Elementos Cayley Unitarios en Álgebras de Grupo con Involución Orientada

Yzel Wlly Alay Gómez Espíndola
Director: Prof. Alexander Holguín Villa

Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Grupo Alcom

28 de Noviembre de 2017

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Conceptos Preliminares

Conceptos Preliminares

Sea R un anillo con unidad y G un grupo(no necesariamente finito). Denotamos por RG al conjunto de sumas formales

$$RG = \left\{ \sum_{g \in G} r_g g \mid r_g \in R, g \in G \right\},$$

donde $r_g = 0$ casi siempre.

Conceptos Preliminares

Sea R un anillo con unidad y G un grupo(no necesariamente finito). Denotamos por RG al conjunto de sumas formales

$$RG = \left\{ \sum_{g \in G} r_g g \mid r_g \in R, g \in G \right\},$$

donde $r_g = 0$ casi siempre.

Se definen la suma y producto en RG como,

$$\sum_{g \in G} r_g g + \sum_{g \in G} s_g g = \sum_{g \in G} (r_g + s_g) g,$$

$$\left(\sum_{g \in G} r_g g \right) \left(\sum_{h \in G} s_h h \right) = \sum_{i \in G} t_i i, \text{ donde } t_i = \sum_{gh = i} (r_g s_h).$$

Se puede verificar que RG dotado con estas operaciones es un anillo con unidad.

Se puede verificar que RG dotado con estas operaciones es un anillo con unidad.

Definición

El conjunto RG con las operaciones definidas anteriormente es llamado el anillo de grupo de G sobre R. Cuando R es conmutativo, RG es llamado el álgebra de grupo de G sobre R.

Se puede verificar que RG dotado con estas operaciones es un anillo con unidad.

Definición

El conjunto RG con las operaciones definidas anteriormente es llamado el anillo de grupo de G sobre R. Cuando R es conmutativo, RG es llamado el álgebra de grupo de G sobre R.

Definición

Sea G un grupo. Una aplicación $\varphi : G \longrightarrow G$ es llamada una **involución** *sobre G si para todos $g, h \in G$ se satisface que:*

Se puede verificar que RG dotado con estas operaciones es un anillo con unidad.

Definición

El conjunto RG con las operaciones definidas anteriormente es llamado el anillo de grupo de G sobre R. Cuando R es conmutativo, RG es llamado el álgebra de grupo de G sobre R.

Definición

Sea G un grupo. Una aplicación $\varphi : G \longrightarrow G$ es llamada una **involución** *sobre G si para todos $g, h \in G$ se satisface que:*

1. $\varphi(gh) = \varphi(h)\varphi(g)$;
2. $\varphi(\varphi(g)) = g$,

es decir, $\varphi : G \longrightarrow G$ es un antihomomorfismo de orden 2.

Definición

Sea R un anillo. La aplicación $\phi : R \longrightarrow R$ es llamada una **involución** *si esta es un antihomomorfismo de orden 2, es decir, si para todos $a, b \in R$ se satisfacen:*

Definición

Sea R un anillo. La aplicación $\phi : R \longrightarrow R$ es llamada una **involución** *si esta es un antihomomorfismo de orden 2, es decir, si para todos $a, b \in R$ se satisfacen:*

1. $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$;

Definición

Sea R un anillo. La aplicación $\phi : R \longrightarrow R$ es llamada una **involución** *si esta es un antihomomorfismo de orden 2, es decir, si para todos $a, b \in R$ se satisfacen:*

1. $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$;
2. $\phi(ab) = \phi(b)\phi(a)$;

Definición

Sea R un anillo. La aplicación $\phi : R \longrightarrow R$ es llamada una **involución** *si esta es un antihomomorfismo de orden 2, es decir, si para todos $a, b \in R$ se satisfacen:*

1. $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$;
2. $\phi(ab) = \phi(b)\phi(a)$;
3. $\phi(\phi(a)) = a$.

Definición

Sea R un anillo. La aplicación $\phi : R \longrightarrow R$ es llamada una **involución** *si esta es un antihomomorfismo de orden 2, es decir, si para todos $a, b \in R$ se satisfacen:*

1. $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$;
2. $\phi(ab) = \phi(b)\phi(a)$;
3. $\phi(\phi(a)) = a$.

Ejemplo

En un anillo conmutativo R, la aplicación identidad es una involución.

Ejemplo

Sea R un anillo con involución φ y G un grupo con involución ϕ. Definimos para el anillo de grupo RG, la siguiente aplicación

$$\begin{array}{ccccccc} * & : & RG & \to & & RG & \\ & \alpha & = \sum_{x\in G}\alpha_x x & \mapsto & \alpha^* & = & \sum_{x\in G}\varphi(\alpha_x)\phi(x). \end{array}$$

$*$ *es una involución sobre RG.*

Definición

Sea RG un algebra de grupo sobre un anillo conmutativo R. La aplicación

$$\begin{array}{ccccccc} * & : & RG & \to & & RG & \\ \alpha & = & \sum_{x\in G}\alpha_x x & \mapsto & \alpha^* & = & \sum_{x\in G}\alpha_x x^{-1}. \end{array}$$

es una involución en RG, conocida en la literatura como la **involución canónica** *en RG.*

Definición

Sea G un grupo. Un homomorfismo $\sigma : G \longrightarrow \{-1, 1\} = \mathcal{U}(\mathbb{Z})$ es llamado una **orientación** *de G.*

Definición

Sea G un grupo. Un homomorfismo $\sigma : G \longrightarrow \{-1, 1\} = \mathcal{U}(\mathbb{Z})$ es llamado una **orientación** *de G.*

Definición

Sea R un anillo conmutativo. Dadas σ una orientación del grupo G y $*$ la involución clásica de G, se define la aplicación $\circledast$ en RG dada por

$$\circledast\left(\sum_{g\in G} r_g g\right) = \sum_{g\in G} r_g \sigma(g) g^{-1} \tag{1}$$

Entonces la aplicación $\circledast$ es una involución en RG y se conoce como **involución clásica orientada** *de RG.*

Definición

Sea R un anillo con una involución $*$.

1. *Un elemento $k \in R$ es llamado* **elemento simétrico** *de R si $k^* = k$. Como es usual denotaremos por R^+ al conjunto de los elementos simétricos de R con respecto a $*$, i.e.,*

$$R^+ = \{k \in R \ : \ k^* = k\}$$

Definición

Sea R un anillo con una involución $*$.

1. *Un elemento $k \in R$ es llamado* **elemento simétrico** *de R si $k^* = k$. Como es usual denotaremos por R^+ al conjunto de los elementos simétricos de R con respecto a $*$, i.e.,*
$$R^+ = \{k \in R \ : \ k^* = k\}$$
2. *Un elemento $k \in R$ es llamado* **elemento antisimétrico** *de R si $k^* = -k$. Al conjunto de los elementos antisimétricos de R se denota por R^-, así*
$$R^- = \{k \in R \ : \ k^* = -k\}.$$

Proposición

Sea R un anillo conmutativo en el cual 2 es invertible y $*$ la involución canónica de RG. Entonces

1. *RG^-, como R-módulo, es generado por $x - x^{-1}$ con $x \in G$.*
2. *RG^+, como R-módulo, es generado por $x + x^{-1}$ con $x \in G$.*

Índice

Elementos Cayley Unitarios en KG

Elementos Cayley Unitarios en KG

Definición

Sea R un anillo con una involución $*$. Un elemento $u \in \mathcal{U}(RG)$ es llamado **elemento unitario** *si $uu^* = 1$. Denotaremos por $\mathcal{U}n(RG)$ al subgrupo de todos los elementos unitarios de RG.*

Elementos Cayley Unitarios en KG

Definición

Sea R un anillo con una involución $*$. Un elemento $u \in \mathcal{U}(RG)$ es llamado **elemento unitario** *si $uu^* = 1$. Denotaremos por $\mathcal{U}n(RG)$ al subgrupo de todos los elementos unitarios de RG.*

Definición

Un elemento $u \in \mathcal{U}n(R)$ es llamado **Cayley unitario** *en R, si existe $k \in R^-$ con $1 + k \in \mathcal{U}(R)$ tal que $u = (1 - k)(1 + k)^{-1}$.*

Elementos Cayley Unitarios en KG

Definición

Sea R un anillo con una involución $*$. Un elemento $u \in \mathcal{U}(RG)$ es llamado **elemento unitario** *si $uu^* = 1$. Denotaremos por $\mathcal{U}n(RG)$ al subgrupo de todos los elementos unitarios de RG.*

Definición

Un elemento $u \in \mathcal{U}n(R)$ es llamado **Cayley unitario** *en R, si existe $k \in R^-$ con $1+k \in \mathcal{U}(R)$ tal que $u = (1-k)(1+k)^{-1}$. En este caso se dice que u es el elemento Cayley unitario obtenido a partir de k y se denota por $u_{[k]}$.*

Elementos Cayley Unitarios en KG

Definición

Sea R un anillo con una involución $*$. Un elemento $u \in \mathcal{U}(RG)$ es llamado **elemento unitario** *si $uu^* = 1$. Denotaremos por $\mathcal{U}n(RG)$ al subgrupo de todos los elementos unitarios de RG.*

Definición

Un elemento $u \in \mathcal{U}n(R)$ es llamado **Cayley unitario** *en R, si existe $k \in R^-$ con $1+k \in \mathcal{U}(R)$ tal que $u = (1-k)(1+k)^{-1}$. En este caso se dice que u es el elemento Cayley unitario obtenido a partir de k y se denota por $u_{[k]}$. El conjunto de los elementos Calyley unitarios de R es denotado por $\mathcal{U}n^C(R)$, es decir,*

$$\mathcal{U}n^C(R) = \{u \in \mathcal{U}n(R) : u = (1-k)(1+k)^{-1}, \exists k \in R^-\}.$$

Proposición ([2], Lema 1)

Sea R un anillo en el cual 2 es invertible dotado de una involución $*$. Entonces, un elemento unitario $u \in R$ es un elemento Cayley unitario si y solo si $1+u$ es invertible en R.

Proposición ([2], Lema 1)

Sea R un anillo en el cual 2 es invertible dotado de una involución $*$. Entonces, un elemento unitario $u \in R$ es un elemento Cayley unitario si y solo si $1+u$ es invertible en R.

Proposición

Sea $*$ la involución clásica del grupo G. Entonces, los elementos x de G son elementos unitarios y los que tienen orden impar son Cayley unitarios.

Proposición ([2], Lema 1)

Sea R un anillo en el cual 2 es invertible dotado de una involución $*$. Entonces, un elemento unitario $u \in R$ es un elemento Cayley unitario si y solo si $1+u$ es invertible en R.

Proposición

Sea $*$ la involución clásica del grupo G. Entonces, los elementos x de G son elementos unitarios y los que tienen orden impar son Cayley unitarios.

$$(1+x)\left[\frac{1}{2}\left(1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1+(-1)^{n-1}\right).$$

Corolario

Sea $x \in G$ un elemento no trivial de orden impar n. Entonces $x = u_{[k]}$ donde $k = -(x - x^{n-1}) - (x^3 - x^{n-3}) - \cdots - (x^{n-2} - x^2)$.

Corolario

Sea $x \in G$ un elemento no trivial de orden impar n. Entonces $x = u_{[k]}$ donde $k = -(x - x^{n-1}) - (x^3 - x^{n-3}) - \cdots - (x^{n-2} - x^2)$.

Proposición ([2], Lema 2)

Sea R un anillo con involución $*$ en el cual 2 es invertible. Entonces, un elemento unitario u en R es el producto de dos elementos Cayley unitarios si y solo si $(1+u)-(1-u)k$ es invertible en R para algún elemento antisimétrico k con $1+k$ invertible en R.

Índice

Cayley unitarios obtenidos a partir de $(1 + (x - x^{-1}))$

Cayley unitarios obtenidos a partir de $(1 + (x - x^{-1}))$

Ejemplo

Considerando el grupo $D_4 = \langle x, y : x^2 = 1, y^4 = 1, xy = y^{-1}x \rangle$, *entonces*

$$KD_4^- = \langle y - y^{-1} \rangle_K.$$

$1 + y - y^{-1} \in \mathcal{U}(KD_4)$ **pues** $\left(1 + y - y^{-1}\right)\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}y + \frac{2}{5}y^2 + \frac{1}{5}y^3\right) = 1$. *Así*

$$\begin{aligned} u &= \left(1 - (y - y^{-1})\right)\left(1 + (y - y^{-1})\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{5}y + \frac{4}{5}y^2 + \frac{2}{5}y^3 \end{aligned}$$

es un elemento Cayley unitario de KD_4.

Ejemplo

El grupo cuaternio de orden 8 *es definido por* $Q_8 = \langle x, y : x^4 = 1, x^2 = y^2, xy = y^{-1}x \rangle$. *De aquí que*

Ejemplo

El grupo cuaternio de orden 8 *es definido por* $Q_8 = \langle x, y : x^4 = 1, x^2 = y^2, xy = y^{-1}x\rangle$. *De aquí que*

Elemento	1	x	x^2	x^3	y	xy	x^2y	x^3y
Orden	1	4	2	4	4	4	4	4
Inverso	1	x^3	x^2	x	x^2y	x^3y	y	xy

En la tabla se observa que los elementos x, y, xy *y sus respectivos inversos son suficiente para generar* KQ_8^-, *en particular* $x - x^{-1}, y - y^{-1}, (xy) - (xy)^{-1} \in KQ_8^-$.

Además

$$\left(1+\left(x-x^{-1}\right)\right)\left(\tfrac{3}{5}-\tfrac{1}{5}x+\tfrac{2}{5}x^2+\tfrac{1}{5}x^3\right)=1$$

$$\left(1+\left(y-y^{-1}\right)\right)\left(\tfrac{3}{5}-\tfrac{1}{5}y+\tfrac{2}{5}y^2+\tfrac{1}{5}y^3\right)=1$$

$$\left(1+\left(xy-(xy)^{-1}\right)\right)\left(\tfrac{3}{5}-\tfrac{1}{5}(xy)+\tfrac{2}{5}(xy)^2+\tfrac{1}{5}(xy)^3\right)=1$$

Además

$$\left(1+\left(x-x^{-1}\right)\right)\left(\tfrac{3}{5}-\tfrac{1}{5}x+\tfrac{2}{5}x^2+\tfrac{1}{5}x^3\right)=1$$

$$\left(1+\left(y-y^{-1}\right)\right)\left(\tfrac{3}{5}-\tfrac{1}{5}y+\tfrac{2}{5}y^2+\tfrac{1}{5}y^3\right)=1$$

$$\left(1+\left(xy-(xy)^{-1}\right)\right)\left(\tfrac{3}{5}-\tfrac{1}{5}(xy)+\tfrac{2}{5}(xy)^2+\tfrac{1}{5}(xy)^3\right)=1$$

Se obtienen respectivamente los siguientes elementos Cayley unitarios en KQ_8

$$u_1=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}x+\frac{4}{5}x^2+\frac{2}{5}x^3$$

$$u_2=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}y+\frac{4}{5}y^2+\frac{2}{5}y^3$$

$$u_3=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}xy+\frac{4}{5}x^2+\frac{2}{5}x^3y$$

Inversos de $(1 + (x - x^{-1}))$.

n	$(1 + (x - x^{-1}))^{-1}$
3	$\frac{1}{2} + 0x + \frac{2}{5}x^2$
4	$\frac{3}{5} - \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{5}x^3$
5	$\frac{5}{11} - \frac{2}{11}x + \frac{3}{11}x^2 + \frac{1}{11}x^3 + \frac{4}{11}x^4$
6	$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + 0x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5$
7	$\frac{13}{29} - \frac{7}{29}x + \frac{6}{29}x^2 - \frac{1}{29}x^3 + \frac{5}{29}x^4 + \frac{4}{29}x^5 + \frac{9}{29}x^6$

Cayley unitarios obtenidos a partir de $(x + x^{-1})$

n	$u = (1 - x + x^{-1})(1 + x - x^{-1})^{-1}$
3	$0 + 0x + x^2$
4	$\frac{1}{5} - \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}x^2 + \frac{2}{5}x^3$
5	$-\frac{1}{11} - \frac{4}{11}x + \frac{6}{11}x^2 + \frac{2}{11}x^3 + \frac{8}{11}x^4$
6	$0 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + 0x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^5$
7	$-\frac{3}{29} - \frac{14}{29}x + \frac{12}{29}x^2 - \frac{2}{29}x^3 + \frac{10}{29}x^4 + \frac{8}{29}x^5 + \frac{18}{29}x^6$

Índice

Los siguientes tres resultados están presentes en el artículo de Rebeiro V. y Vieira A. [3]. El primero permite encontrar $(1+(x-x^{-1}))^{-1}$, el segundo es más general, permite encontrar $(1+\alpha(x-x^{-1}))^{-1}$. El tercero permite encontrar elementos Cayley unitarios en álgebras de grupo.

Los siguientes tres resultados están presentes en el artículo de Rebeiro V. y Vieira A. [3]. El primero permite encontrar $(1+(x-x^{-1}))^{-1}$, el segundo es más general, permite encontrar $(1+\alpha(x-x^{-1}))^{-1}$. El tercero permite encontrar elementos Cayley unitarios en álgebras de grupo.

Teorema

Sea $x \in G$ un elemento de orden $n > 2$ y K un cuerpo con característica cero. Entonces el elemento $1+x-x^{-1}$ es invertible en KG y su inverso está dado por $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} xn - 1$, donde

$$a_i = \frac{F_i + (-1)^i F_{n-i}}{F_{n+1} + F_{n-1} - (1 + (-1)^n)},$$

para $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Teorema

Sean $x \in G$ *un elemento de orden* $n > 2$ *y* $\alpha \in K$*, con* K *una extensión real de* $\mathbb{Q}$*. Entonces el elemento* $1 + \alpha(x - x^{-1})$ *es invertible en* KG *y su inverso está dado por* $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$*, donde*

$$a_i = \frac{\alpha^{n-i}G_i + (-\alpha)^i G_{n-i}}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1 + (-1)^n)}, \tag{2}$$

para $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Teorema

Sean $x \in G$ *un elemento de orden* $n > 2$, $\alpha \in K$ *y* $k = \alpha(x - x^{-1})$, *donde* K *es una extensión real de* $\mathbb{Q}$. *Entonces el elemento Cayley unitario* $u_{[k]}$ *está dado por* $b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$, *donde*

$$b_0 = \frac{G_n - 2\alpha^2 G_{n-1} + \alpha^n(1 + (-1)^n)}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1 + (-1)^n)}$$

y

$$b_i = 2a_i, \text{ para } i = 1, \ldots, n-1,$$

donde los a_i*'s son dados por* (2).

Índice

$\mathcal{U}n^C(R)$ con Involución Orientada

Consideremos el álgebra de grupo KG donde K es cuerpo con característica cero, también que KG está dotado de una involución clásica orientada. Sea $N = \{g \in G : \sigma(g) = 1\}$ y consideremos que

$\mathcal{U}n^C(R)$ con Involución Orientada

Consideremos el álgebra de grupo KG donde K es cuerpo con característica cero, también que KG está dotado de una involución clásica orientada. Sea $N = \{g \in G : \sigma(g) = 1\}$ y consideremos que

$$KG^- = \langle \{g \in G : g \notin N \wedge g^2 = 1\} \cup \{g + g^{-1} : g^2 \neq 1 \wedge g \notin N\} \cup \{g - g^{-1} : g^2 \neq 1 \wedge g \in N\} \rangle_K$$

$\mathcal{U}n^C(R)$ con Involución Orientada

Consideremos el álgebra de grupo KG donde K es cuerpo con característica cero, también que KG está dotado de una involución clásica orientada. Sea $N = \{g \in G : \sigma(g) = 1\}$ y consideremos que

$$KG^- = \langle \{g \in G : g \notin N \wedge g^2 = 1\} \cup \{g + g^{-1} : g^2 \neq 1 \wedge g \notin N\} \cup \{g - g^{-1} : g^2 \neq 1 \wedge g \in N\} \rangle_K$$

La idea ahora es tomar un elemento x de orden n-par ($n \geq 4$), con $x \notin N$.

Índice

Encontrando $\left(1+\left(x+x^{-1}\right)\right)^{-1}$.

Sea $x \in G$ tal que $\sigma(x) = -1$ y x tiene orden n-par ($n \geq 4$).

Encontrando $\left(1+\left(x+x^{-1}\right)\right)^{-1}$.

Sea $x \in G$ tal que $\sigma(x) = -1$ y x tiene orden n-par ($n \geq 4$). ¿Existen valores a_0, a_1, …, a_{n-1} en K que satisfagan la siguiente igualdad?

$$(1+(x+x^{-1}))(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{-1}) = 1$$

Encontrando $\left(1+\left(x+x^{-1}\right)\right)^{-1}$.

Sea $x \in G$ tal que $\sigma(x) = -1$ y x tiene orden n-par ($n \geq 4$). ¿Existen valores a_0, a_1, ..., a_{n-1} en K que satisfagan la siguiente igualdad?

$$(1+(x+x^{-1}))(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{-1}) = 1$$

De aquí resulta el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{n-1} & + & a_0 & + & a_1 & = & 1 \\ a_0 & + & a_1 & + & a_2 & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_i & + & a_{i+1} & + & a_{i+2} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n-2} & + & a_{n-1} & + & a_0 & = & 0. \end{array}\right.$$

Tras resolver estos sistemas para algunos casos particulares se observaron regularidades.

n	$(1+(x+x^{-1}))^{-1}$
4	$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3$
6	NO HAY
8	$-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4-\ldots+\frac{2}{3}x^7$
10	$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{3}x^5+\ldots\frac{1}{3}x^9$
12	NO HAY
14	$-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4-\frac{1}{3}x^5-\frac{1}{3}x^6+\frac{2}{3}x^7-\cdots+\frac{2}{3}x^{13}$
16	$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{3}x^5+\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{3}x^7-\frac{2}{3}x^8+\cdots\frac{1}{3}x^{15}$

Proposición

Sean G un grupo, K un cuerpo con característica cero y sea el álgebra de grupo KG dotado de la involución clásica orientada. Si $o(x) = n$ par ($n \geq 4$) y $\sigma(x) = -1$, entonces $k = (x + x^{-1}) \in KG^{-}$ y si $(1 + k)$ es invertible en KG su inverso es de la forma $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$, donde $a_0 = -(a_{n-2} + a_{n-1})$, $a_1 = 1 - (a_{n-1} + a_0)$ y $a_i = -(a_{i-2} + a_{i-1})$ para $2 \leq i \leq n-1$. Además $a_i = a_m$ donde $m \equiv i \pmod{3}$.

Lema (1)

Sean G un grupo, K un cuerpo con característica cero y considere el álgebra de grupo KG dotado de la involución clásica orientada. Si $x \in G$ tal que $o(x) = 6t$ con $t \in \mathbb{Z}$ y $\sigma(x) = -1$, entonces $1 + (x + x^{-1})$ no es invertible en KG.

Lema (1)

Sean G un grupo, K un cuerpo con característica cero y considere el álgebra de grupo KG dotado de la involución clásica orientada. Si $x \in G$ tal que $o(x) = 6t$ con $t \in \mathbb{Z}$ y $\sigma(x) = -1$, entonces $1 + (x + x^{-1})$ no es invertible en KG.

Lema (2)

Sean G un grupo, K un cuerpo con característica cero y considere el álgebra de grupo KG dotado de la involución clásica orientada. Si $x \in G$ tal que $o(x) = 6t + 2$ con $t \in \mathbb{Z}$ y $\sigma(x) = -1$, entonces $1 + (x + x^{-1})$ es invertible en KG y su inverso es de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$ donde $a_0 = -\frac{1}{3}$, $a_1 = \frac{2}{3}$ y $a_i = -(a_{i-2} + a_{i-1})$ para $2 \le i \le n-1$.

Lema (3)

Sean G un grupo, K un cuerpo con característica cero y considere el álgebra de grupo KG dotado de la involución clásica orientada. Si $x \in G$ tal que $o(x) = 6t+4$ con $t \in \mathbb{Z}$ y $\sigma(x) = -1$, entonces $1 + (x + x^{-1})$ es invertible en KG y su inverso es de la forma $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$ donde $a_0 = \frac{1}{3}$, $a_1 = \frac{1}{3}$ y $a_i = -(a_{i-2} + a_{i-1})$ para $2 \leq i \leq n-1$.

Usando técnicas de funciones generadoras y los Lemas 1, 2 y 3 se establece el siguiente resultado.

Teorema (4)

Sea KG un álgebra de grupo dotado de una involución clásica orientada. Si $\sigma(x) = -1$, entonces

1. *Si $o(x) = 6t$, $t \in \mathbb{N}$, el elemento $(1 + (x + x^{-1}))$ no es invertible en KG.*
2. *Si $o(x) = 6t + 2$, $t \in \mathbb{N}$, el elemento $(1 + (x + x^{-1}))$ es invertible en KG y su inverso es de la forma $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{6t+1} x^{6t+1}$, donde $a_0 = -\frac{1}{3}$, $a_1 = \frac{2}{3}$ y para todo $n \geq 0$*

$$a_{n+2} = \frac{(-1)^{n+1}}{3(2^{n+1})}\left[\left(1-\sqrt{3}i\right)^{n+1} + \left(1+\sqrt{3}i\right)^{n+1}\right].$$

3) Si $o(x) = 6t+4$, $t \in \mathbb{N}$, el elemento $\left(1+\left(x+x^{-1}\right)\right)$ es invertible en KG y su inverso es de la forma $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{6t+3} x^{6t+3}$, donde $a_0 = a_1 = \frac{1}{3}$ y para todo $n \geq 0$

$$a_{n+2} = \frac{(-1)^{n+1}}{3(2^n)}\left[\left(1-\sqrt{3}i\right)^n + \left(1+\sqrt{3}i\right)^n\right].$$

Índice

Usando el Teorema 4 se prueba que

Usando el Teorema 4 se prueba que

Teorema

Sean G un grupo, K un cuerpo con característica cero y el álgebra de grupo KG dotado de la involución clásica orientada. Sea $x \in G$ tal que $\sigma(x) = -1$. Las siguientes afirmaciones son validas:

1. *Si $o(x) = 6t + 2$, $t \in \mathbb{N}$, el elemento Cayley unitario $u_{[k]}$ obtenido a partir del antisimétrico $(x + x^{-1})$, es de la forma $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{6t+1}x^{6t+1}$, donde $b_0 = 2a_0 - 1$ y $b_i = 2a_i$ para todo $1 \leq i \leq 6t + 1$.*
2. *Si $o(x) = 6t + 4$, $t \in \mathbb{N}$, el elemento Cayley unitario $u_{[k]}$ obtenido a partir del antisimétrico $(x + x^{-1})$, es de la forma $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{6t+3}x^{6t+3}$, donde $b_0 = 2a_0 - 1$ y $b_i = 2a_i$ para todo $1 \leq i \leq 6t + 3$.*

Ahora podemos encontrar elementos Cayley unitario en álgebras de grupo dotadas de una involución clásica orientada. Aquí algunos

Ahora podemos encontrar elementos Cayley unitario en álgebras de grupo dotadas de una involución clásica orientada. Aquí algunos

$o(x)$	$u_{[k]} = \left(1 - \left(x + x^{o(x)-1}\right)\right)\left(1 + x + x^{o(x)-1}\right)^{-1}$
4	$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^3$
8	$-\frac{5}{3} + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^5 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{4}{3}x^7$
10	$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^5 + \frac{2}{3}x^6 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{4}{3}x^8 + \frac{2}{3}x^9$
14	$-\frac{5}{3} + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^5 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{4}{3}x^7 - \cdots + \frac{4}{3}x^{13}$
16	$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^5 + \frac{2}{3}x^6 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{4}{3}x^8 + \cdots \frac{2}{3}x^{15}$

Table: Cayley unitario a partir de $k = (x + x^{-1})$ con $\sigma(x) = -1$.

INVESTIGACIONES FUTURAS

Hemos estudiado como obtener elementos Cayley unitarios en álgebras de grupo con involución clásica orientada, construidos a partir de antisimétricos de la forma $1+(x+x^{-1})$. Es interesante estudiar el caso cuando los antisimétricos son más generales, es decir, de la forma $1 + \alpha(x + x^{-1})$.

Índice

Bibliografía

- COMELLAS, F., FABREGA, J., SANCHEZ, A. & SERRA, O., *Matemática Discreta.* Edicions UPC SL, Barcelona (2001).
- C.L. Chuang and P.H. Lee. Unitary Elements in Simple Artinian Rings. Journal of Algrebra. 176 (1995): 449-459.
- Holguín Villa A., Involuções de grupo orientadas em algebras de grupo, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo (2013). São Paulo, Brasil.
- HOLGUÍN V. A. & GÓMEZ E. Y. W., *Cayley unitary elements in group algebra with oriented involution.* Preprint.
- HERSTEIN I. N., *Rings with involution.*, U. Chicago Press - Chicago Lectures in Mathematics, Chicago (1976).

- POLCINO-MILIES C. & SEHGAL S. K., *An Introduction to Group Rings.* Kluwer, Dordrecht (2002).
- RIBEIRO-DA SILVA V., *Involuções e elemnetos Cayley unitários em álgebras de grupos e anéis de matrizes*, Tese de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais (2004), Belo Horizonte, MG-Brasil.
- VIEIRA A. C. & RIBEIRO-DA SILVA V., *Unitary units in group algebras and Fibonacci sequences.* J Algebra Appl. Vol.5, No. **2**. (2006):145-151.

Gracias por su atención