SUMAS DE RIEMANN

Hallar el área de la región bordeada por las gráficas de $f(x)=x^{2,} x=0, x=2$ y el eje x mediante el cálculo del límite de las sumas de Riemann:

SOLUCION:

Primero dividimos [0,2] en n subintervalos de igual longitud: $\Delta x=\frac{(2-0)}{n}=\frac{2}{n}$

$x_i=a+i\,\Delta x=0+i\frac{2}{n}=2\frac{i}{n}$ La enésima suma de Riemann es

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(2\frac{i}{n})(\frac{2}{n})=\sum_{i=1}^{n}(2\frac{i}{n})^2(\frac{2}{n})=\sum_{i=1}^{n}\frac{8}{n^3}i^2=\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{8}{n^3}[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]$$

el área de la región es el límite de las sumas de Riemann:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}[\frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}]=\frac{8}{3}$$

Hallar el área de la región bordeada por las gráficas de $f(x)=(x-1)^2+2, x=-1, x=2$ y el eje x mediante la búsqueda del límite de las sumas de Riemann.

SOLUCION:

Se divide [-1,2]:

$\Delta x=\frac{2-(-1)}{n}=\frac{3}{n}$; $x_i=a+i\,\Delta x=-1+\frac{3i}{n}$

La enésima suma de Riemann es

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(-1+3\frac{i}{n})\frac{3}{n}=\sum_{i=1}^{n}[(-1+3\frac{i}{n}-1)^2+2]\frac{3}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[(\frac{3i}{n}-2)^2+2]\frac{3}{n}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{9i^2}{n^2}-\frac{12i}{n}+4+2)\frac{3}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(27\frac{i^2}{n^3}-\frac{36}{n^2}i+\frac{18}{n})=\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2-\frac{36}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{18}{n}\sum_{i=1}^{n}1$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\frac{27}{n^3}[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]-\frac{36}{n^2}[\frac{n(n+1)}{2}]+\frac{18}{n}(n)=9(n+1)\frac{(n+1)}{2}n^2-18\frac{(n+1)}{n}+18$$

el área de la suma de Riemann:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}[9(n+1)\frac{(2n+1)}{2}n^2-18\frac{(n+1)}{n}+18] \;\; = 9 - 18 + 18 = 9$$

Hallar el área de la región bordeada por las gráficas de $f(x)=2(x+2)^3, x=-2, x=0$ y el eje x mediante el cálculo del límite de las sumas de Riemann.

SOLUCION

Se divide [-2,0]: $\Delta x=\frac{2}{n}; x_i=-2+\frac{2i}{n}$ la énesima suma de Riemann es:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} 2(-2+\frac{2i}{n}+2)^3(\frac{2}{n})=\sum_{i=1}^{n}\frac{32i^3}{n^4}=\frac{32}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{32}{n^4}[\frac{n^2(n+1)^2}{4}]=8\frac{(n+1)^2}{n^2}$$

se halla el límite :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty} 8\frac{(n+1)^2}{n^2}=8$$

✔ Evaluar $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i)\Delta x$, donde $x_o=1, x_1=1+\Delta x, \ldots, x_n=3$ mediante el análisis de la integral apropiada.

SOLUCION

Esta suma de Riemann se debe cambiar a una integral: Δx se convierte en dx, x_i se convierte en x y el intervalo de integración es [1,3].

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i)\Delta x=\int_1^3(x^2-2x)\,dx=(\frac{x^3}{3}-x^2)\Big|_1^3=(\frac{3^3}{3}-3^2)-(\frac{1^3}{3}-1^2)=\frac{2}{3}$$

Evaluar $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)\cos x_i$, donde $x_0=0,\ldots,x_n=\frac{\pi}{6}$.

SOLUCION

Se reconoce que $x_{i+1}-x_i=\Delta x$ y se obtiene

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)\cos x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x\cos(x)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx=(sen\,x)_0^{\frac{\pi}{6}}=sen(\frac{\pi}{6})-sen(0)$$