^4}{8}$, el eje y y la recta $y = 6$, con respecto a la recta $x = 2$.
4. Obtenga el volumen del sólido generado por la revolución de la región del ejercicio anterior con respecto al eje y .
5. Obtenga el volumen del sólido generado por la revolución alrededor del eje y de la región limitada por la gráfica $y = 3x - x^3$, el eje x y la recta $x = 1$.

6. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación, alrededor de la recta $y = 1$, de la región limitada por dicha recta y la parábola $x^2 = 4y$. Considere elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución.
7. Determine el volumen del sólido generado por la rotación, alrededor del eje x , de la región acotada por las curvas $y = x^3$ y $x = y^3$. Considere elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución.
8. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación, alrededor del eje y , de la región limitada por la curva $y = \sin x^2$, el eje x y las rectas $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ y $x = \sqrt{\pi}$.
9. Calcule el volumen del sólido generado por la rotación, alrededor del eje y , de la región acotada por la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
10. La región del primer cuadrante delimitada por la curva $x = \cos y^2$, el eje y y el eje x , $0 \leq x \leq 1$, se hace girar alrededor del eje x . Obtenga el volumen del sólido de revolución que se genera.
11. A través de un sólido de forma esférica de 6 cm de radio, se produce un orificio de 2 cm de radio, y el eje del hueco es un diámetro de la esfera. Obtenga el volumen de la parte de la esfera que queda después de la perforación.
12. En un sólido de forma esférica de 4 plg de diámetro se hace un orificio de $2\sqrt{3}$ plg de radio. Halle el volumen de la porción hueca del sólido.
13. Obtenga el volumen del sólido generado por la revolución con respecto al eje y de la región delimitada por la gráfica de $y = |x - 3|$, y las rectas $x = 1, x = 5$ y $y = 0$. Considere elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución.
14. Un sólido de revolución se forma al hacer girar alrededor del eje y la región delimitada por la curva $y = \sqrt[3]{x}$, el eje x y la recta $x = c (c > 0)$. Tome elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución para determinar un valor de c que produzca un volumen de 12 unidades cúbicas.
15. Calcule el volumen del sólido generado por la revolución alrededor del eje y , de la región externa a la curva $y = x^2$ situada entre las rectas $y = 2x - 1$ y $y = x + 2$.
16. Una esfera con radio de 10 cm es cortada por dos planos paralelos en el mismo lado del centro de la esfera. La distancia del centro de la esfera a uno de los planos es 1 cm y la distancia entre los dos planos es 6 cm. Calcule el volumen de la porción sólida de la esfera entre los dos planos.