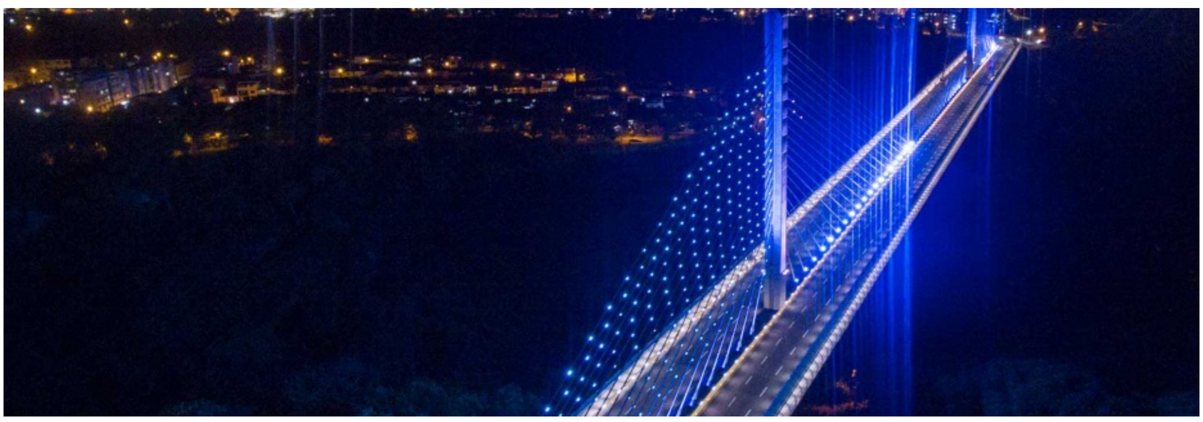

ALTENCOA7-2016

Escuela de Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga - Colombia

Julio 18 al 22, 2016

Organizan

Apoyan

Vicerrectoría de Investigación y Extensión, VIE

Universidad Industrial de Santander

Comité Científico

Hector Pinedo (Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga)

Carlos Alberto Trujillo (Universidad del Cauca, Popayán)

Ricardo Restrepo (Universidad de Antioquia, Medellín)

Agustín Moreno Cañadas (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá)

Pedro Hernández (Universidad de Antioquia, Medellín)

Yamidt Bermúdez (Universidad del Valle, Cali)

Comité Organizador

Alexander Holguín Villa (Coordinador), (Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga)

John H. Castillo, (Universidad de Nariño, San Juan de Pasto)

Verónica Cifuentes (Universidad Distrital FJC, Bogotá)

Jhon J. Bravo G. (Universidad del Cauca, Popayán)

Jorge Villamizar Morales (Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga)

Grupo ALCOM (Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga)
http://matematicas.uis.edu.co/alcom

Invitados

Alonso Sepúlveda Castellanos
Universidade Federal de Uberlândia, Brasil

Ana Zumalacárregui
University of New South Wales, Australia

Ebroul Izquierdo
Queen Mary, University of London, UK

Edwin León-Cardenal
CIMAT, México

José González
Yale University, Estados Unidos

José A. Vélez-Marulanda
Valdosta State University, Estados Unidos

Juanjo Rué
Universitat Politècnica de Catalunya, España

Francisco César Polcino Milies
Universidade de São Paulo, Brasil

Guillermo Mantilla-Soler
Universidad de los Andes, Colombia

Homero R. Gallegos Ruiz
CONACyT - Universidad Autónoma de Zacatecas, México

Sergio López-Permouth
Ohio University, Estados Unidos

Viktor Bekkert
Universidade Federal de Minas Gerais , Brasil

Wilson A. Zúñiga-Galindo
CINVESTAV, México

ALTENCOA7-2016

Conferencias plenarias ALTENCOA7-2016

Conferencias

- ⋆ **[P1]** Funciones Zeta Locales y Amplitudes de Cuerdas, W. A. Zúñiga Galindo, CINVESTAV - I.P.N., Querétaro, Qro, México.
- ⋆ **[P2]** Aplicaciones del problema de Leibniz en la construcción de CAPTCHAs y contraseñas visuales, Agustín Moreno Cañadas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- ⋆ **[P3]** Derived tame and derived wild algebras, Viktor Bekkert, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- ⋆ **[P4]** El anillo de coordenadas total y el espacio de curvas racionales marcadas, José Luis González, Yale University, USA.
- ⋆ **[P5]** The Algebraic Nature of Image Understanding, Ebroul Izquierdo, Queen Mary, University of London, UK.
- ⋆ **[P6]** Algunos conteos en los caminos no decrecientes de Dyck, Rigoberto Florez, The Citadel, Charleston South Carolina, USA.
- ⋆ **[P7]** Contando conjuntos libres de configuraciones en grupos, Juanjo Rué, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España.
- ⋆ **[P8]** Modules over infinite dimensional algebras, Sergio R. López-Permouth, Ohio University, Athens, Ohio, USA.

Funciones Zeta Locales y Amplitudes de Cuerdas

W. A. Zúñiga Galindo
CINVESTAV - I.P.N.
Departamento de Matemáticas
Querétaro, Qro, México
e-mail: wazuniga@math.cinvestav.edu.mx

Resumen

La conferencia tiene dos objtetivos. El primero es el de introducir la integración motívica, como una generalización de la integración p-ádica, a partir del problema de contar el número de soluciones de congruencias polinomiales módulo una potencia de un número primo. Luego se introducirán las funciones

zeta motívicas y se discutirá su conexión con varios problemas aritméticos y geométricos. Finalmente se introducirán las amplitudes de cuerdas p-ádicas, ver [2], y comentaremos sobre nuestro trabajo en curso en el que estamos desarrollando versiones motívicas de las amplitudes de cuerdas $p$ádicas.

Palabras claves

Integración p-ádica, integración motívica, funciones zeta locales motívicas, Amplitudes de cuerdas.

Bibliografía

[1] Denef, J. Report on Igusa's Local Zeta Function, *Séminaire Bourbaki* **43** (1990-1991), exp. **741**; Astérisque 201-202-203 (1991), 359-386.

[2] Brekke, L. and Freund, P. p-Adic numbers in physics, *Phys. Rep.* **233**, 1 (1993).

[3] Moyano-Fernández, J. J. and Zúñiga-Galindo, W. A. Motivic zeta functions for curve singularities, *Nagoya Math. J.* **198** (2010), 47–75.

Aplicaciones del problema de Leibniz en la construcción de CAPTCHAs y Contraseñas Visuales

Agustín Moreno Cañadas
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C., Colombia
e-mail: amorenoca@unal.edu.co

Resumen

En esta charla describiremos, como es posible usar grandes cantidades de dígitos en el desarrollo decimal de algunos números irracionales para construir esquemas de contraseñas visuales y CAPTCHAs usados actualmente para proteger distintas clases de medio digitales (como páginas web y redes sociales) de ataques típicos como SPAM o suplantación de usuario. Desde este punto de vista observaremos como este tipo de uso permite dar avances al problema abierto de Leibniz que pide encontrar un patrón en las cifras de números irracionales cuando se obtienen al ser desarrolladas en una base fija b.

El trabajo con estas grandes cantidades de dígitos nos permite observar como la investigación de algunos problemas en teoría de números produce un avance en la investigación que tiene que ver con el tratamiento e interpretación de grandes datos (Big Data), lo cual resulta ser uno de los temas de mayor interés en Ciencias de la Computación.

Palabras claves

Contraseñas visuales, CAPTCHAs, problema de Leibniz, Big Data.

Bibliografía

[1] L. von Ahn, Blum M., Hopper N.J. and Langford J., CAPTCHA: Using hard AI problems for security, *EUROCRYPT; Lecture Notes in Computer Science*, **2656** (2003), 294 – 311. ed. by Biham E., Springer, Berlin.

[2] Stavroulakis P. and Stamp M., Handbook of Information and Communication Security, Springer, (2010). Chapter authors; Basso A. and Bergadano F.

[3] von Ahn L., Blum M. and Langford J., Telling humans and computers apart automatically, *Science* **321** (2008), no. 5895, 1465 – 1468. doi: 10.1126/science.1160379.

[4] Goodfellow I. J., Bulatov Y., Ibarz J., Arnoud S. and Shet V., Multi-digit Number Recognition from street view imagery using Deep Convolutional Neural Networks, Arxiv:1312.6082v4 (2014). preprint.

[5] Avila W. G. S., Angarita M.A.O. and Cañadas A. M., Matrix problems to generate mosaic-based CAPTCHAs, *IEEE xplore*; Digital library (2015), 351 – 364.

Derived tame and derived wild algebras

Viktor Bekkert
Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas
Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil
e-mail: bekkert@mat.ufmg.br

Resumen

The notions of tame and wild problems is now rather popular in various branches of representation theory and related topics, especially because of the so-called tame-wild dichotomy. Namely, in most cases it so happens that either indecomposable representations depend on at most one parameter or their description becomes in some sense "universal", i.e. containing a classification of representations of all finitely generated algebras. Last time these notions have also been studied for derived categories, and tame-wild dichotomy has been proved. We shall give a very quick survey on the derived representation type of finite dimensional algebras and discuss some recent results.

Palabras claves

Representations of algebras, derived representation type.

El anillo de coordenadas total y el espacio de curvas racionales marcadas

José Luis González
Departamento de Matemáticas
Yale University, USA
e-mail: jose.gonzalez@yale.edu

Resumen

El anillo de coordenadas total de una variedad algebraica generaliza el anillo de coordenadas homogéneo de los espacios proyectivos. En esta charla recordaremos la definición de este invariante y presentaremos algunos ejemplos. Luego recordaremos el espacio de curvas racionales estables con puntos marcados y hablaremos de su anillo de coordenadas total. Los resultados presentados en esta charla pueden encontrarse en el artículo [1].

Bibliografía

[1] José González and Kalle Karu. *Compositio Mathematica*. volumen 152, número 05, pp. 984-996.

The Algebraic Nature of Image Understanding

Ebroul Izquierdo
School of Electronic Engineering and Computer Science
Queen Mary, University of London, London, UK
e-mail: ebroul.izquierdo@qmul.ac.uk

Resumen

Image understanding arguably represents one of the most important capabilities of intelligent beings and a cornerstone of artificial intelligence. In the latter case, the underlying processes are extremely complex involving several basic yet daunting and still open tasks including background subtraction, semantic image segmentation, shape and object recognition. These are also some of the oldest and probably best studied tasks in computer vision. Due to the plethora of applications, it is also the basis for a fast evolving technology drawing attention from researchers and practitioners in several fields including remote sensing, mechatronics, forensics, biometrics, visual information retrieval, automated surveillance medical imaging and augmented reality.

In this talk key mathematical tools used to tackle related tasks will be presented. Starting point is the concept of invariance in image recognition and the effects of scale usually modelled in scale-space as a parabolic partial differential equation. Then, applications related to the regularization of ill-conditioned linear problems and linear algebra tools used for clustering and classification in automated object recognition will be discussed. Advantages and disadvantages of available algorithmic solutions will be outlined. The talk will conclude discussing recent developments in critical applications as face recognition and foreground-background separation. Here I will refer to the seminal work of D. Donoho, T. Tao and E. Candes on compressive sampling and the most recent results proving that the old standing separation of a very large matrix into a very low-rank and a very sparse is feasible. This work and subsequent results, achieved by the community over the last 5 years, is leading to a wave of excitement and new theoretical developments while promising to deliver a quantum leap in the solution of basic image processing problems. An overview of related developments will be also presented.

Palabras claves

Image understanding, Artificial intelligence, Image recognition .

Algunos conteos en los caminos no decrecientes de Dyck

Rigoberto Florez, Leandro Junes
Department of Mathematics and Computer Science
The Citadel, Charleston South Carolina
e-mail: rflorez1@citadel.edu
Math, Computer Science and Information System
California University, Pennsylvania
e-mail: junes@calu.edu
Éva Czabarka

Department of Mathematics
Columbia, South Carolina

Resumen

Una palabra en las letras U y D de longitud $2n$ es llamada de Dyck si esta contiene tantas letras U como letras D, con la condición de que cada segmento inicial de la palabra no puede contener más letras D que letras U. Por ejemple, $UUDDUDUD$, $UDUUDDUD$, $UUDDUUDD$ son tres palabras de longitud cuatro. Estas palabras dan origen a caminos con el mismo nombre.

Un camino de Dyck es el que conecta putos con coordenadas enteras no negativas en el plano cartesiano iniciando en el origen del plano y terminan en el eje x. Un camino sigue las mismas reglas dadas para las palabras usando solamente pasos noreste and sureste. Un camino contiene triángulos isósceles (llamados pirámides), picos y valles, estos dos últimos desde el punto de vista del cálculo corresponderían con los máximos y mínimos locales, respectivamente. Diremos que los caminos son no decrecientes si las altitudes de los valles, cuando se miran de izquierda a derecha, van de menor a mayor (incluyendo igualdades).

En esta conferencia mostramos algunos conteos en los cominos no decrecientes de Dyck. Por ejemplo, podemos encontrar el total de los picos, la suma total de las alturas de las pirámides, entre otros conteos. Para hacer estos conteos se usó funciones generadoras en varias variables, también se usó la técnica de conteos biyectivos. Este es un trabajo conjunto con Leandro Junes (California University) y Eva Czabarka (University of South Carolina).

English version: A Dyck word is a word in the letters D and U with as many D's as U's and in which no initial segment has more U's than D's. Each Dyck word gives rise to a path (Dyck). These are paths connecting points using north-east steps and south-east steps in a grid (in the xy-plane) formed with non-negative integers. Dyck paths start at the origin and end on the x-axis.

A Dyck path P is non-decreasing if the y-coordinates of the local minima (valleys) of the path P form a non-decreasing sequence. Using generating function in several variables we count the number of local maxima (peaks), the pyramid weights (heights). We also discuss how to extend the basic power series to obtain some other statistics on non-decreasing Dyck paths. This is a joint work with E. Czabarka and L. Junes, from the University of South Carolina and California University, respectively.

Palabras claves

Dyck Paths, Dyck words, Fibonacci Numbers, generating functions.

Contando conjuntos libres de configuraciones en grupos

Juanjo Rué
Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España
e-mail: juan.jose.rue@upc.edu

Resumen

Consideremos un grupo finito G (suficientemente grande y no necesariamente conmutativo). En esta charla vamos a estudiar la siguiente cuestión: ¿Cuántos subconjuntos de un tamaño dado existen en G y que eviten una cierta configuración aritmética dada? Veremos que, gracias a los denominados hipergrafos

contenedores (teoría desarrollada recientemente por Balogh, Morris y Samotij, e independientemente por Saxton y Thomason) junto con los llamados lemas de eliminación aritméticos, podemos dar una respuesta (no trivial) a esta cuestión. Veremos que las técnicas utilizadas permiten cubrir un gran abanico de situaciones. Asimismo, mostraremos cómo usar estas ideas en el contexto probabilístico para estudiar subconjuntos aleatorios de G, donde cada uno se elige independientemente con una cierta probabilidad p. Esta charla se basa en el trabajo conjunto con Oriol Serra y Lluís Vena (http://arxiv.org/abs/1602.01992)

Modules over infinite dimensional algebras

Sergio R. López-Permouth
Ohio University
Athens, Ohio, USA
e-mail: lopez@ohio.edu

Resumen

Let A be an infinite dimensional K- algebra, where K is a field and let $\mathcal{B}$ be a basis for A. We explore when $K^{\mathcal{B}}$ (the direct product indexed by $\mathcal{B}$ of copies of the field K) can be made into an A-module in a natural way. We call a basis $\mathcal{B}$ satisfying that property .ªmenable,.ªnd we explore when amenable bases yield isomorphic A-modules. For the latter purpose, we consider a relation, which we name congeniality, that guarantees that two different bases yield (naturally) isomorphic A-module structures on $K^{\mathcal{B}}$. While amenability depends on the algebra structure, congeniality of bases depends only on the vector space structure and is thus independent from the specific algebra structure chosen. Among other results, we show that every algebra of countable infinite dimension has at least one amenable basis. Most of our examples will be within the familiar settings of the algebra $K[x]$ of polynomials with coefficients in K. We show that the relation of proper congeniality (when congeniality is not symmetric) yields several natural interesting questions; among these questions we highlight those related to a natural notion of simplicity of bases. We show that the algebra of polynomials with coefficients in K has at least as many truly distinct (so-called discordant) simple bases as there are elements in the base field K.

Palabras claves

Algebra of polynomials, Bases of Vector Spaces, Amenable Bases, Simple Bases, Congenial Bases, Discordant Bases.

Bibliografía

[1] A. N. Alahmadi, M. Alkan, S. R. López-Permouth, *Poor Modules: The opposite of injectivity*, Glasgow Math. J. 52A (2010).

[2] P. Aydoğdu and S. R. López-Permouth, *An alternative perspective on injectivity of modules*, J. Algebra 338(2011), 207-219.

[3] P. Aydoğdu and B. Saraç, *On Artinian rings with restricted class of injectivity domains,* J. Algebra 377 (2013), 49-65.

[4] A. K. Boyle, *Hereditary QI-rings,* Trans. American Math. Soc. 192 (1974), 115-120.

[5] N. Er, S. R. López-Permouth and N. Sökmez, *Rings whose modules have maximal or minimal injectivity domains,* J. Algebra 330 (2011), 404-417.

[6] S. R. López-Permouth and J. E. Simental, *Characterizing rings in terms of the extent of the injectivity and projectivity of their modules,* J. Algebra, 362 (2012), 56-69.

[7] B. Osofsky, *Rings all of whose finitely generated modules are injective,* Pacific J. Math., 14 (1964), 645-650.

Cursillos ALTENCOA7-2016

Cursillos Álgebra

Coordinador: **Hector Pinedo**

- ⋆ **[A1]** On the extent of the injectivity of a module, Sergio R. López-Permouth, Ohio University, Athens, Ohio, USA.
- ⋆ **[A2]** Introducción a la Teoría de Cuerpos Finitos, César Polcino Milies, Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, Brasil

---

On the extent of the injectivity of a module

Sergio R. López-Permouth
Ohio University
Athens, Ohio, USA
e-mail: lopez@ohio.edu

Resumen

In this lecture series we will present our own work and that of other researchers as we consider various ways to gauge the extent of the injectivity of a module. In addition to the well-known approach of using *domains of Injectivity*, we will consider alternative measures including *subdomains of subinjectivity* and others and see how the way in which you measure affects the assessment of how injective a given module is. For the various measurement approaches, we will then focus not only on the injective modules themselves or on modules which are *as injective as possible* (in the sense that one imposes lower bounds for the extent of their injectivity e.g. quasi-injective modules, π-injective modules, etc., which has traditionally been the object of most of the attention), but on other modules characterized by limitations (upper bounds) for the extent of their injectivity.

The first families to be considered under this philosophy are those of modules which are as non-injective as possible. Depending on the measurement approach, these include the so-called *poor modules* (modules whose injectivity domain consists precisely of the semisimple modules) and the *indigent modules* (modules whose subdomain of injectivity consists precisely of the injective modules.) We will show that Poor Modules exist over arbitrary rings and explore questions aim at characterizing rings depending on the the existence of poor modules of specific types; we will also report on the question of existence of indigent modules over arbitrary rings.

The classes consisting of all domains of injectivity and all subdomains of injectivity of modules over a ring R are denoted, respectively $\wp(R)$ (the profile of R) and $\underline{\wp}(R)$ (the subprofile of R). The underlying

question is to see how these ordered structures may determine the structure of the ring itself. We will report, in particular, on the case when the profile (subprofile) consists on only two values; those are the so-called *rings without a middle class*: rings for which every non-injective module is poor (resp. indigent.) Other familes of rings considered include PCI-domains and QF-rings.

We provide various equivalent characterizations of $\wp(R)$ in terms of other lattices in a torsion theory context. These characterizations will serve to prove, among other results, that $\wp(R)$ is co-atomic (unless R is semisimple artinian) yielding the notion of *maximally injective modules*, namely those modules whose domain of injectivity is a co-atom in $\wp(R)$. We explore properties of maximally injective modules and properties of rings that may be characterized in terms of them.

We will also report on progress made by various researchers on relative versions of the profile and subprofile indexed by specific families of modules. In particular, we will address when a ring has no semisimple middle class: every semisimple is either injective or poor. The well-known V-rings are an example of a ring having this property.

Palabras claves

Poor Modules, Injective Profile of a Ring, Subdomains of injectivity, Indigent Modules, Rings Without a Middle Class, V-rings, PCI-domains.

Bibliografía

[1] A. N. Alahmadi, M. Alkan, S. R. López-Permouth, *Poor Modules: The opposite of injectivity*, Glasgow Math. J. 52A (2010).

[2] P. Aydoğdu and S. R. López-Permouth, *An alternative perspective on injectivity of modules*, J. Algebra 338(2011), 207-219.

[3] P. Aydoğdu and B. Saraç, *On Artinian rings with restricted class of injectivity domains,* J. Algebra 377 (2013), 49-65.

[4] A. K. Boyle, *Hereditary QI-rings,* Trans. American Math. Soc. 192 (1974), 115-120.

[5] N. Er, S. R. López-Permouth and N. Sökmez, *Rings whose modules have maximal or minimal injectivity domains,* J. Algebra 330 (2011), 404-417.

[6] S. R. López-Permouth and J. E. Simental, *Characterizing rings in terms of the extent of the injectivity and projectivity of their modules,* J. Algebra, 362 (2012), 56-69.

[7] B. Osofsky, *Rings all of whose finitely generated modules are injective,* Pacific J. Math., 14 (1964), 645-650.

Introducción a la Teoría de Cuerpos Finitos

César Polcino Milies
Departamento de Matemática - IME
Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, Brasil
e-mail: polcino@ime.usp.br

Resumen

En este curso se tratarán los siguientes temas:

1. Revisión de conceptos básicos de la teoría de cuerpos: Extensiones, elementos algebraicos y separables, cuerpo de raices.

2. Cuerpos Finitos: Grupos cíclicos, Función ϕ de Euler, Grupo multiplicativo de un cuerpo, Subcuerpos de un cuerpo finito.

3. Polinomios irreductibles sobre cuerpos finitos. Automorfismos de cuerpos finitos.

Cursillos Teoría de Números

Coordinador: **Carlos Trujillo**

- ⋆ **[T1]** Introducción al método probabil{'istico, Ana Zumalacárregui, University of New South Wales, Australia.

Introducción al método probabil{'istico

Ana Zumalacárregui
University of New South Wales, Australia
e-mail: a.zumalacarregui@unsw.edu.au

Resumen

Con el objetivo de probar la existencia de cierta estructura combinatoria con alguna propiedad dada en vez de tratar de construirla, cosa en muchos casos inalcanzable, uno puede construir un espacio de probabilidad adecuado y demostrar que un elemento aleatorio del mismo posee las propiedades deseadas con probabilidad positiva. Tras esta sencilla observación, se esconde la idea principal de lo que conocemos como el método probabilístico, que fué introducido por Erdös y se ha desarrollado intensamente en las últimas décadas para convertirse en una herramienta muy poderosa.

En este curso repasaremos, mediante ejemplos clásicos de la teoría de números y la combinatoria, algunas de las aplicaciones del método probabilístico.

Cursillos Aplicaciones

Coordinador: **Agustín Moreno Cañadas**

- ⋆ **[AP]** Sobre Curvas Algebraicas y Códigos Correctores de Error en Cuerpos Finitos, Alonso Sepúlveda Castellanos, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.

Sobre Curvas Algebraicas y Códigos Correctores de Error en Cuerpos Finitos

Alonso Sepúlveda Castellanos
Faculdade de Matemática
Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil
e-mail: alonso.castellanos@ufu.br

Resumen

El estudio de las curvas ha atraído desde siempre la atención de los matemáticos. Posiblemente el episodio más reciente de esta historia lo constituye el caso de las curvas definidas sobre cuerpos finitos, que se ha desarrollado de manera espectacular en los últimos años, a raíz de sus interesantes aplicaciones en la ingeniería y de nuevas técnicas provenientes de la Geometría Algebraica para resolver problemas en la Teoría de la Comunicación. En este cursillo describimos de forma elemental algunas propriedades de las curvas algebraicas sobre cuerpos finitos en conexión con sus aplicaciones a la teoría de Códigos Correctores de Error.

Contenido y organización

El objetivo de este cursillo es presentar de manera elemental, algunos resultados básicos de la teoría de curvas algebraicas sobre cuerpos finitos. Introducir la aplicación de curvas algebraicas en la teoría de códigos y hacer algunos ejemplos de estas dos áreas de investigación usando el sistema de álgebra computacional MAGMA [1].

Curvas Algebraicas

En esta parte abordaremos la teoría utilizando el concepto de curva plana, en vez de modelo no singular o de cuerpo de funciones asociado. Para mayores detalles ver las referencias [2] y [7].

Códigos Correctores de Errores

Aquí daremos los conceptos básicos da teoría de códigos y introduciremos los códigos algebraico-geométricos construidos sobre curvas algebraicas.

Aplicación

En esta parte, introduciremos los principales comandos del MAGMA, haremos algunos ejemplos de códigos y encontraremos todos sus parámetros.

Bibliografía

[1] W. Bosma, J. Cannon, and C. Playoust, The Magma algebra system. I. The user language. Journal Symbolic Computation, 24 no. 3-4, pp.235-265, 1997.

[2] Fulton, W. Algebraic Curves, An introduction to Algebraic Geometry. Benjamin, New York, 1969. xiii+226 pp. ISBN: 0-8053-3080-6 MR7976546.

[3] Stichtenoth, Henning. Algebraic Function Fields and Codes. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Second edition, 2009. xiii+355 pp. ISBN: 978-3-540-76877-7 MR2008938193.

Cursillos Geometría Algebraica & Geometría Aritmética

Coordinadores: Pedro Hernández - Yamidt Bermúdez

- ⋆ **[GA1]** Introducción a las representaciones de Galois y a la teoría de Iwasawa, Guillermo Mantilla-Soler, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
- ⋆ **[GA2]** Aritmética en curvas, Homero R. Gallegos Ruiz, CONACyT - Universidad Autónoma de Zacatecas, México.
- ⋆ **[GA3]** Introducción a las funciones zeta locales, Edwin León Cardenal, Centro de Investigación en Matemáticas, Zacatecas, México.
- ⋆ **[GA4]** Introducción a los problemas de Moduli, Pedro Hernandez Rizzo, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Introduccíon a las representaciones de Galois y a la teoría de Iwasawa

Guillermo Mantilla-Soler
Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia
e-mail: g.mantilla691@uniandes.edu.co

Resumen

El estudio del grupo de clases $C\ell(K)$ de un cuerpo de números K es uno de los problemas más centrales en la teoría de números. El grupo $C\ell(K)$ es abeliano finito y su tamaño h_K, conocido como su *class number*, contiene mucha información aritmética del cuerpo K. Para cuerpos de números arbitrarios calcular h_K no está al alcance de la tecnología actual, sin embargo existen casos especiales, como lo son las llamadas torres $\mathbb{Z}_p$, para los cuales se conoce bien la p-parte de los class numbers. A finales de los años 50 Kenichi Iwasawa inició el estudio del crecimiento del orden de los grupos de clases en ciertas torres de cuerpos de números. El inicio de la *Teoría de Iwasawa* es el descubrimiento, por parte de Iwasawa, de un comportamiento uniforme en el tamaño de los p-subgrupos de Sylow de los grupos $C\ell(K_n)$ donde los K_n forman una torre de cuerpos de números con ciertas propiedades Galois teóricas muy especiales.

$$K_0 \subseteq K_1 \subseteq ... \subseteq K_n \subseteq ...$$

Un primera meta de este cursillo es presentar los resultados de Iwasawa mencionados arriba, y dar una idea de los métodos utilizados en las pruebas de los mismos. El segundo propósito del curso es explicar, de manera superficial, y aprovechando su uso en la Teoría de Iwasawa rudimentaria, qué es una representación de Galois. Uno de los ejemplos que muestra la importancia de las representaciones de Galois es el papel fundamental que tienen para Taylor y Wiles en su prueba de *modularity of elliptic curves* y su famosa consecuencia; *el último teorema de Fermat*.

Bibliografía

[1] Brian Conrad, Karl Rubin. *Arithmetic Algebraic Geometry*. IAS/PARK CITY, Mathematics Series, AMS, IAS, 2008.

Aritmética en curvas

Homero R. Gallegos Ruiz
Unidad Académica de Matemáticas
CONACyT - Universidad Autónoma de Zacatecas, México
e-mail: h.r.gallegos.ruiz@gmail.com

Resumen

Consideraremos el problema de encontrar todas las soluciones racionales o enteras de una ecuación diofantina del tipo $f(x, y) = 0$, donde f es un polinomio con coeficientes enteros en dos variables. Este es un problema difícil en la teoría de números, como el último teorema de Fermat demuestra. Veremos cómo atacar el problema desde un punto de vista geométrico-algebraico. Nos enfocaremos en el caso particular de curvas elípticas e hiperelípticas.

Los prerrequisitos del curso son, idealmente, un poco de geometría algebraica elemental afín o proyectiva, divisores en curvas; pero un curso sólido de álgebra (grupos, anillos, cuerpos, anillos de polinomios) es suficiente.

Bibliografía

[1] Bugeaud, Yann and Mignotte, Maurice and Siksek, Samir and Stoll, Michael and Tengely, Szabolcs *Integral points on hyperelliptic curves* Algebra & Number Theory **2**, (2008), no. 8, 859–885.

[2] Gallegos–Ruiz, Homero R. *S-integral points on hyperelliptic curves*. Int. J. Number Theory **7**, (2011), no. 3, 803–824.

[3] Joseph H. Silverman. *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.

[4] Silverman, J.H. and Tate, J. *Rational Points on Elliptic Curves*. Springer, 1992.

Introducción a las funciones zeta locales

Edwin León Cardenal
CONACYT– CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas, Zacatecas, México
e-mail: edwin.leon@cimat.mx

Resumen

La teoría de funciones zeta locales es una rama relativamente reciente de las matemáticas con múltiples interacciones con diversas ramas de las matemáticas como teoría de ecuaciones diferenciales parciales, teoría de números y singularidades, entre otras.

Las funciones zeta locales son funciones de valores complejos que se pueden definir, por ejemplo, sobre campos arquimedianos y no arquimedianos o $p-$ádicos. Como funciones del parámetro complejo

s, las funciones zeta son holomorfas en el semiplano $Re(s) > 0$ y en el caso de característica cero ellas admiten una continuación meromorfa a todo $\mathbb{C}$.

En el curso introduciremos primero las funciones zeta arquimedianas ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), estudiamos sus propiedades básicas y enunciamos el teorema de Bernstein & Gelfand–Atiyah sobre la continuación meromorfa. Después haremos una breve introducción a los números $p-$ádicos y a las funciones zeta definidas sobre este campo, sus propiedades y resultados clásicos. Si el tiempo lo permite, presentaremos algunos problemas de investigación en el área.

Palabras claves

Funciones zeta locales, campos locales, números $p-$ádicos, congruencias polinomiales, resolución de singularidades.

Introducción a los problemas de Moduli

Pedro Hernandez Rizzo

Instituto de Matemáticas

Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

e-mail: pedro.hernandez@udea.edu.co

Resumen

El estudio de la teoría de espacios de moduli se remonta a los trabajos de Riemann, quien en 1857 acuño el término “moduln” para referirse al espacio de $3g - 3$ “parámetros” que definia la clase de isomorfimos de una superficie de Riemann de género g. No obstante, la existencia de este espacio solo se garantizaría más de 100 años después cuando logró consolidarse un lenguaje y herramientas para su construcción.

En geometría algebraica un problema de moduli, es asociado a la existencia de ciertos espacios clasificantes construidos a partir de una familia de *objetos* $\mathcal{F}$ y una relación de equivalencia $\sim$ definida sobre ellos. Además de la existencia de este tipo de espacios también deseamos dotarlos de alguna estructura algebraica. Esto nos lleva, por un lado, a la búsqueda de garantizar que las propiedades determinadas por cada clase en $\mathcal{F}/\sim$ sean válidas para familias de objetos que varian “continuamente” (lo que hace necesario una topología sobre estos espacios!!). Y por otro lado, la de hallar un objeto geométrico algebraico $\mathcal{V}$ de tal forma que establezcamos una correspondencia entre los conjuntos $\varphi : \mathcal{F}/\sim\longrightarrow \mathcal{V}$, de tal forma que la familia $\{F_p\}_{p\in P}$ con $F_p \in \mathcal{F}$ y parametrizada por la variedad P (y que varia continuamente sobre P) esté en correspondencia biunivoca con el mapa (que es en realidad un morfismo) $\nu : P \to \mathcal{V}$ tal que $\nu(p) = \varphi([F_p])$. Esto puede ser dicho en pocas palabras, en la terminología introducida por Grothendieck: el functor entre la categoria de variedades (o esquemas) a la categoria de conjuntos asociado a la familia de objetos $\mathcal{F}/\sim$ es representable en la categoria de variedades (o esquemas o espacios algebraicos o stacks).

En este cursillo daremos un vistazo rápido a las ideas generales de la construcción de espacios de moduli en geometría algebraica. En ese sentido, no nos detendremos en el estudio de propiedades de estos espacios, pero si lo haremos al ilustrar con ejemplos las principales construcciones relacionadas a esta problemática. Debido a que exhibir la existencia de este tipo de objetos lleva consigo un cierto dominio de la teoría de haces, en algunos momentos de la exposición seremos deliberadamente informales.

Los temas a desarrollar en los 3 días de cursillo serán organizados de la siguiente forma:

- Día 1: Problemas de clasificación, familias y el problema de moduli.
- Día 2: El problema de moduli I: Representabilidad (moduli fino). Ejemplos.
- Día 3: El problema de moduli II: No representabilidad, Representabilidad “débil” (moduli grueso). Ejemplos.

Bibliografía

[1] Harris, J. Morrison, I. *Moduli of curves*. Graduate Text in Mathematics. **187**. Springer-Verlag. 1998

[2] Fantechi, B. et al. *Fundamental Algebraic Geometry. Grothendieck's FGA explained*. Mathematical Surveys and Monographs. **123**. Springer-Verlag. 2005

[3] Bosch, S. et al. *Neron Models*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **3**. Springer-Verlag. 1980

[4] Esteves, Eduardo. *Construcao de espacos de Moduli*. Notas para o 21° Colóquio Brasileiro de Matemática. Publicacoes IMPA. 1997

Ponencias ALTENCOA7-2016

Ponencias Álgebra

Coordinador: Hector Pinedo

- ⋆ **[A1]** Star-group identities on units of group algebras, César Polcino Milies, Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, Brasil.
- ⋆ **[A2]** Generación de álgebras de Sullivan descomponibles via ciertas PDES, Samin Ingrith Cerón Bravo, Institución Universitaria Colegio Mayor del Cauca, Popayán, Colombia.
- ⋆ **[A3]** Forma de Algunos Triángulos que Casi Dividen en la Categoría Derivada, Hernán Giraldo, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- ⋆ **[A4]** El conjunto de k-unidades de un anillo, John H. Castillo, Jhony Fernando Caranguay Mainguez, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia.
- ⋆ **[A5]** Artinian Partial Skew group rings, Héctor Pinedo, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- ⋆ **[A6]** Modules over infinite dimensional algebras, Sergio R. López-Permouth, Ohio University, Athens, Ohio, USA.
- ⋆ **[A7]** Clasificación de las $\mathbb{R}-$álgebras finitas, Claudia Granados Pinzón, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- ⋆ **[A8]** Hacia el Teorema de Duflo en Álgebras Pre-Lie y una Generalización de Operadores Rota-Baxter para la Construcción de un Ballot^m-Algebra, Wilson Arley Martinez Flor, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia.
- ⋆ **[A9]** Nueva cota inferior para la distancia minima de códigos Castillo, Wilson Olaya-León, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- ⋆ **[A10]** Mishchenko-Fomenko subalgebras in $\mathcal{S}(gl_n)$, Wilson Fernando Mutis Cantero, Universidad de Nariño, Colombia.
- ⋆ **[A11]** Introducción a la teoría de códigos convolucionales cíclicos, Viviana Carolina Guerrero Pantoja, John H. Castillo, Universidad del Valle, Santiago de Cali, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia.
- ⋆ **[A12]** Una sucesión exacta de 5 términos usando el grupo de Picard, Jhoan Sebastián Báez Acevedo, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

- ⋆ **[A13]** Anillos Universales de Deformación para Álgebras de Gorenstein, Jose A. Vélez-Marulanda, Valdosta State University, USA.
- ⋆ **[A14]** Álgebras hereditarias por partes, Yohny Ferney Calderón Henao, Instituto de Matemáticas, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- ⋆ **[A15]** Hablemos un poco de álgebras y superalgebras de Jordan de dimensión finita, Faber Gómez González, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Star-group identities on units of group algebras

César Polcino Milies
Departamento de Matemática - IME
Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, Brasil
e-mail: polcino@ime.usp.br

Resumen

Let FG be the group algebra of a group G over a field F, and denote by $U(FG)$ its group of units. This group has been extensively studied. In an attempt to relate the group of units to the structure of the algebra, B. Hartley conjectured that, at least for torsion groups, a group identity on $U(FG)$ would imply the existence of a polynomial identity on FG. Such conjecture was proved in the nineties and it turns out that one can actually classify the torsion groups G such that the group of units $U(FG)$ satisfies a group identity. This was the starting point for the developement of the theory of group identities on $U(FG)$.

An involution of G can be extended linearly to an involution on FG. In order to avoid a special non standard case, one always assumes that the characteristic of the base field is different from 2. Since the symmetric elements of a ring play an important role in the theory of rings with involution, we studied in [1] group identities on symmetric units of FG.

Let $\mathcal{F}$, denote the free group with involution *, of rank greater than 1. Then, a non-empty word of $\mathcal{F}$ is a $*$-group identity for a group U if it evaluates into 1 under any homomorphism from $\mathcal{F}$ to U. Hence, a group identity on symmetric units is a special case of a $*$-group identity. In this talk, we describe groups G such that $U(FG)$ satisfies a $*$-group identity. Its content is joint work with A. Giambruno and S.K. Sehgal. [2], [3].

Palabras claves

Group identity, Involution, Group algebra.

Bibliografía

[1] Giambruno A., Polcino Milies C. and Sehgal Sudarshan K. Group identities on symmetric units, *J. Algebra*, **322** (2009), 2801 – 2815.

[2] Giambruno A., Polcino Milies C. and Sehgal Sudarshan K. Star-group identities and groups of units, *Arch. Math*, **95** (2010), 501–508.

[3] Giambruno A., Polcino Milies C. and Sehgal Sudarshan K, Star-Group Identities on Units of group algebras: the non-torsion case, *preprint*.

Generación de algebras de Sullivan descomponibles via ciertas PDES

Samin Ingrith Cerón Bravo
Escuela de Matemáticas
Institución Universitaria Colegio Mayor del Cauca
e-mail: sicbravo@gmail.com

Resumen

Sullivan en [4] define una álgebra graduada conmutativa diferencial (cdga), la cual llamaremos álgebra de Sullivan descomponible, como una álgebra de la forma $(\Lambda V, d)$ en la cual el diferencial satisface que $dV \subseteq \Lambda V^{\geq 2} V$, además prueba que esta noción puede ser descrita en términos de un álgebra de Lie dual a V^1 y una secuencia de clases de cohomologia torcida.

Inspirado por la construcción del complejo de De Rham de formas sobre una variedad, Sullivan introduce el así llamado modelo minimal de un espacio topológico dado, para este fin, uno primero construye la cdga de formas diferenciales polinómicas $A_{PL}(X)$ de un espacio topológico X dado. Por otra parte, para cualquier cdga A conexa (esto es, $H^0(A) = \mathbb{Q}$) Sulllivan construye su modelo minimal, esto es, un quasi-isomorfismo $\rho\colon (\Lambda V, d) \to A$ desde algebra graduada libre generada por el espacio vectorial graduado V y en el cual el diferencial d satisface una cierta condición de minimalidad. Entonces el modelo minimal de X es, por definición, el modelo minimal de $A_{PL}(X)$.

Este trabajo muestra algunas propiedades de ciertas álgebras diferenciales conmutativas graduadas naturalmente asociadas a sub-variedades de una variedad de jets de orden infinito determinada por sistemas finitos de ecuaciones diferenciales de orden finito, particularmente aquellas sub-variedades inspiradas por el estudio de complejos de Gauge (ver [2])y por uno-formas asociadas a ecuaciones de tipo pseudo-esférico (ver [3]). Mas explícitamente, tratamos de identificar los complejos de Gauge como ciertos complejos torcidos y entonces generar algebras de Sullivan descomponibles usando propiedades que satisfacen los complejos de Gauge y las ecuaciones diferenciales de tipo pseudo-esférico.

Finalmente, relacionamos este proceso con los functores A_{PL} y de realización espacial de una álgebra diferencial conmutativa graduada, usando sus importantes propiedades que permiten relacionar álgebras de Sullivan a espacios topológicos. A futuro pretendemos analizar si este proceso puede ser topológicamente realizable. En otras palabras, buscamos un espacio topológico que tenga como modelo las construcciones generadas anteriormente.

Palabras claves

Álgebra graduada conmutativa diferencial, Complejos de Gauge, Ecuaciones de tipo pseudo-esférico.

Bibliografía

[1] Félix, Y.; Halperin, S.: and Thomas, J.C. Rational homotopy theory. Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol.205. Springer-Verlag, New York, 2001

[2] Marvan, M. *On zero-curvature representations of partial differential equations*. In: Kowalski, O., Kruoka, D.(eds.) Differential Geometry and its applications, pp. 103-122. Silesian University, Opava 1993

[3] Reyes, E.G. Equations of pseudo-spherical type. Results in Mathematics. **60**, pp. 53-101, 2011

[4] Sullivan, D. Infinitesimal computations in topology. Inst. hautes Études Sci. Publ. Math. 47, pp.269-331, 1977

Forma de Algunos Triángulos que Casi Dividen en la Categoría Derivada

Hernán Giraldo
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia
e-mail: hernan.giraldo@udea.edu.co

Resumen

Describimos la forma de algunos triángulos que casi se dividen (o triángulos de Auslander-Reiten) en la categoría derivada de los módulos sobre un álgebra de dimensión finita sobre un campo, ver [2]. Esta caracterización depende esencialmente de la forma de los morfismos irreducibles (ver “Proposition”3 y “Definition”11 de [1]) del comienzo de los triángulos que casi se dividen.

Palabras claves

Representaciones de álgebras, categorías derivadas y triángulos que casi se diven.

Bibliografía

[1] Giraldo, H. and Merklen, H. Irreducible morphisms of categories of complexes, Journal of Algebra, 321, (2009), 2716-2736.

[2] Happel, D. Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras, London Math. Soc. Lecture Note Series, 119, Cambridge University Press, 1988.

El conjunto de k-unidades de un anillo

John H. Castillo Jhony Fernando Caranguay Mainguez
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia
e-mail: jhcastillo@gmail.com jfernandomainguez@gmail.com

Resumen

Sean R un anillo, $\mathcal{U}(R)$ el grupo de las unidades en R y k un entero positivo. Se dice que $a \in \mathcal{U}(R)$ es una k-unidad si $a^k = 1$. En particular, se define una k-unidad módulo n cuando el anillo R es $\mathbb{Z}_n$.

Con $\mathcal{U}_k(R)$ se denota el conjunto de las k-unidades de R. En esta charla se demostrará que cuando R es un anillo conmutativo, $\mathcal{U}_k(R)$ es un subgrupo de $\mathcal{U}(R)$ y cuando $R = \mathbb{Z}_n$, apartir de la descomposición prima de n, se presentan fórmulas para las funciones

$$du_k(R) = |\mathcal{U}_k(R)|, \quad pdu_k(R) = \frac{du_k(R)}{|\mathcal{U}(R)|} \text{ y } rdu_k(R) = \frac{1}{pdu_k(R)}.$$

Adicionalmente, se estudia la ecuación $rdu_k(R) = 1$. Observe que si se da la igualdad anterior esto significa que todas las unidades del anillo R son k-unidades. Esto fue recientemente estudiado cuando $k = 2$, donde esta propiedad se conoce como la *propiedad de la diagonal* [1, 3]. Aquí se estudia esta ecuación cuando $R = \mathbb{Z}_n$. Finalmente, se obtienen algunos resultados conocidos sobre los números de Carmichael, como consecuencia de la temática aquí desarrollada.

Palabras claves

Unidades de un anillo, conjunto de k-unidades, propiedad de la diagonal, números de Carmichael.

Bibliografía

[1] M. J. Genzlinger, Karenna; Lockridge, Keir. Sophie Germain primes and involutions of $\mathbb{Z}_n^{\times}$. Involve 8 (2015), no. 4, 653-663 . MR3366016.

[2] Ireland, Kenneth; Rosen, Michael. A classical introduction to modern number theory. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 84.Springer-Verlag, New York, 1990. xiv+389 pp. ISBN: 0-387-97329-X.

[3] Chebolu, Sunil K. What is special about the divisors of 24? Math. Mag. 85 (2012), no. 5, 366-372.

Artinian Partial Skew group rings

Héctor Pinedo

Escuela de Matemáticas

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia

e-mail: hpinedot@uis.edu.co

Resumen

Let $\alpha = (R_g, \alpha_g)_{g \in mor(G)}$ be a partial action of a groupoid G on a non-associative ring R and let $S = R *_m G$ be the associated partial skew groupoid ring. We show that if α is global and unital, then S is left (right) artinian if and only if R is left (right) artinian and $R_g = 0$; for all but finitely many g in mor(G). We use this result to prove that if α is unital and R is alternative, then S is left (right) artinian if and only if R is left (right) artinian and $R_g = 0$; for all but finitely many g in mor(G). Both of these results apply to partial skew group rings, in particular we generalize a result by J. K. Park for classical skew group rings, i.e. the case when R is unital and associative, and G is a group which acts globally on R. Moreover, we generalize I. G. Connell's classical result for group rings by giving a characterization of artinian (non-associative) groupoid rings. This result is in turn applied to partial group algebras.

This is a joint work with P. Nystedt and J. Oinert.

Palabras claves

Skew groupoid ring, partial action, partial crossed product.

Bibliografía

[1] I. G. Connell, On the group ring, *Canad. J. Math.* **15** (1963), 650–685.

[2] J. K. Park, Artinian skew group rings, *Proc. Amer. Math. Soc* **75** (1979), no. 1, 1–7.

Modules over infinite dimensional algebras

Sergio R. López-Permouth
Ohio University
Athens, Ohio, USA
e-mail: lopez@ohio.edu

Resumen

Let A be an infinite dimensional K- algebra, where K is a field and let $\mathcal{B}$ be a basis for A. We explore when $K^{\mathcal{B}}$ (the direct product indexed by $\mathcal{B}$ of copies of the field K) can be made into an A-module in a natural way. We call a basis $\mathcal{B}$ satisfying that property .ªmenable,.ªnd we explore when amenable bases yield isomorphic A-modules. For the latter purpose, we consider a relation, which we name congeniality, that guarantees that two different bases yield (naturally) isomorphic A-module structures on $K^{\mathcal{B}}$. While amenability depends on the algebra structure, congeniality of bases depends only on the vector space structure and is thus independent from the specific algebra structure chosen. Among other results, we show that every algebra of countable infinite dimension has at least one amenable basis. Most of our examples will be within the familiar settings of the algebra $K[x]$ of polynomials with coefficients in K. We show that the relation of proper congeniality (when congeniality is not symmetric) yields several natural interesting questions; among these questions we highlight those related to a natural notion of simplicity of bases. We show that the algebra of polynomials with coefficients in K has at least as many truly distinct (so-called discordant) simple bases as there are elements in the base field K.

Palabras claves

Algebra of polynomials, Bases of Vector Spaces, Amenable Bases, Simple Bases, Congenial Bases, Discordant Bases.

Bibliografía

[1] A. N. Alahmadi, M. Alkan, S. R. López-Permouth, *Poor Modules: The opposite of injectivity*, Glasgow Math. J. 52A (2010).

[2] P. Aydoğdu and S. R. López-Permouth, *An alternative perspective on injectivity of modules*, J. Algebra 338(2011), 207-219.

[3] P. Aydoğdu and B. Saraç, *On Artinian rings with restricted class of injectivity domains,* J. Algebra 377 (2013), 49-65.

[4] A. K. Boyle, *Hereditary QI-rings,* Trans. American Math. Soc. 192 (1974), 115-120.

[5] N. Er, S. R. López-Permouth and N. Sökmez, *Rings whose modules have maximal or minimal injectivity domains,* J. Algebra 330 (2011), 404-417.

[6] S. R. López-Permouth and J. E. Simental, *Characterizing rings in terms of the extent of the injectivity and projectivity of their modules,* J. Algebra, 362 (2012), 56-69.

[7] B. Osofsky, *Rings all of whose finitely generated modules are injective,* Pacific J. Math., 14 (1964), 645-650.

Clasificación de las $\mathbb{R}-$álgebras finitas

Claudia Granados Pinzón
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
e-mail: cigranad@uis.edu.co

Resumen

Sean K un cuerpo y A una $K-$álgebra conmutativa con unidad. Decimos que A es una *$K-$álgebra finita* si es una $K-$álgebra conmutativa con unidad y de dimensión finita como $K-$espacio vectorial. Denotaremos por $\dim_K A$ a su dimensión como $K-$espacio vectorial.

Si $\dim_K A = 2$, tomamos $\gamma \in A \setminus K$, luego $\{1_K, \gamma\}$ es una base del $K-$espacio vectorial A. Además como $1 \cdot \gamma = \gamma \cdot 1$, se tiene que el anillo A es conmutativo. Sin embargo, para dimensiones superiores, las $K-$álgebras no son necesariamente conmutativas. Por ejemplo, el cuerpo de los números cuaterniónicos es una $\mathbb{R}-$álgebra de dimensión cuatro que no es conmutativa. En esta charla estamos interesados sólo en $K-$álgebras conmutativas.

Existen, salvo isomorfismos, tres álgebras de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{C} = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+1)}, \qquad \mathbb{P} = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2-1)}, \qquad \mathbb{D} = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2)}.$$

Esto es debido a que en una extensión de grado 2 de $\mathbb{R}$,

$$A = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+bx+c)}$$

se pueden dar tres casos según x^2+bx+c tenga dos raíces imaginarias, dos raíces reales distintas o una raíz doble. Los conjuntos $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{D}$ son, respectivamente, los números complejos, los números paracomplejos y los números duales.

La teoría de funciones complejas es más estudiada que las otras dos. Algebraicamente, esto refleja el hecho de que $\mathbb{C}$ es un cuerpo, mientras que $\mathbb{P}$ y $\mathbb{D}$ no lo son pues $\mathbb{P}$ tiene divisores de cero y $\mathbb{D}$ tiene además elementos nilpotentes.

Las rectas proyectivas sobre las $\mathbb{R}-$álgebras $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{D}$ generan las tres geometrías clásicas del plano, Moebius, Laguerre y Minkowski, ver [2]. En dimensiones superiores, existen trabajos recientes sobre las rectas proyectivas sobre anillos pero es una teoría muy incompleta. [3] es un trabajo sobre la geometría correspondiente a la $\mathbb{R}-$álgebra tridimensional $\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^3)}$ y [1] es un estudio inicial de las rectas proyectivas sobre álgebras finitas. En general, estudiar la geometría de las rectas proyectivas sobre anillos es un problema abierto.

En esta charla haremos un estudio sistemático de las $K-$álgebras finitas. Todas ellas son suma directa de $K-$álgebras locales finitas y por tanto identificando éstas las conocemos todas. Así hemos clasificado las $\mathbb{R}-$álgebras locales finitas de dimensión real menor que seis ya que probamos que hay infinitas de dimensión seis.

Palabras claves

Álgebra finita sobre un cuerpo, recta proyectiva sobre anillos.

Bibliografía

[1] Granados-Pinzón, C. Tesis doctoral: Álgebras finitas sobre un cuerpo. La recta proyectiva. Director: J.M. Aroca, Universidad de Valladolid, Departamento de Matemáticas, 2015.

[2] Hartmann, E. Planar Circle Geometries: an introduction to Moebius-, Laguerre- and Minkowski-planes. Darmstadt University of Technology, 2004.

[3] Havlicek, H. and List, K. A three-Dimensional Laguerre geometry and its visualization. In proceedinhs-Dresden Symposium geometry: constructive and kinematic. Institut für geometrie TU Dresden, Dresden pp. 122-129, 2003. arXiv:1304.0223v1 [math.AG] 31 Mar 2013.

[4] Poonen, B. Isomorphism types of commutative algebras of finite rank over an algebraically closed field. Computational Arithmetic Geometry: AMS Special Session on computational Arithmetic Geometry. April 29-30, 2006.

Hacia el Teorema de Duflo en Álgebras Pre-Lie y una Generalización de Operadores Rota-Baxter para la Construcción de un Ballot^m-Algebra

Wilson Arley Martinez Flor
Departamento de Matemáticas
Universidad del Cauca, Popayán, Colombia
e-mail: wamartinez@unicauca.edu.co

Resumen

El teorema de Duflo es la composición del isomorfismo de Poincaré- Birkhoff-Witt (el cual es un isomorfismo a nivel de espacios vectoriales) con un automorfismo de el álgebra simétrica $S(\mathfrak{g})$ (el cual desciende al subespacio de invariantes $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$). Esto es, el espacio de invariantes, $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ y $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, **son de hecho canónicamente isomorfos como álgebras**.

En la primera parte de este trabajo generalizamos algunos conceptos del teorema de Duflo a álgebras Pre-Lie y álgebras dendriformes, en particular presentamos la noción de acciones sobre álgebras dendriformes.

La combinatoria de los árboles planares binarios es conocida por tener interesantes propiedades algebraicas, Loday y Ronco son los primeros en introducir el álgebra de Hopf de árboles planares binarios [3]. Esta álgebra de Hopf es la álgebra dendriforme libre sobre un generador.

Damos una generalización de Operadores Rota-Baxter e introducimos la noción de un Ballot^m-algebra. Un álgebra de Rota-Baxter libre sobre un conjunto pueden ser construida desde un subconjunto de bosques planares enraizados con decoraciones en los ángulos [1, 2]. Presentamos construcciones similares para obtener una álgebra asociativa en términos de árboles planares binarios con un Operador de Rota-Baxter modificado, y así construimos un Ballot^m-algebra.

Palabras claves

Teorema de Duflo, Álgebras Pre-Lie, Operador Rota-Baxter .

Bibliografía

[1] M. Aguiar and W. Moreira,Combinatorics of the free Baxter algebra,Electron. J. Combin.,13,2006,R17. arXiv:math.CO/0510169.

[2] K. Ebrahimi-Fard and and L. Guo, Free Rota-Baxter algebras and rooted trees,arXiv:math.RA/0510266..

[3] J.L. Loday and M. O. Ronco, Hopf algebra of the planar binary trees, Adv. Math., 139 (2), 1998, 293-309.

Nueva cota inferior para la distancia minima de códigos Castillo

Wilson Olaya-León
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
e-mail: wolaya@uis.edu.co

Resumen

Sea $\mathbb{F}_q$ un cuerpo finito con q elementos. Un código Castillo es un código Algebraico geométrico (AG) unipuntual construido sobre una curva Castillo $\mathcal{X}$ sobre $\mathbb{F}_q$, es decir una curva algebraica, proyectiva, absolutamente irreducible, no singular $\mathcal{X}$ sobre $\mathbb{F}_q$ que tiene un punto racional Q con semigrupo de Weierstrass H simétrico y que alcanza la cota superior de Lewittes para el número de puntos racionales, $\#\mathcal{X}(\mathbb{F}_q) \leq qh_2+1$ donde h_2 es la multiplicidad de H. Esta familia contiene algunos de los más importantes códigos AG estudiados hasta la fecha, ver [2] y [3].

La distancia mínima de estos códigos puede ser acotada usando la cota orden, cuya principal herramienta es la noción de pares que se comportan bien, ver [1]. Esta cota generalmente da muy buenos resultados para estimar la distancia mínima de códigos Castillo, en el caso particular de los códigos Hermitianos esta cota coincide con el verdadero valor de la distancia mínima pero en general no es así (e.g. para códigos Suzuki es estrictamente menor), ver [4].

En esta charla presentamos una nueva cota inferior para la distancia mínima de códigos Castillo, para esto introduciremos el concepto de pares que se comportan regular y sus propiedades. Esta nueva cota es mejor que la cota de Shibuya-Sakaniwa y coincide con la cota de orden en los casos estudiados. Finalmente, plantearemos los problemas que se presentan para obtener una cota mejorada a partir de esta nueva cota y cual es la relación con respecto a la cota de orden.

Palabras claves

Códigos AG, distancia mínima, códigos Castillo, cota de orden.

Bibliografía

[1] O. Geil, C. Munuera, D. Ruano and F. Torres, *On the order bounds for one-point AG codes*, Advances in Mathematics of Communications, 3 (2011), pp. 489–504.

[2] C. Munuera, A. Sepúlveda and F. Torres, *Castle curves and codes*, Advances in Mathematics of Communication, 3 (2009), pp. 399–408.

[3] C. Munuera and W. Olaya-León, *An introduction to Algebraic Geometry codes*. Algebra for Secure and Reliable Communication Modeling, Contemporary Mathematics AMS, Vol. 642 (2015), pp. 87–118, ArXiv:1505.03020

[4] W. Olaya-León and C. Munuera, *On the minimum distance of Castle codes*, Finite Fields and Applications, 20 (2013), pp. 55–63.

Mishchenko-Fomenko subalgebras in $\mathcal{S}(gl_n)$ and regular sequences

Wilson Fernando Mutis Cantero
Department of Mathematics and Statistics
University of Nariño, San Juan de Pasto, Colombia
e-mail: wfmutis@gmail.com

Abstract

Let gl_n be the Lie algebra of the matrices of size $n \times n$ over the field $\mathbb{C}$ of complex numbers. For $\xi \in gl_n^*$ let $\mathcal{F}_\xi(gl_n)$ be the *Mishchenko-Fomenko subalgebra* of the symmetric algebra $\mathcal{S}(gl_n)$ constructed by the *argument shift method*. It is known that if ξ is a semisimple regular element or nilpotent regular element then the subalgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_n)$ is generated by a regular sequence in $\mathcal{S}(gl_n)$. In this presentation we will see that in gl_3 the result is extended to all $\xi \in gl_3$, this is, the Mishchenco-Fomenko subalgebras $\mathcal{F}_\xi(gl_3) \subset \mathcal{S}(gl_3)$ are generated by a regular sequence in $\mathcal{S}(gl_3)$. Furthermore, for the particular case of the Lie algebra gl_4 this result is true for all elements nilpotente $\xi \in gl_4$.

Keywords

Universal enveloping algebra, symmetric algebra, Mishchenko-Fomenko subalgebra, the argument shift method, regular sequence.

Bibliografía

[1] Futorny, Vyacheslav and Molev, Alexander. Quantization of the shift of argument subalgebras in type A. Advances in Mathematics, 285, 1358-1375, 2015.

[2] Futorny, Vyacheslav and Ovsienko, Serge. Kostant's theorem for special filtered algebras. Bull. London Math. Soc, 37, 187-199, 2005.

[3] Panyushev, Dmitri and Yakimova, Oksana Sergeevna. The argument shift method and maximal commutative subalgebras of poisson algebras. Math. Res. Lett. 15, No. 2, 239-249,2008.

[4] Rybnikov, Leonid. The argument shift method and the Gaudin Model. Funct. Analysis and App. Vol 40, No. 3, 188-199, 2006.

[5] Vinberg, Ernest. On certain commutative subalgebras of a universal enveloping algebra. Math. USSR-Izv. Vol 36, 1-22, 1991.

Introducción a la teoría de códigos convolucionales cíclicos

Viviana Carolina Guerrero Pantoja
Estudiante Maestría en Ciencias Matemáticas
Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia
e-mail: vivianaguerrero24@gmail.com
John H. Castillo
Docente Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia
e-mail: jhcastillo@gmail.com

Resumen

La definición de código convolucional puede presentarse de diferentes formas. Una es definir primero el codificador y a partir de este definir el código, y la otra es hacerlo en el sentido contrario. Sin embargo, en los dos casos se define el mismo objeto. En esta charla, se asumirá la posición de definir primero el código y luego el codificador.

Además, estas definiciones pueden darse en diferentes niveles de generalidad, lo que depende de la estructura tanto del alfabeto como de las palabras código. Los elementos de estos conjuntos se pueden tomar de las siguientes estructuras algebraicas infinitas: $\mathbb{F}[z]$ el anillo de polinomios en la indeterminada z con coeficientes en el campo $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}(z) = \{p/q : p, q \in \mathbb{F}[z] \text{ y } q \neq 0\}$ el campo de funciones racionales en z sobre $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}[[z]] = \{\Sigma_{i=0}^{\infty} f_i z^i : f_i \in \mathbb{F}\}$ el anillo de series de potencias formales en z sobre $\mathbb{F}$ o $\mathbb{F}((z)) = \{\Sigma_{i=-\infty}^{\infty} f_i z^i : f_i \in \mathbb{F}\}$ el campo de series formales de Laurent.

De esta manera, se define un (n, k)-*código convolucional* como un k-subespacio del espacio vectorial $\mathbb{F}((z))^n$, donde $\mathbb{F}$ es un campo finito. Por otro lado, un *codificador convolucional* para el código convolucional C es una matriz $G(z)$ de tamaño $k \times n$, con entradas en el subconjunto $\mathbb{F}[z]$ de $\mathbb{F}((z))$, cuyas filas generan al código C. En consecuencia, el código convolucional C es la imagen de la función $\mathbb{F}((z))^k \to \mathbb{F}((z))^n$, definida por $u(z)G(z)$.

Observe que en la definición anterior, las palabras de un código convolucional en realidad son sucesiones infinitas. Este es el enfoque tradicional que se puede encontrar en la literatura sobre códigos convolucionales [1, 3, 4]. Sin embargo, en algunos trabajos como el artículo de Heide Gluesing-Luerssen y Wiland Schmale [2] se toma otro enfoque, ya no en el contexto de las series formales de potencias sino tomando las palabras código como elementos de un anillo de polinomios. Aún más, un código convolucional puede generalizarse como un código lineal sobre un espacio vectorial, un anillo, o un módulo o inclusive como un código de grupo sobre el grupo aditivo de $\mathbb{F}$.

En esta ponencia se presentará una primera introducción a los códigos convolucionales mostrando el codificador convolucional físico de un código y las representaciones analíticas del mismo, la definición

de un código convolucional cíclico y la definición de un código convolucional cíclico.

Palabras claves

Código Convoluconal, Códificador Convolucional, Código Convolucional Cíclico.

Bibliografía

[1] Dholakia, A. Introduction to convolutional codes with appplications. Springer Science+Business Media. New York. (1994).

[2] Gluesing-Luerssen H. and Schmale W. On cyclic convolutional codes, Acta Appl. Math. 82 (2), 183-237 (2004).

[3] Johannesson R. and Zigangirov K. S. Fundamentals of Convolutional Coding, IEEE Press, Second Edition, New York, (2015).

[4] McEliece R.J. The algebraic theory of convolutional codes, in Handbook of coding theory, Vol. I, 1065-1138, North-Holland, Amsterdam, (1998).

Una sucesión exacta de 5 términos usando el grupo de Picard

Jhoan Sebastián Báez Acevedo
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
e-mail: sebastianbaezzz@gmail.com

Resumen

Desde la aparición de la sucesión exacta de siete términos que lleva el nombre de sucesión Chase-Harrison-Rosenberg, las sucesiones exactas de más de 4 términos han sido vitales en el trabajo de los algebristas en todo el mundo.

En este caso usamos una sucesión de 5 términos para calcular el *Grupo de Picard* de una anillo R.

Para esto, considere un anillo conmutativo R con unidad, se define el grupo de Picard de R, denotado $\mathbf{Pic}\,(R)$ como sigue:

$$\mathbf{Pic}\,(R) = \{[P] : \ P \text{ es un } R\text{-módulo de rango } 1\},$$

donde

$$[P] = \{Q|\ Q \simeq P \text{ como } R\text{-módulos}\},$$

y producto:

$$[P] \cdot [Q] = [P \otimes_R Q].$$

El calculo de este grupo no es nada fácil y para ello se han planteado diversas alternativas, como por ejemplo la siguiente sucesión exacta de 5 términos

$$1 \longrightarrow \mathcal{U}\,(R) \xrightarrow{f} \mathcal{U}\,(\mathcal{K}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{I}\,(R) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Pic}\,(R) \xrightarrow{f_*} \mathbf{Pic}\,(\mathcal{K})\,.$$

donde $f : R \to \mathcal{K}$, con $\mathcal{K}$ la localización de R por sus elementos regulares.

Dicha sucesión nos permitirá calcular $\mathbf{Pic}\,(R)$ para algunos anillos R que eran complicados previamente.

Palabras claves

Sucesión exacta de 5 términos, Grupo de Picard.

Bibliografía

[1] DeMeyer F. y Ingraham, E. Separable algebras over commutative rings. Springer-Verlag, (1971).

[2] Lam T. Y. Lectures on Modules and Rings. Springer, (1999).

Anillos Universales de Deformación para Álgebras de Gorenstein

José A. Vélez-Marulanda
Department of Mathematics
Valdosta State University, Valdosta, Georgia, United States of America
e-mail: javelezmarulanda@valdosta.edu

Resumen

Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo algebraicamente cerrado, y sea Λ una álgebra de dimensión finita sobre $\mathbf{k}$. Nosotros probamos que si Λ es una álgebra de Gorenstein, entonces todo Cohen-Macaulay Λ-módulo finitamente generado V con anillo de endomorfismos estables isomorfo a $\mathbf{k}$ tiene un anillo universal de deformación $R(\Lambda, V)$, el cual una $\mathbf{k}$-álgebra completa, local, conmutativa y Noetheriana que tiene como cuerpo residual a $\mathbf{k}$, y que también es estable bajo el operador de syzygia. Nosotros investigamos una álgebra de Gorenstein Λ_0 que no es autoinyectiva pero de dimensión global infinita y que tiene exactamente trés clases módulo isomorfismo de Cohen-Macaulay Λ_0-módulos V con anillo de endomorfismos estables isomorfos a $\mathbf{k}$. Nosotros probamos que bajo esta situación, $R(\Lambda_0, V)$ es isomorfo a $\mathbf{k}$ ó $\mathbf{k}[[t]]/(t^2)$.

Key words

Universal deformation rings, Gorestein álgebras, Cohen-Macaulay módulos & stable endomorphism rings

Bibliografía

[1] Velez-Marulanda, José. On universal deformation rings for Gorenstein algebras. Submitted.

Álgebras hereditarias por partes

YOHNY FERNEY CALDERÓN HENAO
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia
e-mail: yohny.calderon@udea.edu.co

Resumen

Dada Λ una $\mathbb{K}-$álgebra, $\mathbb{K}$ un campo algebráicamente cerrado. Cuando Λ es una álgebra hereditaria por partes([1], [2] y [3]) se pueden estudiar propiedades Homológicas([4] y [3]) de los Λ-módulos vía las $F-$partes por ejemplo.

- Si X es un $\Lambda-$módulo indescomponible se tienen cotas superiores para las dimensiones inyectivas y proyectivas de X.

- Si X y Y son Λ-módulos indescomponibles que están en F-partes diferentes, bajo ciertas condiciones tenemos que $Ext^t_\Lambda(X,Y) = 0$.

-Cada F-parte contiene un $\Lambda-$módulo simples.

Las álgebras hereditarias por partes están directamente relacionadas con la dimensión global fuerte([3]) del álgebra, en el caso particular que la dimensión global fuerte es igual a la dimensión global, en este caso podemos calcular un complejo acotado indescomponible de longitud la dimensión global [5].

Palabras claves

Álgebras Hereditarias por partes, dimensión global fuerte, dimensión proyectiva, dimensión inyectiva.

Bibliografía

[1] Dieter, Happel. Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras, volume 119 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. x+208 pp. ISBN: 9780521339223.

[2] Dieter, Happel and Uwe, Seidel. Piecewise hereditary Nakayama algebras. Algebras and representation theory, Volume 13, Issue 6, pp 693-704, 02 december 2010.

[3] Dieter Happel and Dan, Zacharia. Homological properties of piecewise hereditary algebras. Journal of Algebra, Elsevier, Volume 323, Issue 4, pp 1139-1154, 15 february 2010.

[4] Dieter, Happel and Dan, Zacharia. A homological characterization of piecewise hereditary algebras. Mathematische Zeitschrift, Springer, Volume 260, Issue 1, pp 177-185, september 2008.

[5] Yohny, Caderón. Um estudo sobre as álgebras hereditárias por partes, Tesis de PósGraduacão em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Parana Brasil. junio 2013.

Hablemos un poco de álgebras y superalgebras de Jordan de dimensión finita

FABER GÓMEZ GONZÁLEZ
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia
e-mail: faber.gomez@udea.edu.co

Resumen

En esta charla se pretende hablar un poco sobre el estado actual en el estudio de las álgebras y superalgebras de Jordan de dimensión finita, consideramos algo en la teoria de representación y algo mas en la teoria de estructura, finalmente se muestran algunos problemas de la teoria que en la actualidad se encuentran abiertos.

Palabras claves

Jordan, algebras no asociativas, superalgebras, estrutura.

Algebras de Jordan

Las álgebras de Jordan fuerón introducidas en los años 1930 por Jordan, Von Neuman y Wigner como una herramienta algebraica para un formalismo de la mecánica cuántica. La idea fue capturar la esencia algebraica de los observables en un espacio de Hilbert. Dado que el producto xy de dos observables no es observable (hermitiano), solo el producto simétrico $x \circ y = xy + yx$ tiene un sentido físico. Este *producto de Jordan* es conmutativo pero no es asociativo, sin embargo verifica una ley casi asociativa dada por $(x^2 \circ y) \circ x - x^2 \circ (y \circ x) = 0$, la cual es conocida como *identidad de Jordan.* De este modo decimos que un álgebra es de Jordan cuando verifica las leyes conmutativas e identidad de Jordan.

La teoria de álgebras de Jordan se encuentra bien desarrollada, tanto en el estudio de teoria de estructura como en el estudio de la teoria de representaciones [1, 2]. Una de las principales características en el estudio de la teoria de estructura y representación de álgebras de Jordan es que conserva las mismas características de las álgebras asociativas y de Lie, caracteristicas tales como la existencia de un ideal radical (en este caso, un ideal maximal nilpotente), de modo tal que el cociente del álgebra por su radical da como resultante un álgebra semisimple, más aún, garantiza la existencia de una subálgebra del álgebra original de modo tal que la misma es isomorfa con el álgebra cociente y el algebra es una suma directa de esta con su radical, tal resultado es conocido como Teorema Principal de Wedderburn.

Superálgebras fueron introducidas en el año 1978 por I. Kaplansky. Una superálgebra es un álgebra $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduada, es decir, es una suma directa de espacios vectoriales $A_0 + A_1$ de modo tal que $A_iA_j \subseteq A_{i+j(\text{mod}2)}$. Un elemento de una superálgebra A se dice homogeneo de paridad i si el mismo se encuentra en A_i. De esta forma las componentes A_0 y A_1 de la superálgebra A son llamadas par e impar respectivamente.

En particular, se obtiene que una superálgebra A es de Jordan si verifica las identidades

$$a_ia_j = (-1)^{ij}a_ja_i, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}((a_ia_j)a_k)a_l + (-1)^{l(k+j)+kj}((a_ia_l)a_k)a_j + (-1)^{i(j+k+l)+kl}((a_ja_l)a_k)a_i = \\ = (a_ia_j)(a_ka_l) + (-1)^{l(k+j)}(a_ia_l)(a_ja_k) + (-1)^{jk}(a_ia_k)(a_ja_l)\end{aligned} \tag{2}$$

Es de observar que en general una superálgebra de Jordan no es un álgebra de Jordan, aunque su parte par si lo sea.

Superálgebras de Jordan de dimensión finita fueron clasificadas por V. Kac [4]. La teoria de representación en este caso se encuentra bien desarrollada, sin embargo teoria de estructura aún esta en construcción. Por ejemplo, F. Gómez probó que en general un análogo al Teorema principal de Wedderburn no tiene validez en algunos casos [5–7]. La importancia de estos resultados radican en el hecho de permitir estudios particulares sobre el segundo grupo de cohomología para superálgebras de Jordan, el cual no resulta trivial como si sucede para el caso de álgebras de Jordan. [8].

Bibliografía

[1] N. Jacobson, *Structure and representation of Jordan algebras*, Amer. Math. Soc. Providence R.I. (1968).

[2] K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov and A. I. Shirshov, *Rings that are nearly associative*; Academic Press, 1982.

[3] I. Kaplansky, Graded Jordan algebras I. Preprint.

[4] V.G. Kac, *Classification of simple $\mathbb{Z}$-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras*; Comm. Algebra 5(13)(1977)1375-1400.

[5] F. Gómez González *The Jordan superalgebras of type $\mathcal{M}_{n|m}(\mathbb{F}^+)$ and the Wedderburn principal theorem,* Comm. Alg. 44 (7) (2016). 2867-2886.

[6] F. Gómez González *Wedderburn principal theorem for Jordan superalgebras I,* Submited J. Algebra (2015)

[7] F. Gómez González, R. Velásquez *The Jordan superalgebras of type $\mathcal{J}\mathrm{osp}_{\mathrm{n|2m}}(\mathbb{F})$ and the Wedderburn principal theorem,* Preprint.

[8] F. Gómez González, A. Ramirez *Cohomology group for Jordan superalgebras of type $\mathcal{M}_{1|1}(\mathbb{F}^+)$.* Preprint.

Ponencias Teoría de Números

Coordinador: Carlos Trujillo

- ⋆ **[T1]** Ecuaciones no Arquimedianas de Reacción-Ultradifusión y Sistemas Complejos Jerárquicos, W. A. Zúñiga Galindo, CINVESTAV - I.P.N., Querétaro, Qro, México.
- ⋆ **[T2]** Construcción de Conjuntos B_h en varias dimensiones, Nidia Yadira Caicedo Bravo, Carlos Alberto Trujillo Solarte, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia.
- ⋆ **[T3]** Propiedades de las p-extensiones elementales abelianas sobre $\mathbb{F}_{p^r}(T)$, Martha Rzedowski Calderón, Jonny Fernando Barreto, CINVESTAV, Ciudad de México, México.
- ⋆ **[T4]** On generalized Fibonacci numbers, Jhon Jairo Bravo, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia.
- ⋆ **[T5]** Primos de Wilson, Mersenne y Wieferich en el anillo $\mathbb{F}_q[T]$, Martha Rzedowski Calderón, Jonny Fernando Barreto, CINVESTAV, Ciudad de México, México.
- ⋆ **[T6]** Conjuntos g-Sidon Modulares, John Jairo López Santander, Carlos Alberto Trujillo Solarte, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia.
- ⋆ **[T7]** Secuencias Sonar como Conjuntos de Sidon, Luis Miguel Delgado Ordoñez, Carlos Alberto Trujillo Solarte, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia.

- ⋆ **[T8]** Ternas Pitagóricas y Casi Pitagóricas, Mónica Andrea Celis Cerón, Freddy William Bustos Rengifo, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande- RS, Brasil, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia.
- ⋆ **[T9]** Ternas casi pitagóricas y Quintas de Büchi, Freddy William Bustos Rengifo, Adriana Marcela Fonce Camacho, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia, Escuela Colombiana de Ingenieria Julio Garavito, Colombia.
- ⋆ **[T10]** Conjuntos de enteros con sumas y diferencias distintas, Carlos A. Martos O., Carlos A. Trujillo S., Universidad del Valle, Cali, Colombia, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia.
- ⋆ **[T11]** Autocorrelación y correlación cruzada en conjuntos $B_2^-[g]$ tipo Bose, Singer y Ruzsa, Hamilton Mauricio Ruiz, Carlos Alberto Trujillo Solarte, John H. Castillo, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia.
- ⋆ **[T12]** Bases aditivas para intervalos de enteros, Ana Zumalacárregui, University of New South Wales, Australia.
- ⋆ **[T13]** Primos de la forma $x^2 + ny^2$, Javier Alfonso Moreno Carrillo, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Ecuaciones no Arquimedianas de Reacción-Ultradifusión y Sistemas Complejos Jerárquicos

W. A. Zúñiga Galindo
CINVESTAV - I.P.N.
Departamento de Matemáticas
Querétaro, Qro, México
e-mail: wazuniga@math.cinvestav.edu.mx

Resumen

La conferencia tiene dos objtetivos. El primero es presentar las ideas básicas del análisis p-ádico y su uso en la construcción de modelos de ciertos sistemas complejos, ver [1]. El segundo objetivo de la conferencia es presentar los resultados de [2]. En este trabajo iniciamos el estudio de las ecuaciones no Arquimedianas de reacción-ultradifusión y sus conexiones con los modelos de sistemas jerárquicos complejos. Desde un punto de vista matemático, las ecuaciones estudiadas aquí son la contraparte p-ádica de los modelos integro-diferenciales para la separación de fases introducidos por Bates y Chmaj. Nuestras ecuaciones también son generalizaciones de las ecuaciones de ultradifusión en los árboles estudiados en los años 80 por Ogielski, Stein, Bachas, Huberman, entre otros, y tambén generalizaciones de las ecuaciones maestras de los modelos de Avetisov et al. que describen ciertos sistemas jerárquicos complejos. Desde un punto de vista físico, nuestras ecuaciones son flujos de gradiente de funcionales de energía libre no Arquimedianos y sus soluciones describen el perfil de densidad macroscópica de un material biestable cuyo espacio de estados tiene una estructura ultramétrica.

Palabras claves

Análisis p-ádico, sistemas jerárquicos complejos, ultradifusión.

Bibliografía

[1] Chacón Cortés L. F.; Zúñiga Galindo W. A. Análisis no Arquimediano y Sistemas Complejos, *Universo.math* http://universo.math.org.mx/2014-3/no-arquimediano/analisis-no-arquimediano.html

[2] Zúñiga-Galindo W. A., *Non-Archimedean Reaction-Ultradiffusion Equations and Complex Hierarchic Systems*, http://arxiv.org/abs/1604.06471

Construcción de Conjuntos B_h en varias dimensiones

Nidia Yadira Caicedo Bravo
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia
e-mail: nycaicedob@ut.edu.co
Carlos Alberto Trujillo Solarte
Departamento de Matemáticas
Universidad del Cauca, Popayán, Colombia
e-mail: trujillo@unicauca.edu.co

Resumen

Dada la familia de grupos $\{G_i\}_{i=1}^d$, notados aditivamente, se considera el producto directo $G = G_1 \times \cdots \times G_d$. Se dice que $A \subseteq G$ es un conjunto B_h d-dimensional, si todas las sumas de vectores de la forma

$$(a_{11}, \ldots, a_{d1}) + \cdots + (a_{1h}, \ldots, a_{dh}) = (a_{11} + \cdots + a_{1h}, \ldots, a_{d1} + \cdots + a_{dh}),$$

son distintas, salvo permutaciones de los sumandos, para todo $(a_{1k}, \ldots, a_{dk}) \in A$, $k = 1, \ldots, h$.

Para el caso $d = 1$, se conocen tres construcciones de conjuntos B_h: construcción de Bose-Chowla, construcción de Singer generalizada y construcción de Gómez-Trujillo.

En general, el problema principal de estudio para conjuntos B_h en algún grupo abeliano finito arbitrario G, es determinar el mayor número de elementos que el conjunto B_h puede tener. Es decir, se estudia el comportamiento de la función

$$f_h(G) := \text{máx}\{|A| : A \subseteq G, A \text{ es } B_h \text{ en } G\}. \tag{3}$$

En este trabajo describimos en detalle las tres construcciones clásicas de conjuntos B_h, luego usando algunas ideas de estas construcciones presentamos nuevas construcciones de conjuntos B_h en d dimensiones, para algunos valores de d, cuyas componentes son los elementos de un campo arbitrario o alguna extensión adecuada de dicho campo. Destacamos que las construcciones que presentamos permiten construir familias de conjuntos B_h que son densos.

Palabras claves

Conjuntos de Sidon, conjuntos B_h.

Bibliografía

[1] Bose, R. C. Chowla, S. Theorems in the additive theory of numbers, 1962/1963, Comment. Math. Helv. 37, 141-147 pp.

[2] Gómez, Carlos A.; Trujillo, Carlos A. Una nueva construcción de conjuntos B_h modulares, Junio 2011, Matemáticas: Enseñanza Universitaria. Vol. XIX, No. 1, 53-62 pp.

[3] Singer, James. A Theorem in finite projective geometry and some applications to number Theory, 1938, Transactions of the American Mathematical Society, 43, 377-385 pp.

Propiedades de las p-extensiones elementales abelianas sobre $\mathbb{F}_{p^r}(T)$

Martha Rzedowski Calderón Jonny Fernando Barreto

Departamento de control automático

CINVESTAV, Ciudad de México, México

e-mail: mrzedowski@ctrl.cinvestav.mx jonny.barreto@cinvestav.mx

Resumen

Se presentan varias propiedades para una p-extensión elemental abeliana sobre el cuerpo de funciones racionales $k = \mathbb{F}_{p^r}(T)$ con $\mathbb{F}_{p^r}$ el cuerpo finito de p^r elementos, p un entero primo. Entre las propiedades a presentar están la ramificación, la inercia y la descomposición de los lugares asociados al cuerpo k, el cálculo de índice de ramificación de dichos lugares utilizando las técnicas de Q. Wu y R. Scheidler en su artículo 'The ramification groups and different of a compositum of Artin-Schreier extensions' y de A. Garcia y de H. Stichtenoth en 'Elementary Abelian p-extensions of algebraic function fields'. También se presentan varios ejemplos que ilustran los resultados presentados.

Palabras claves

p-extesiones elementales abelianas, ramificación, cuerpos de funciones

Bibliografía

[1] García, Arnaldo; Stichtenoth, Henning Elementary abelian p-extensions of algebraic function fields. Manuscripta Math. 72 (1991), no. 1, 67-79. 11R58 (14H05)

[2] Garzón R., Álvaro; Teherán Herrera, Arnoldo Elementary abelian p-extensions and curves with many points. Rev. Acad. Colombiana Cienc. Exact. Fís. Natur. 36 (2012), no. 139, 243-252. 14H05 (14G15)

[3] Hasse, Helmut; Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper. (German) J. Reine Angew. Math. 172 (1935), 37-54.

[4] Lang, Serge Algebra. Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002. xvi+914 pp. ISBN: 0-387-95385-X 00A05 (15-02)

[5] Wu, Qingquan; Scheidler, Renate The ramification groups and different of a compositum of Artin-Schreier extensions. Int. J. Number Theory 6 (2010), no. 7, 1541-1564. 11R58 (11R20)

[6] Salas-Torres, Julio Cesar; Rzedowski-Calderón, Martha; Villa-Salvador, Gabriel A combinatorial proof of the Kronecker-Weber theorem in positive characteristic. Finite Fields Appl. 26 (2014), 144-161. 11R60 (11R18 11R32 11R58)

[7] Stichtenoth, Henning Algebraic function fields and codes. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1993. x+260 pp. ISBN: 3-540-56489-6 14H05 (11R58 11T71 14G15 94B27) PDF Clipboard Series Book

[8] Villa Salvador, Gabriel Daniel Topics in the theory of algebraic function fields. Mathematics: Theory y Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2006. xviii+652 pp. ISBN: 978-0-8176-4480-2; 0-8176-4480-6 11-02 (11R32 11R58 11S20 94A60)

On generalized Fibonacci numbers

Jhon Jairo Bravo
Departamento de Matemáticas
Universidad del Cauca, Popayán, Colombia
e-mail: jbravo@unicauca.edu.co

Resumen

For an integer $k \geq 2$, we consider the $k-$Fibonacci sequence $(F_n^{(k)})_n$ which starts with $0, \ldots, 0, 1$ (k terms) and each term afterwards is the sum of the k preceding terms. In this talk, we report about some arithmetic properties of $(F_n^{(k)})_n$ and study some Diophantine equations involving $k-$Fibonacci numbers. For example, we show all $k-$Fibonacci numbers which are Mersenne numbers, i.e., $k-$Fibonacci numbers that are equal to 1 less than a power of 2. This is a joint work with Carlos A. Gómez and Florian Luca.

Palabras claves

Generalized Fibonacci numbers, Mersenne numbers, linear forms in logarithms, Reduction method.

Bibliografía

[1] J. J. Bravo and F. Luca, Powers of two in generalized Fibonacci sequences, Rev. Colombiana Mat., 46 (2012), no. 1, 67–79.

[2] J. J. Bravo and F. Luca, Coincidences in generalized Fibonacci sequences, J. Number Theory, 133 (2013), no. 6, 2121–2137.

[3] J. J. Bravo and F. Luca, On a conjecture about repdigits in $k-$generalized Fibonacci sequences, Publ. Math. Debrecen, 82 (2013), no. 3–4, 623–639.

[4] J. J. Bravo and C. A. Gómez, Mersenne $k-$Fibonacci numbers, to appear in Glasnik Matematicki.

Primos de Wilson, Mersenne y Wieferich en el anillo $\mathbb{F}_q[T]$

Martha Rzedowski Calderón   Jonny Fernando Barreto
Departamento de Control Automático
CINVESTAV, Ciudad de México, México
e-mail: mrzedowski@ctrl.cinvestav.mx jonny.barreto@cinvestav.mx

Resumen

En el 2011, D. Thakur en su artículo “Binomial and factorial congruences for $\mathbb{F}_q[T]$” presentó tres formas diferentes de definir factorial y coeficiente binomial para el anillo $\mathbb{F}_q[T]$. Además, demostró que existen ciertos análogos a los bien conocidos teoremas de Lucas y de Wilson. Este último teorema permite definir una familia de primos llamados primos de Wilson para $\mathbb{F}_p[T]$ para p un primo entero. La caracterización de estos primos no se realizó por completo para cualquier anillo de polinomios con coeficientes en un cuerpo finito. Tiempo después el mismo D. Thakur en su artículo “Differential characterization of Wilson primes for $\mathbb{F}_q[T]$ ” presenta una caracterización completa de dichos primos utilizando la derivada usual. Con estos dos artículos como referencia, en el 2014 Dong Quan en el artículo “ Carlitz module analogues of Mersenne primes, Wieferich primes, and certain prime elements in cyclotomic function fields” presenta, en la misma dirección que D. Thakur, una nueva familia de primos de Mersenne y Wieferich para el módulo de Carlitz.

En este trabajo se pretende presentar algunos conceptos y los argumentos utilizados por los autores citados anteriormente, para comprender los artículos. Algunos de éstos son: el módulo de Carlitz, los cuerpos de funciones ciclotómicos y los análogos a los teoremas de Lucas y de Wilson en el anillo $\mathbb{F}_q[T]$. También se harán algunas observaciones y se sugerirán trabajos futuros en esta línea de investigación.

Palabras claves

Primos de Wilson, primos de Mersenne, primos de Wieferich, factorial y coeficiente binomial

Bibliografía

[1] Bhargava, Manjul P-orderings and polynomial functions on arbitrary subsets of Dedekind rings. J. Reine Angew. Math. 490 (1997), 101-127. 13F05 (13F20)

[2] Bhargava, Manjul The factorial function and generalizations. Amer. Math. Monthly 107 (2000), no. 9, 783-799. 05A10 (33B15)

[3] Dong Quan, Nguyen Ngoc Carlitz module analogues of Mersenne primes, Wieferich primes, and certain prime elements in cyclotomic function fields. J. Number Theory 145 (2014), 181-193. 11A41 (11R60)

[4] Sauerberg, Jim; Shu, Linghsueh; Thakur, Dinesh S.; Todd, George Infinitude of Wilson primes for Fq[t]. Acta Arith. 157 (2013), no. 1, 91-100. 11A41 (11N05 11T55)

[5] Thakur, Dinesh S. Binomial and factorial congruences for Fq[t]. Finite Fields Appl. 18 (2012), no. 2, 271-282. 11T55 (11B65 11R58)

[6] Thakur, Dinesh S. Differential characterization of Wilson primes for Fq[t]. Algebra Number Theory 7 (2013), no. 8, 1841-1848. 11A41 (11A07 11N05 11N69)

[7] Thakur, Dinesh S. Function field arithmetic. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2004. xvi+388 pp. ISBN: 981-238-839-7 11G09 (11J93 11M38 11R58)

Conjuntos g-Sidon Modulares

John Jairo López Santander Carlos Alberto Trujillo Solarte
Departamento de Matemáticas
Universidad del Cauca, Popayán, Colombia
e-mail: johnlo@unicauca.edu.co trujillo@unicauca.edu.co

Resumen

Sean $(G, +)$ un grupo abeliano, A y B subconjuntos finitos de G y x un elemento de G. Se definen los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} A + B &:= \{a + b : a \in A, b \in B\}, \\ A - B &:= \{a - b : a \in A, b \in B\}, \\ x + A &:= \{x + a : a \in A\}, \\ x - A &:= \{x - a : a \in A\} \end{aligned}$$

y las funciones de representación asociadas con A y B, denotadas por $R_{A+B}(x)$ y $R_{A-B}(x)$, como:

$$R_{A+B}(x) :=\mid A \cap (x - B) \mid=\mid \{(a, b) \in A \times B : x = a + b\} \mid,$$

$$R_{A-B}(x) :=\mid A \cap (x + B) \mid=\mid \{(a, b) \in A \times B : x = a - b\} \mid,$$

donde $\mid X \mid$ representa el número de elementos del conjunto finito X.

Además, se dice que un subconjunto A de G es un conjunto g-Sidon en G si $R_{A+A}(x) \leq g$ para todo $x \in G$.

Uno de los problemas fundamentales consiste en investigar el máximo cardinal que puede tener un conjunto g-Sidon en un grupo dado. En este sentido se define la siguiente función,

$$f_2^+(g, G) := \text{máx}\{|A| : A \subset G,\ A \text{ es } g\text{-Sidon en } G\},$$

si $G = \mathbb{Z}_N$ la función a estudiar se denota por

$$f_2^+(g, N) := \text{máx}\{|A| : A \subset \mathbb{Z}_N,\ A \text{ es } g\text{-Sidon en } \mathbb{Z}_N\},$$

y se trata de investigar su comportamiento asintótico, para lo cual en [1] se hace la siguiente definición

$$\alpha_g := \lim_{N\to\infty} \sup \frac{f_2^+(g, N)}{\sqrt{N}}.$$

Para los conjuntos 2-Sidon o simplemente conjuntos de Sidon se conoce que $\alpha_2 = 1$, así como también se sabe que $\alpha_3 = 1$. Cilleruelo, Ruzsa y Vinuesa [1] encontraron el valor asintótico de α_g, en efecto, del Teorema 1.6 se desprende que

$$\lim_{g\to\infty} \frac{\alpha_g}{\sqrt{g}} = 1.$$

Sin embargo, determinar el valor de α_g para $g \geq 4$ es un problema abierto del cual se conoce muy poco. Los resultados conocidos son cotas superiores logradas mediante técnicas de conteo y cotas inferiores logradas mediante construcciones de conjuntos g-Sidon para ciertos módulos especiales. En esta ponencia se presentará un nuevo resultado , tanto para cotas superiores como inferiores de la función $f_2^+(g, N)$, así como las implicaciones que éstas tienen en el estudio del valor de α_g y se analizan casos especiales de g.

Palabras claves

Conjunto g-Sidon, función de representación.

Bibliografía

[1] Cilleruelo, J., Ruza, I. and Vinuesa, C: *Generalized Sidon sets*, Advances in Mathematics **225** (2010), 2786–2807.

[2] G. Martin and K. O'Bryant, *Constructions of generalized Sidon sets*, J. Combin. Theory, Ser. A 113 (2006), 591-607.

[3] Y. Caicedo, J. Gómez and C. Trujillo, $B_2^{\pm}[g]$ *Finite Sets*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications. Vol 37, no 1, (2015), 1-19.

Secuencias Sonar como Conjuntos de Sidon

Luis Miguel Delgado Ordoñez   Carlos Alberto Trujillo Solarte

Departamento de Matemáticas

Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

e-mail: luismdelgado@unicauca.edu.co trujillo@unicauca.edu.co

Resumen

Sea G un grupo conmutativo notado aditivamente. Un subconjunto A de G se llama un conjunto de Sidon en G, si todas las sumas de dos elementos de A son distintas, excepto por conmutatividad.

Si tenemos G_1, G_2 dos grupos conmutativos notados aditivamente y $A_1 \subset G_1$, $A_2 \subset G_2$, una función $f : A_1 \to A_2$ se llama una función Sidon si su grafo $G_f := \{(a, f(a)) : a \in A_1\}$ es un conjunto de Sidon en el grupo producto $G_1 \times G_2$.

Una función $f : [1, n] \to [1, m]$ tiene la propiedad de diferencias distintas si para todo $i, j, h \in \mathbb{N}$, $1 \leq h \leq n - 1$, $1 \leq i, j \leq n - h$,

$$f(i + h) - f(i) = f(j + h) - f(j) \Rightarrow \; i = j; \text{ Donde } [1, n] = \{1, 2, ..., n\}.$$

Si además, identificamos a $[1, m]$ con $\mathbb{Z}_m$, una función $f : [1, n] \to \mathbb{Z}_m$ tiene la propiedad de diferencias distintas módulo m si para todo $i, j, h \in \mathbb{N}$, $1 \leq h \leq n - 1$, $1 \leq i, j \leq n - h$,

$$f(i + h) - f(i) \equiv f(j + h) - f(j) \; (mod\, m) \Rightarrow \; i = j.$$

Una secuencia sonar $m \times n$ es una función $f : [1, n] \to [1, m]$ que tiene la propiedad de diferencias distintas. Una secuencia sonar modular $m \times n$ es una función $f : [1, n] \to \mathbb{Z}_m$ con la propiedad de diferencias distintas módulo m. Ver [1]

Es fácil ver que el concepto de secuencia Sonar $m \times n$ es equivalente al de función Sidon definida de $[1, n]$ a $[1, m]$ en el grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

El problema fundamental en la secuencia sonar consiste en determinar el máximo número natural n tal que existe una secuencia sonar $m \times n$ para un m dado. En el caso de secuencia sonar modular se trata de establecer la existencia de secuencia sonar modulares $m \times n$ para todo m.

En esta exposición se presenta los métodos de construcción para secuencia sonar $m \times n$ junto con tablas de las mejores conocidas para $m \leq 100$.

Palabras claves

Conjuntos de Sidon, secuencia sonar, función Sidon.

Bibliografía

[1] Oscar Moreno. Richard A. Games and Herbert Taylor, C: Sonar sequences from costas arrays and the best known sonar sequences with up to 100 symbols, IEEE Trans. Inform. Theory 39, 6, pp. 1985-1987 (2010).

[2] Julian Osorio, Diego Ruiz, Carlos Trujillo and Cristhian Urbano, Secuencias sonar y conjuntos de Sidon, Revista de Ciencias, Universidad del Valle. 18, 1, pp. 73-83 (2014).

[3] Yadira Caicedo, Diego Ruiz and Carlos Trujillo, New constructions of sonar sequences, IJBAS-IJENS, 14, 1, pp. 2-16 (2014).

Ternas Pitagóricas y Casi Pitagóricas

Mónica Andrea Celis Cerón
Instituto de Matemática, Estatística e Física
Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande- RS, Brasil
e-mail: monica8586@gmail.com
Freddy William Bustos Rengifo
Departamento de Matemáticas
Universidad del Cauca, Popayán, Colombia
e-mail: frebust@unicauca.edu.co

Resumen

Una terna pitagórica es una terna de enteros (a, b, c) que satisface la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$; si además los enteros a,b,c son relativamente primos, tenemos una terna pitagórica primitiva (TPP). Una terna de enteros (p, q, r) que satisface la igualdad $p^2 + q^2 = r^2 + 1$ es llamada una terna casi pitagórica (TCP).

En [2] Orrin Frink mostró cómo asociar a cada TCP dos TPP y también mostró que con cada TPP están asociadas dos familias de TCP, pero para lo último no presentó un método explícito. Trabajando sobre lo anterior, en [1] Antalan y Tomenes presentaron una fórmula para generar todas las TCP asociadas a un tipo particular de TPP.

En esta charla presentamos la asociación entre TPP y TCP, y mostramos un procedimiento que permite obtener todas las TCP asociadas a una TPP cualquiera.

Palabras claves

ternas pitagóricas primitivas, ternas casi pitagóricas.

Bibliografía

[1] Antalan, Rafael; Tomenes,Mark. A Note on Generating Pythagorean Triples. International Journal of Mathematics and Scientific Computing ,Vol. 5, No. 2, 2015.

[2] Frink, Orrin. Almost Pythagorean Triples. Mathematics Magazine ,Vol. 60, No. 4, 1987.

Ternas casi pitagóricas y Quintas de Büchi

Freddy William Bustos Rengifo
Departamento de Matemáticas
Universidad del Cauca, Popayán, Colombia
e-mail: frebust@unicauca.edu.co
Adriana Marcela Fonce Camacho
Departamento de Matemáticas
Escuela Colombiana de Ingenieria Julio Garavito
e-mail: adriana.fonce@escuelaing.edu.co

Resumen

Una terna de enteros (p, q, r) que satisface la igualdad $p^2 + q^2 = r^2 + 1$ es llamada una terna casi pitagórica (TCP). Una quinta de enteros (v, w, x, y, z) es una quinta de Büchi si satisface las igualdades

$$v^2 - 2w^2 + x^2 = w^2 - 2x^2 + y^2 = x^2 - 2y^2 + z^2 = 2.$$

Si los enteros v, w, x, y, z son positivos y no consecutivos la quinta se llama una *quinta de Büchi no trivial* (QB). El Problema de Büchi fue planteado alrededor de 1975 y se puede resumir con la pregunta: ¿existe una QB? Hoy en día aún no se conoce la respuesta a esta pregunta.

En esta charla mostramos que cada QB se puede describir usando tres TCP y con base en lo anterior presentamos una reformulación del Problema de Büchi cuya respuesta dependería del conocimiento de propiedades de las TCP.

Palabras claves

Problema de Büchi, Ternas Casi Pitagóricas.

Bibliografía

[1] Frink, Orrin. Almost Pythagorean Triples. Mathematics Magazine, Vol. 60, No. 4, 1987.

[2] Pasten, Hector; Pheidas, Thanases; Vidaux, Xavier. A survey on Büchi´s Problem: new presentations and open problems. Journal of Mathematical Sciences., Vol. 171, No. 6, 2010.

Conjuntos de enteros con sumas y diferencias distintas

Carlos A. Martos O.
Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle, Cali, Colombia
e-mail: carlos.martos@correounivalle.edu.co
Carlos A. Trujillo S.
Departamento de Matemáticas
Universidad del Cauca, Popayán, Colombia
e-mail: trujillo@unicauca.edu.co

Resumen

Un conjunto de diferencias distintas es un conjunto de enteros $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots a_n\}$ con la propiedad que para cada entero positivo d existe a lo más una solución de la ecuación $d = a_i - a_j$.
El problema finito fundamental asociado con estos conjuntos, consiste en determinar el menor entero a_m tal que A cumpla dicha condición. En tal caso se dice que el conjunto A es óptimo y en [1] se muestra que:

$$a_m \geq n^2 - 2n\sqrt{n},$$

y se sugiere permitir que las diferencias se repitan hasta e-veces, en cuyo caso se conjetura que:

$$a_n \geq \frac{n^2}{e} - \text{términos de menor orden}$$

En esta ponencia presentamos todos los resultados de [1] en términos de reglas Golomb, la cual es una notación moderna y se exponen algunas mejoras de los resultados obtenidos en [1].

Palabras claves

Conjunto de diferencias distintas, Regla Golomb.

Bibliografía

[1] M. D., Atkinson; N. Santoro y J. Urrutia. Inter sets with distinct sums and differences and carrier frecuency assignments for nonlinear repcaters, IEEE Transactions on Communications, VOL, COM-34 No 6, June 1986.

[2] R. C., Bose. An afine analogue of Singer's theorem, J. Indian Math. Soc. (N.S.) 6 (1942), 1-15.

[3] Cilleruelo, Javier. Sidon sets in $\mathbb{N}^d$. J. Combin. Theory Set. A 117 (2010), N^0 7, 857-871.

[4] Jhonny. Gómez. Construcción de conjuntos $B_h[g]$, Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas, Universidad del Valle, 2011.

[5] B. ,Lindström. An inequality for B_2-sequences, J. Combinatorial Theory 6 (1969), 211-212.

[6] Terence, Tao; V.H., Vu. Additive Combinatorics. Cambridge University Press, New York (2006).

[7] C. Alberto, Trujillo; Gilberto, García; J. Miguel, Velásquez. $B_2^-[g]$ Finite sets, JP Joural. Algebra, Number Theory & Appl. 4(3) (2004), 593-604.

[8] C. Alexis, Gómez R.; C. Alberto, Trujillo . Una nueva construcción de Conjuntos B_h modulares. Matemáticas Enseñanza Universitaria (ERM), Vol. XIX, N^0 1, Junio 2011, 53-62.

[9] Paul, Erdös y P. Turánç. It on a problem of Sidon in additive number theory and on some related problems, Journal of the London Mathematical Society.(2) 16 (1941) 857-871. MR 3, 270e.

[10] R.J.F., Fang ; W.A. Sandrin. Carrier frequency assignment for non-linear repearters, Comsat Tech. Rev., vol 7, N^0 1, pp. 227-245, 1977.

[11] I., Ruzsa. Solving a linear equation in a set of integers I. Acta Arith. 65 (1993), N^0 3, 259-282.

Autocorrelación y correlación cruzada en conjuntos $B_2^-[g]$ tipo Bose, Singer y Ruzsa

Hamilton Mauricio Ruiz Carlos Alberto Trujillo Solarte
Departamento de Matemáticas
Universidad del Cauca, Popayán, Colombia
e-mail: mauruiz@unicauca.edu.co trujillo@unicauca.edu.co
John H. Castillo
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia
e-mail: jhcastillo@gmail.com

Resumen

Sean $(G, +)$ un grupo abeliano y $A \subset G$. Se dice que A es un conjunto $B_2^-[g]$ sobre G si todas las diferencias de dos elementos distintos de A se repiten a lo sumo en g formas. Por otra parte un Código Ortogonal Óptico (COO) es un conjunto de palabras código con buenas propiedades de autocorrelación y correlación cruzada. Estas propiedades están relacionadas en cierta forma con el número de veces que un entero puede representarse como diferencia de dos elementos de un mismo conjunto o de dos conjuntos dados. Así que esta ponencia tiene como propósito mostrar los valores posibles de tales representaciones cuando los conjuntos $B_2^-[g]$ son obtenidos por la construcción de Bose, Ruzsa y Singer en algunos casos especiales.

Palabras claves

Propiedad de la diagonal. k-unidades. Proporción de k unidades. Radio de k-unidades. Números de Carmichael.

Bibliografía

[1] M. J. Genzlinger, Karenna; Lockridge, Keir. Sophie Germain primes and involutions of $\mathbb{Z}_n^\times$. Involve 8 (2015), no. 4, 653-663 . MR3366016.

[2] Ireland, Kenneth; Rosen, Michael. A classical introduction to modern number theory. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 84.Springer-Verlag, New York, 1990. xiv+389 pp. ISBN: 0-387-97329-X.

[3] Chebolu, Sunil K. What is special about the divisors of 24? Math. Mag. 85 (2012), no. 5, 366-372.

Bases aditivas para intervalos de enteros

Ana Zumalacárregui
University of New South Wales, Australia
e-mail: a.zumalacarregui@unsw.edu.au

Resumen

Un conjunto $A \subset \mathbb{Z}$ es una base aditiva para el intervalo $[1, n]$ si cada entero en el intervalo puede representarse como suma de dos elementos del conjunto A. En este contexto, una pregunta natural es: ¿cuán pequeña puede ser dicha base?

En esta charla me centraré en esta cuestión y en el estudio del tamaño mínimo de una g-Base para $[1, n]$ (es decir, el número de representaciones de cada elemento en $[1, n]$ es al menos g). A pesar de que resulta evidente que dicha cantidad ha de ser de orden $\sqrt{gn}$, no se conoce la existencia de una asintótica para la cantidad

$$\gamma_g(n) = \frac{\text{mín}_A\{|A| : A \text{ es una } g - \text{base para } [1, n]\}}{\sqrt{gn}},$$

ni siquiera en el caso más sencillo y estudiado: cuando $g = 1$. Estudiaremos esta cantidad y demostraremos que tanto el $\text{lím sup}_{n\to\infty} \gamma_g(n)$ como el $\text{lím inf}_{n\to\infty} \gamma_g(n)$ tienden a una misma constante cuando g crece.

La estrategia sigue las lineas de [CRV'10], donde se abordó la cuestión análoga para conjuntos g-Sidon para intervalos (es decir, el número de representaciones es a los sumo g).

Un punto esencial en el argumento consiste en explotar una serie de construcciones -basadas en ideas de Ruzsa [R'90]- de conjuntos en grupos finitos cuya función de representación es casi constante.

Trabajo conjunto con Javier Cilleruelo y Carlos Vinuesa.

Bibliografía

[CRV'10] J. Cilleruelo, I. Ruzsa, and C. Vinuesa. Generalized Sidon sets. Adv. Math., 225(5):2786-2807, 2010.

[R'90] I. Z. Ruzsa. A just basis. Monatsh. Math., 109(2):145-151, 1990.

Primos de la forma $x^2 + ny^2$

Javier Alfonso Moreno Carrillo
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
e-mail: javamorenocar@unal.edu.co

Resumen

En muchos cursos de teoría de números se demuestra el teorema de Fermat: $p = x^2 + y^2$, $x, y \in \mathbb{Z}$ si y solo si $p \equiv 1 \bmod 4$. Este es el primer caso en el problema de la representación de primos por formas cuadráticas. Grandes matemáticos como Fermat, Euler, Legendre y Gauss trabajaron en este problema y, gracias al mismo, desarrollaron herramientas de uso común en la teoría de números moderna.
El objetivo de la charla es presentar en orden cronológico algunas de las herramientas usadas para el estudio de $p = x^2 + ny^2$. En primer lugar haremos un estudio elemental de formas cuadráticas, ley

de reciprocidad cuadrática, composición de formas y teoría de género para dar respuesta a los casos $n = 1, 2, 3, 5, 7, 6, 10, 13, 15, 21, 22, 30$, entre otros. Seguidamente mostraremos los inconvenientes de las herramientas anteriores en el caso general; y por último definiremos el cuerpo de clases de Hilbert y veremos como con esta herramienta obtenemos solución para infinitos n, con el siguiente teorema.

Teorema: Sea L el cuerpo de clases de Hilbert de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-n})$. Suponga que $n > 0$ es libre de cuadrados y $n \not\equiv 3 \bmod 4$, así el anillo de enteros de K es $O_K = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-n}\right]$. Si p es un primo impar que no divide a n, entonces $p = x^2 + ny^2$ si, y solo si, p se descompone completamente en L.

Palabras claves

Forma cuadráticas, teoría de géneros, composición de formas, cuerpo de clases de Hilbert.

Bibliografía

[1] Cox, David A. Primes of the form $x^2 + ny^2$: Fermat, class field theory, and complex multiplication. Second Edition. John Wiley & Sons New Jersey, Inc., New Jersey, 2013. ISBN: 978-1-118-39018-4.

[2] K. Ireland and M. Rosen, A Classical Introduction to Modern Number Theory. Springer-Verlag Berlin, Ltd., Berlin, 1982. ISBN: 978-1-4757-1781-5.

Ponencias Combinatoria

Coordinador: Ricardo Restrepo

- ⋆ **[CO1]** Ciclos hamiltonianos en generalizaciones de los torneos multipartitos, Ilan A. Goldfeder, Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- ⋆ **[CO2]** Particiones de Conjuntos con Restricciones, José L. Ramírez, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia.
- ⋆ **[CO3]** Bicyclic digraphs with maximal energy, Juan Rada, Juan Monsalve, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Ciclos hamiltonianos en generalizaciones de los torneos multipartitos

Ilan A. Goldfeder

Facultad de Ciencias e Instituto de Matemáticas

Universidad Nacional Autónoma de México, México

e-mail: ilan.goldfeder@gmail.com ilan@ciencias.unam.mx

Resumen

Determinar cuando un grafo o un digrafo tiene un ciclo hamiltoniano (es decir, un ciclo que pase por todos sus vértices y, en el caso del digrafo, que sea dirigido) es un problema difícil. Conocemos condiciones suficientes (que por lo general son malas) así como familias de grafos concretas en las que el problema es más tratable.

Por ejemplo, los ciclos hamiltonianos en el caso de los torneos y torneos bipartitos están caracterizados en [5,9–11]. Pero para los torneos multipartitos con al menos tres partes sólo conocemos condiciones suficientes o necesarias [4].

Con el fin de abordar este —y otros problemas—, Bang-Jensen introdujo en [1] lo que llamó las 'generalizaciones de torneos', es decir clases de digráficas que preservasen propiedades de los torneos pero que fuesen más amplias. Por ejemplo, las digráficas semicompletas, las digráficas localmente semicompletas, las digráficas localmente semicompletas en flechas, las digráficas cuasitransitivas las digráficas libres de $\mathcal{H}_i$, etc., véase [3,6–8]. El estudio del problema de la existencia de ciclos hamiltonianos en estas clases de digráficas nos ha permitido profundizar en el problema en general y ha arrojado herramientas que esperamos sean útiles para resolver el problema, al menos, para el caso de los torneos multipartitos.

Como referencia general puede consultarse [2].

Palabras claves

Ciclos hamiltonianos, digrafos, generalizaciones de torneos

Bibliografía

[1] Bang-Jensen, Jørgen Locally semicomplete digraphs: a generalization of tournaments. J. Graph Theory 14 (1990), no. 3, 371?390. MR1060865 (91g:05055)

[2] Bang-Jensen, Jørgen; Gutin, Gregory Digraphs. Theory, algorithms and applications. Second edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2009. xxii+795 pp. ISBN: 978-1-84800-997-4 MR2472389 (2009k:05001)

[3] Bang-Jensen, Jørgen; Gutin, Gregory Generalizations of tournaments: a survey. J. Graph Theory 28 (1998), no. 4, 171–202. MR1636384 (99f:05041)

[4] Bang-Jensen, Jørgen; Gutin, Gregory; Huang, Jing A sufficient condition for a semicomplete multipartite digraph to be Hamiltonian. Discrete Math. 161 (1996), no. 1-3, 1–12. MR1420516 (97g:05115)

[5] Camion, Paul Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets. (French) C. R. Acad. Sci. Paris 249 1959 2151–2152. MR0122735 (23 #A75)

[6] Galeana-Sánchez, Hortensia; Goldfeder, Ilan A. A classification of all arc-locally semicomplete digraphs. Discrete Math. 312 (2012), no. 11, 1883–1891 MR2913081

[7] Galeana-Sánchez, Hortensia; Goldfeder, Ilan A. Hamiltonian cycles in a generalization of bipartite tournaments with a cycle factor. Discrete Math. 315 (2014), 135–143. MR3130365

[8] Galeana-Sánchez, Hortensia; Goldfeder, Ilan A.; Urrutia, Isabel On the structure of strong 3-quasi-transitive digraphs. Discrete Math. 310 (2010), no. 19, 2495–2498. MR2669371 (2011h:05107)

[9] Gutin, G. M. Criterion for complete bipartite digraphs to be Hamiltonian. (Russian) Vestsi Akad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk 1984, no. 1, 109–110. MR0738059 (85m:05048)

[10] Gutin, G. M. Effective characterization of complete bipartite digraphs having Hamiltonian paths. (Russian) Kibernetika (Kiev) 1985, no. 4, 124–125. MR0811155 (87b:05060)

[11] Häggkvist, R.; Manoussakis, Y. Cycles and paths in bipartite tournaments with spanning configurations. Combinatorica 9 (1989), no. 1, 33–38. MR1010297 (90f:05065)

Particiones de Conjuntos con Restricciones

José L. Ramírez
Departamento de Matemáticas
Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia
e-mail: josel.ramirez@ima.usergioarboleda.edu.co

Resumen

Como es bien conocido los números de Stirling de la segunda clase, $S(n,k)$, cuentan el número de maneras en que se puede particionar un conjunto con n elementos en k bloques no vacíos. Estos números son de gran importancia en Combinatoria, Teoría de Números, Polinomios Especiales, entre otros. Los números de Stirling se pueden generalizar si se pone restricción al número máximo (o mínimo) de elementos en cada bloque, dando origen a nuevas sucesiones de mayor complejidad. El objetivo de la charla es mostrar algunos resultados recientes sobre los números de Stirling restringidos, en particular nos concentraremos en propiedades combinatorias (recurrencias, identidades, funciones generatrices, transformación de Hankel, log-concavidad) y aritméticas (valuación p-ádica). Este trabajo es en conjunto con Victor Moll y Diego Villamizar de Tulane University.

Palabras claves

Números de Stirling restringidos; Números de Stirling asociados; Partición de Conjuntos; Identidades combinatorias.

Bibliografía

[1] T. Amdeberhan, V. De Angelis, V. Moll. Complementary Bell numbers: arithmetical properties and Wilf's conjecture. Advances in Combinatorics Waterloo Workshop in Computer Algebra, W80 (Springer, 2013), 23–56.

[2] T. Amdeberhan, V. Moll. Involutions and their progenies. J. Comb. 6(2015), 483–508.

[3] M. Bóna, I. Mező. Real zeros and partitions without singleton blocks. European J. Combin. 51(2016), 500–510.

[4] J. Y. Choi, J. D. H. Smith. On the combinatorics of multi-restricted numbers. Ars Combin. 75(2005), 45–63.

[5] J. Y. Choi, J. Smith. On the unimodality and combinatorics of Bessel numbers. Discrete Math. 264(2003), 45–53.

[6] T. Mansour, M. Schork. Commutations Relations, Normal Ordering, and Stirling numbers. CRC Press, 2015.

[7] T. Mansour, J. Ramírez, M. Shattuck. A generalization of the r-Whitney numbers of the second kind. Journal of Combinatorics, To appear.

[8] I. Mező, J. Ramírez. Some identities of the r-Whitney numbers. Aequationes Math. 90(2)(2016), 393–406.

[9] I. Mező, J. Ramírez. The linear algebra of the r-Whitney matrices. Integral Transforms Spec. Funct. 26(3)(2015), 213–225.

[10] I. Mező. Periodicity of the last digits of some combinatorial sequences. J. Integer Seq. 17 article 14.1.1 (2014), 1–18.

[11] F. L. Miksa, L. Moser, M. Wyman. Restricted partitions of finite sets. Canad. Math. Bull. 1(1958), 87–96.

[12] J. Ramírez, M. Shattuck. (p, q)-Analogue of the r-Whitney-Lah Numbers. J. Integer Seq. 19 article 16.5.6 (2016).

Bicyclic digraphs with maximal energy

Juan Rada Juan Monsalve

Instituto de Matemáticas

Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

e-mail: jdmonsal@gmail.com pablo.rada@udea.edu.co

Resumen

If D is a digraph with n vertices then the energy of D is defined as $\mathcal{E}(D) = \sum_{k=1}^{n} |\mathrm{Re}(z_k)|$, where $\mathrm{Re}(z_1), \ldots \mathrm{Re}(z_n)$ are the real parts of the eigenvalues $z_1, \ldots, z_n$ of D. In this paper we solve a problem proposed in [7], we find the maximal value of the energy over the set of all bicyclic digraphs $\mathcal{B}_n$ with n vertices.

Palabras claves

energy; bicyclic digraphs; extremal values..

Bibliografía

[1] R. Cruz, H. Giraldo, J. Rada, An upper bound for the energy of radial digraphs, Lin. Algebra Appl. 442 (2014) 75-81.

[2] I. Gutman, The energy of a graph, Ber. Math.-Statist. Sekt. Forschungsz. Graz 103 (1978) 1–22.

[3] I. Gutman, X. Li (Eds.), *Energies of graphs - Theory and Applications*, Univ. Kragujevac, Kragujevac (2016) 237-276.

[4] W. Hong, L. You, Spectral radius and signless Laplacian spectral radius of strongly connected digraphs, Lin. Algebra Appl. 457 (2014) 93-113.

[5] B. Huo, S. Ji, X. Li, Y. Shi, Solution to a conjecture on the maximal energy of bipartite bicyclic graphs, Lin. Algebra Appl. 435 (4) (2011) 804-810.

[6] S. Ji, X. Li, Y. Shi, The extremal matching energy of bicyclic graphs, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 70 (2)(2013) 697-706.

[7] M. Khan, R. Farooq, A. Siddiqui, On the extremal energy of bicyclic digraphs, J. Math. Inequal. 9 (3) (2015) 799-810.

[8] X. Li, Y. Shi, I. Gutman, *Graph energy*, Springer-Verlag, New York, 2012.

[9] H. Lin, J. Shu, A note on the spectral characterization of strongly connected bicyclic digraphs, Lin. Algebra Appl. 436 (2012) 2524-2530.

[10] J. Li, B. Zhou, On spectral radius of strongly connected digraphs, Bull. Iranian Math. Soc. 41 (2) (2015) 381-387.

[11] M. Mateljević, V. Božin, I. Gutman, Energy of a polynomial and the Coulson integral formula, J. Math. Chem. 48 (2010) 1062-1068.

[12] I. Peña, J. Rada, Energy of digraphs, Lin. Multilin. Alg. 56 (2008) 565-579.

[13] J. Rada, I. Gutman, R. Cruz, The energy of directed hexagonal systems, Lin. Algebra Appl. 439 (2013) 1825-1833.

[14] J. Rada, Energy of digraphs, in: I. Gutman, X. Li (Eds.), Energies of graphs - Theory and Applications, Univ. Kragujevac, Kragujevac, 2016, pp. 237-276.

[15] X. Shen, Y. Hou, C. Zhang, Bicyclic digraphs with extremal skew energy, Electron. J. Linear Algebra 23 (2012) 340-355.

Ponencias Aplicaciones

Coordinador: Agustín Moreno Cañadas

- **[AP1]** Distancia aparente de códigos cíclicos, Diana H. Bueno-Carreño, José Joaquín Bernal, Juan Jacobo Simón, Pontificia Universidad Javeriana, Cali, Colombia, Universidad de Murcia, Murcia, España.

Distancia aparente de códigos cíclicos

Diana H. Bueno-Carreño
Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas
Pontificia Universidad Javeriana, Cali, Colombia
e-mail: dhbueno@javerianacali.edu.co
José Joaquín Bernal   Juan Jacobo Simón
Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia, Murcia, España
e-mail: josejoaquin.bernal@um.es jsimon@um.es

Resumen

Calcular la distancia mínima de códigos cíclicos, o una cota para ella, es uno de los problemas más estudiados en este tipo de códigos. La primera cota inferior conocida para la distancia mínima de un

código cíclico C es la cota Bose-Ray-Chaudhuri-Hocquenghem, usualmente llamada cota BCH. El estudio de esta cota y sus generalizaciones es un tema clásico, el cual incluye la muy conocida familia de códigos BCH. Es bien sabido que un código cíclico puede tener varias cotas BCH, así que un problema interesante es determinar cuándo el máximo de sus cotas BCH es igual a su distancia mínima.

En esta ponencia consideraremos tres problemas relacionados con el estudio de la cota BCH. El primero consiste en dar una caracterización de aquellos códigos cíclicos para los cuales su distancia mínima coincide con el máximo de sus cotas BCH. Para ello utilizaremos dos herramientas: la transformada de Fourier discreta y la noción de distancia aparente de un código, definida originalmente para códigos abelianos multivariables en [1, p. 21]. El segundo problema consiste en mostrar algunas técnicas para construir códigos cíclicos cuya distancia mínima sea igual al máximo de sus cotas BCH, para lo cual desarrollamos una estrategia basada en el ánalisis de los divisores de un polinomio de la forma $x^r - 1$, donde r es un número entero positivo. El tercer problema estriba en presentar técnicas de construcción de códigos BCH para los cuales su distancia designada, el máximo de sus cotas BCH y su distancia mínima coinciden. Abordamos esta cuestión, aplicando los resultados obtenidos en la resolución de los dos problemas anteriores, al estudio de códigos BCH cuya distancia mínima es igual a su distancia designada.

Palabras claves

Códigos cíclicos, cota BCH, distancia aparente de códigos cíclicos.

Bibliografía

[1] P. Camion, Abelian Codes. MRC Tech. Sum. Rep. # 1059, University of Wisconsin, 1971.

[2] R.T. Chien; D.M. Chow. Algebraic Generalization of BCH-Goppa-Helgert Codes, IEEE Transactions on Information Theory, vol.IT-21, No.1, 1975.

Ponencias Geometría Algebraica & Geometría Aritmética

Coordinadores: Pedro Hernández - Yamidt Bermúdez

- ⋆ **[GA1]** Curvas elípticas sobre $\mathbb{F}_q(T)$ desde el parámetro de Tate, Yamidt Bermúdez Tobón, Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- ⋆ **[GA2]** Equivalencia entre la hipótesis de Riemann y el conteo de puntos racionales sobre cuerpos finitos, Bilson Castro López, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- ⋆ **[GA3]** Análisis en Fractales, Jonathan A. Trejos O., Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- ⋆ **[GA4]** Un ejemplo de una curva maximal con semigrupo de Weierstrass simétrico, Arnoldo Teherán Herrera, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- ⋆ **[GA5]** Sobre el teorema de Gelfand-Naimark, Sebastián Alejandro Álvarez Avendaño, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- ⋆ **[GA6]** Topología de Curvas Algebraicas, Delio Jaramillo Velez, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

- ⋆ **[GA7]** Algoritmo para computar límites de cocientes de funciones polinómicas en tres variables, Juan Pablo Hernández Rodas, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

Curvas elípticas sobre $\mathbb{F}_q(T)$ desde el parámetro de Tate

Yamidt Bermúdez Tobón
Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle, Cali, Colombia
e-mail: yamidt.bermudez@correounivalle.edu.co

Resumen

En [2] se demostró el análogo de la conjetura de Taniyama-Shimura sobre campos de funciones: Sea E una curva elíptica sobre $\mathbb{F}_q(T)$ de conductor $\mathfrak{n}\infty$, existe un cociclo armónico φ, la cual es una autofunción para el operador de Hecke con autovalores racionales tales que $L(E, s) = L(\varphi, s)$. En mi tesis doctoral [1] desarrollé un algoritmo para encontrar el parámetro de Tate desde la autoforma en φ. En este trabajo nosotros usamos las series de Eisenstein para encontrar ecuaciones a dichas curvas definidas sobre $\mathbb{F}_q(T)$.

Bibliografía

[1] Yamidt Bermúdez Tobón. *An efficient algorithm to compute an elliptic curve from a corresponding function field automorphic form*. PhD thesis, 2015. Thesis (Ph.D.)-Heidelberg University (Germany).

[2] Ernst-Ulrich. Gekeler and M.Reversat. *Jacobians of Drinfeld modular curves*.J. Reine Angew. Math., 476:27–93, 1996.

Equivalencia entre la hipótesis de Riemann y el conteo de puntos racionales sobre cuerpos finitos

Bilson Castro López
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia, MedellÃn, Colombia
e-mail: b9cast@gmail.com

Resumen

A primera vista la hipótesis de Riemann podría parecer completamente especial, una conjetura única en su clase. Sin embargo, Hecke generalizó la hipótesis de Riemann para toda una familia de funciones zetas conocidas como *funciones zetas de Dedekind*. Esta nueva clase de funciones zeta, al igual que la función zeta de Riemann, satisface cierta ecuación funcional y pueden ser extendidas a todo el plano complejo.

El tema central de esta charla serán las curvas algebraicas con cuerpos de constantes finitos, esto es, $\mathbb{F}_p$ donde p es primo además de sus extensiones finitas, más precisamente, $\mathbb{F}_q$ con $q = p^r$, y $r \in \mathbb{N}$.
Una curva C es el conjunto de pares ordenados $(x, y) \in F_q^2$ tales que satisfacen una ecuación polinomial $f(x, y) = 0$ para algún f en el anillo de polinomios de $\mathbb{F}_q[x, y]$. Para cada $m > 0$ definimos por $N_m(C)$ el

número de puntos racionales de la curva $C(\mathbb{F}_{q^m})$, esto es a grosso modo, el conjunto de soluciones sobre el cuerpo F_{q^m} de la ecuación $f(x, y) = 0$. Así nuestro interés está centrado en el comportamiento de la sucesión $\{N_m(C)\}_{m\in\mathbb{N}}$.

Con todo la anterior, objetivo principal de esta conferencia es dar a conocer la equivalencia entre la versión análoga de la hipótesis de Riemann sobre curvas algebraicas y una cota sobre el número de puntos racionales de esta curva definida sobre un cuerpo de constantes finitas.

Bibliografía

[At] ATIYAH, M y MACDONALD, *Introduction to Commutative Algebra*, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, 1964

[BO] E. BOMBIERI, *Problems of the Millennium: The Riemann Hypothesis*, 2000 Millennium Event, (2000.)

[OS] B. OSSERMAN, *The Weil conjetures*, Princeton University Press, (2008).

[OC] B. OSSERMAN And J. CHAHAL, *The Riemann Hypothesis for elliptic curves*, American Mathematical Monthly 115 (2008), 431-442.

[OT] KARL-OTTO STÖHR , *Cuerpo de funciones algebraicas*, notas del cuerpo cuerpo de funciones algebraicas, IMPA.

[RI] B. RIEMANN, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monat. der königl. preuss. akad. der wissen. zu Berlin aus der Jhare 1859 (1960), 671-680.

[PE] PETER ROQUETTE, *The Riemann hypothesis in characteristic p, its origin and development* Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, (2003) 79-157.

[W] A. WEIL, *Courbes algebriques et varietes abeliennes*, Hermann, Paris (1971).

Análisis en Fractales

Jonathan A. Trejos O.
Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle, Cali, Colombia
e-mail: yostrejos@hotmail.com

Resumen

Benoit Mandelbrot dedicó su libro [1] a probar que en la naturaleza se encuentran formas que tienen una estructura quebrada, la estructura de un fractal. Los fractales aún no tienen una definición matemáticamente satisfactoria (ver [2]), pero es entendido que se debe realizar geometría o análisis de una manera distinta a la clásica.

Ciertos fractales exiben una estructura autosemejante y los físicos entre 1970 y 1980 se interesaron entender fenómenos en ellos [3]. Parcialmente influenciados por estos estudios se ha desarrollado análisis en ciertos conjuntos autosemejantes a partir del análisis discreto, para así poder proponer ecuaciones diferenciales en esta clase de objetos y estudiar fenómenos en ellos a partir de estas.

Recientemente matemáticos como J. Kigami [4] y R. Strichartz [5] han propuesta una teoría determinista que permite desarrollar el análisis antes mencionado.

La estrategía determinista construye operadores laplacianos discretos a partir de subconjuntos del fractal anidados entre sí, cuyo límite es denso en el fractal, esto nos permite inducir un operador sobre todo el conjunto. Con esta teoría podremos recuperar conceptos clásicos como el laplaciano para esta clase de objetos, y por tanto podremos proponer ecuaciones conocidas, tales como la ecuación del calor.

Bibliografía

[1] Benoit Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company, 1982.

[2] Gerald Edgar. *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. Springer, 2008.

[3] S.H. Liu. Fractals and their applications in condensed matter physics. *Solid State Physics*, 39:207–273, 1986.

[4] Jun Kigami. *Analysis on Fractals*. Cambridge University Press, 2001.

[5] Robert Strichartz. *Differential Equations on Fractals*. Princeton University Press, 2006.

Un ejemplo de una curva maximal con semigrupo de Weierstrass simétrico

Arnoldo Teherán Herrera
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
e-mail: ateheran@uis.edu.co

Resumen

Sean $p, r, n, m, N \in \mathbb{Z}^+$ con p primo, r, m impares, $q = (p^n)^r$ y $N = \dfrac{q^m + 1}{q + 1}$; la curva formada por la intersección de las superficies en $\mathbb{P}^3\left(\mathbb{F}_{q^{2m}}\right)$ con ecuaciones afines

$$\mathcal{X} : \begin{cases} a(x) & = & y^{q+1} \\ y^{q^2} - y & = & z^N \end{cases}$$

donde

$$a(x) = x^{q/p^n} - x^{q/p^{2n}} + \ldots - x^{p^n} + x,$$

es un ejemplo de una curva $\mathbb{F}_{q^{2m}}-$ maximal, además no es $\mathbb{F}_{q^{2m}}-$ cubierta por la curva Hermitiana. En esta charla probaremos que el semigrupo de Weierstrass de $\mathcal{X}$ en el único punto P_0 en el infinito es un semigrupo simétrico, lo cual permite construir AG codigos en le punto P_0 y comparar sus parámetros con la cota de Feng-Rao.

Palabras claves

Curvas maximales, cubrimientos de curvas, semigrupo de Weierstrass, semigrupos simétricos.

Bibliografía

[1] M. Abdón J. Bezerra, L. Quoos; *Further examples of maximal curves*, Journal of Pure and Applied Algebra, pp. 1192 - 1196, 2009.

[2] Duursma, Iwan, and Kit-Ho Mak. *On maximal curves which are not Galois subcovers of the Hermitian curve*. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series 43.3 (2012): 453-465.

[3] Fanali, Stefania, and Massimo Giulietti. *One-point AG codes on the GK maximal curves.* IEEE Transactions on Information Theory 56.1 (2010): 202-210.

[4] Fanali, Stefania, and Massimo Giulietti. *Quotient curves of the GK curve*. Adv. Geom, 12:239? 268, 2012.

[5] Garcia, Arnaldo, Cem Güneri, and Henning Stichtenoth. *A generalization of the Giulietti and Korchmáros maximal curve.* Advances in Geometry 10.3 (2010): 427-434.

[6] Garcia, Arnaldo, and Henning Stichtenoth. *A maximal curve which is not a Galois subcover of the Hermitian curve.* Bull Braz Math Soc, 37(1), 2006.

[7] Giulietti, Massimo, and Gábor Korchmáros. *A new family of maximal curves over a finite field.* Mathematische Annalen 343.1 (2009): 229-245.

[8] Korchmáros, Gábor, and Fernando Torres. *Embedding of a maximal curve in a Hermitian variety.* Compositio Mathematica 128.1 (2001): 95-113.

[9] Tafazolian, Saeed, Arnoldo Teherán-Herrera, and Fernando Torres. *Further examples of maximal curves which cannot be covered by the Hermitian curve.* Journal of Pure and Applied Algebra 220.3 (2016): 1122-1132.

Sobre el teorema de Gelfand-Naimark

Sebastián Alejandro Álvarez Avendaño
Universidad de Antioquia, MedellÃn, Colombia
e-mail: hsebasa@gmail.com

Resumen

El teorema de Gelfand Naimark establece una equivalencia categórica entre espacios de Hausdorff localmente compactos y el dual de la categoria de C^*-álgebras conmutativas. A partir de allí, se puede pensar en una relación entre C^*-álgebras no necesariamente conmutativas y alguna categoria que represente espacios localmente compactos no conmutativos. Nace entonces una nueva estructura construida a partir del álgebra. En esta charla se hablará de forma muy general sobre el teorema, el bosquejo de la prueba, aspectos históricos que motivaron el resultado y analogias con otros resultados.

Bibliografía

[1] Masoud Khalkhali. *Very Basic Noncommutative Geometry*. arXiv:math/0408416.

[2] Masoud Khalkhali. *Lectures on Noncommutative Geometry*. arXiv:math/0702140.

[3] Doran, Robert Belfi, Victor. *Characterizations of C^* algebras: the Gelfand-Naimark Theorems*. CRC Press, 14 Mar. 1986.

Topología de Curvas Algebraicas

Delio Jaramillo Velez
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia
e-mail: delin.jaramillo@gmail.com

Resumen

En esta charla daremos una breve introducción de los conjuntos algebraicos de dimensión 1 o curvas algebraicas, definidos como ceros de polinomios con coeficientes sobre los cuerpos $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}$. Introduciremos las topologías clásicas en el estudio de este tipo de objetos: la compleja (conocida como la “fuerte”) y la de Zariski (conocida como la “débil”) y estableceremos algunas diferencias fundamentales entre estas dos propuestas. En el caso particular sobre $\mathbb{R}$ hablaremos de una de las conjeturas más importantes de la geometría algebraica real: el 16° problema de Hilbert.

Bibliografía

[1] Shafarevich, I.R. *Basic Algebraic Geometry, Vols. 1 and 2*. Springer-Verlag, 2013.

[2] Fulton, W. *Algebraic Curves. An Introduction to Algebraic Geometry*. reprint, 2008.

Algoritmo para computar límites de cocientes de funciones polinómicas en tres variables

Juan Pablo Hernández Rodas
Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes, BogotÃ¡, Colombia
e-mail: jp.hernandezr@uniandes.edu.co

Resumen

Un método para computar límites de cocientes de funciones polinómicas en 2 variables ha sido desarrollado en [1]. En esta charla, voy a hablar de un resultado reciente que hemos obtenido para computar estos límites en el caso de cocientes $q = f(x, y, z)/g(x, y, z)$ de funciones polinómicas en tres variables con coeficientes racionales. La idea principal consiste en examinar el comportamiento de la función q a lo largo de la variedad discriminante asociada a q, que denotaremos $X(q)$, y luego mostrar, que determinar el límite deseado es equivalente a determinar el límite de un cociente de funciones polinómicas en 2 variables. Esta reducción al caso de dos variables, se logra usando un resultado muy conocido de la geometría algebraica, que afirma que toda curva algebraica es birracionalmente equivalente a una curva plana. Al final, describiré un algoritmo que generaliza el que se había desarrollado en [1], que ya está implementado en Maple con el comando limit/multi.

Bibliografía

[1] Cadavid C., Molina S., Vélez, J. D. (2012). Limits of quotients of bivariate real analytic functions. Journal of Symbolic Computation, 50, 197-207.

[2] Vélez, J. D., Hernández, J. P., Cadavid, C. A. (2015). Limits of quotients of real polynomial functions of three variables. arXiv preprint arXiv:1505.04121.

Posters ALTENCOA7-2016

- ⋆ Sobre Anillos de Grupo Clean, Jorge Andrés Rojas Gómez, Alexander Holguín Villa, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- ⋆ La conjetura del determinante de Cartan, Karen lizeth Martinez Acosta, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.
- ⋆ Elementos simétricos del álgebra de grupo de un grupo Hamiltoniano, Adriana María Alzate Patiño, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- ⋆ Acciones parciales y asociatividad del producto cruzado, Jorge Eliécer Gómez Ríos, Héctor Edonis Pinedo Tapia, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- ⋆ Elementos Cayley unitarios en álgebras de grupo, Yzel W. Alay Gómez Espíndola, Alexander Holguín-Villa, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- ⋆ Construcciones geométricas y números en origami, Diego Fernando Becerra Ramírez, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- ⋆ Una introducción a las funciones zeta locales de Igusa, Brian Andres Zambrano Luna, Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá, Colombia.
- ⋆ Ecuación de Pell y cálculo de unidades en el anillo de enteros de un cuerpo cuadrático real, Jhon Jairo Sosa Rosero, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- ⋆ Teorema de los números primos y su distribución a partir de la formulación de Legendre, Ricardo A. Pabón, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- ⋆ Ojo!! $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ sí puede ser cuerpo!!!!, <u>Emma Cupitra-Vergara</u>, <u>Sebastián Correa-Amaya</u>, Jesús Ávila, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.

Sobre Anillos de Grupo Clean

<u>Jorge Andrés Rojas Gómez</u> Alexander Holguín Villa
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
e-mail: jarojasg@saber.uis.edu.co
aholguinvilla@matematicas.uis.edu.co

Resumen

Un elemento a en un anillo A (asociativo con unidad) es llamado **clean** si él puede escribirse como la suma de una unidad y un elemento idempotente. Un anillo A es llamado **anillo clean** si todos sus elementos son clean.

Ejemplos de dichos anillos son $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, n entero positivo, anillos de Boole (Booleanos) y anillos de división.

Probablemente el concepto de anillo clean aparece por primera vez en el trabajo de W.K. Nicholson *Lifting Idempotents and Exchange Rings* [2]. Para lograr esta definición de anillo clean, Nicholson introdujo la noción de anillo “suitable” como el anillo A que verifica cierta condición con respecto a los idempotentes, su objetivo en ese artículo era probar que un anillo A es un anillo “exchange” si y solo si los elementos idempotentes pueden ser levantados módulo todo ideal a izquierda.

Este estudio no finalizó ahí, sino que motivo a diversos autores a estudiar estos anillos desde diferentes perspectivas, como por ejemplo el estudio de anillos conmutativos clean, [1], [4]. Como es usual, por su naturaleza, al estudiar anillos de grupo RG, respuestas asociadas al anillo de grupo ser clean involucran condiciones específicas tanto sobre el anillo R como el grupo G, por ejemplo Mcgovern en [1] establece que si R es anillo conmutativo clean y G es un 2-grupo abeliano elemental, entonces RG es clean.

Uno de nuestros objetivos es estudiar las propiedades que existen entre grupos y anillos que garanticen que el anillo de grupo asociado sea clean.

Palabras claves

Anillo de grupo, anillo de grupo clean, condición exchange, levantamiento de idempotentes.

Bibliografía

[1] McGovern W. Wm. A characterization of commutative clean rings. Int. J. Math. Game Theory Algebra Volume 15(4)(2006) 403-413.

[2] Nicholson W.K. Lifting Idempotents and Exchange Rings. Trans. Amer. Math. Soc. Volume 229(1977) 269-278.

[3] Polcino Milies, César; Sehgal, Sudarshan K. An introduction to group rings. Algebras and Applications, 1. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002. xii+371 pp. ISBN: 1-4020-0238-6 MR1896125 (2003b:16026)

[4] Zhou Y. On Clean Groups Rings. Advances in Ring Theory, Trends in Mathematics 2010 Birkhauser Verlag Basel/Switzerland.

La conjetura del determinante de Cartan

Karen lizeth Martinez Acosta
Departamento de Matemáticas
Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia
(Intercambio Universidad Federal de Viçosa, Viçosa, Brasil)
e-mail: klizethmartinez@ut.edu.co
Orientador: Rogério Carvalho Picanço
Departamento de matemáticas

Universidad Federal de Viçosa, Viçosa, Brasil
e-mail: rogerio@ufv.br

Resumen

Un invariante fundamental de un álgebra de dimensión finita es su Matriz de Cartan, introducida por Elie Cartan en [2]. Algunas propiedades homológicas pueden ser expresadas por esta matriz (y por su determinante). El problema que será abordado está relacionado con la conjetura (aún en abierto) del determinante de Cartan.

Sea A un álgebra de dimensión finita con dimensión global finita. Einleberg mostró en [3] que el determinante de Cartan de A es $det\, C(A) = \pm 1$. Para simplificar notación, vamos a denotar el determinante de Cartan ($det\, C(A)$) por $\overline{C(A)}$. En todos los ejemplos conocidos este determinante asume el valor $\overline{C(A)} = +1$. La conjetura del determinante de Cartan dice que si A posee dimensión global finita entonces su determinante es $\overline{C(A)} = +1$. Hasta el momento no existe prueba o contraejemplo para esta conjetura. En [7] el problema se encuentra resuelto para álgebras A de dimensión global dim. gl. $(A) \leq 2$. En [4] el problema está resuelto para álgebras seriales a izquierda. En [6] existe una lista de clases de álgebras para la cual la conjetura está resuelta. En cuanto a la recíproca, en [4] existen algunos resultados de cuando el determinante de Cartan determina la dimensión global de un álgebra. Por ejemplo, para álgebras seriales a izquierda $\overline{C(A)} = 1$ implica dimensión global finita. Otra clase de álgebras en que la conjetura de Cartan se encuentra probada y vale la recíproca son las álgebras de longitud de Loewy menor o igual a dos, [4], donde también existe ejemplo de álgebras de longitud de Loewy igual a 3, con determinante de Cartan igual a 1 y dimensión global infinita, contradiciendo la recíproca de la conjetura del determinante de Cartan.

Una clase particularmente interesante son las álgebras gentle. Estas álgebras fueron introducidas por Assem y Skowroński en [1], son definidas de manera combinatoria sobre un quiver y están presentes en diversos problemas de clasificación. Un interés especial en la clasificación de esta clase de álgebras se debe al resultado obtenido por Schröer y Zimmermann, quienes mostraron que la clase de álgebras gentle es cerrada por equivalencia derivada.

El objetivo principal es presentar el resultado obtenido en [5] que determina el cálculo del determinante de Cartan de álgebras gentle, en los casos de dimensión global finita e infinita, el cual establece una forma de obtener el determinante de Cartan directamente en el quiver que define la álgebra gentle, y, en particular, resuelve la conjetura de Cartan para esta clase de álgebras.

Teorema: *Sea A un álgebra gentle. Denote por $ec(A)$ el número de ciclos orientados de longitud par con relaciones completas y por $oc(A)$ el número de ciclos orientados de longitud impar con relaciones completas. Entonces para el determinante de Cartan tenemos:* $\overline{C(A)} = 0$ *si* $ec(A) > 0$ *y* $\overline{C(A)} = 2^{oc(A)}$ *si* $ec(A) = 0$.

Palabras claves

Conjetura de Cartan, invariante homológico, álgebras gentle.

Bibliografía

[1] I. Assem; A. Skowroński. Iterated tilted algebras of type $\widetilde{\mathbf{A}}_n$. Math. Z. 195 (2) (1987) 269–290.

[2] E. Cartan. Les groups bilineares et les systémes de nombres complexes. Ann. Fac. Sci. Toulose Sci. Math. Sci. Phys. 12 (1) (1898) B1–B64.

[3] S. Eilenberg. Algebras of cohomologically finite dimension. Comment. Math. Helv. 28 (1954), 310–319.

[4] W.D. Burgess; K.R. Fuller; E.R. Voss and B. Zimmermann - Huisgen. The Cartan matrix as an indicator of finite global dimension for artinian rings. Proc. of the American Math Society. 95 (2) (1985).

[5] T. Holm. Cartan determinants for gentle algebras. Arch. Math. 85 (2005) 233–239.

[6] K. Yamagata. A reduction formula for the Cartan determinant problem for Algebra. Arch. Math., vol 61 (1993) 27–34.

[7] D. Zacharia. On the Cartan Matrix of an Artin algebra of global dimension two. J. Algebra 82 (1983), 353–357.

Elementos simétricos del álgebra de grupo de un grupo Hamiltoniano

Adriana María Alzate Patiño
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
e-mail: adriana.alzate@correo.uis.edu.co

Resumen

Un grupo no abeliano cuyos subgrupos son todos normales es llamado Hamiltoniano. Es bien conocido que todo grupo Hamiltoniano G contiene un subgrupo isomorfo al grupo cuaternio de orden 8 [2, Lema 1.8.4]. Además, Dedekind y Baer lograron establecer que todo grupo Hamiltoniano G puede escribirse como el producto directo de un grupo cuaternio de orden 8, un 2-grupo abeliano elemental E y un grupo abeliano A cuyos elementos son de orden impar [2, Teorema 1.8.5].

En el estudio de algunas propiedades de las álgebras de grupo con involución han aparecido de manera natural los grupos Hamiltonianos. En el caso de tener G un 2-grupo Hamiltoniano, es decir, $G = Q_8 \times E$ y $\mathbf{F}$ un cuerpo, mostraré en detalle que en el álgebra de grupo FG todos los elementos simétricos conmmutan [1, Lema 2.1.1]. Además, será evidente que los elementos centrales en FG son combinaciones lineales de elementos de orden 1 o 2 y términos de la forma $a + a^*$ con $a \in FG$.

Palabras claves

Grupo Abeliano, grupo Hamiltoniano, álgebra de grupo, involución y elementos simétricos.

Bibliografía

[1] Lee, Gregory T. Group identities on units and symmetric units of group rings. Algebra and Applications, 12. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2010. xii+194 pp. ISBN: 978-1-84996-503-3 MR2723223 (2012d:16074).

[2] Polcino Milies, César; Sehgal, Sudarshan K. A Course in Group Rings. Algebras and Applications, 1. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002. xii+371 pp. ISBN: 1-4020-0238-6 MR1896125 (2003b:16026).

Acciones parciales y asociatividad del producto cruzado

Jorge Eliécer Gómez Ríos Héctor Edonis Pinedo Tapia
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
e-mail: jorgorios@gmail.com hectormasper@gmail.com

Resumen

Una *acción parcial* de un grupo G sobre un álgebra $\mathcal{A}$ es una colección de ideales $D_g \subseteq \mathcal{A}$ $(g \in G)$ e isomorfismos de álgebras $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$ tales que

(*i*) $D_{1_G} = \mathcal{A}$ y $\alpha_{1_G} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$;

(*ii*) $\alpha_h^{-1}[D_h \cap D_{g^{-1}}] \subseteq D_{(gh)^{-1}}$;

(*iii*) $\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{gh}$ si $x \in \alpha_h^{-1}[D_h \cap D_{g^{-1}}]$.

Las acciones parciales de grupos aparecen independientemente en varias áreas de las matemáticas, en particular, en la teoría de álgebras de operadores son una valiosa herramienta para su estudio. Dada una acción parcial α de un grupo G en un álgebra asociativa $\mathcal{A}$, el *anillo de grupo skew* $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ correspondiente a α es el conjunto de todas las sumas finitas formales $\left\{\sum_{g\in G} a_g\delta_g : a_g \in D_g\right\}$, donde los δ_g son símbolos, la suma se define componente a componente y el producto se determina por $(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_g)\delta_{gh}$. Se mostrará usando el álgebra de multiplicadores que en general el producto cruzado $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ no es asociativo pero que una condición suficiente para garantizar la asociatividad de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ es que $\mathcal{A}$ sea semiprimo. Más precisamente se estudiará el siguiente resultado:

Teorema [1, Teorema 3.1] *Sea G un grupo, $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa y α una acción parcial de G en $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ semiprimo, entonces el anillo de grupo skew $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ es asociativo.*

Palabras claves

Acción parcial, producto cruzado, anillo de grupo skew, asociatividad.

Bibliografía

[1] Dokuchaev M. and Exel R. *Associtivity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations*, T. Am. Math. Soc. 357 (2004), (5), 1931 - 1952.

Elementos Cayley unitarios en álgebras de grupo

Yzel W. Alay Gómez Espíndola Alexander Holguín-Villa
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
e-mail: ywage03@gmail.com
aholguinvilla@matematicas.uis.edu.co

Resumen

Consideremos el álgebra de grupo KG de un grupo finito G sobre el cuerpo K con característica diferente de dos. Denotemos por $* : KG \longrightarrow KG$ la K-involución natural de KG inducida por $x^* = x^{-1}$ para todo $x \in G$. Un elemento u en el grupo de las unidades $\mathcal{U}(KG)$ es llamado unitario si $uu^* = 1$, denotaremos por $\mathcal{U}n(KG)$ al subgrupo de todas las unidades unitarias de KG. Sea $KG^- = \{k \in KG | k^* = -k\}$ el conjunto de los elementos antisimétricos de KG.

Sea k es un elemento antisimétrico en KG tal que $1+k$ es invertible, el elemento $u_{[k]} = (1-k)(1+k)^{-1}$ pertenece a $\mathcal{U}n(KG)$ y es llamado un elemento *Cayley unitario* construído a partir de k; denotaremos por $\mathcal{U}n^C(KG)$ al conjunto de todos los elementos Cayley unitarios de KG. Es natural preguntarnos como determinar si un elemento $\alpha \in KG$ esta en $\mathcal{U}n^C(KG)$ y en caso que $\alpha \notin \mathcal{U}n^C(KG)$ será posible determinar si α es el producto de dos elementos en $\mathcal{U}n^C(KG)$. De hecho estas preguntas tienen respuesta en [1], donde se presentan los siguientes resultados en los cuales se da una caracterización de los elementos Cayley unitarios.

Proposición Un elemento unitario $u \in KG$ es un elemento Cayley unitario si y solo si $1 + u$ es invertible en KG.

Proposición Un elemento unitario $u \in KG$ es el producto de dos elementos Cayley unitarios si y solo si $(1 + u) - (1 - u)k$ es invertible en KG para algún elemento antisimétrico con $1 + k$ invertible en KG.

Palabras claves

Elementos Cayley Unitarios, álgebra de grupo, elementos antisimétricos.

Bibliografía

[1] Vieira A. C. & Ribeiro-Da Silva V., *Unitary units in group algebras and Fibonacci sequences.* J Algebra Appl. Vol.5, No. **2**. (2006):145-151.

Construcciones geométricas y números en origami

Diego Fernando Becerra Ramírez
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
e-mail: diegorigami@outlook.com

Resumen

El estudio de las construcciones geométricas es un tema clásico que ha sido abordado por matemáticos de todos los tiempos, desde la Grecia antigua hasta la actualidad. Dentro de las inquietudes geométricas que nacen en los tiempos antiguos se destaca una curiosidad principal: el estudio de las construcciones geométricas posibles con diferentes herramientas. En esta ponencia se presentaran conjunto de axiomas del origami [1] y su equivalente a la geometría y teoría de números; los axiomas se estructuraran jerárquicamente de forma que la adición de cada axioma permita nuevas complicaciones geométricas.

Como consecuencia de estos axiomas se puede llegar a construcciones y números thalianos, pitagóricos, euclidianos y cónicos. Para finalizar quedará la inquietud del uso del origami como una herramienta para realizar construcciones geométricas, cuyo estudio se puede encontrar en [2].

Palabras claves

Origami, construcciones geométricas, construcciones thalianas, construcciones pitagóricos, construcciones euclidianas, construcciones cónicas.

Bibliografía

[1] Roger C. Alperin and Robert J. Lang. One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms. Fourth International Meeting of origami, Science, Mathemathics and Education. A K Peters, Ltd, 2009.

[2] Tramuns Figueras, Eulàlia. Una Formalització de les construccions geomètriques. Tesis doctoral, Universitat Politécnica de Catalunya 2012.

Una introducción a las funciones zeta locales de Igusa

Brian Andres Zambrano Luna
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá
e-mail: bazambranol@unal.edu.co

Resumen

En el libro clásico de teoría de números de Z.I. Borevich y I.R. Shafarevich aparece la siguiente afirmación, dado $F(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n]$ ($\mathbb{Z}_p$ los enteros p-ádicos), la serie de Poincaré asociada al polinomio

$$\varphi(t) = \sum_{0 \leq i} N_i (p^{-n} t)^i$$

es una función racional de t, donde $N_i = |\{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{Z}_p / p^i \mathbb{Z}_p)^n | \, F(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \, (mod \, p^i \mathbb{Z}_p)\}|$ para $1 \leq i$ y $N_0 = 1$. Esto implicaría la existencia de una recurrencia lineal entre los N_i.

Esta afirmación duro varios años como una conjetura, hasta cuando Jun Ichi Igusa demuestra la afirmación como consecuencia de su trabajo en integrales sobre $\mathbb{Q}_p^n$ (los números p-ádicos), de la forma

$$Z(F, s) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} |F(x_1, \dots, x_n)|_p^s \, dx$$

donde dx es la medida de Haar en $\mathbb{Q}_p$ normalizada por $\mu(\mathbb{Z}_p^n) = 1$, las funciones $Z(F, s)$ son conocidas como las funciones zeta locales de Igusa.

El propósito de este póster es dar inicialmente una mirada a los conceptos necesarios para entender las funciones zeta locales de Igusa, tales como la definición de los números p-ádicos, propiedades topológicas y algunas nociones analíticas, segundo enunciar la relación entre las funciones Z(F,s) y la conjetura de Borevich y Shafarevich y por ultimo introducir la formula de la fase estacionaria de Igusa, que nos permite dar una prueba alternativa de la racionalidad de la serie de Poincaré, $\varphi(t)$, en casos particulares como los polinomios homogéneos de los cuales daremos algunos ejemplos.

Palabras claves

Análisis P-ádico, Teoría de Números.

Bibliografía

[1] A. I. Borevich; I. R. Shafarevich. Number Theory, Academic Press, New York, 1966.

[2] Jay R. Goldman. Numbers of solutions of congruences: Poincaré series for strongly non-degenerate forms, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983), no. 4, 586-590.

[3] V.S. Albis; W.A. Zúñiga-Galindo. Una introducción elemental a la teoría de las funciones zata locales de Igusa, Lecturas Matemáticas 20 (1999), 5-33.

[4] J. Denef. Report on Igusa's local zeta function, Séminaire N. Bourbaki, 43émeannée (1990-1991), exposé 741; Astérisque 201-203 (1991), 359-386.

[5] W.A. Zúñiga-Galindo. Igusa's local zeta functions of semiquasihomogeneous polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 3193-3207.

[6] Jun-ichi Igusa. Complex powers and asymptotic expansions. II. Asymptotic expansions, J. Reine Angew. Math. 278/279 (1975), 307-321.

Ecuación de Pell y cálculo de unidades en el anillo de enteros de un cuerpo cuadrático real

Jhon Jairo Sosa Rosero

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

e-mail: jjsosar@unal.edu.co

Resumen

La ecuación de Pell es una ecuación diofantica de la forma $x^2 - Dy^2 = 1$, donde D es un entero que no es un cuadrado perfecto. Una solución a la ecuacion de Pell es un par $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Esta ecuacion siempre tiene como solucion trivial la pareja $(1, 0)$, la busqueda de soluciones distintas a la trivial es entonces un problema que se puede trasladar al anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] = \{a + b\sqrt{D} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ donde la ecuación se puede factorizar como $(x + y\sqrt{D})(x - y\sqrt{D}) = 1$, lo que es equivalente a buscar unidades del anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$, es decir las soluciones están dadas por el conjunto $U = \{p \mid N(p) = 1\}$ donde N es la norma del anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$.

Si $D \in \mathbb{Z}$ es libre de cuadrados se garantiza la existencia de infinitas soluciones para la ecuación de Pell. Un método para encontrar las soluciones de esta ecuacion es por medio de las fracciones continuas, que fue desarrollada por Lagrange.
Sea $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ la fracion continua de $\sqrt{D}$, si un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ es cuadrático entonces su fraccion continua es periódica. Se define el k-esimo convergente de la secuencia $\{a_k\}$ como la fraccion continua truncada $[a_0, a_1, \dots, a_k] = \frac{h_k}{p_k}$. Si $\frac{h_k}{p_k}$ son los convergentes para $\sqrt{D}$ tenemos entonces que

$$h_{k-1}^2 - Dp_{k-1}^2 = (-1)^k$$

Si x_1, y_1 es la solución mas pequeña a la ecuación de Pell entonces todas las otras soluciones están dadas por

$$(x_n + \sqrt{D}y_n) = (x_1 + \sqrt{D}y_1)^n$$

Sea $\zeta = x + \sqrt{D}y$ la menor unidad del anillo de enteros $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ llamada unidad fundamental, esta nos produce una solución a la ecuación de Pell dada por $\zeta\overline{\zeta}$ a esta solucion la llamamos solucion fundamental de la ecuación de Pell pues es la mínima solución no trivial de la ecuación.

De esta manera el conjunto de soluciones positivas de la ecuación de Pell estará dado por las unidades positivas del cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ dadas por $(\zeta)^n = (x + \sqrt{D}y)^n, n \in \mathbb{N}$ donde ζ es una unidad fundamental. Así entonces todo se reduce a encontrar una unidad fundamental en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$, la cual se tiene por el siguiente resultado dado en [1], sea $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ tal que $\sqrt{D} > \overline{\sqrt{D}}$, sean $\frac{h_k}{p_k}$ los convergentes de $\sqrt{D}$ y l la longitud del periodo de la fracfracción continua de $\sqrt{D}$,ponga $\zeta_1 = h_{l-1} - q_{l-1}\sqrt{D}$ entonces la unidad fundamental ζ_f es $\pm\zeta_1$ o $\pm\overline{\zeta_1}$. Lo anterior nos dice que el anillo de enteros de un cuerpo cuadrático es casi cíclico

Palabras claves

Ecuacion de Pell, cuerpo cuadratico real, unidades de un anillo, fracciones continuas.

Bibliografía

[1] Trifkovic, Mak . Algebraic Theory of Quadratic Numbers, 1. Universitext. Springer New York, 2013.ISBN 978-1-4614-7716-7

[2] Saban Alaca, Kenneth S. Williams. AIntroductory Algebraic Number Theory, 1. cambridge university press,40 west 20 street, New York, NY 10011-4211 USA, 2004.ISBN 978-0521183048

Teorema de los números primos y su distribución a partir de la formulación de Legendre

Ricardo A. Pabón

Ponencia Independiente Ingeniero de Sistemas Egresado UIS

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia

e-mail: rapabon@gmail.com

Resumen

En la teoría de números, han sido importantes los aportes realizados por Adrien-Marie Legendre, Carl Friedrich Gauss y Pafnuti Lvovich Chebychev. En 1798 Legendre formuló la función de distribución de los números primos así:

$\pi(x) = \frac{x}{A \ln x + B}$

definiendo en 1808 el mismo Legendre el valor de $A = 1$ y $B = -1{,}08366$, estableciendo la función como:

$\pi(x) = \frac{x}{\ln x + A(x)}, A(x) = -1{,}08366$

Gauss observó que la aproximación de Legendre de $A(x)$ tiende a -1. Luego Chebychev demostró que la conjetura de Legendre para la cual $\lim_{x\to\infty} A(x) = -1{,}08366$ es falsa[1] y que $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\pi(x)} - \ln x = -1$.[2]

En este trabajo se retomará la fórmula de Legendre y utilizando lo demostrado por Chebychev se reformulará el teorema de los números primos. Para esto inicialmente se demostrara:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(x)c}{x} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln(\frac{x}{c})}{x} = 1, c > 0$

Posteriormente se mostrará el resultado de hallar $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{\pi(x)}}}$, haciendo $\pi(x) = \frac{x}{\ln x - \ln c} = \frac{x}{\ln(\frac{x}{c})}$, con lo cual se definirá el teorema de los números primos.

Palabras clave

Teoría de números, número primo, teorema de los números primos, distribución de los números primos, función $\pi(x)$.

Bibliografía

[1] Goldfeld, Dorian. The Elementary Proof Of The Prime Number Theorem: An Historical Perspective. Columbia University. New York, 2003.

[2] Borwein, Peter; Choi, Stephen; Rooney, Brendan; Weirathmueller, Andrea. The Riemann Hypothesis: A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike. Springer. Berlin, Heidelberg, NewYork, HongKong, London, Milan, Paris, Tokyo. June 29, 2007. 182 pp. ISBN: 978-0-387-72126-2.

Ojo!! $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ sí puede ser cuerpo!!!!

Emma Cupitra-Vergara   Sebastián Correa-Amaya

Estudiantes Carrera de Matemáticas con Énfasis en Estadística

Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

e-mail: ecupitra@ut.edu.co jscorrea@ut.edu.co

Jesús Ávila

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

e-mail: javila@ut.edu.co

Resumen

La primera noción de número complejo que se presenta a un estudiante, consiste en definir el conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$, donde la suma se hace componente a componente y el producto se define como $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Con esto se prueba que $\mathbb{C}$ tiene una estructura de cuerpo. En cursos más avanzados de álgebra se considera el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con las operaciones:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{y} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

para todo $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Y se prueba que este conjunto es un cuerpo y además que es isomorfo a $\mathbb{C}$.

Esta construcción llamada "**Construcción de Cayley-Dickson**" [1] puede extenderse a anillos en general. Es decir, puede probarse que si A es un anillo conmutativo unitario entonces $A \times A$ con las operaciones arriba mencionadas también es un anillo conmutativo unitario [3]. Nosotros quisimos indagar si al cambiar el cuerpo $\mathbb{R}$ por un cuerpo finito $\mathbb{Z}_p$, p primo, obtenemos nuevamente un cuerpo. Comenzamos a estudiar este problema tomando el caso $p = 2$. Es claro entonces que el conjunto $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es

un anillo conmutativo unitario. Con esto sólo faltaría verificar la existencia de inversos multiplicativos. Obtuvimos la siguiente tabla de multiplicar del anillo:

$\cdot$	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
(1,0)	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(0,1)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(1,1)	(0,0)	(1,1)	(1,1)	(0,0)

Observamos que la pareja $(1, 1)$ no tiene inverso multiplicativo y más aún que este elemento es un divisor de cero. Con esto concluimos entonces que el anillo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con las operaciones arriba indicadas no es un cuerpo. Al observar los siguientes casos, obtenemos que $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ sí es cuerpo al igual que $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ y que $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ no lo es.

Observamos que los primos 2 y 5 son suma de dos cuadrados mientras que los primos 3 y 7 no lo son, esto nos da un camino para encontrar la solución definitiva al problema. Un famoso teorema de Fermat dice que un número primo p es suma de dos cuadrados ssi $p = 2$ ó p es de la forma $4k + 1$. Usando este resultado y la caracterización de los números enteros que son suma de dos cuadrados [2], nosotros llegamos al siguiente resultado:

Afirmación: El anillo $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, p primo, es un cuerpo ssi p es de la forma $4k + 3$.

Palabras claves

Anillo, cuerpo, construcción de Cayley-Dickson, número primo.

Bibliografía

[1] Baez, John. The octonions. Bull. Amer. Math. Soc. 39 (2002), 145-205.

[2] Garcia, Arnaldo; Lequain, Yves. Elementos de álgebra. IMPA, Rio de Janeiro, 2013. 326 pp. ISBN: 978-85-244-0190-9.

[3] Spinder, Karlheinz. Abstract algebra and applications, volume II rings and fields. Marcel Dekker Inc., New York, 1994. 531 pp. ISBN: 0-8247-9159-2.