Sobre anillos de grupo clean

Jorge Andrés Rojas Gómez
Orientador: PROF. ALEXANDER HOLGUÍN-VILLA.

Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander

Contenido

1. Anillos Clean!

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

1. Anillos Clean!
2. Algunas propiedades de anillos clean.
3. Levantamiento de Idempotentes y anillos exchange.
4. Anillos con condiciones de cadena
5. Un breve comentario acerca de elementos clean en anillos de polinom

Contenido

Empezamos fijando nuestra convención: En lo que sigue, todos los anillos R son asociativos con $1 = 1_R$, $1 \neq 0$. Se utiliza la notación y terminología dada en [4].

Definición

Sea R un anillo. Un elemento $r \in R$ es clean si puede ser escrito como la suma de una unidad y de un idempotente de R. Un anillo R se dice clean si todo elemento $r \in R$ es clean.

Definición dada por W.K. Nicholson en [11].

Observación

- *Las unidades de un anillo son clean.*
- *Los idempotentes de un anillo son clean. Observe que, si $e^2 = e \in R$, entonces $e = (2e - 1) + (1 - e)$.*
- *Si R es anillo de división, entonces R es clean.*
- *r es clean si y sólo si $1 - r$ es clean.*

ir a radical Jacobson

Proposición

Los anillos locales son clean.

ir a Local

Demostración.

Sea M el ideal a izquierda maximal de un anillo R. Si $x \notin M$, entonces x es unidad.

Por otra parte,si $x \in M$, entonces $x \in \mathcal{J}(R)$. Entonces $1 - x$ es invertible en R.

Así, $1 - x$ es clean, lo cual implica que x es clean. $\square$

Presentamos algunas propiedades generales de los anillos clean:

Proposición

1. *Toda imagen bajo homomorfismo de un anillo clean es clean.*
2. *Todo producto directo de anillos $\prod_{i\in\mathbb{Z}^+} R_i$ es clean si y sólo si cada anillo R_i es clean.*
3. *Si R es clean, entonces $M_n(R)$ es clean.*
4. *Todo anillo semisimple es clean.*

ir a semisimple.

Acerca de la descomposición de Peirce.

Proposición

Sea R un anillo con 1_R y sea e un idempotente no trivial, entonces

$$R \simeq eRe \oplus (1-e)Re \oplus eR(1-e) \oplus (1-e)R(1-e).$$

Más aún, si $\overline{e} = 1 - e$, entonces

$$R \simeq \begin{bmatrix} eRe & eR\overline{e} \\ \overline{e}Re & \overline{e}R\overline{e} \end{bmatrix}$$

Para más detalles ver [7] y [8].

Observación

el conjunto $\widetilde{R} = eRe \oplus (1-e)Re \oplus eR(1-e) \oplus (1-e)R(1-e)$ *es un anillo con unidad bajo las siguientes operaciones:*

"$+$" *Suma componente a componente.*

"$\cdot$" *Dados* $(a,b,c,d),(a',b',c',d') \in \widetilde{R}$ *definimos su producto como*

$$(aa'+bc', ab'+bd', ca'+dc', cb'+dd').$$

Identificando (de forma natural) $(a,b,c,d),(a',b',c',d') \in \widetilde{R}$ con dos matrices de orden 2×2, vemos que su producto es

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{bmatrix}.$$

Resultado

la función

$$\phi : R \to eRe \oplus (1-e)Re \oplus eR(1-e) \oplus (1-e)R(1-e),$$

definida por $\phi(r) = (ere, (1-e)re, er(1-e), (1-e)r(1-e))$ *es un isomorfismo.*

De la definición, ϕ es sobreyectiva.

ϕ preserva la suma. En efecto,

$$\begin{bmatrix} exe & ex(1-e) \\ (1-e)xe & (1-e)x(1-e) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} eye & ey(1-e) \\ (1-e)ye & (1-e)y(1-e) \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} exe + eye & ex(1-e) + ey(1-e) \\ (1-e)xe + (1-e)ye & (1-e)x(1-e) + (1-e)y(1-e) \end{bmatrix}$$

De modo que

$$\begin{bmatrix} e(x+y)e & e(x+y)(1-e) \\ (1-e)(x+y)e & (1-e)(x+y)(1-e) \end{bmatrix}$$

ϕ preserva el producto. En efecto,

$$\phi(x)\phi(y) = \begin{bmatrix} exe & ex(1-e) \\ (1-e)xe & (1-e)x(1-e) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} eye & ey(1-e) \\ (1-e)ye & (1-e)y(1-e) \end{bmatrix}.$$

Note que

$$exeye + ex(1-e)ye = ex[e + (1-e)]ye = exye.$$

Así,

$$\phi(x)\phi(y) = \begin{bmatrix} exye & exy(1-e) \\ (1-e)xye & (1-e)xy(1-e) \end{bmatrix} = \phi(xy),$$

Observación

el único elemento $x \in R$ que verifica simultáneamente las ecuaciones

$$\begin{aligned} exe &= 0 \\ ex(1-e) &= 0 \\ (1-e)xe &= 0 \\ (1-e)x(1-e) &= 0, \end{aligned}$$

es $x = 0_R$.

En efecto, note que $ex = xe = exe = 0$.
además, como $x - ex - xe + exe = 0$, entonces $x = 0$.
Por lo tanto, $\ker(\phi) = \{0\}$.

Lema

Sea $e \in R$ un idempotente tal que eRe y $(1-e)R(1-e)$ son anillos clean. Entonces R es clean.

Presentamos las ideas principales de la demostración dada por Han y Nicholson en [3]:

1. Sea $A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix}$, donde $a \in eRe$, $x \in eR\overline{e}$, $y \in \overline{e}Re$, $b \in \overline{e}R\overline{e}$. Como eRe es clean, a puede escribirse como $a = u + f$ donde $f^2 = f \in eRe$ y u es una unidad de eRe con inverso u_1.
2. $yu_1x \in \overline{e}R\overline{e}$.
3. Entonces, $b - yu_1x \in \overline{e}R\overline{e}$ y por hipótesis, $b - yu_1x = g + v$ donde $g^2 = g \in \overline{e}R\overline{e}$ y v es unidad de $\overline{e}R\overline{e}$ con inverso v_1. De manera que

$$A = \begin{bmatrix} f + u & x \\ y & g + v + yu_1x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & x \\ y & v + yu_1x \end{bmatrix}$$

Una generalización del resultado anterior es

Teorema

Si $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ *en un anillo* T *donde cada* e_i *es idempotente,* $e_i e_j = 0$ *para todo* $1 \leq i, j \leq n$*, y cada* $e_i T e_i$ *es clean, entonces* T *es clean.*

- El anillo que se considera es $T = M_n(R)$.
- Los idempotentes a considerar son las matrices de la forma $e_i = E_{ii}$, donde cada E_{ii} tiene exactamente una entrada igual a 1 en la fila i y en la columna i y en las demás posiciones sus entradas son iguales a cero. Note que $E_{ii}E_{jj} = 0_{M_n(R)}$.
- $E_{ii}M_n(R)E_{ii} \simeq R$.

Motivación

Suponga que I es un ideal de un anillo R con 1_R **conmutativo** tal que $I \subseteq Rad(R)$, y sea e un idempotente de R no nulo.

- $e + I \neq I$.
- $(e + I)^2 = e + I$.

Ahora bien, si $x + I$ es un idempotente no nulo de R/I, ¿existe algún idempotente de $e \in R$ tal que $e + I = x + I$?

ir a Rad.

Definición

Sea un ideal I de un anillo R conmutativo con 1_R. se dice que los idempotentes de R/I pueden ser levantados a R, si para cada elemento $x \in R$ tal que $(x - x^2) \in I$ existe un idempotente e de R tal que $e - x$ está en I.

Proposición

Sea N un ideal de un anillo R. Si todo elemento de N es nilpotente, entonces R levanta idempotentes módulo N.

ver [6] para más detalles.

Un resultado crucial encontrado por Nicholson en [11] es

Proposición

*Un anillo es **exchange** si y solo si levanta idempotentes módulo todo ideal a izquierda (equivalentemente, derecha) del anillo.*

Basado en el trabajo hecho por Crawley y Jónsson en [14]. Un ejemplo de este tipo de anillos es

Proposición

Todo anillo clean es exchange.

ir a exchange

Pasos de la prueba: Sea R clean, $x \in R$, I un ideal a izquierda de R tal que $x - x^2 \in I$.

- x se puede escribir como $x = u + f$ donde $f^2 = f$ y v el inverso de u.
- $e = v(1 - f)u$ es idempotente de R.
- se prueba que $e - x = v(x - x^2)$.

Algunas propiedades adicionales:

Teorema

Sea I un ideal a izquierda del anillo R, tal que $I \subseteq \mathcal{J}(R)$. Entonces R es clean si y solamente si el anillo cociente R/I es clean y R levanta idempotentes módulo I.

Corolario

Un anillo R es clean si y solamente si $R/\mathcal{J}(R)$ es clean y R levanta idempotentes módulo $\mathcal{J}(R)$.

Se presentan algunos resultados de interés.

Proposición

- *Todo anillo artiniano a izquierda (derecha) es clean.*
- *Todo anillo finito es clean.*

ir a cadena

Suponga R conmutativo.

$$\mathcal{ID}(R) = \mathcal{ID}(R[x]),$$

$$\mathcal{U}(R[x]) = \left\{ r_0 + r_1 x + \ldots r_n x^n : \ r_0 \in \mathcal{U}(R) \quad \text{y} \quad r_i \in \sqrt{(0)}; \ i = 1, 2, \ldots, n \right.$$

1. caso $e = 0$. x se puede escribir como $x = 0 + (0 + 1x)$.
2. caso $e = 1$. x se puede escribir como $x = 1 + ((-1) + 1x)$.
3. caso $e^2 = e$ no trivial. x se puede escribir como $x = e + ((-e) + 1x)$.

Conjetura de Köthe: cualquier anillo, la suma de dos nil ideales a izquierda es nil.

Proposición

la suma de dos nil ideales a izquierda es nil si y solo si el conjunto de todos los elementos clean del anillo $R[x]$ es un subanillo de $R[x]$

(ver [5, Teorema 2.15])

El trabajo conocido acerca de los anillos semiperfectos probablemente empieza con el trabajo hecho por Woods y Mueller en [15] y [10] respectivamente.

Definición

Un anillo R es llamado semiperfecto si levanta idempotentes módulo $\mathcal{J}(R)$ y $R/\mathcal{J}(R)$ es artiniano.

Ejemplo

Los anillos artinianos son semiperfectos.

Algunas propiedades encontradas en [7, Capítulo 8.].

Proposición

- *Todo anillo exchange o es semiperfecto o contiene un conjunto infinito de idempotentes ortogonales.*
- *Un anillo R es semiperfecto si y sólo si R es clean y no contiene un conjunto infinito de idempotentes ortogonales.*
- *Si R es semiperfecto, entonces $1_R = e_1 + e_2 + \cdots e_n$. donde cada e_i es un idempotente local para cada i y $e_i e_j = 0_R$ para $i \neq j$.*

Algunas propiedades iniciales en RG son:

Proposición

Sea R es un anillo y G un grupo. Si RG es clean, entonces R es clean.

Observación

Sea R anillo conmutativo, G grupo abeliano.
Si RG es clean, entonces R es clean y G es de torsión(localmente finito).

Proposición

Sea R un anillo noetheriano, y sea G un grupo abeliano finitamente generado. El anillo de grupo RG es clean si y solo si es semiperfecto.

ir a RG ir a RG2

Universidad Industrial de Santander

Un resultado importante que se puede deducir a partir del resultado anterior es

Proposición

Sea p primo, $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces el anillo de grupo $\mathbb{Z}_{(p)}C_n$ es clean si y solamente si es semiperfecto.

ir a localizado

Woods da una respuesta en su artículo [15].

Teorema

Sea R un anillo conmutativo local con char$(R/\mathcal{J}(R)) = p \geq 0$, y sea G un grupo abeliano con p-componente primaria G_p. Entonces el anillo de grupo RG es semiperfecto si y solamente si G/G_p es un grupo finito de exponente n y cada factor mónico de $\overline{x^n - 1} \in (R/\mathcal{J}(R))[x]$ puede ser levantado a un factor mónico de $x^n - 1 \in R[x]$.

ir a componente

Explicación del porque $\mathbb{Z}_{(7)}C_3$ no es semiperfecto.

- El anillo cociente $\mathbb{Z}_{(7)}/\mathcal{J}(\mathbb{Z}_{(7)})$ es un cuerpo de caracteristica 7, lo cual hace que este anillo sea isomorfo a $\mathbb{F}_7$.
- $(C_3)_7 = \{e\}$, el grupo $C_3/(C_3)_7$ de exponente 3.
- $x^3 - 1 = (x-1)(x-2)(x-4) = (x^2 - 3x + 2)(x-4) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ en $\mathbb{F}_7[x]$.
- $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$, en $\mathbb{Z}_{(7)}[x]$

Para el caso no conmutativo, tenemos

Proposición

Sea p un primo con $p \in \mathcal{J}(R)$. Si R es un anillo clean y G es un $p-$grupo localmente finito, entonces RG es clean.

ir a hamiltoniano.

Observación

Resultado debido a Connell.
Si R es un anillo y G es un grupo localmente finito entonces $\mathcal{J}(R) = \mathcal{J}(RG) \cap R$.

$$R(G \times H) \simeq (RG)H.$$

- sea $\mathcal{Q}_8 \times E$ con E un $2-$grupo abeliano elemental finito. Entonces $|\mathcal{Q}_8 \times E| = 2^{3+k}$.
- $\mathcal{Q}_8 \times E$ es un $2-$grupo localmente finito.
- suponga R anillo clean con $2 \in \mathcal{J}(R)$ y $q \in \mathcal{J}(R)$ para $q > 2$ primo.
- $R(\mathcal{Q}_8 \times E)$ es clean.
- Suponga A un grupo abeliano finito cuyos elementos son de orden q.
- $2, q \in \mathcal{J}(R(\mathcal{Q}_8 \times E))$
- $(R(\mathcal{Q}_8 \times E))A$ es clean.
- $R(\mathcal{Q}_8 \times E \times A)$ es clean.

Proposición

Sea R anillo clean con con $2 \in \mathcal{J}(R)$ y $q \in \mathcal{J}(R)$ para $q > 2$ primo. Además, sea G el grupo $\mathcal{Q}_8 \times E \times A$ el grupo compuesto por

- *$\mathcal{Q}_8$ Grupo de cuaternios de orden 8.*
- *E es un 2−grupo abeliano elemental finito.*
- *A es un grupo abeliano finito cuyos elementos son de orden q.*

Entonces $RG = R(\mathcal{Q}_8 \times E \times A)$ es clean.

Gracias....

Definición (Radical de Jacobson)

Sea R un anillo. El radical de Jacobson, denotado por $\mathcal{J}(R)$ es la intersección de todos su ideales a izquierda maximales.

Presentamos algunas propiedades que tiene el radical de Jacobson:

Proposición

- $\mathcal{J}(R)$ *es un ideal bilateral.*
- $r \in \mathcal{J}(R)$ *si y solo si* $(1 - r)$ *es unidad de* R.
- $\mathcal{J}(R/\mathcal{J}(R)) = (0)$.
- *Sea* N *un nil ideal a izquierda de* R. *Entonces* $N \subseteq \mathcal{J}(R)$.
- *El único idempotente en* $\mathcal{J}(R)$ *es el cero del anillo.*

Para ver más, [12, Sección 2.7]

Definición

Un anillo R se dice local si contiene un único ideal a izquierda maximal. Denotaremos (R, M) para indicar el anillo R y el ideal maximal M de R.

Algunas propiedades de estos anillos son:

Proposición

Sea (R, M) un anillo local. Entonces

- *$a \in R - M$ es invertible en R.*
- *$\mathcal{J}(R) = M$.*
- *M es un ideal bilateral.*

Para ver más, [12][pág. 105]

Sea R un anillo conmutativo con 1_R.

Definición

El radical primo de R, denotado por $Rad(R)$, viene dado por

$$Rad(R) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Spec(R)} \mathfrak{p},$$

donde $Spec(R)$ denota el conjunto de todos los ideales primos del anillo R.

- $Rad(R)$ es un ideal de R.
- $Rad(R) \subseteq \mathcal{J}(R)$.
- Todo nil ideal de R está contenido en $Rad(R)$.

Para más detalles, [1, Teorema 8.8].

Sea $(R, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado bajo " $\leq$".

Definición

Un anillo R satisface la condición de cadena ascendente, **C.C.A.** *por brevedad, para ideales si, dada cualquier sucesión de ideales $I_1, I_2, \ldots$ de R con*

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots,$$

existe un entero positivo n tal que $I_m = I_n$ para todo $m \geq n$. De manera análoga, si cualquier sucesión de ideales $I_1, I_2, \ldots$ satisface que

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots,$$

Se dice que R satisface la condición de cadena descendente, por brevedad, se notará como **C.C.D**.

- Un anillo que satisfaga la condición **C.C.A** se dice que es *noetheriano*.
- Un anillo que satisfaga la condición **C.C.D** se dice que es *artiniano*.

Presentamos el conjunto

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : p \nmid b \right\}$$

Algunas de sus propiedades son:

- $\mathbb{Z}_{(p)}$ es un anillo conmutativo.
- $\mathbb{Z}_{(p)}$ es local y su único ideal maximal es $(p)\mathbb{Z}_{(p)}$.
- $\mathbb{Z}_{(p)}$ es noetheriano.

Más propiedades de este anillo están en [2].

Universidad Industrial de Santander

Definición

Sea p o un primo o cero. La p-componente primaria de un grupo G abeliano es el subgrupo

$$G_p = \{a \in G \mid \exists k \in \mathbb{N},\ a^{p^k} = e\}.$$

Ejemplo

Considere el grupo $\mathbb{Z}_4$ con notación aditiva. Encontremos a $(\mathbb{Z}_4)_7$.

- $7 \equiv -1 \mod 4$ *implica* $7^k \equiv (-1)^k \mod 4$.
- *si k es par, entonces existe $t \in \mathbb{N}$ tal que* $7^k = 4t + 1$
- *si k es impar, entonces existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que* $7^k = 4k_1 - 1 = 4k_1 + 3$.

$$(\mathbb{Z}_4)_7 = \begin{cases} \overline{1} & \text{si} \quad k \text{ es par.} \\ \overline{3} & \text{si} \quad k \text{ es impar.} \end{cases}$$

tenemos que $\mathbb{Z}_4/(\mathbb{Z}_4)_7 = \mathbb{Z}_4/\{\overline{1}\}$ *o* $\mathbb{Z}_4/(\mathbb{Z}_4)_7 = \mathbb{Z}_4/\{\overline{3}\}$.

Denotaremos por RG al siguiente conjunto:

$$RG = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g : \alpha_g \in R \text{ y } \alpha_g \neq 0 \text{ para un número finito de } \alpha_g \right\}.$$

$$(+) \quad \left(\textstyle\sum_{g\in G} \alpha_g g\right) + \left(\textstyle\sum_{g\in G} \beta_g g\right) = \sum (\alpha_g + \beta_g) g,$$

$$(\cdot) \quad \left(\textstyle\sum_{g\in G} \alpha_g g\right) \left(\textstyle\sum_{h\in G} \beta_h h\right) = \sum_{g,h\in G} (\alpha_g \beta_h) gh = \sum_{u\in G} c_u u,$$

donde $c_u = \displaystyle\sum_{gh=u} \alpha_g \beta_h$.

Presentamos el siguiente conjunto

$$\mathcal{Q}_8 = \langle a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle.$$

Algunas de sus propiedades son

- Grupo finito, no abeliano.
- Todos sus subgrupos son normales.

Teorema

Un grupo G es hamiltoniano si y solo si G es isomorfo a

$$G \simeq \mathcal{Q}_8 \times E \times A,$$

donde

- *E es un 2-grupo abeliano elemental y,*
- *A es un grupo abeliano en el cual todos sus elementos son de orden impar.*

La teoría exchange de [13].

Definición

*Un $R-$módulo M tiene la propiedad de ser **exchange** si para todo $R-$módulo A y cualesquiera dos descomposiciones $A = M' \oplus N = \oplus_{i \in I} A_i$, con $M' \simeq M$, existen submódulos $A_i' \subset A_i$ tales que*

$$A = M' \oplus (\oplus_{i \in I} A_i').$$

Un anillo R es exchange si R visto como $R-$módulo tiene la propiedad exchange.

Una caracterizacón dada por Monk [9] es

Proposición

Un anillo R es exchange si y solo si para todo $a \in R$, existen $b, c \in R$ tales que $bab = b$ y $c(1-a)(1-ba) = 1 - ba$.

Definición

Un $R-$módulo es llamado semisimple si todo submódulo de M es un sumando directo. Un anillo R es llamado semisimple si visto R como $R-$módulo es semisimple.

Proposición

R es un anillo semisimple si y solo si todo ideal a izquierda de R es un sumando directo.

Definición

El homomorfismo $\epsilon : RG \to R$ *dado por*

$$e\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} a_g,$$

es llamado aplicación de aumento de RG y $\Delta(G) = \ker(\epsilon)$ *es llamado el ideal de aumento de RG.*

Proposición

Sea R un anillo y G un grupo. Entonces:

- $\Delta(G) = \left\{\sum_{g\in G} \alpha_g(g-1) : g \in G, \alpha_g \in R\right\}.$
- $RG/\Delta(G) \simeq R.$

BURTON, D. M.:
A first course in Rings and Ideals. Bd. 731.
Addison-Wesley, 1970

DUMMIT, D. S. ; FOOTE, R. M.:
Abstract algebra. Bd. 3.
Wiley Hoboken, 2004

HAN, J. ; NICHOLSON, W. :
Extensions of clean rings.
In: *Communications in Algebra* 29 (2001), Nr. 6, S. 2589–2595

IMMORMINO, N. A.:
Clean Rings\ & Clean Group Rings, Bowling Green State University, Diss., 2013

KANWAR, P. ; LEROY, A. ; MATCZUK, J. :
Clean elements in polynomial rings.
In: *Contemp. Math* 634 (2015), S. 197–204

KOH, K. :

On lifting idempotents.
In: *Canadian Mathematical Bulletin* 17 (1974), Nr. 4, S. 607–607

LAM, T.-Y. :
A first course in noncommutative rings. Bd. 131.
Springer Science & Business Media, 2013

LAM, T. :
Corner ring theory: a generalization of Peirce decompositions. I.
In: *Algebras, rings and their representations* (2006), S. 153–182

MONK, G. :
A characterization of exchange rings.
In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 35 (1972), Nr. 2, S. 349–353

MUELLER, B. J. u. a.:
On semi-perfect rings.
In: *Illinois Journal of Mathematics* 14 (1970), Nr. 3, S. 464–467

NICHOLSON, W. K.:
Lifting idempotents and exchange rings.

In: *Transactions of the American Mathematical Society* 229 (1977), S. 269–278

POLCINO, C. M. ; SEHGAL, S. K.:
An introduction to group rings. Bd. 1.
Springer Science & Business Media, 2002

WARFIELD, R. :
Exchange rings and decompositions of modules.
In: *Mathematische Annalen* 199 (1972), Nr. 1, S. 31–36

WLEY, P. C. ; JÓNSSON, B. :
Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems.
In: *SUPPORTING INSTITUTIONS* (1964), S. 797

WOODS, S. :
Some results on semi-perfect group rings.
In: *Canad. J. Math* 26 (1974), Nr. 1, S. 121–129