IDENTIDADES DE GRUPO EN UNIDADES Y UNIDADES SIMÉTRICAS SOBRE ANILLOS DE GRUPO

Adriana María Alzate Patiño

Maestría en Matemáticas

Orientador:

Prof. Alexander Holguín Villa

Universidad Industrial de Santander

Escuela de Matemáticas

Febrero de 2016

Bucaramanga

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

Definición

Sean R un anillo y G un grupo,

$$RG =: \left\{ \sum_{g\in G} \alpha_g g : \alpha_g \in R,\ \alpha_g = 0 \textit{ c.s.} \right\}$$

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

Definición

Sean R un anillo y G un grupo,

$$RG =: \left\{ \sum_{g\in G} \alpha_g g : \alpha_g \in R,\ \alpha_g = 0 \text{ c.s.} \right\}$$

dotado de las siguientes operaciones:

$$(+)\quad (\sum_{g\in G} \alpha_g g) + (\sum_{g\in G} \beta_g g) = \sum(\alpha_g + \beta_g) g,$$

$$(\cdot)\quad \sum_{g\in G} \alpha_g g \sum_{h\in G} \beta_h h = \sum_{g,h\in G} (\alpha_g \beta_h) gh = \sum_{u\in G} c_u u,$$

donde $c_u = \sum_{gh=u} \alpha_g \beta_h.$

tiene estructura de anillo con los elementos de G como base.

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

Definición

Sean R un anillo y G un grupo,

$$RG =: \left\{ \sum_{g\in G} \alpha_g g : \alpha_g \in R,\ \alpha_g = 0 \text{ c.s.} \right\}$$

dotado de las siguientes operaciones:

$$(+)\quad \Big(\sum_{g\in G} \alpha_g g\Big) + \Big(\sum_{g\in G} \beta_g g\Big) = \sum (\alpha_g + \beta_g) g,$$

$$(\cdot)\quad \sum_{g\in G} \alpha_g g \sum_{h\in G} \beta_h h = \sum_{g,h\in G} (\alpha_g \beta_h) gh = \sum_{u\in G} c_u u,$$

donde $c_u = \sum_{gh=u} \alpha_g \beta_h$.

tiene estructura de anillo con los elementos de G como base.

Además es un R-álgebra con la siguiente operación:

$$(\cdot)\quad (\lambda, \textstyle\sum_{g\in G} \alpha_g g) \stackrel{\mu}{\mapsto} \sum_{g\in G} (\lambda \alpha_g) g.$$

Definición

1. *Sea F un cuerpo. Un anillo R satisface una identidad polinomial, si existe un polinomio $0 \neq f(x_1, \dots, x_n)$ en la F-álgebra libre $F\langle x_1, \dots, x_n, \dots \rangle$ sobre un número infinito enumerable de variables no conmutativas $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ tales que $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ para todos los $a_i \in R$.*

Definición

1. *Sea F un cuerpo. Un anillo R satisface una identidad polinomial, si existe un polinomio $0 \neq f(x_1, \ldots, x_n)$ en la F-álgebra libre $F\langle x_1, \ldots, x_n, \ldots \rangle$ sobre un número infinito enumerable de variables no conmutativas $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ tales que $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ para todos los $a_i \in R$.*

2. *Sea $\mathcal{U}(R)$ el grupo de unidades de R, $H \subseteq \mathcal{U}(R)$ verifica una identidad de grupo, si existe una palabra no-trivial ω en el grupo libre $\langle x_1, \ldots, x_n, \ldots \rangle$, sobre un conjunto enumerable de variables tal que $\omega(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 1$, para todos los $u_i \in H$.*

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

Conjetura (B. Hartley, FG Vs $\mathcal{U}(FG)$)

Sean G un grupo de torsión y F un cuerpo infinito. Si el grupo de las unidades $\mathcal{U}(FG)$ de FG satisface una identidad de grupo, entonces FG satisface una identidad polinomial.

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

Conjetura (B. Hartley, FG Vs $U(FG)$)

Sean G un grupo de torsión y F un cuerpo infinito. Si el grupo de las unidades $\mathcal{U}(FG)$ de FG satisface una identidad de grupo, entonces FG satisface una identidad polinomial.

$$\mathcal{U}(FG) \in IG \Rightarrow FG \in IP$$

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

Lema (Passman [?])

Si $car(F) = p \geq 0$, entonces FG satisface una IP si y solo si G contiene un subgrupo p-abeliano de índice finito.

Lema (Passman [?])

Si $car(F) = p \geq 0$, *entonces* FG *satisface una* IP *si y solo si* G *contiene un subgrupo* p*-abeliano de índice finito.*

Consideremos el FC-grupo asociado a G

$$\Phi(G) = \{g \in G : [G : C_G(g)] < \infty\}.$$

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

Lema (Passman [?])

Si $car(F) = p \geq 0$, *entonces* FG *satisface una* IP *si y solo si* G *contiene un subgrupo* p*-abeliano de índice finito.*

Consideremos el FC-grupo asociado a G

$$\Phi(G) = \{g \in G : [G : C_G(g)] < \infty\}.$$

Lema (Passman [?])

Supongamos que $car(F) = p > 0$. *Entonces*

1. FG *es semiprimo si y solo si* $\Phi(G)$ *es un* p'*-grupo.*

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

Lema (Passman [?])

Si $car(F) = p \geq 0$*, entonces* FG *satisface una* IP *si y solo si* G *contiene un subgrupo* p*-abeliano de índice finito.*

Consideremos el FC-grupo asociado a G

$$\Phi(G) = \{g \in G : [G : C_G(g)] < \infty\}.$$

Lema (Passman [?])

Supongamos que $car(F) = p > 0$*. Entonces*

1. FG *es semiprimo si y solo si* $\Phi(G)$ *es un* p'*-grupo.*
2. *La suma de todos los ideales nilpontentes* $\eta(FG)$ *de* FG *es nilponente si y solo si* $|\Phi_p(G)| < \infty$*.*

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

Giambruno, Sehgal y Valenti en [**?**] dividen la prueba de su resultado en los siguientes tres casos excluyentes:

1. FG es semiprima, es decir, $\eta(FG) = \mathcal{O}$,
2. $\eta(FG)$ es nilpotente no cero, y
3. $\eta(FG)$ es nil pero no nilpotente.

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

Giambruno, Sehgal y Valenti en [?] dividen la prueba de su resultado en los siguientes tres casos excluyentes:

1. FG es semiprima, es decir, $\eta(FG) = \mathcal{O}$,
2. $\eta(FG)$ es nilpotente no cero, y
3. $\eta(FG)$ es nil pero no nilpotente.

En adelante para $car(F) = p \neq 0$...

- $P = \{g \in G : o(g) = p^k$ para algún k$\}$, p-elementos,
- $Q = \{g \in G : p \nmid o(g)\}$, p'-elementos.

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

Giambruno, Sehgal y Valenti en [?] dividen la prueba de su resultado en los siguientes tres casos excluyentes:

1. FG es semiprima, es decir, $\eta(FG) = \mathcal{O}$,
2. $\eta(FG)$ es nilpotente no cero, y
3. $\eta(FG)$ es nil pero no nilpotente.

En adelante para $car(F) = p \neq 0$...

- $P = \{g \in G : o(g) = p^k$ para algún k$\}$, p-elementos,
- $Q = \{g \in G : p \nmid o(g)\}$, p'-elementos.

Si $p = 0$, $P = \{1\}$ y $Q = G$.

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

FG es semiprima, $(\eta(FG) = \mathcal{O})$

FG es semiprima, $(\eta(FG) = \mathcal{O})$

- Si $y \in Q$ y $p \nmid m =$o(y) entonces $\langle y \rangle \lhd G$.

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

FG es semiprima, $(\eta(FG) = \mathcal{O})$

- Si $y \in Q$ y $p \nmid m =$o(y) entonces $\langle y \rangle \lhd G$.
- Luego Q es abeliano o Q es Hamiltoniano.

FG es semiprima, $(\eta(FG) = \mathcal{O})$

- Si $y \in Q$ y $p \nmid m = o(y)$ entonces $\langle y \rangle \lhd G$.
- Luego Q es abeliano o Q es Hamiltoniano.
- Si $car(F) = 0$, entonces G no puede ser Hamiltoniano. Por tanto, G es abeliano y FG conmutativo.

Preliminares
La Conjetura de Brian Hartley
Resultados previos
Demostración
Caso I y Caso II
Caso III
Unidades simétricas
Teoremas de Clasificación
Grupos finitos
FG semiprima
IG Vs. IP

FG es semiprima, $(\eta(FG) = \mathcal{O})$

- Si $y \in Q$ y $p \nmid m =o(y)$ entonces $\langle y \rangle \lhd G$.
- Luego Q es abeliano o Q es Hamiltoniano.
- Si $car(F) = 0$, entonces G no puede ser Hamiltoniano. Por tanto, G es abeliano y FG conmutativo.
- Si $car(F) > 0$, entonces $P = \{1\}$ y $G = Q$ es abeliano. Luego FG conmutativo.

IDENTIDADES DE GRUPO EN UNIDADES Y UNIDADES SIMÉTRICAS SOBRE ANILLOS DE GRUPO

Adriana María Alzate Patiño

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

$\eta(FG)$ es nilpotente no cero.

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

$\eta(FG)$ es nilpotente no cero.

- $\phi_p(G) \lhd G$ es finito. Como $\eta(FG)$ es nilpotente, se tiene que Φ_p es finito y $\Phi(G/\Phi_p(G))$ es un p'-grupo.

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

$\eta(FG)$ es nilpotente no cero.

- $\phi_p(G) \lhd G$ es finito. Como $\eta(FG)$ es nilpotente, se tiene que Φ_p es finito y $\Phi(G/\Phi_p(G))$ es un p'-grupo.
- $\Phi(G/\Phi_p(G))$ es p'-grupo y $F(G/\Phi_p(G))$ es semiprima. Por lo tanto, $G/\Phi_p(G)$ es abeliano.

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

$\eta(FG)$ es nilpotente no cero.

- $\phi_p(G) \lhd G$ es finito. Como $\eta(FG)$ es nilpotente, se tiene que Φ_p es finito y $\Phi(G/\Phi_p(G))$ es un p'-grupo.
- $\Phi(G/\Phi_p(G))$ es p'-grupo y $F(G/\Phi_p(G))$ es semiprima. Por lo tanto, $G/\Phi_p(G)$ es abeliano.
- $G' \subseteq \Phi_p(G)$, es decir, G es p-abeliano.

$\eta(FG)$ es nilpotente no cero.

- $\phi_p(G) \triangleleft G$ es finito. Como $\eta(FG)$ es nilpotente, se tiene que Φ_p es finito y $\Phi(G/\Phi_p(G))$ es un p'-grupo.
- $\Phi(G/\Phi_p(G))$ es p'-grupo y $F(G/\Phi_p(G))$ es semiprima. Por lo tanto, $G/\Phi_p(G)$ es abeliano.
- $G' \subseteq \Phi_p(G)$, es decir, G es p-abeliano.

$$FG \in IP, \quad \rho(x,y) = [x,y]^{p^m} = 0$$

$\eta(FG)$ es nil pero no nilpotente.

Sea $\mathcal{A} = F\langle x_1, x_2\rangle[|t|]$ el anillo de series de potencias sobre el F-álgebra libre $F\langle x_1, x_2\rangle$.

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

$\eta(FG)$ es nil pero no nilpotente.

Sea $\mathcal{A} = F\langle x_1, x_2\rangle[|t|]$ el anillo de series de potencias sobre el F-álgebra libre $F\langle x_1, x_2\rangle$.

- Por el argumento de Magnus, $1 + x_1 t$ y $1 + x_2 t$ generan un grupo libre en $\mathcal{U}(\mathcal{A})$, y

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

$\eta(FG)$ es nil pero no nilpotente.

Sea $\mathcal{A} = F\langle x_1, x_2\rangle[|t|]$ el anillo de series de potencias sobre el F-álgebra libre $F\langle x_1, x_2\rangle$.

- Por el argumento de Magnus, $1 + x_1 t$ y $1 + x_2 t$ generan un grupo libre en $\mathcal{U}(\mathcal{A})$, y

$$\omega(1 + x_1 t, 1 + x_2 t) - 1 = \sum_{i \geq 1} \rho_i(x_1, x_2) t^i \neq 0,$$

$\eta(FG)$ es nil pero no nilpotente.

Sea $\mathcal{A} = F\langle x_1, x_2\rangle[|t|]$ el anillo de series de potencias sobre el F-álgebra libre $F\langle x_1, x_2\rangle$.

- Por el argumento de Magnus, $1 + x_1 t$ y $1 + x_2 t$ generan un grupo libre en $\mathcal{U}(\mathcal{A})$, y

$$\omega(1 + x_1 t, 1 + x_2 t) - 1 = \sum_{i \geq 1} \rho_i(x_1, x_2) t^i \neq 0,$$

Así, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_l(x_1, x_2)$ es un polinomio no cero.

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

$\eta(FG)$ es nil pero no nilpotente.

Sea $\mathcal{A} = F\langle x_1, x_2\rangle[|t|]$ el anillo de series de potencias sobre el F-álgebra libre $F\langle x_1, x_2\rangle$.

- Por el argumento de Magnus, $1 + x_1 t$ y $1 + x_2 t$ generan un grupo libre en $\mathcal{U}(\mathcal{A})$, y

$$\omega(1 + x_1 t, 1 + x_2 t) - 1 = \sum_{i \geq 1} \rho_i(x_1, x_2) t^i \neq 0,$$

  Así, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_l(x_1, x_2)$ es un polinomio no cero.

- Veamos que $\eta(FG)$ satisface $\rho_l(x_1, x_2) = 0$.

$\eta(FG)$ satisface $\rho_l(x_1, x_2) = 0$.

$\eta(FG)$ satisface $\rho_l(x_1, x_2) = 0$.

- Sean r_1, $r_2 \in \eta(FG)$ y $\lambda \in FG$.

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

$\eta(FG)$ satisface $\rho_l(x_1, x_2) = 0$.

- Sean r_1, $r_2 \in \eta(FG)$ y $\lambda \in FG$.

$$\omega(1 + r_1\lambda, 1 + r_2\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(r_1, r_2)\lambda^i = 0,$$

$\eta(FG)$ satisface $\rho_l(x_1, x_2) = 0$.

- Sean r_1, $r_2 \in \eta(FG)$ y $\lambda \in FG$.

$$\omega(1 + r_1\lambda, 1 + r_2\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(r_1, r_2)\lambda^i = 0,$$

- Con F infinito, $\exists \lambda_j \in F$ tales que $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(r_1, r_2)\lambda_j^i = 0$,

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

Preliminares
La Conjetura de Brian Hartley
Resultados previos
Demostración
Caso I y Caso II
Caso III
Unidades simétricas
Teoremas de Clasificación
Grupos finitos
FG semiprima
IG Vs. IP

$\eta(FG)$ satisface $\rho_l(x_1, x_2) = 0$.

- Sean $r_1, r_2 \in \eta(FG)$ y $\lambda \in FG$.

$$\omega(1 + r_1\lambda, 1 + r_2\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(r_1, r_2)\lambda^i = 0,$$

- Con F infinito, $\exists \lambda_j \in F$ tales que $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(r_1, r_2)\lambda_j^i = 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^k \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_{k+1} & \cdots & \lambda_{k+1}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_1(r_1, r_2) \\ \vdots \\ \rho_n(r_1, r_2) \end{pmatrix} = 0.$$

Claramente la matriz es invertible, entonces

$\eta(FG)$ satisface $\rho_l(x_1, x_2) = 0$.

- Sean $r_1, r_2 \in \eta(FG)$ y $\lambda \in FG$.

$$\omega(1 + r_1\lambda, 1 + r_2\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(r_1, r_2)\lambda^i = 0,$$

- Con F infinito, $\exists \lambda_j \in F$ tales que $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(r_1, r_2)\lambda_j^i = 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^k \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_{k+1} & \cdots & \lambda_{k+1}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_1(r_1, r_2) \\ \vdots \\ \rho_n(r_1, r_2) \end{pmatrix} = 0.$$

Claramente la matriz es invertible, entonces

$$\rho_l(r_1, r_2) = 0$$

$\eta(FG)$ es nil pero no nilpotente.

$\eta(FG)$ es nil pero no nilpotente.

- Del Lema de Linealización, $\eta(FG)$ satisface $f(x_1, x_2, \ldots, x_l) = \sum_{\sigma \in S_l} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(l)}$,

Preliminares
La Conjetura de Brian Hartley
Resultados previos
Demostración
Caso I y Caso II
Caso III
Unidades simétricas
Teoremas de Clasificación
Grupos finitos
FG semiprima
IG Vs. IP

$\eta(FG)$ es nil pero no nilpotente.

- Del Lema de Linealización, $\eta(FG)$ satisface $f(x_1, x_2, \ldots, x_l) = \sum_{\sigma \in S_l} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(l)}$,
- Como $\eta(FG)$ no es nilpotente, existen $a_1, a_2, \ldots, a_l \in \eta(FG)$ con $a_1 a_2 \cdots a_l \neq 0$, tales que

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

$\eta(FG)$ es nil pero no nilpotente.

- Del Lema de Linealización, $\eta(FG)$ satisface $f(x_1, x_2, \ldots, x_l) = \sum_{\sigma \in S_l} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(l)}$,
- Como $\eta(FG)$ no es nilpotente, existen $a_1, a_2, \ldots, a_l \in \eta(FG)$ con $a_1 a_2 \cdots a_l \neq 0$, tales que

$$a_1 FG a_2 FG \cdots a_l FG \neq (0)$$

Preliminares
La Conjetura de Brian Hartley
Resultados previos
Demostración
Caso I y Caso II
Caso III
Unidades simétricas
Teoremas de Clasificación
Grupos finitos
FG semiprima
IG Vs. IP

$\eta(FG)$ es nil pero no nilpotente.

- Del Lema de Linealización, $\eta(FG)$ satisface $f(x_1, x_2, \dots, x_l) = \sum_{\sigma \in S_l} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(l)}$,
- Como $\eta(FG)$ no es nilpotente, existen $a_1, a_2, \dots, a_l \in \eta(FG)$ con $a_1 a_2 \cdots a_l \neq 0$, tales que

$$a_1 FG a_2 FG \cdots a_l FG \neq (0)$$

- $\sum\limits_{\sigma \in S_l} \alpha_\sigma a_{\sigma(1)} x_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} x_{\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(l)} x_{\sigma(l)}$ es una IP multilineal no degenerada para FG.

Preliminares
La Conjetura de Brian Hartley
Resultados previos
Demostración
Caso I y Caso II
Caso III
Unidades simétricas
Teoremas de Clasificación
Grupos finitos
FG semiprima
IG Vs. IP

$\eta(FG)$ es nil pero no nilpotente.

- Del Lema de Linealización, $\eta(FG)$ satisface $f(x_1, x_2, \ldots, x_l) = \sum_{\sigma \in S_l} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(l)}$,
- Como $\eta(FG)$ no es nilpotente, existen $a_1, a_2, \ldots, a_l \in \eta(FG)$ con $a_1 a_2 \cdots a_l \neq 0$, tales que

$$a_1 FG a_2 FG \cdots a_l FG \neq (0)$$

- $\sum\limits_{\sigma \in S_l} \alpha_\sigma a_{\sigma(1)} x_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} x_{\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(l)} x_{\sigma(l)}$ es una IP multilineal no degenerada para FG.
- Luego, $[G : \Phi(G)] < \infty$ y $|(\Phi(G))'| < \infty$.

IDENTIDADES DE GRUPO EN UNIDADES Y UNIDADES SIMÉTRICAS SOBRE ANILLOS DE GRUPO

Adriana María Alzate Patiño

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

$\eta(FG)$ es nil pero no nilpotente.

- Del Lema de Linealización, $\eta(FG)$ satisface $f(x_1, x_2, \ldots, x_l) = \sum_{\sigma \in S_l} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(l)}$,
- Como $\eta(FG)$ no es nilpotente, existen $a_1, a_2, \ldots, a_l \in \eta(FG)$ con $a_1 a_2 \cdots a_l \neq 0$, tales que

$$a_1 FG a_2 FG \cdots a_l FG \neq (0)$$

- $\displaystyle\sum_{\sigma \in S_l} \alpha_\sigma a_{\sigma(1)} x_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} x_{\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(l)} x_{\sigma(l)}$ es una IP multilineal no degenerada para FG.
- Luego, $[G : \Phi(G)] < \infty$ y $|(\Phi(G))'| < \infty$.
- $\Phi(G)$ localmente finito implica que G sea localmente finito.

Preliminares
La Conjetura de Brian Hartley
Resultados previos
Demostración
Caso I y Caso II
Caso III
Unidades simétricas
Teoremas de Clasificación
Grupos finitos
FG semiprima
IG Vs. IP

$\eta(FG)$ es nil pero no nilpotente.

- Del Lema de Linealización, $\eta(FG)$ satisface $f(x_1, x_2, \ldots, x_l) = \sum_{\sigma \in S_l} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(l)}$,
- Como $\eta(FG)$ no es nilpotente, existen $a_1, a_2, \ldots, a_l \in \eta(FG)$ con $a_1 a_2 \cdots a_l \neq 0$, tales que
$$a_1 FG a_2 FG \cdots a_l FG \neq (0)$$
- $\sum_{\sigma \in S_l} \alpha_\sigma a_{\sigma(1)} x_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} x_{\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(l)} x_{\sigma(l)}$ es una IP multilineal no degenerada para FG.
- Luego, $[G : \Phi(G)] < \infty$ y $|(\Phi(G))'| < \infty$.
- $\Phi(G)$ localmente finito implica que G sea localmente finito.
- $\Phi(G)$ es un p-grupo de índice finito y $FG \in IP$.

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

Lema

Sean R semiprimo y $\mathcal{U}^{+}(R) \in IG$, entonces todo elemento idempotente simétrico de R es central.

Como consecuencia, en los anillos de grupo se tiene:

Lema

Sean F una cuerpo infinito de característica diferente de 2 y G un grupo tal que FG es semiprimo y $\mathcal{U}^{+}(FG)$ satisfacen una IG. Si g es un elemento de orden finito en G, y $car(F)$ no divide al orden de g, entonces $\langle g \rangle$ es un subgrupo normal.

Lema

Sean F un cuerpo y G un 2-grupo Hamiltoniano. Entonces en el álgebra de grupo FG todos los elementos simétricos conmutan.

Si $\mathcal{L}$ es el subanillo de R generado por todos los elementos simétricos de cuadrado cero, entonces

Teorema

Sea R un anillo semiprimo tal que $\mathcal{U}^+(R)$ satisfacen una IG. Entonces,

1. *$\mathcal{L}$ es un nil subanillo de R tal que $\mathcal{L}$ satisface una IP.*
2. *Si $e \in R^+$ es tal que $e^2 = e$, entonces $e \in \zeta(R)$ y $A^{-1}R$ es central.*

Lema

Sea F un cuerpo infinito de $car(F) = p > 2$. Si $\mathcal{U}^+(\mathcal{Q}_8 \times \langle c \rangle)$ satisface la identidad de grupo $\omega(x, y) = 1$, entonces existe un entero m, dependiendo solo de ω, tal que o(c) divide a $2p^m$.

Teorema

Sean G un grupo finito y F un cuerpo infinito tal que $car(F) = p > 2$. $\mathcal{U}^+(FG) \in IG$ si y solo si P es un subgrupo normal de G y G/P es abeliano o un 2-grupo Hamiltoniano.

Lema

Sea $G = \mathcal{Q}_8 \times \langle c \rangle$, *donde* $c \neq 1$ *tiene orden impar. Entonces* $\mathcal{U}^+(\mathbb{Q}G)$ *no satisface una identidad de grupo.*

Teorema

Suponga que F *es un cuerpo infinito de* $car(F) = p > 2$*. Si* G *es un grupo de torsión y* FG *es semiprima entonces* $\mathcal{U}^+(FG) \in IG$ *si y solo si* G *es abeliano o un 2-grupo Hamiltoniano.*

Teorema

Suponga que G es un grupo de torsión y $\mathcal{U}^+(FG)$ satisface una IG. Entonces FG satisface una IP.

Demostración.

- FG es semiprima.
- $\eta(FG)$ es nilpotente diferente de cero.
- $\eta(FG)$ es nil no nilpotente.

$\square$

Preliminares

La Conjetura de Brian Hartley

Resultados previos

Demostración

Caso I y Caso II

Caso III

Unidades simétricas

Teoremas de Clasificación

Grupos finitos

FG semiprima

IG Vs. IP

Teorema

Sea FG un álgebra de grupo de un grupo de torsión G sobre un cuerpo infinito F dotado de la involución clásica.

1. *Si $car(F) = 0$, $\mathcal{U}^+(FG) \in IG$ si y solo si G es un grupo abeliano o G es un 2-grupo Hamiltoniano,*
2. *Si $car(F) = p > 2$, entonces $\mathcal{U}^+(FG) \in IG$ si y solo si $FG \in IP$ y vale solo una de las siguientes:*
   - (i) *Si $Q_8 \nsubseteq G$, G' es de exponente acotado p^k, para algún $k \geq 0$.*
   - (ii) *Si $Q_8 \subseteq G$, $\mathcal{U}^+(FG) \in IG$ si y solo si*
     - (a) *Los p-elementos de G forman un subgrupo (normal) P de G y G/P es un 2-grupo Hamiltoniano,*
     - (b) *G es de exponente acotado $4p^s$, para algún $s \geq 0$.*